

А. А. КУРДИУМОВ

629.12-0
К 93

ВИБРАЦИЯ КОРАБЛЯ

ИЗДАНИЕ 2-е, ДОПОЛНЕННОЕ
И ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для кораблестроительных вузов
и факультетов*

121426



ГОСУДАРСТВЕННОЕ СОЮЗНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

ЛЕНИНГРАД 1961

В книге излагаются основы теории малых колебаний стержней, применение этой теории к расчету колебаний простейших стержневых систем, расчету вибрации корабля и отдельных конструкций корпуса. Книга написана в соответствии с программой курса «Вибрация корабля» и является учебником по данному курсу.

Главное внимание уделено изложению принципиальных вопросов теории, основным допущениям, установлению пределов применимости получаемых результатов и выбору рациональных методов расчетов. В меньшей степени рассматриваются детальные схемы отдельных расчетов.

Книга может быть также использована инженерами-судостроителями для повышения научно-технической квалификации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	9

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 1. Дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы и его интегрирование	13
§ 2. Влияние сопротивления и закона изменения возмущающей силы на вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	17
§ 3. Вынужденные колебания при перемещении точки подвеса	32
§ 4. Дифференциальные уравнения колебаний системы с n степенями свободы	38
§ 5. Свободные колебания системы с n степенями свободы. Главные координаты, формы главных колебаний и их свойства	50
§ 6. Вынужденные колебания системы с n степенями свободы	58
§ 7. Некоторые исследования колебаний системы с двумя степенями свободы	62
§ 8. Некоторые исследования колебаний системы с n степенями свободы	68
§ 9. Методы вычисления частот и форм свободных колебаний	74
§ 10. Исследование поперечных колебаний балки, рассматриваемой как многомассовая система	94

ГЛАВА II

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

§ 11. Применение принципа возможных перемещений к исследованию колебаний упругих тел	99
§ 12. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию колебаний упругих тел	110
§ 13. Колебание свободно опертого призматического стержня	112
§ 14. Расчет колебаний балок и простейших рам в первом приближении	119
§ 15. Энергетический метод определения частот свободных поперечных колебаний корабля в первом приближении	126

§ 16. Энергетический метод определения частот свободных поперечных колебаний мачты в первом приближении	136
§ 17. Энергетический метод расчета ходовой вибрации корабля . . .	139
§ 18. Энергетический метод расчета ходовой вибрации мачты	143
§ 19. Энергетический метод расчета вибрации плоских перекрытий .	145
§ 20. Энергетический метод расчета вибрации пластин	148

ГЛАВА III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

§ 21. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний призматического стержня и его интегрирование. Интегральное уравнение колебаний	152
§ 22. Определение частот и форм свободных колебаний однопролетных призматических стержней	157
§ 23. Расчет вынужденных колебаний однопролетных призматических стержней без учета сил сопротивления при произвольной нагрузке	171
§ 24. Рассеивание энергии при изгибных колебаниях. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний	177
§ 25. Вынужденные колебания стержней при действии гармонической возмущающей нагрузки и учете сил сопротивления . . .	186
§ 26. Расчет колебаний неразрезных балок, опертых на жесткие опоры	193
§ 27. Расчет колебаний рам с неподвижными узлами	201
§ 28. Расчет колебаний балок и рам с подвижными узлами	208
§ 29. Расчет колебаний простейших перекрытий	212
§ 30. Дифференциальные уравнения поперечных колебаний стержня с учетом сдвига, инерции вращения и внутренних сил сопротивления	218
§ 31. Применение метода последовательных приближений к нахождению форм и частот поперечных колебаний непризматического стержня	222
§ 32. Приближенный способ нахождения высших частот свободных колебаний непризматических стержней	232
§ 33. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямоугольных пластин и его интегрирование	234
§ 34. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний и его интегрирование. Совместные изгибно-крутильные колебания .	240
§ 35. Продольные колебания. Стоячие и распространяющиеся волны. Колебание упругого тела	244

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ВИБРАЦИИ КОРАБЛЯ

§ 36. Возмущающие силы, вызывающие вибрацию корпуса и его отдельных конструкций	251
§ 37. Колебание упругих тел в жидкости. Присоединенные массы воды	256

§ 38. Определение усилий, возникающих при ударе носовой оконечностью о встречную волну	266
§ 39. Расчет свободных и вынужденных колебаний корабля	270
§ 40. Вибрация гибких судов на волнении	276
§ 41. Взаимное влияние общей и местной вибрации. Линейный динамический гаситель вынужденных колебаний	279
§ 42. Конструктивные мероприятия по устранению вибрации готового судна и его частей	285
§ 43. Экспериментальное исследование вибрации	286

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ

§ 44. Нелинейные задачи вибрации	291
§ 45. Нелинейные колебания системы с одной степенью свободы	297
§ 46. Устойчивость периодических колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы	306
§ 47. Динамическая устойчивость стержней	316
Л и т е р а т у р а	319

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второе издание курса «Вибрация корабля» значительно изменено по сравнению с первым [5], что вызвано как методическими соображениями, так и необходимостью включения в курс некоторых новых вопросов.

Переработка учебного плана специальности «Судостроение и судоремонт», выполненная в связи с перестройкой высшей школы, привела к существенному повышению уровня физико-математической подготовки студентов. В частности, увеличен объем курса «Теоретическая механика», в программу которого включена теория малых колебаний.

До настоящего времени теория малых колебаний излагалась в курсе «Вибрация корабля» и занимала до 30—40% лекционного времени. Поэтому перенесение части материала в курс «Теоретическая механика» и некоторое увеличение количества часов на курс вибрации дает возможность развить ряд вопросов, относящихся к колебаниям упругих тел и к собственно вибрации корабля.

В первой главе весьма конспективно изложена теория малых колебаний и приведены решения ряда частных задач, представляющих практический интерес. Материал этой главы на лекциях по вибрации корабля не излагается; в книге он приводится по двум соображениям: во-первых, нужно облегчить студентам возможность освежить в памяти основы теории малых колебаний и, во-вторых, в учебном руководстве целесообразно избегать ссылок в тексте на формулы, приводимые в других книгах.¹

Содержанию курса «Вибрация корабля» посвящены все главы книги, кроме первой.

Во второй главе излагаются энергетические способы расчета вибрации.

Студенты, как правило, недостаточно свободно владеют аппаратом уравнений Лагранжа второго рода, в частности, применительно к задачам колебаний упругих тел. Поэтому было признано полезным показать способы непосредственного при-

¹ Между временем изучения теории малых колебаний и вибрации корабля в учебном плане имеется разрыв в 1—1½ года.

менения принципа возможных перемещений к исследованию колебаний упругих тел.

Такое решение тем более целесообразно, что использованию принципа возможных перемещений, в частности методу Ритца, уделяется значительное внимание в курсе строительной механики корабля (изгиб непризматических балок на упругом основании, устойчивость балок, пластин и оболочек и т. п.); студенты выполняют ряд соответствующих домашних заданий и владеют этим методом достаточно свободно. При непосредственном применении принципа возможных перемещений к исследованию колебаний упругих тел студенту необходимо дополнительно усвоить лишь подсчет суммы работ сил инерции и внутренних сопротивлений на возможном перемещении, что не вызывает затруднений.

После этого показывается применение уравнений Лагранжа второго рода к составлению уравнений для определения обобщенных координат и устанавливается идентичность обоих указанных способов составления уравнений. Применение энергетических методов к расчету вибрации иллюстрируется рядом примеров.

В третьей главе достаточно подробно рассматриваются различные частные задачи колебаний упругих тел, особенно поперечные колебания стержней и простейших стержневых систем. Глава посвящена рассмотрению решений, получаемых путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и частных производных. Содержание этой главы несколько шире того, что обычно излагается студентам специальности «Судостроение и судоремонт». Однако дополнительный материал полезен для любознательных студентов данной специальности и, кроме того, необходим для студентов специализации «Прочность корабельных конструкций».

Четвертая глава посвящена ряду вопросов, относящихся собственно к вибрации корабля. Многие из этих вопросов рассматриваются с качественной стороны, так как их более полное рассмотрение либо далеко выходит за рамки учебного руководства, либо данные вопросы недостаточно исследованы.

В пятой главе кратко рассматриваются нелинейные колебания упругих тел, устойчивость установившихся нелинейных колебаний и динамическая устойчивость стержней.

Для решения задачи о нелинейных установившихся колебаниях автор был вынужден ограничиться первым приближением метода Бубнова-Галеркина, так как рассмотрение высших приближений чрезмерно увеличило бы объем книги. Метод разложения по степеням малого параметра не излагается, так как интересные нас задачи далеки от квазилинейных.

В книге принято расположение материала по методам, а не по задачам, как это обычно встречается в сочинениях по строи-

тельной механике корабля. Принятое нами расположение материала способствует лучшему усвоению методов, так как последние сразу иллюстрируются рядом примеров. Автор считает, что при изложении основ любой дисциплины должно быть обращено особое внимание на усвоение учащимися основных методов. В производственной и справочной литературе предпочтение должно быть, по-видимому, отдано расположению материала по задачам.

В книге есть повторения, так как некоторые задачи решаются различными методами. Автор считает, что сравнение решений одних и тех же задач различными методами способствует лучшему их уяснению.

Принятое в книге расположение материала позволяет использовать ее в качестве учебного руководства для различных по объему курсов вибрации корабля. Так, при небольшом числе часов на вечерних отделениях курс вибрации может быть построен на содержании II и IV глав.

Лекционное изложение курса вибрации корабля сопровождается практическими и лабораторными занятиями, а также выполнением студентами расчетно-графических работ. Поэтому автор не считал целесообразным загромождать книгу приведением подробных схем расчетов и численных примеров — такой материал рассеивает внимание студентов, отвлекая их от существа рассматриваемых вопросов.

Приводимый в конце список литературы не претендует на полноту; в него включены лишь те основные сочинения, которые либо представляют исторический интерес для вибрации корабля, либо могут быть использованы студентами в качестве дополнительной литературы. В тексте имеются ссылки на другую, в частности, журнальную литературу, причем автор ограничился ссылкой лишь на те источники, которые практически доступны читателю и содержат дополнительный материал.

ВВЕДЕНИЕ

Трудно в настоящее время перечислить все те вопросы науки и техники, где мы не сталкивались бы с колебательными процессами, а следовательно, и с разработанным для их описания математическим аппаратом — теорией колебаний.

Различные вопросы акустики; теория музыкальных инструментов; радиотехника; явления в электрических цепях при их замыкании или размыкании; точное взвешивание; теория автоматического регулирования; различные измерительные приборы; флаттер крыла и оперения самолета (возбуждение значительных колебаний в потоке воздуха); колебания линий электропередач и цепных мостов при сильном ветре; проектирование подвесок автомобилей, железнодорожных вагонов и т. п.; качка корабля; колебание резцов токарных станков; расчет прочности конструкций при действии на них быстро изменяющихся во времени нагрузок; амортизация и виброизоляция — вот произвольный и далеко не полный перечень вопросов, где мы сталкиваемся с колебательными процессами.

В некоторых из перечисленных областей, например в радиотехнике, музыкальных инструментах, теории автоматического регулирования и т. п., колебательный процесс служит основой рассматриваемого явления, и создание соответствующего прибора или устройства невозможно без активного использования этого процесса.

Однако во многих случаях колебательный процесс нежелателен и задачей правильного проектирования соответствующей конструкции является предупреждение возможности развития колебательного процесса. Например, нельзя допускать флаттера, так как это равносильно разрушению самолета; качка корабля нежелательна, так как ухудшаются его эксплуатационные характеристики и для ее уменьшения применяют успокоители качки; колебания резцов ухудшают чистоту обработки и приводят к их поломке; поэтому заранее нужно выбрать такие соотношения между элементами резца и режимом резания, чтобы избежать возникновения значительных колебаний; при установке механизма нужно заранее так выбрать элементы фундамента, чтобы избежать появления недопустимых колебаний, и т. п.

Наконец, в задачах, где приходится рассчитывать конструкции на действие быстро изменяющихся во времени нагрузок, должны быть разработаны соответствующие способы расчета. Это необходимо потому, что сопоставление прочности конструкций при статическом и динамическом действии нагрузок приводит к различным выводам.

Что же является содержанием дисциплины «Вибрация корабля» и какой круг вопросов она рассматривает?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо прежде всего выяснить, какие причины могут вызвать колебательные процессы в корпусе корабля в целом и в его отдельных конструкциях.

Основным типом движителя на современных судах является гребной винт, при вращении которого возникает периодически изменяющееся поле давлений. Это поле давлений непосредственно вызывает вибрацию обшивки и набора в районе расположения гребных винтов, общую вибрацию корабля, т. е. вибрацию корпуса как пустотелой балки, и, наконец, вибрацию отдельных конструкций корпуса, вызываемую периодическими перемещениями их опор при общей вибрации.

Периодические нагрузки на корпус могут появиться и вследствие наличия неуравновешенных сил инерции работающих механизмов, неточностей при сборке валопроводов и т. п.

Таким образом, одной из основных задач курса вибрации корабля является изучение и расчет периодических колебаний — так называемых установившихся колебаний. Нас интересует, во-первых, возможность уменьшения установившейся вибрации, что может быть достигнуто уменьшением возмущающих сил, в некоторых случаях удалением конструкции от резонанса или с помощью специальных устройств — гасителей колебаний, и, во-вторых, расчетное определение установившейся вибрации при заданных возмущающих силах, поскольку последние далеко не всегда могут быть устранены.

В процессе эксплуатации корпуса на него в целом и на его отдельные части могут оказать влияние кратковременно действующие нагрузки, вызывающие так называемые устанавливающиеся колебания, затухающие с течением времени вследствие неизбежных сопротивлений. Примерами таких колебаний являются колебания набора и обшивки надводного борта от удара волн, общая вибрация корпуса при ударе носовой оконечностью о встречную волну и т. п. Поэтому большое внимание в курсе вибрации должно быть уделено и расчету устанавливающихся колебаний.

Сложность и громоздкость полного расчета вибрации, а также недостаточная еще изученность ряда вопросов приводит к тому, что мы не имеем возможности произвести исчерпывающего исследования вибрации в процессе проектирования судна. Поэтому иногда приходится сталкиваться с повышенной

вибрацией на построенных судах и возникает вопрос о способах ее уменьшения.

Для правильного решения этого вопроса нужно выяснить причины, вызывающие повышенную вибрацию, произвести эксперименты для установления форм и частот колебаний отдельных конструкций или всего корпуса в целом и разработать мероприятия для уменьшения вибрации.

Роль и значение экспериментальных исследований для разработки исчерпывающих методов расчета вибрации, установления ряда исходных данных (например, присоединенных масс воды, закона сопротивлений и величины коэффициентов сопротивления и т. д.) настолько очевидны, что не требуют пояснений.

Мы не имеем возможности подробно останавливаться на вопросах экспериментального исследования вибрации, так как это потребовало бы приведения описаний ряда приборов, изложения методики экспериментов и обработки экспериментальных данных, т. е. значительного увеличения объема книги. Поэтому мы останавливаемся лишь на некоторых принципиальных вопросах экспериментальных исследований и рассматриваем некоторые простейшие мероприятия по борьбе с вибрацией на построенном судне.

Отмеченным выше и предопределяется основное содержание курса «Вибрация корабля».

Не пытаясь дать исторический обзор развития учения о вибрации корабля и отсылая читателя к специальным сочинениям,¹ мы дадим краткую характеристику отдельных этапов развития этой дисциплины.

Необходимость рассмотрения вопросов вибрации корабля возникла в последней четверти прошлого столетия в связи с появлением достаточно быстроходных паровых машин и имевшими место случаями значительной вибрации, иногда приводившими к серьезным авариям. Однако первые теоретические работы по вибрации корабля появились лишь в начале нашего столетия. В 1907 г. А. Н. Крылов впервые в мире прочел на кораблестроительном факультете Петербургского политехнического института систематический курс вибрации корабля. Сочинение [4] является дальнейшим развитием этого курса.

В результате работ ряда исследователей, среди которых почетное место занимали отечественные ученые-кораблестроители, к началу 40-х годов были разработаны некоторые основные вопросы общей вибрации корабля (методика определения низ-

¹ См. по этому вопросу [7] «Очерк развития и современное состояние вопроса о вибрации корабля», а также статью Н. Н. Бабаева «Современное состояние и развитие вопроса о вибрации судов», «Судостроение», № 3, 1956.

ших частот свободных колебаний корпуса, методика учета присоединенных масс воды при расчете изгибных колебаний корпуса), а также решены некоторые задачи вибрации отдельных судовых конструкций.

Начиная с середины 40-х годов и особенно в последнее время появилось много исследований по различным вопросам вибрации сооружений и, в частности, вибрации корабля. Значительное развитие получили исследования по учету внутренних сопротивлений, без чего невозможен правильный расчет установившихся колебаний; успешно развиваются исследования по определению возмущающих сил, вызывающих вибрацию корпуса; начато рассмотрение совместных колебаний корпуса и его отдельных конструкций, в частности, днищевых перекрытий; начато изучение крутильных и изгибно-крутильных колебаний корпуса; значительное развитие получили экспериментальные исследования вибрации; разрабатываются вопросы использования гасителей колебаний в судовых условиях и ряд других.

Новые задачи возникают в связи с необходимостью расчета высокочастотных колебаний корпуса, так как при этом существенную роль играет местная вибрация судовых конструкций, сдвиг и инерция вращения поперечных сечений корпуса; возникает необходимость учета нелинейности колебаний, особенно в районе резонанса, так как ограниченность амплитуды колебаний и некоторые другие явления не всегда могут быть объяснены одним рассеиванием энергии; неясные вопросы возникают в связи с необходимостью расшифровки данных эксперимента и т. д.

Многие из отмеченных выше вопросов найдут отражение в книге даже и в том случае, если они еще недостаточно разработаны.

Автор надеется, что включение в книгу таких вопросов может заинтересовать читателей и побудить их к самостоятельным исследованиям в области вибрации корабля.

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотрим простейшую систему (рис. 1), состоящую из массы m , подвешенной на пружине жесткостью c к неподвижному основанию, на которую действует возмущающая сила и сила сопротивления.

Обозначим через q отклонение массы от положения статического равновесия, в котором сила веса уравнивается реакцией пружины, а возмущающая сила предполагается равной нулю. Будем впредь именовать это отклонение координатой; положительное направление q показано на рис. 1.

Тогда в отклоненном положении на массу m действуют:

1) дополнительная реакция пружины cq , направленная в сторону, противоположную перемещению; 2) сила сопротивления $\beta \dot{q}$, направленная в сторону, противоположную направлению скорости (мы ограничиваемся рассмотрением сопротивления, пропорционального первой степени скорости); 3) сила инерции $m\ddot{q}$; 4) возмущающая сила $Q(t)$.

По принципу Даламбера

$$-m\ddot{q} - \beta\dot{q} - cq + Q(t) = 0,$$

или

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \lambda^2 q = \frac{1}{m} Q(t), \quad (1)$$

где введены обозначения:

$$2\mu = \frac{\beta}{m}, \quad (2)$$

$$\lambda^2 = \frac{c}{m}. \quad (3)$$

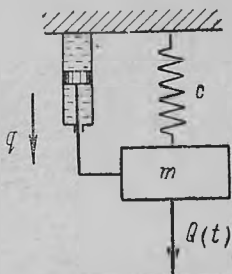


Рис. 1.

Дифференциальное уравнение (1) и является дифференциальным уравнением колебания системы с одной степенью свободы; уравнением такого же типа описываются малые колебания математического маятника, крутильные колебания диска на упругой связи и т. п.

Производя подстановку Эйлера

$$q = Ae^{st}$$

в уравнение (1) при $Q(t) \equiv 0$, получим характеристическое уравнение

$$s^2 + 2\mu s + \lambda^2 = 0,$$

имеющее корни

$$s = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \lambda^2},$$

так что общий интеграл дифференциального уравнения (1) может быть записан в виде

$$q = e^{-\mu t} (A_1 \cos \lambda' t + A_2 \sin \lambda' t) + q_{\text{ч.р}}, \quad (4)$$

где

$$\lambda' = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}; \quad (5)$$

$q_{\text{ч.р}}$ — частное решение, соответствующее правой части уравнения (1), на определении которого мы остановимся ниже.

Общий интеграл записывается в виде выражения (4), если λ' вещественно, т. е. соблюдается неравенство

$$\lambda^2 - \mu^2 > 0, \quad (6)$$

что имеет место во всех интересующих нас задачах с малыми сопротивлениями. Если условие (6) не выполняется, то общий интеграл однородного уравнения может быть выражен через показательные функции времени с отрицательным показателем степени и ему будет соответствовать так называемое аperiodическое движение.

Произвольные постоянные в выражении (4) определяются из начальных условий при $t=0$:

$$q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0, \quad (7)$$

где

q_0 — начальное отклонение от положения статического равновесия;

$\dot{q}_0$ — начальная скорость.

Рассматривая сначала свободные колебания, т. е. полагая в выражении (4) $q_{\text{ч.р}} = 0$, что имеет место при $Q(t) = 0$, и опре-

делая постоянные интегрирования A_1 и A_2 из начальных условий (7), получим

$$q = e^{-\mu t} \left(q_0 \cos \lambda' t + \frac{\dot{q}_0 + \mu q_0}{\lambda'} \sin \lambda' t \right), \quad (8)$$

или

$$q = A e^{-\mu t} \cos (\lambda' t + \varepsilon), \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + \mu q_0}{\lambda'} \right)^2}, \\ \cos \varepsilon &= \frac{q_0}{A}, \quad \sin \varepsilon = - \frac{\dot{q}_0 + \mu q_0}{A \lambda'}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Аргумент $\lambda' t + \varepsilon$ называется фазой колебания, а ε — начальной фазой.

Величина λ' называется круговой частотой колебаний при наличии сопротивления, а величина

$$T' = \frac{2\pi}{\lambda'} \quad (11)$$

— периодом свободных колебаний при наличии сопротивления.

Дифференцируя выражение (9), получим

$$\dot{q} = -A e^{-\mu t} [\lambda' \sin (\lambda' t + \varepsilon) + \mu \cos (\lambda' t + \varepsilon)]$$

или, принимая во внимание (5),

$$\dot{q} = -A \lambda e^{-\mu t} \cos (\lambda' t + \varepsilon + \delta), \quad (12)$$

где

$$\cos \delta = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \sin \delta = - \frac{\lambda'}{\lambda}, \quad (13)$$

а λ определяется формулой (3).

Если увеличить время t на $\frac{1}{2} T' = \frac{\pi}{\lambda'}$, то входящие в выражения (9) и (12) гармонические функции времени изменят знак, не меняя своей величины, так как аргумент увеличится при этом на π .

Отсюда следует, что система проходит положение равновесия $q=0$ через каждые полпериода и в течение полупериода переходит из одного крайнего положения в другое.

При отсутствии сопротивления $\mu=0$, круговая частота равна λ , а период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (14)$$

В технической литературе часто пользуются частотой f , представляющей собой число колебаний в секунду, т. е.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (15)$$

Частота f измеряется в единицах, называемых герцами (гц). Круговая частота представляет число колебаний в 2π секунд.

В дальнейшем, если это не будет оговорено, мы будем под частотой подразумевать круговую частоту.

Модуль отношения двух последовательных значений координаты q , соответствующих разности времени $\frac{1}{2} T'$, называется декрементом затухания и определяется в соответствии с выражением (9) зависимостью ¹

$$\eta = \left| \frac{q(t)}{q\left(t + \frac{1}{2} T'\right)} \right| = e^{\frac{\mu T'}{2}}.$$

Натуральный логарифм этого отношения

$$\ln \eta = \frac{\mu T'}{2} = \frac{\pi \mu}{V \lambda^2 - \mu^2} \quad (16)$$

называется логарифмическим декрементом затухания.

Переписав выражение (5) в виде

$$\lambda = \lambda' \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\lambda'}\right)^2},$$

нетрудно на основании выражения (16) получить

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{T'}{T} = \sqrt{1 + \left(\frac{\ln \eta}{\pi}\right)^2}. \quad (17)$$

Это дает возможность наглядно оценить влияние сопротивления на период свободных колебаний.

Полагая $\eta=2$, что соответствует значительному затуханию, так как каждый последующий размах будет в два раза меньше предыдущего, получим

$$T' : T = 1,024.$$

Отсюда можно сделать вывод: даже значительное затухание практически не сказывается на периоде свободных колебаний.

¹ Иногда декремент затухания определяется по отношению значений координаты q , соответствующих разности времени, равной периоду свободных колебаний. Это следует иметь в виду при чтении литературы.

Поэтому при определении частот свободных колебаний можно с сопротивлением не считаться.

Обратимся теперь к нахождению частного интеграла. Найдем сначала перемещение массы m , на которую в начальный момент времени $t=0$ подействовал импульс I , вызвавший начальную скорость $\dot{q}_0 = \frac{I}{m}$, тогда как начальное значение перемещения $q_0=0$.

В этом случае согласно выражению (8)

$$q = \frac{I}{m\lambda'} e^{-\mu t} \sin \lambda' t. \quad (18)$$

Если бы импульс подействовал не при $t=0$, а при $t=\tau$, то при $t \geq \tau$

$$q = \frac{I}{m\lambda'} e^{-\mu(t-\tau)} \sin \lambda' (t-\tau), \quad (19)$$

а при $t < \tau$ $q=0$.

Любую силу $Q(t)$, действующую на массу m , можно представить в виде последовательности импульсов $dI = Q(\tau) d\tau$ (рис. 2). Складывая действие элементарных импульсов, получим

$$q_{\text{ч. п}} = \frac{1}{m\lambda'} \int_0^t Q(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \sin \lambda' (t-\tau) d\tau. \quad (20)$$

По смыслу вывода выражение (20) соответствует нулевым начальным условиям, в чем можно также убедиться непосредственным вычислением. Если начальные условия не нулевые, то к выражению (20) нужно прибавить выражение (8) или (9). В случае отсутствия сил сопротивления $\mu=0$ и выражение (20) приобретает вид

$$q_{\text{ч. п}} = \frac{1}{m\lambda} \int_0^t Q(\tau) \sin \lambda' (t-\tau) d\tau. \quad (21)$$

При простом аналитическом выражении для силы $Q(t)$ частное решение $q_{\text{ч. п}}$ иногда бывает проще найти непосредственно, чем пользоваться выражениями (20) или (21).

§ 2. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые частные примеры, получим расчетные формулы и произведем исследования, которые будут полезны в дальнейшем при оценке влияния различных факторов на колебания.

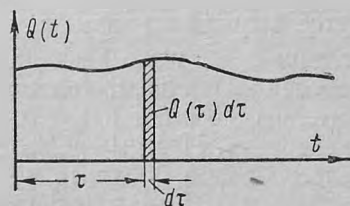


Рис. 2.

Пример 1. Исследовать влияние сопротивления на вынужденные колебания системы при действии гармонической возмущающей силы

$$Q(t) = Q \cos(\omega t + \delta), \quad (22)$$

где Q , ω и δ соответственно амплитуда, круговая частота и начальная фаза возмущающей силы.

При установившемся режиме вынужденных колебаний развернутое выражение для q не должно содержать членов с множителями $e^{-\mu t}$, учитывающих затухающие со временем свободные колебания системы, так как при увеличении времени t этот множитель стремится к нулю и соответствующими членами можно пренебречь. Поэтому решение уравнения (1) при действии силы (22) целесообразно получить непосредственно, а не пользоваться выражением (20), содержащим члены с указанными множителями.

Полагая для удобства дальнейших преобразований

$$\mu = \gamma\lambda, \quad (23)$$

$$q_{\text{ст}} = \frac{Q}{c}, \quad (24)$$

где $q_{\text{ст}}$ — отклонение массы m от положения равновесия при статическом действии силы Q , и принимая во внимание зависимости (3), (22), (23) и (24), преобразуем дифференциальное уравнение (1):

$$\ddot{q} + 2\gamma\lambda\dot{q} + \lambda^2 q = \lambda^2 q_{\text{ст}} \cos(\omega t + \delta). \quad (25)$$

Решение уравнения (25) можно было бы представить в виде

$$q = B_1 \cos(\omega t + \delta) + B_2 \sin(\omega t + \delta),$$

но мы воспользуемся приемом, применяемым в последнее время в задачах об установившихся колебаниях при наличии сопротивления.

Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{ai} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

согласно которой $\cos \alpha$ является действительной частью комплексной величины e^{ai} ¹.

$$\cos \alpha = \operatorname{Re} e^{ai}.$$

Поэтому, если мы перепишем уравнение (25) в виде

$$\ddot{\tilde{q}} + 2\gamma\lambda\dot{\tilde{q}} + \lambda^2 \tilde{q} = \lambda^2 q_{\text{ст}} e^{i(\omega t + \delta)} \quad (26)$$

и найдем его решение, то действительная часть этого решения и будет искомым.

¹ Применяемый в математике символ Re является начальным слогом французского слова *real* — действительный.

Полагая

$$q = B e^{i(\omega t + \delta)}, \quad (27)$$

после подстановки выражения (27) в левую часть уравнения (26) и сравнения коэффициентов, получим

$$B = q_{\text{ст}} \frac{1}{1 - z^2 + 2\gamma z i},$$

где введено обозначение

$$z = \frac{\omega}{\lambda}. \quad (28)$$

Интересующее нас решение определится по формуле

$$\begin{aligned} q &= q_{\text{ст}} \operatorname{Re} \frac{e^{i(\omega t + \delta)}}{1 - z^2 + 2\gamma z i} = \\ &= \frac{q_{\text{ст}}}{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2} [(1 - z^2) \cos(\omega t + \delta) + 2\gamma z \sin(\omega t + \delta)]. \end{aligned}$$

Полученное решение целесообразно преобразовать к виду

$$q = \alpha q_{\text{ст}} \cos(\omega t + \delta - \varepsilon), \quad (29)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2}} \quad (30)$$

есть так называемый коэффициент динамичности, являющийся отношением амплитуды вынужденного колебания к статическому отклонению $q_{\text{ст}}$,

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon &= \alpha (1 - z^2), \\ \sin \varepsilon &= \alpha 2\gamma z; \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

— запаздывание по фазе вынужденных колебаний по отношению к возмущающей силе.

Коэффициент динамичности α , как это видно из формулы (30) при $\gamma \neq 0$, т. е. в случае наличия сопротивления, остается конечным при любом значении z .

При увеличении z , т. е. при увеличении частоты возмущающей силы, коэффициент динамичности стремится к нулю. Физически это должно быть понятно, так как при очень быстром изменении знака силы последняя не может сколь-нибудь заметно раскачать массу.

При $z = 0$, т. е. при бесконечно большом периоде возмущающей силы, когда она возрастает бесконечно медленно, коэффициент динамичности равен единице, как и должно быть при статическом приложении силы.

Если сопротивление отсутствует, т. е. $\gamma=0$, то при совпадении частот свободных колебаний и возмущающей силы, коэффициент динамичности обращается в бесконечность.

Этот результат не следует понимать в том смысле, что амплитуда колебаний внезапно обращается в бесконечность. В рассматриваемом случае при $\omega=\lambda$ и $\gamma=0$ частное решение уравнения (25) имеет вид

$$q_{ч.р} = \frac{1}{2} q_{ст} \lambda t \sin(\lambda t + \delta),$$

откуда видно, что амплитуда колебаний возрастает постепенно. Практически амплитуда оказывается конечной, так как при значительных перемещениях нарушается линейная связь между реакцией упругой связи и перемещением, но все же величины перемещений иногда могут достигнуть значений, опасных для прочности упругой связи.

Причина возрастания колебаний при отсутствии сопротивления и действии гармонической возмущающей силы, частота которой равна частоте свободных колебаний системы, может быть пояснена следующим образом.

При свободных колебаниях реакция упругой связи в каждый момент времени уравнивает силу инерции массы m и амплитуда колебаний остается неизменной. Если же к массе m будет приложена гармоническая возмущающая сила, частота которой равна частоте свободных колебаний, то равновесие упомянутых выше сил будет нарушено и это приведет к возрастанию амплитуды колебаний.

Для нахождения максимума коэффициента динамичности (30) при изменении частоты возмущающей силы нужно найти минимум подкоренного выражения

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2.$$

Приравнявая нулю производную $\frac{dy}{dz}$, найдем, что коэффициент динамичности достигает максимума при значении z , определяемом выражением

$$z_m = \sqrt{1 - 2\gamma^2},$$

и его максимальное значение равно

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (32)$$

При отсутствии сопротивления $z_m = 1$, при наличии сопротивления $z_m < 1$, т. е. максимум коэффициента динамичности смещается к началу координат.

Графики коэффициента динамичности для различных значений γ приведены на рис. 3.

Иногда под резонансом понимается совпадение частоты возмущающей силы и частоты свободных колебаний при отсутствии сопротивления, т. е. случай, когда $z=1$. Будем называть этот резонанс кажущимся. Коэффициент динамичности при кажущемся резонансе определится согласно выражению (30) по формуле

$$\alpha(1) = \frac{1}{2\gamma}. \quad (33)$$

При кажущемся резонансе запаздывание по фазе, как это видно из формул (31), равно

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \pi.$$

Установим связь между коэффициентом γ и декрементом затухания η , для чего воспользуемся формулами (23) и (16), откуда следует

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 + \left(\frac{\pi}{\ln \eta} \right)^2. \quad (34)$$

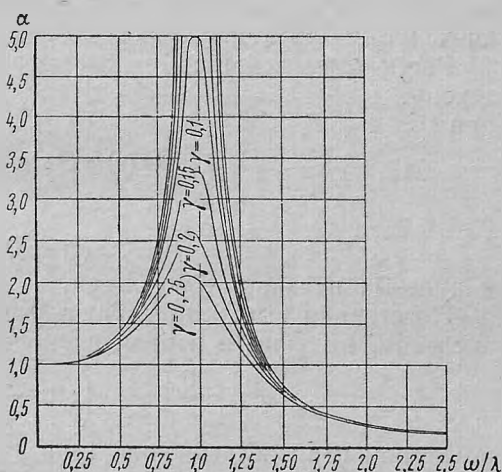


Рис. 3.

На основании формулы (34) составлена табл. 1 значений γ в функции от η .

Таблица 1

η	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
γ	0	0,058	0,106	0,148	0,187	0,215

Если взять $\eta=1,2$, то через 5 периодов амплитуда свободных колебаний уменьшится в $(1,2)^{10} \approx 6,2$ раза, т. е. практически затухнет. Поэтому можно считать, что свободные колебания затухают по истечении 5—10 периодов с начала движения, так как значения коэффициента γ для конструкций обычно не бывают ниже 0,05.

При таких значениях коэффициента γ различие между $\alpha_{\max}$ и $\alpha(1)$, определяемых формулами (32) и (33), оказывается менее 1%, т. е. лежит в пределах точности вычислений. Поэтому для опре-

деления коэффициента динамичности при резонансе можно пользоваться более простой формулой (33).

Пример 2. Исследовать вопрос о возможности замены при определении наибольшего отклонения кратковременно действующей нагрузки ее импульсом.

При решении поставленного вопроса мы не будем учитывать сопротивления, так как в встречающихся на практике задачах декремент затухания мало отличается от единицы и наличие сопротивления может уменьшить наибольшее отклонение системы лишь на 10—15%.

Рассмотрим действие на систему нагрузки, изменяющейся по закону:

при $0 \leq t \leq T_1$

$$Q(t) = Q \sin \frac{\pi t}{T_1}, \quad (35)$$

при $t \geq T_1$

$$Q(t) \equiv 0$$

и нулевых начальных условиях.

Подставляя выражение (35) в формулу (21) и выполняя вычисления, получим в первом периоде движения (при $t \leq T_1$)

$$q^{(1)} = \frac{Q}{c} \frac{1}{1 - \kappa^2} \left(\sin \frac{\pi t}{T_1} - \kappa \sin \frac{\pi t}{\kappa T_1} \right), \quad (36)$$

во втором периоде движения (при $t \geq T_1$)

$$q^{(2)} = \frac{Q}{c} \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\kappa} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2\kappa} \right), \quad (37)$$

где

$$\kappa = \frac{T}{2T_1}, \quad (38)$$

T — период свободных колебаний.

Выражения (36) и (37) при $\kappa = 1$ приводят к неопределенности, раскрывая которую можно получить

$$q^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{Q}{c} \left(\sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (39)$$

$$q^{(2)} = -\frac{\pi}{2} \frac{Q}{c} \cos \frac{2\pi t}{T}. \quad (40)$$

Амплитуда колебаний во втором периоде определится выражением

$$q_a^{(2)} = \frac{Q}{c} \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\kappa}, \quad (41)$$

а при $\kappa = 1$

$$q_a^{(2)} = \frac{\pi}{2} \frac{Q}{c}. \quad (42)$$

Для нахождения наибольшего значения перемещения в первом периоде надо приравнять нулю первую производную выражения (36)

$$\cos \frac{\pi t}{T_1} - \cos \frac{\pi t}{\kappa T_1} = 0, \quad (43)$$

найти из полученного уравнения корень $t \leq T_1$ и подставить найденное значение в выражение (36).

Если $\kappa > 1$, т. е. время существования T_1 нагрузки меньше половины периода свободных колебаний, то уравнение (43) не имеет корня $t < T_1$, выражение (36) монотонно возрастает и достигает наибольшего значения при $t = T_1$

$$q_{\max}^{(1)} = \frac{Q}{c} \frac{\kappa}{\kappa^2 - 1} \sin \frac{\pi}{\kappa} = \frac{Q}{c} \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\kappa} \sin \frac{\pi}{2\kappa}. \quad (44)$$

Сравнивая выражения (44) и (41) видим, что в рассматриваемом случае $\kappa > 1$ отклонение системы во втором периоде движения больше, чем в первом.

Для решения поставленной задачи найдем импульс нагрузки

$$I = \int_0^{T_1} Q \sin \frac{\pi t}{T_1} dt = 2 \frac{QT_1}{\pi}.$$

Выражение (41), принимая во внимание формулы (38), (14) и (3), может быть преобразовано к виду

$$q_a^{(2)} = \frac{I}{m\lambda} \beta_1,$$

где

$$\beta_1 = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\kappa}.$$

Значения коэффициента β_1 , учитывающего влияние конечного времени действия нагрузки, приведены в табл. 2, на основании которой при $T_1 < 0,3T$ можно с достаточной точностью заменять кратковременную нагрузку ее импульсом. В качественном отношении аналогичный вывод можно сделать и для других законов изменения кратковременной нагрузки.

Таблица 2

$T_1 : T$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
β_1	1	0,984	0,963	0,919	0,860	0,784

Остановимся на рассмотрении случая $\kappa < 1$, так как он представляет практический интерес, и найдем величину наибольшего перемещения в первом периоде при $t < T_1$.

Корни уравнения (43) определяются очевидным соотношением

$$\frac{\pi t}{T_1} = 2n\pi \pm \frac{\pi t}{\kappa T_1}$$

или

$$t = 2n \frac{\kappa}{\kappa \pm 1} T_1, \quad (45)$$

где n — целое число.

По смыслу $t \leq T_1$ и на основании предыдущего равенства

$$2n \frac{\kappa}{\kappa \pm 1} \leq 1,$$

откуда следует

$$(2n-1)\kappa \leq \pm 1,$$

а так как $2n-1 > 0$, то это неравенство может иметь место лишь при сохранении в правой части знака плюс. Поэтому

$$t = \frac{2n\kappa}{\kappa + 1} T_1,$$

где n — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$n \leq \frac{1 + \kappa}{2\kappa}. \quad (46)$$

Если $\frac{1}{3} < \kappa < 1$, то неравенству (46) удовлетворяет лишь $n=1$; если $\kappa < \frac{1}{3}$, то нужно подбором найти значение n , при котором отклонение оказывается наибольшим.

Подставляя выражение (45) в выражение (36) и производя преобразования, получим

$$q_{\max}^{(1)} = \frac{Q}{c} \frac{1}{1 - \kappa} \left(\sin \frac{2n\pi}{\kappa + 1} \right)_{\max}, \quad (47)$$

где n удовлетворяет условию (46).

В рассматриваемом случае $\kappa < 1$ нельзя заранее сказать, в каком периоде перемещение будет наибольшим; установить это можно лишь расчетом.

Пример 3. Найти величину коэффициента динамичности при действии на систему силы:

при $t \leq T_0$

$$\left. \begin{aligned} Q(t) &= \frac{t}{T_0} Q, \\ Q(t) &\equiv Q. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

при $t \geq T_0$

Воспользовавшись выражением (21), т. е. пренебрегая влиянием сопротивления, получим:
для первого периода движения

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \frac{Q}{m\lambda T_0} \int_0^t \tau \sin \lambda (t - \tau) d\tau = \\ &= q_{\text{ст}} \left(\frac{t}{T_0} - \frac{1}{\lambda T_0} \sin \lambda t \right), \end{aligned} \quad (49)$$

для второго периода движения

$$\begin{aligned} q^{(2)} &= \frac{Q}{m\lambda T_0} \int_0^{T_0} \tau \sin \lambda (t - \tau) d\tau + \frac{Q}{m\lambda} \int_{T_0}^t \sin \lambda (t - \tau) d\tau = \\ &= q_{\text{ст}} \left[1 + \frac{2}{\lambda T_0} \sin \frac{\lambda T_0}{2} \cos \lambda \left(t - \frac{1}{2} T_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (50)$$

где $q_{\text{ст}}$ определяются формулой (24).

Так как производная выражения (49) всегда больше нуля, то перемещение $q^{(1)}$ монотонно возрастает и достигает наибольшего значения при $t = T_0$. Коэффициент динамичности в первом периоде определится выражением

$$\alpha_1 = \frac{q_{\text{max}}^{(1)}}{q_{\text{ст}}} = 1 - \frac{1}{\lambda T_0} \sin \lambda T_0. \quad (51)$$

Коэффициент динамичности во втором периоде определится по формуле

$$\alpha_2 = \frac{\tau_{\text{max}}^{(2)}}{q_{\text{ст}}} = 1 + \frac{2}{\lambda T_0} \left| \sin \frac{\lambda T_0}{2} \right|. \quad (52)$$

Отношение коэффициентов динамичности удовлетворяет условию

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1 - \frac{2}{\lambda T_0} \sin \frac{\lambda T_0}{2} \cos \frac{\lambda T_0}{2}}{1 + \frac{2}{\lambda T_0} \left| \sin \frac{\lambda T_0}{2} \right|} \leq 1,$$

т. е. коэффициент динамичности в первом периоде движения не может быть больше, чем во втором, и нам достаточно исследовать величину α_2 .

На рис. 4 приведен график коэффициента динамичности, составленный по формуле (52). Расчет обычно производится по огибающей, показанной на чертеже пунктиром.

Из графика видно, что уже при $T_0 : T > 3$ коэффициент динамичности $\alpha_2 < 1,10$, так что при более медленном возрастании силы ее можно считать прикладываемой статически.

При внезапном приложении силы ($T_0 = 0$) коэффициент динамичности достигает своего наибольшего значения, равного двум.

Пример 4. Найти наибольшее усилие в пружине при наличии зазора между массой и пружиной (рис. 5), если в начальный момент времени на массу m действовала сила $Q(t)$; предполагается, что массы m и m_1

могут перемещаться по горизонтальной плоскости без сопротивления.

До соприкосновения с пружиной дифференциальное уравнение движения массы m будет

$$m\ddot{q}_0 = Q(t).$$

Рис. 4.

Интегрируя это уравнение при нулевых начальных условиях, можно найти время t_1 , необходимое для выборки зазора, и скорость $\dot{q}_0$ массы m в момент соприкосновения ее с пружиной.

Будем впредь обозначать через q перемещение массы m после выборки зазора, через q_1 — перемещение массы m_1 . Тогда дифференциальные уравнения движения масс m и m_1 запишутся в виде

$$m\ddot{q} = -c(q - q_1) + Q(t),$$

$$m_1\ddot{q}_1 = c(q - q_1),$$

где c — жесткость пружины.

Умножая второе уравнение на

$$a = \frac{m}{m_1}$$

и вычитая из первого, получим

$$m\ddot{\delta} = -c(1 + a)\delta + Q(t), \quad (53)$$

где

$$\delta = q - q_1$$

есть обжатие пружины.

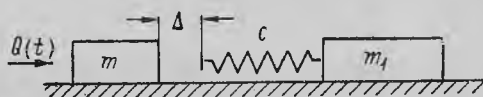


Рис. 5.

Уравнение (53) должно быть проинтегрировано при начальных условиях: при $t=t_1$

$$\delta=0, \quad \dot{\delta}=\dot{q}-\dot{q}_1=\dot{q}_0(t_1).$$

Используя выражения (8) и (21) и замечая, что начальный момент времени соответствует $t=t_1$, нетрудно получить

$$\delta = \frac{\dot{q}_0(t_1)}{\lambda_1} \sin \lambda_1(t-t_1) + \frac{1}{m\lambda_1} \int_{t_1}^t Q(t) \sin \lambda_1(t-\tau) d\tau, \quad (54)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c(1+a)}{m}}. \quad (55)$$

Если при некотором значении времени t окажется $\delta < 0$, то это будет свидетельствовать о том, что масса m отделилась от пружины, и пользоваться выражением (54) нельзя.

Самым простым является случай, когда сила прекратила свое действие до выборки зазора. В этом случае второй член в выражении (54) равен нулю и наибольшая величина усилия в пружине определится по формуле

$$R_{\max} = c\delta_{\max} = \frac{\dot{q}_0(t_1)c}{\lambda_1} = \dot{q}_0(t_1) \sqrt{\frac{mc}{1+a}}. \quad (56)$$

Если масса m_1 неподвижна, то ее следует считать бесконечно большой и полагать в выражении (56) $a=0$. Отсюда видно, что подвижность массы m_1 уменьшает величину наибольшего усилия в пружине, так как $a > 0$.

При написании дифференциальных уравнений движения предполагалось, что удар происходит центрально. Если удар происходит нецентрально, то в расчет должна быть введена так называемая приведенная масса, определяемая на основании следующих соображений.

Если на тело подействовала нецентрально приложенная сила P (рис. 6) и линия ее действия проходит на расстоянии a от центра инерции G , то ускорение в поступательном движении центра инерции определится по формуле

$$w_0 = \frac{P}{M},$$

где M —масса тела, а ускорение во вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр инерции,—по формуле

$$\ddot{\varphi} = \frac{Pa}{Mr^2},$$

где r —радиус инерции тела,

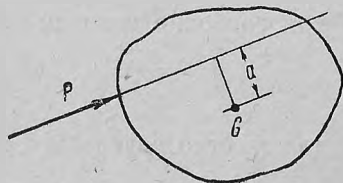


Рис. 6.

Ускорение в точке приложения силы по линии ее действия определится по формуле

$$w = \frac{P}{M} + \frac{Pa^2}{M\rho^2} = \frac{P}{M_1},$$

где

$$M_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2} M \quad (57)$$

есть так называемая приведенная масса, которую надо вводить в расчет.

Пример 5. Определить изгибающий момент при ударе массы m , имеющей скорость $\dot{q}_0$, в середину невесомой двухопорной балки постоянного сечения.

Решение задачи сводится к рассмотрению колебания массы на пружине жесткостью c при заданной начальной скорости и дается формулой (8) при $q_0=0$ и $\mu=0$;

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda t, \quad (58)$$

где λ определяется формулой (3), а под c подразумевается жесткость балки.

При определении коэффициента жесткости балки ее надо загрузить в середине пролета сосредоточенной силой, что дает для свободно опертой балки

$$c_0 = \frac{48EI}{l^3},$$

для жестко заделанной балки

$$c_1 = \frac{192EI}{l^3},$$

где l —пролет балки, I —центральный момент инерции площади поперечного сечения.

Связь между стрелкой прогиба q_i под силой и наибольшим изгибающим моментом устанавливается для рассматриваемых балок соотношениями:
для свободно опертой балки

$$M_{\max} = 12q_0 \frac{EI}{l^2},$$

для жестко заделанной балки

$$M_{\max} = 24q_1 \frac{EI}{l^2}.$$

Так как согласно выражению (58)

$$q_{\max} = \frac{\dot{q}_0}{\lambda} = \dot{q}_0 \sqrt{\frac{m}{c_i}},$$

то, воспользовавшись выражениями для c_i и $M_{\max}$, можно получить: для свободно опертой балки

$$M_{\max} = 12 \frac{EI}{l^2} \dot{q}_0 \sqrt{\frac{ml^3}{48EI}} = \dot{q}_0 \sqrt{\frac{3mEI}{l}},$$

для жестко заделанной балки

$$M_{\max} = 24 \frac{EI}{l^2} \dot{q}_0 \sqrt{\frac{ml^3}{192EI}} = \dot{q}_0 \sqrt{\frac{3mEI}{l}},$$

т. е. наибольшие изгибающие моменты в обеих балках оказались одинаковыми.

Рассмотренная задача весьма поучительна. Она показывает, насколько тщательно нужно учитывать при сопоставлении прочности двух конструкций действительные условия их работы. Жестко заделанная балка при расчете ее на статическое действие сосредоточенной силы имеет в два раза меньший изгибающий момент, чем свободно опертая, тогда как при ударе эти балки оказываются равнопрочными.

Пример 6. Между механизмом и основанием установлены упругие связи — амортизаторы. Выяснить возможности виброизоляции, т. е. уменьшения силового воздействия неуравновешенных сил инерции вращающихся масс механизма на основание, предполагая, что силы инерции действуют периодически.

Наибольшая величина усилия $R_{\max}$, действующего в пружине-амортизаторе и передаваемого основанию, согласно выражениям (29) и (24) равна

$$R_{\max} = c q_{\max} = \alpha Q.$$

Величина коэффициента динамичности α определяется по формуле (30).

Эффективная виброизоляция, т. е. существенное уменьшение нагрузки на основание $\alpha \ll 1$, возможно при $z = \frac{\omega}{\lambda} \gg 1$. Пренебрегая влиянием сопротивления в выражении (30), можно полагать

$$\alpha = \frac{1}{z^2} = \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2.$$

Если Q_m — вес механизма, $q_{\text{ст}} = \frac{Q_m}{c}$ — обжатие пружины (виброизолятора) под действием собственного веса механизма,

$M = \frac{Q_m}{g}$ — масса механизма, то частота свободных колебаний λ определится согласно выражению (3) по формуле

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{q_{ст}}},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Силы инерции механизма от неуравновешенных масс выражаются сложными периодическими функциями от угла поворота вала механизма. Разлагая их выражение в ряд Фурье, силы можно представить суммой простых гармонических составляющих, отличающихся частотой и амплитудой. Эти составляющие называют силами инерции различного порядка p . Сила инерции первого порядка $p=1$ имеет частоту, равную числу оборотов вала n , сила второго порядка $p=2$ имеет частоту $2n$, сила порядка p действует с частотой pn .

Применяя в механизмах уравновешивающие противовесы, с некоторым приближением уравновешивают силы первых порядков ($p=1$, $p=2$). Воздействие на основание сил инерции высших порядков уменьшают с помощью амортизаторов-виброизоляторов.

Если n — число оборотов вала механизма в минуту, p — порядок неуравновешенной силы инерции, то

$$\omega = \frac{\pi p n}{30},$$

так что формула для коэффициента динамичности преобразуется к виду

$$\alpha = \frac{900g}{q_{ст} (\pi p n)^2}.$$

Полагая $g=9810$ мм/сек², измеряя в дальнейшем $q_{ст}$ в миллиметрах и подставляя вместо π его значение, преобразуем формулу для коэффициента динамичности

$$\alpha \approx \left(\frac{3000}{pn} \right)^2 \frac{1}{10q_{ст}}.$$

Например, если число оборотов в минуту автомобильного двигателя равно $n=3000$ об/мин, а статическое обжатие виброизолятора $q_{ст}=1$ мм, то

$$\alpha = \frac{1}{10p^2}$$

и сила инерции третьего порядка будет уменьшаться почти в сто раз.

Пример 7. Каковы должны быть характеристики системы с одной степенью свободы, чтобы перемещение массы было в каждый момент времени пропорционально действующей силе.

Рассматриваемая задача является теоретической схемой прибора, называемого индикатором и применяемого для записи быстро изменяющихся давлений. Схема такого прибора показана на рис. 7. Перемещение поршня записывается на вращающемся барабане.

Интегрируя выражение (21) по частям и принимая во внимание выражение (3), получим

$$q = \frac{Q(t)}{c} + \frac{1}{c} \int_0^t Q'(\tau) \cos \lambda(t-\tau) d\tau; \quad (59)$$

второй член выражения (59) представляет собой абсолютную погрешность индикатора.

Замечая, что

$$\cos \lambda(t-\tau) = \cos \lambda t \cos \lambda \tau + \sin \lambda t \sin \lambda \tau,$$

нетрудно получить выражение для квадрата амплитуды погрешности индикатора

$$\eta^2 = \frac{1}{c^2} \left[\left(\int_0^t Q'(\tau) \cos \lambda \tau d\tau \right)^2 + \left(\int_0^t Q'(\tau) \sin \lambda \tau d\tau \right)^2 \right]. \quad (60)$$

Рассмотрим один из интегралов, например первый,

$$\int_0^t Q'(\tau) \cos \lambda \tau d\tau = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)T}^{kT} Q'(\tau) \cos \lambda \tau d\tau + \int_{nT}^t Q'(\tau) \cos \lambda \tau d\tau,$$

где $t = nT + t'$, $t' < T$, T — период свободных колебаний индикатора, n — целое число.

Если период свободных колебаний индикатора настолько мал, что в течение каждого периода можно считать $Q'(\tau) = \text{const}$, то сумма интегралов обращается в нуль, а для последнего интеграла, воспользовавшись теоремой о среднем, можно получить оценку

$$\left| \int_{nT}^t Q'(\tau) \cos \lambda \tau d\tau \right| = \left| \frac{Q'(\tau_{\text{ср}})}{\lambda} \sin \lambda \tau \right|_{nT}^t \leq \frac{Q'(\tau_{\text{ср}})T}{2\pi},$$

где $nT < \tau_{\text{ср}} < t$; такое же выражение получается и для второго интеграла в выражении (60).

Таким образом, для абсолютной погрешности индикатора получается оценка

$$\eta \leq \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{|Q'(\tau_{\text{ср}})| T}{c},$$

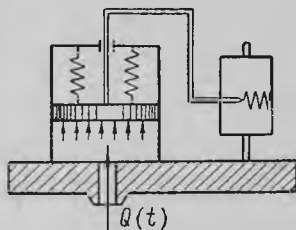


Рис. 7.

а его относительная погрешность не превосходит величины

$$\varepsilon \leq \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{|Q'(\tau_{cp})| T}{Q(t)} \quad (61)$$

Из формулы (61) видно, что относительная погрешность индикатора тем меньше, чем меньше отношение приращения силы $Q'(\tau_{cp})T$ в течение одного периода свободных колебаний индикатора к величине этой силы. Поэтому периоды свободных колебаний индикаторов следует делать малыми по сравнению со временем нарастания усилия.

Наименьшая погрешность индикатора будет при измерении наибольших значений усилий, где $Q'(\tau_{cp})$ ближе к нулю, а $Q(t)$ достигает наибольшего значения.

§ 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТОЧКИ ПОДВЕСА

Многие практически важные вопросы сводятся к изучению вынужденных колебаний упругой системы, возникающих вследствие перемещения основания, к которому прикреплена система. Примерами таких задач колебаний являются: а) колебания вибрографа и акселерографа—приборов, служащих для записи перемещений и ускорений при колебаниях и ударных сотрясениях; б) колебания балок, перекрытий, пластин, мачт и т. п., возникающие при общей вибрации корабля, вызывающей перемещение опор указанных частей корпуса; в) колебания приборов и механизмов при кратковременных сотрясениях основания и др.

Если предположить, что в системе, изображенной на рис. 1, возмущающая сила $Q(t) \equiv 0$, а точка подвеса пружины получает в положительном направлении q перемещение $u(t)$, то удлинение пружины будет равно $q-u$ и уравнение движения массы m (с учетом сопротивления, пропорционального относительной скорости), должно быть записано на основании принципа Даламбера в виде

$$-m\ddot{q} - \beta(\dot{q} - \dot{u}) - c(q - u) = 0$$

или

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \lambda^2 q = \frac{c}{m} u + \frac{\beta}{m} \dot{u}, \quad (62)$$

где μ и λ определяются по формулам (2) и (3).

Сравнивая выражения (62) и (1), можно сделать вывод, что при решении задачи о колебании при перемещении точки подвеса можно воспользоваться решением соответствующей задачи о колебании при действии возмущающей силы, в котором

$$Q(t) = cu(t) + \beta\dot{u}(t). \quad (63)$$

При определении усилий в упругой связи (пружине) надо пользоваться формулой

$$R = c(q - u). \quad (64)$$

Рассмотрим несколько задач, имеющих прикладное значение.

Пример 1. Определить усилие в пружине, если точке подвеса сообщается скорость v , а масса в начальный момент времени находилась в покое; сопротивлением пренебрегаем.

В рассматриваемой задаче

$$u(t) = vt, \quad (65)$$

и мы можем воспользоваться готовым решением (49). Заменяя $q_{ст}$ его выражением (24) и используя выражения (63) и (48), на основании которых $\frac{Q}{T_0} = cv$, получим

$$q = v \left(t - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \right), \quad (66)$$

а усилие в пружине определится согласно выражениям (64), (65) и (66) по формуле

$$R = -\frac{vc}{\lambda} \sin \lambda t,$$

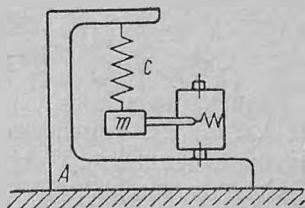


Рис. 8.

так что, принимая во внимание выражение (3), можно написать

$$R_{\max} = v \sqrt{cm}. \quad (67)$$

Из формулы (67) видно, что усилие $R_{\max}$ может быть как угодно велико и часто встречающийся расчет канатов грузоподъемных механизмов и т. п. на удвоенный вес поднимаемого груза является необоснованным.

Пример 2. Исследовать, при каких условиях на барабане вибрографа, схема которого изображена на рис. 8, будет с минимальной погрешностью записано колебание основания.

Пусть основание A , к которому прикреплена на пружине масса m , совершает гармоническое колебание

$$u = a \cos(\omega t + \delta). \quad (68)$$

Тогда, пренебрегая сопротивлением и принимая во внимание формулы (63), (68), (29) и (30), можно получить выражение для абсолютного перемещения массы

$$q = \frac{a}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2} \cos(\omega t + \delta).$$

На барабане вибрографа будет записано перемещение массы относительно основания

$$\Delta = u - q = \frac{a}{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2} \cos(\omega t + \delta). \quad (69)$$

Из выражения (69) видно, что при малом значении отношения $\frac{\lambda}{\omega}$ на барабане вибрографа будет почти точно записано перемещение основания; при малом отношении $\frac{\lambda}{\omega}$ (большом z)

сопротивление практически не влияет на колебания и пренебрежение им вполне допустимо. Если $\omega = 5\lambda$, то погрешность в записи будет около 5%.

Виброграф может быть использован не только для записи гармонических, но и вообще периодических колебаний. Действительно, так как периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье,

$$Q(t) = \sum_n (Q'_n \cos n\omega t + Q''_n \sin n\omega t),$$

то взяв частоту вибрографа такой, чтобы удовлетворялось условие $\lambda < \omega$, мы тем более удовлетворим условию $\lambda < n\omega$ и периодическое движение будет записано достаточно точно.

Создать виброграф с большим периодом собственных колебаний, что позволит с большой точностью записать колебание основания, возможно, и такие приборы (сейсмографы) существуют, но в судовых условиях их использовать нельзя.

Объясняется это следующим: наименьшая частота при собственных колебаниях корпуса морских судов имеет порядок $2 \div 3$ гц, а частота килевой качки и всплывания — порядок $0,10 \div 0,20$ гц; при значительном уменьшении частоты свободных колебаний вибрографа его показания могут быть сильно искажены влиянием качки.

Схема вибрографа используется и в приборах, называемых акселерографами, служащими для записи ускорения основания.

Если надо записать ускорение основания

$$\ddot{u} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \delta),$$

то при $\lambda \gg \omega$ выражение (69) может быть представлено в виде

$$\Delta = -\frac{a\omega^2}{\lambda^2} \cos(\omega t + \delta),$$

и на барабане прибора будет в некотором масштабе записано ускорение.

Пример 3. Определить реактивное воздействие на основание массы m , соединенной с основанием пружиной жесткостью c и демпфером (см. рис. 1), если основание совершает гармоническое колебание по закону (68).

Подставляя выражение (68) в выражение (63), получим

$$Q(t) = ac \cos(\omega t + \delta) - a\beta\omega \sin(\omega t + \delta). \quad (70)$$

Для определения абсолютного перемещения массы m нужно два раза воспользоваться решением (29): один раз при

$$q_{ст} = \frac{Q}{c} = a,$$

что соответствует учету первого члена выражения (70), и один раз при

$$q_{ст} = \frac{Q}{c} = -\frac{a\beta\omega}{c}$$

и замене величины δ на $\delta - \frac{\pi}{2}$, что соответствует учету второго члена выражения (70).

Складывая получаемые таким образом выражения и принимая во внимание соотношения (2), (3), (23) и (28), найдем

$$q = a\alpha^2 \{ [1 - z^2(1 - 4\gamma^2)] \cos(\omega t + \delta) + 2\gamma z^3 \sin(\omega t + \delta) \}, \quad (71)$$

где α определяется формулой (30).

Реактивное воздействие массы m на основание определится по формуле

$$R = -m\ddot{q},$$

которое на основании выражений (71) и (68) может быть записано в двух эквивалентных формах:

$$R = -M\ddot{u} - B\dot{u}, \quad (72)$$

где

$$M = m\alpha^2 [1 - z^2(1 - 4\gamma^2)], \quad (73)$$

$$B = \beta\alpha^2 z^4 \quad (74)$$

или

$$R = -K\ddot{u} - B\dot{u}, \quad (75)$$

где

$$K = m\omega^2\alpha^2 [z^2(1 - 4\gamma^2) - 1], \quad (76)$$

а B определяется по формуле (74).

Таким образом, можно сделать вывод, что при

$$1 - z^2(1 - 4\gamma^2) > 0 \quad (77)$$

реактивное воздействие массы m на основание эквивалентно присоединению к основанию массы M и введению сопротивления с коэффициентом B , пропорционального первой степени скорости, а при изменении знака неравенства (77) на обратный—эквивалентно введению в месте присоединения массы упругой опоры с коэффициентом жесткости K и того же сопротивления.

При

$$1 - z^2(1 - 4\gamma^2) = 0$$

реактивное воздействие сводится лишь к введению одного сопротивления.

В заключение установим связь между амплитудой δ_a относительного перемещения массы m и амплитудой R_a реактивного воздействия массы m на основание.

Перемещение массы m относительно основания определится на основании выражений (71) и (68) по формуле

$$\delta = q - u = \{ \alpha^2 [1 - z^2(1 - 4\gamma^2)] - 1 \} a \cos(\omega t + \delta) + 2\gamma\alpha^2 z^3 a \sin(\omega t + \delta).$$

Принимая во внимание формулу (30), можно для амплитуды относительного перемещения получить

$$\delta_a = \frac{az^2}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2}}. \quad (78)$$

Амплитуда реактивного воздействия $R = -m\ddot{q}$ определится на основании выражений (3) и (71) по формуле

$$R_a = \alpha^2 c z^2 a \sqrt{[1 - z^2(1 - 4\gamma^2)]^2 + 4\gamma^2 z^6},$$

так что, принимая во внимание выражения (30) и (78), можно получить

$$\delta_a = \frac{R_a}{c} \sqrt{\frac{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2}{[1 - z^2(1 - 4\gamma^2)]^2 + 4\gamma^2 z^6}}. \quad (79)$$

Результаты этого примера будут использованы в § 41 при рассмотрении приближенной теории динамического гасителя колебаний упругих систем.

Пример 4. Найти ускорение массы m при кратковременном сотрясении основания. Кратковременное сотрясение основания характеризуется тем, что оно получает конечное перемещение в очень малый промежуток времени, причем ускорение основания может достигнуть очень большой величины.

Поставленная задача возникает при решении вопроса об амортизации приборов и механизмов, устанавливаемых на упругих связях—амортизаторах.

Наибольшее возможное значение ускорения массы m при кратковременном сотрясении может быть определено на основании следующих элементарных соображений.

Предположим, что перемещение основания достигло своего наибольшего значения за очень короткий промежуток времени, так что масса m не успела выйти из положения равновесия.

В этом случае пружина будет прикладывать к массе m силу $cu_{\max}$ и ускорение массы может быть определено по формуле

$$\ddot{q}_{\max} = \frac{cu_{\max}}{m} = \lambda^2 u_{\max}. \quad (80)$$

Из формулы (80) видно, что при соответствующем подборе жесткости пружины c ускорение $\ddot{q}_{\max}$ может быть равно любой наперед заданной величине.

Оценим точность формулы (80) на частном примере.

Пусть перемещение основания изменяется по закону:
при $t \leq T_0$

$$u(t) = \frac{t}{T_0} u_{\max},$$

при $t \geq T_0$

$$u(t) = u_{\max}.$$

Воспользовавшись подстановкой (63) при $\beta=0$ и формулой (24), на основании выражения (50), получим

$$q^{(2)} = u_{\max} \left[1 + \frac{2}{\lambda T_0} \sin \frac{\lambda T_0}{2} \cos \lambda \left(t - \frac{1}{2} T_0 \right) \right],$$

откуда

$$\ddot{q}_{\max} = \lambda^2 u_{\max} b, \quad (81)$$

где

$$b = \frac{2}{\lambda T_0} \sin \frac{\lambda T_0}{2};$$

значения b приведены в табл. 3, из которой видно, что при быстром нарастании перемещения, когда T_0 мало по сравнению с T , величина b близка к единице.

Таблица 3

$T_0 : T$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
b	1	0,984	0,936	0,859	0,696	0,637

Заметим, что сообщение основанию начальной скорости $v_0 = \frac{u_{\max}}{T_0}$ предполагает наличие в начальный момент бесконечно больших ускорений.

Мы не останавливаемся на рассмотрении более сложных законов сотрясения основания и лишь заметим, что большие ускорения основания, существующие в течение короткого промежутка времени, могут быть легко поглощены амортизаторами, т. е. не будут переданы механизмам и установкам.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Если малые колебания системы с одной степенью свободы описываются одним дифференциальным уравнением второго порядка (1), то малые колебания системы с n степенями свободы будут описываться системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\sum_{k=1}^n (a_{gk} \ddot{q}_k + b_{gk} \dot{q}_k + c_{gk} q_k) = Q_g(t), \quad g = 1, 2, \dots, n, \quad (82)$$

где q_k есть обобщенные координаты, $Q_g(t)$ — обобщенные силы, а коэффициенты a_{gk} , b_{gk} и c_{gk} зависят от структуры упругой системы и способа вывода дифференциальных уравнений.

В дальнейшем мы будем предполагать, что наложенные на систему связи являются голономными, стационарными и идеальными, т. е. в уравнения связей не входят производные координат по времени, они явно не зависят от времени и работа их реакций на возможных перемещениях равна нулю.

При рассмотрении малых колебаний перемещения системы будут являться линейными однородными функциями обобщенных координат с постоянными коэффициентами, если только обобщенные перемещения будут отсчитываться от положения равновесия. Напомним, что обобщенные координаты выбираются таким образом, чтобы уравнения связи удовлетворялись тождественно.

Коэффициенты дифференциального уравнения (1) должны удовлетворять условиям: $\lambda^2 > 0$ и $\mu > 0$; только в этом случае уравнение (1) будет описывать колебательное движение около положения устойчивого равновесия.

Подобно этому и коэффициенты a_{gk} , b_{gk} и c_{gk} системы (82) должны удовлетворять некоторым условиям. Чтобы эта система описывала колебательное движение около положения устойчивого равновесия, характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}s^2 + b_{11}s + c_{11} & \dots & a_{1n}s^2 + b_{1n}s + c_{1n} \\ a_{21}s^2 + b_{21}s + c_{21} & \dots & a_{2n}s^2 + b_{2n}s + c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}s^2 + b_{n1}s + c_{n1} & \dots & a_{nn}s^2 + b_{nn}s + c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

получающийся в результате выполнения в системе (82) при $Q_g(t) \equiv 0$ подстановки Эйлера

$$q_k = A_k e^{st}$$

и приравнивания нулю определителя линейной системы уравнений, должен иметь комплексные корни с отрицательной вещественной частью; при большом сопротивлении некоторые корни могут оказаться вещественными, но обязательно отрицательными,

Характеристический определитель часто записывают сокращенно в виде

$$\|a_{gk}s^2 + b_{gk}s + c_{gk}\| = 0, \quad (83)$$

где g —номер строки, k —номер столбца.

Некоторые общие условия, которым должны удовлетворять коэффициенты системы (82), будут рассмотрены нами в дальнейшем, сейчас же мы остановимся на вопросе о том, каким образом может быть получена рассматриваемая система дифференциальных уравнений.

Раньше всего необходимо заметить, что выбор обобщенных координат для любой заданной системы не является единственным и различному выбору обобщенных координат будут соответствовать различные системы дифференциальных уравнений типа (82).

Однако, несмотря на различие систем дифференциальных уравнений, а следовательно, и характеристических уравнений (83), характеристические уравнения будут иметь одинаковые корни, так как физическая картина колебаний системы не может зависеть от того, как были выбраны обобщенные координаты. Сделанные нами замечания могут быть доказаны математическим путем; изменение выбора обобщенных координат сводится к тому, что в системе (82) производится линейная подстановка с постоянными коэффициентами.

Если обобщенные координаты выбраны, то вывод системы дифференциальных уравнений может быть произведен различными способами, и вид записи системы (82) при сохранении ее типа может оказаться различным. Это соответствует тому, что полученная каким-либо образом система уравнений (82) может быть при помощи линейных операций преобразована к другому виду.

Например, система (82) может быть решена относительно ускорений и приведена к виду

$$\ddot{q}_g + \sum_{k=1}^n (b_{gk}^{(1)} \dot{q}_k + c_{gk}^{(1)} q_k) = Q_g^{(1)}(t),$$

либо решена относительно координат и приведена к виду

$$q_g + \sum_{k=1}^n (a_{gk}^{(2)} \ddot{q}_k + b_{gk}^{(2)} \dot{q}_k) = Q_g^{(2)}(t)$$

и так далее, причем коэффициенты преобразованной системы будут являться функциями коэффициентов исходной системы, а правые части уравнений—линейными функциями правых частей исходной системы.

Очевидно, что подобные преобразования системы дифференциальных уравнений не могут изменить значений обобщенных координат.

Наиболее целесообразным является такой выбор обобщенных координат, при котором система (82) распадается на отдельные дифференциальные уравнения, но это оказывается не всегда возможным. Во всяком случае при выборе обобщенных координат нужно стремиться к тому, чтобы в каждое из уравнений системы (82) входило возможно меньшее число обобщенных координат.

Вывод системы дифференциальных уравнений (82) в некоторых случаях может быть выполнен непосредственно, сейчас же мы остановимся на общем способе вывода этих уравнений.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} - \frac{\partial T}{\partial q_g} = Q_g^{(0)}, \quad g=1, 2 \dots n, \quad (84)$$

где T —кинетическая энергия системы, $Q_g^{(0)}$ — обобщенная сила, соответствующая g -вой обобщенной координате.

Напомним, что $Q_g^{(0)}$ есть коэффициент при вариации обобщенной координаты δq_g в выражении для приращения работы всех сил, действующих на систему (в том числе и сил сопротивления)

$$\delta R = Q_g^{(0)} \delta q_g.$$

Кинетическая энергия системы определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s m_j v_j^2,$$

где суммирование распространяется по всем точкам системы, v_j — скорость точки с массой m_j .

При рассмотрении малых колебаний, как это было уже указано в начале параграфа, перемещения являются однородными линейными функциями обобщенных координат с постоянными коэффициентами, так что и скорости точек системы будут являться однородными линейными функциями обобщенных скоростей—производных обобщенных координат—с постоянными коэффициентами. Поэтому кинетическая энергия системы будет являться однородной функцией второй степени от обобщенных координат и может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \dot{q}_g \dot{q}_k, \quad (85)$$

где, не умаляя общности, можно считать

$$a_{gk} = a_{kg}. \quad (86)$$

Действительно, если при фактическом вычислении кинетической энергии мы получим член с произведением обобщенных скоростей в виде $A_{gk} \dot{q}_g \dot{q}_k$, то всегда можно считать, что

$$a_{gk} = a_{kg} = \frac{1}{2} A_{gk}.$$

Кинетическая энергия будет равна нулю лишь в том случае, когда все обобщенные скорости равны нулю, если же хоть одна из скоростей не равна нулю, то кинетическая энергия будет больше нуля. Такие функции называются определенно положительными.

В силу постоянства коэффициентов a_{gk}

$$\frac{\partial T}{\partial q_g} \equiv 0,$$

так что в теории малых линейных колебаний можно пользоваться сокращенными уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} = Q_g^{(0)}. \quad (87)$$

Представим обобщенную силу $Q_g^{(0)}$ состоящей из трех слагаемых

$$Q_g^{(0)} = Q_g + Q_g^{(1)} + Q_g^{(2)}, \quad (88)$$

где

Q_g — часть силы, не имеющая потенциала или не учитываемая при помощи потенциала;

$Q_g^{(1)}$ — часть силы, имеющая потенциал и учитываемая при помощи потенциала;

$Q_g^{(2)}$ — сила сопротивления, которую мы будем считать линейной функцией от обобщенных скоростей.

При помощи потенциала учитываются реакции упругих связей и иногда некоторые внешние силы.

Работа, совершаемая в потенциальном поле при перемещении из одного положения в другое, равна падению потенциала

$$\delta R = - \sum_{g=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_g} \delta q_g,$$

т. е.

$$Q_g^{(1)} = - \frac{\partial V}{\partial q_g}. \quad (89)$$

Если мы имеем дело с упругими связями, то под их потенциальной энергией понимается работа внешних сил, затраченная на деформацию связей.

Поэтому приращение работы внешних сил $\tilde{Q}_g^{(1)}$ связано с приращением потенциальной энергии зависимостью

$$\sum_{g=1}^n \tilde{Q}_g^{(1)} \delta q_g = \sum_{g=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_g} \delta q_g.$$

т. е.

$$\tilde{Q}_g^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial q_g}.$$

Так как нас интересуют реакции упругих связей, равные по величине и обратные по знаку силам, действующим на эти связи, то для определения реакций упругих связей справедлива формула (89).

Потенциальная энергия всех сил, учитываемых при помощи потенциала, является функцией всех координат¹ и может быть разложена в ряд Маклорена

$$V = V_0 + \sum_{g=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_g} \right)_0 q_g + \frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_g \partial q_k} \right)_0 q_g q_k + \dots,$$

где индекс 'нуль' обозначает, что соответствующие величины вычислены для нулевых значений обобщенных координат.

Будем всегда отсчитывать обобщенные координаты от положения равновесия системы, в котором она находится под действием сил, учитываемых при помощи потенциальной энергии.

В этом случае

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_g} \right)_0 = 0.$$

Отбрасывая несущественную постоянную V_0 , можно при изучении малых колебаний считать, что

$$V = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} q_g q_k, \quad (90)$$

где

$$c_{gk} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_g \partial q_k} \right)_0. \quad (91)$$

¹ Мы не рассматриваем случай, когда имеются циклические координаты.

На основании выражения (91) можно заключить, что

$$C_{gk} = C_{kg}, \quad (92)$$

так как величина производной не зависит от порядка дифференцирования.

Потенциальная энергия по своему физическому смыслу также есть функция существенно положительная.

Вектор силы сопротивления, действующей на j -ую точку системы и пропорциональной скорости, определится выражением

$$\vec{R}_j = -\beta_j \vec{r}_j,$$

где r_j — радиус-вектор точки m_j , являющийся функцией обобщенных координат. Дифференцируя радиус-вектор как сложную функцию, получим

$$\vec{R}_j = -\beta_j \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Сумма же работ сил сопротивления на возможном перемещении, соответствующем обобщенной координате q_g , определится выражением

$$Q_g^{(2)} \delta q_g = \sum_{j=1}^s \left(\vec{R}_j, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_g} \delta q_g \right),$$

где круглой скобкой обозначено скалярное произведение.

Подставляя вместо $\vec{R}_j$ его выражение, получим

$$Q_g^{(2)} \delta q_g = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_g} \right) \dot{q}_k \delta q_g,$$

откуда

$$Q_g^{(2)} = - \sum_{k=1}^n b_{gk} \dot{q}_k, \quad (93)$$

где

$$b_{gk} = \sum_{j=1}^s \beta_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_g} \right). \quad (94)$$

Раскладывая производные радиус-вектора в ряд Маклорена, получим

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right)_0 + \sum_{g=1}^n \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_g} \right)_0 q_g + \dots,$$

а так как обобщенные координаты q_g малы, то эти производные можно считать постоянными, определенными при $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$. Поэтому и все коэффициенты b_{gk} нужно считать постоянными. Согласно формуле (94)

$$b_{gk} = b_{kg}. \quad (95)$$

Выражение (92) можно также записать в виде

$$Q_g^{(2)} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g}, \quad (96)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n b_{gk} \dot{q}_g \dot{q}_k \quad (97)$$

есть так называемая функция рассеивания, физический смысл которой будет выяснен ниже.

При решении частных задач выражение для обобщенной силы сопротивления обычно получается непосредственно.

Принимая во внимание выражения (88), (89) и (96), преобразуем уравнение (87) к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial V}{\partial q_g} = Q_g, \quad g=1; 2 \dots n, \quad (98)$$

где через Q_g обозначена часть обобщенной силы, не учтенная при составлении потенциальной энергии и функции рассеивания.

Подставляя в уравнения (98) выражения (85), (90) и (97), приходим к системе уравнений (82), в которой под a_{gk} , b_{gk} и c_{gk} надо понимать коэффициенты выражений для кинетической энергии, функции рассеивания и потенциальной энергии, причем эти коэффициенты обладают свойствами взаимности (86), (92) и (95).

Для выяснения физического смысла функции рассеивания рассмотрим свободные колебания и перепишем систему (98) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial V}{\partial q_g} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g}. \quad (99)$$

Умножая равенство (99) на $\dot{q}_g$ и суммируя по всем g , получим

$$\sum_{g=1}^n \left(\dot{q}_g \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial V}{\partial q_g} \dot{q}_g \right) = - \sum_{g=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g} \dot{q}_g. \quad (100)$$

Для преобразования полученного равенства заметим, что в силу теоремы Эйлера об однородных функциях

$$2T = \sum_{g=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} \dot{q}_g,$$

$$2\Phi = \sum_{g=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g} \dot{q}_g.$$

Дифференцируя первое выражение по времени, получим

$$2 \frac{dT}{dt} = 2 \sum_{g=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} \ddot{q}_g = \sum_{g=1}^n \left(\dot{q}_g \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} \ddot{q}_g \right),$$

откуда следует

$$\sum_{g=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} \ddot{q}_g = \sum_{g=1}^n \dot{q}_g \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g},$$

поэтому

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{g=1}^n \dot{q}_g \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g}.$$

Замечая, что по правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{g=1}^n \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_g} \dot{q}_g,$$

можем переписать соотношение (100) в виде

$$\frac{d(T + V)}{dt} = -2\Phi, \quad (101)$$

т. е. производная от полной энергии системы по времени равна удвоенной величине функции рассеивания. При наличии рассеивания энергии

$$\Phi > 0;$$

функция рассеивания является определенно положительной.

В некоторых случаях вычисление потенциальной энергии оказывается достаточно громоздким, но просто находится связь между обобщенными силами $\tilde{Q}_g^{(1)}$ и обобщенными координатами q_r ,

$$q_r = \sum_{g=1}^n \alpha_{rg} \tilde{Q}_g^{(1)}, \quad (102)$$

где коэффициенты влияния α_{rg} обладают, как известно, свойством взаимности

$$\alpha_{rg} = \alpha_{gr}. \quad (103)$$

Согласно уравнению Лагранжа (98) и принимая во внимание формулу (89), получим

$$Q_g^{(1)} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g} - Q_g, \quad (104)$$

а так как реакции $\tilde{Q}_g^{(1)}$ упругих связей, действующие на систему, определяются соотношением

$$\tilde{Q}_g^{(1)} = -Q_g^{(1)},$$

то выражение (102) можно на основании (104) преобразовать к виду

$$q_r = - \sum_{g=1}^n \alpha_{rg} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g} - Q_g \right). \quad (105)$$

Подставляя в уравнение (105) выражения (85) и (97), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих колебание рассматриваемой системы

$$q_r = - \sum_{k=1}^n \left(K_{rk} \ddot{q}_k + F_{rk} \dot{q}_k \right) + \sum_{g=1}^n \alpha_{rg} Q_g, \quad (106)$$

где

$$K_{rk} = \sum_{g=1}^n \alpha_{rg} \alpha_{gk},$$

$$F_{rk} = \sum_{g=1}^n \alpha_{rg} b_{gk},$$

причем $K_{rk} \neq K_{kr}$ и $F_{rk} \neq F_{kr}$; можно было бы показать, на чем мы не останавливаемся, что система (106) может быть получена, если систему (82) решить относительно обобщенных координат.

Использованный нами способ вывода дифференциальных уравнений колебаний называется обратным методом или методом обращения матриц.

Приведем несколько примеров на составление дифференциальных уравнений малых колебаний.

Пример 1. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний вибрографа Гейгера, схема которого показана на рис. 9.

Дано: c — коэффициент жесткости пружины, φ — угол отклонения от статического положения равновесия, m — масса стержня, ρ — радиус инерции, l — расстояние центра тяжести стержня от

оси вращения, α — угол, составляемый осью стержня с вертикалью в положении статического равновесия.

Примем за обобщенную координату угол φ отклонения стержня от положения статического равновесия в сторону возрастания угла α .

Кинетическая энергия рассматриваемой системы определится по формуле

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (107)$$

Составление дифференциального уравнения мы выполним двумя способами: по методу Лагранжа и обратным методом, что даст возможность сравнить эти два приема.

Для составления выражения потенциальной энергии при отклонении системы от положения равновесия на угол φ нужно поступить следующим образом.

Во-первых, надо найти потенциальную энергию силы тяжести, равную той работе, которую нужно затратить на отклонение стержня на угол φ от положения равновесия.

Эта работа равна произведению веса стержня на подъем его центра тяжести и вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} V_1 &= mgl [\cos \alpha - \cos (\alpha + \varphi)] = \\ &= mgl [\cos \alpha (1 - \cos \varphi) + \sin \alpha \sin \varphi] \end{aligned}$$

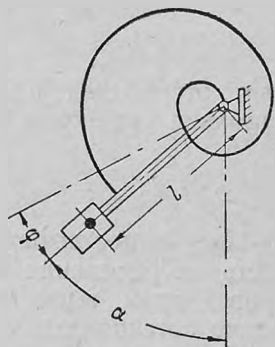


Рис. 9.

или, разлагая в ряд по степеням φ и отбрасывая члены выше второй степени,

$$V_1 = mgl \left(\frac{1}{2} \varphi^2 \cos \alpha + \varphi \sin \alpha \right).$$

Во-вторых, нужно найти потенциальную энергию деформации пружины.

Поскольку в состоянии равновесия пружина напряжена и находится под действием момента силы веса

$$M = mgl \sin \alpha,$$

то после освобождения от силы веса стержень должен был бы повернуться по часовой стрелке на угол

$$\varphi_0 = \frac{mgl}{c} \sin \alpha. \quad (108)$$

Таким образом, при недеформированной пружине стержень составит с вертикалью угол $\alpha + \varphi_0$, а при отклонении на угол φ от положения равновесия — угол $\alpha + \varphi$. Поэтому, если стержень

отклонен от положения равновесия на угол φ , то пружина закручивается относительно ее недеформированного состояния на угол

$$(\alpha + \varphi_0) - (\alpha + \varphi) = \varphi_0 - \varphi.$$

Ее потенциальная энергия определится по формуле

$$V_2 = \frac{1}{2} c (\varphi - \varphi_0)^2.$$

Суммарная потенциальная энергия будет равна

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} c \varphi_0^2 + (mgl \sin \alpha - c \varphi_0) \varphi + \\ + \frac{1}{2} (mgl \cos \alpha + c) \varphi^2$$

или, отбрасывая несущественную постоянную и принимая во внимание уравнение статического равновесия (108), найдем

$$V = \frac{1}{2} (mgl \cos \alpha + c) \varphi^2. \quad (109)$$

Полученное выражение для потенциальной энергии и возможность отбрасывания линейного члена полностью соответствуют приведенным выше общим соображениям. В рассматриваемой задаче потенциальная энергия сил веса оказалась функцией второй степени, и суммарная потенциальная энергия — зависящей от сил веса.

Подставляя выражения (107) и (109) в уравнение Лагранжа (98) при $\Phi = 0$ и $Q = 0$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний вибрографа Гейгера

$$m \varphi'' + (mgl \cos \alpha + c) \varphi = 0, \quad (110)$$

так что частота свободных колебаний определится по формуле

$$\lambda = \sqrt{\frac{mgl \cos \alpha + c}{m \varphi^2}}. \quad (111)$$

Составим теперь дифференциальное уравнение колебаний обратным методом.

Для этого приложим к стержню момент M_0 , направленный по часовой стрелке, и найдем угол φ , на который отклонится стержень от положения равновесия.

Замечая, что момент M_0 должен уравновеситься реактивным моментом пружины и изменением момента силы веса, получим

$$M_0 = c \varphi + mgl [\sin (\alpha + \varphi) - \sin \alpha] = \\ = c \varphi + mgl [\sin \alpha (\cos \varphi - 1) + \cos \alpha \sin \varphi]$$

§ 5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.
ГЛАВНЫЕ КООРДИНАТЫ, ФОРМЫ ГЛАВНЫХ КОЛЕБАНИЙ
И ИХ СВОЙСТВА

Свободные колебания системы с n степенями свободы описываются системой дифференциальных уравнений, получающейся из системы (82) при $Q_g(t) \equiv 0$

$$\sum_{k=1}^n (a_{gk} \ddot{q}_k + b_{gk} \dot{q}_k + c_{gk} q_k) = 0, \quad g=1; 2 \dots n. \quad (113)$$

Если $a_{gk} = b_{gk} = c_{gk} = 0$ при $g \neq k$, то система (113) распадается на ряд дифференциальных уравнений, каждое из которых описывает колебание системы с одной степенью свободы.

В дальнейшем при проведении общих исследований о характере корней уравнения частот и свойствах форм свободных колебаний предположим, что коэффициенты a_{gk} , b_{gk} и c_{gk} являются соответственно коэффициентами кинетической энергии, функции рассеивания и потенциальной энергии.

Будем искать решение системы (113) в виде

$$q_k = A_k e^{st}, \quad (114)$$

что после подстановки в (113) и сокращения на неравный нулю общий множитель e^{st} приводит к системе однородных линейных уравнений относительно коэффициентов A_k

$$\sum_{k=1}^n (a_{gk} s^2 + b_{gk} s + c_{gk}) A_k = 0, \quad g=1; 2 \dots n. \quad (115)$$

Чтобы система однородных уравнений имела решения, отличные от нуля, т. е. чтобы могло существовать движение, определяемое формулой (114), определитель системы (115) должен быть равен нулю

$$\| a_{gk} s^2 + b_{gk} s + c_{gk} \| = 0, \quad (116)$$

где g —номер строки, k —номер столбца определителя.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением представляющего наибольший практический интерес случая, когда уравнение (116) не имеет кратных корней. В этом случае корню s_j уравнения (116) соответствует система чисел A_{kj} , определяемая однородной системой уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a_{gk} s_j^2 + b_{gk} s_j + c_{gk}) A_{kj} = 0, \quad g=1; 2 \dots n, \quad (117)$$

решая которую можно выразить все коэффициенты A_{kj} через один из них, т. е. коэффициенты A_{kj} будут определены с точностью до произвольного сомножителя; иногда в конкретных задачах некоторые из коэффициентов A_{kj} могут оказаться равными

нулю, и через них, конечно, нельзя выражать другие коэффициенты.

Решив систему (117) для $2n$ значений корней s_j , получим $2n$ систем коэффициентов A_{kj} , и так как система решений (114) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (113), то им будет также удовлетворять и система решений

$$q_k = \sum_{j=1}^{2n} A_{kj} e^{s_j t}. \quad (118)$$

Покажем, что при наличии комплексных корней уравнения (116), выражение (118) всегда будет действительным.

Если $-\mu_j + \lambda'_j i$ есть один из комплексных корней уравнения (116), то ему обязательно сопутствует корень $-\mu_j - \lambda'_j i$, так как уравнение (116) имеет вещественные коэффициенты. Если корню $s_j = -\mu_j + \lambda'_j i$ соответствуют при решении системы (117) коэффициенты $A_{kj} = v_{kj} + i\rho_{kj}$, то сопряженному корню $\bar{s}_j = -\mu_j - \lambda'_j i$ соответствуют сопряженные же коэффициенты $\bar{A}_{kj} = v_{kj} - i\rho_{kj}$; при замене корня s_j на сопряженный коэффициенты $a_{gk}s_j + b_{gk}s_j + c_{gk}$ системы (117) также становятся сопряженными.

Поэтому каждой паре сопряженных комплексных корней в выражении (118) соответствуют два сопряженных слагаемых, сумма которых будет вещественной

$$\begin{aligned} (v_{kj} + i\rho_{kj}) e^{(-\mu_j + \lambda'_j i)t} + (v_{kj} - i\rho_{kj}) e^{(-\mu_j - \lambda'_j i)t} = \\ = 2e^{-\mu_j t} (v_{kj} \cos \lambda'_j t - \rho_{kj} \sin \lambda'_j t), \end{aligned}$$

и выражение (118) может быть переписано в виде

$$q_k = 2 \sum_{j=1}^n e^{-\mu_j t} (v_{kj} \cos \lambda'_j t - \rho_{kj} \sin \lambda'_j t). \quad (119)$$

Нетрудно показать, что уравнение (116) имеет либо комплексные корни с отрицательной вещественной частью, либо отрицательные вещественные корни.

Предположим, что уравнение (116) имеет комплексные корни. Тогда, как было указано выше, эти корни будут попарно сопряженными и им будут соответствовать попарно сопряженные решения системы (115):

$$A_k = v_k + i\rho_k, \quad \bar{A}_k = v_k - i\rho_k.$$

Умножим g -ое уравнение системы (117) на A_g и просуммируем по всем g , что после подстановки вместо A_k и $\bar{A}_g$ их

выражений даст

$$\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{gk}s^2 + b_{gk}s + c_{gk}) (\nu_k \nu_g + \rho_k \rho_g) + \\ + i \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{gk}s^2 + b_{gk}s + c_{gk}) (\nu_g \rho_k - \nu_k \rho_g) = 0.$$

Вторая сумма тождественно равна нулю вследствие свойств взаимности (86), (92) и (95), первая же сумма может быть записана в виде

$$[T(\nu) + T(\rho)] s^2 + [\Phi(\nu) + \Phi(\rho)] s + [V(\nu) + V(\rho)] = 0, \quad (120)$$

где через $T(\gamma)$ и $\Phi(\gamma)$ обозначены численные значения кинетической энергии и функции рассеивания при $q_g = \gamma_g$, а через $V(\gamma)$ — значение потенциальной энергии при $q_g = \gamma_g$.

Решая квадратное уравнение (120), получим

$$s = -\mu \pm \lambda' i, \quad (121)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\Phi(\nu) + \Phi(\rho)}{T(\nu) + T(\rho)}, \quad (122)$$

$$\lambda' = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (123)$$

$$\lambda^2 = \frac{V(\nu) + V(\rho)}{T(\nu) + T(\rho)}. \quad (124)$$

Так как кинетическая и потенциальная энергии существенно положительны, а при колебаниях около положения устойчивого равновесия существенно положительна и функция рассеивания, то всегда $\mu > 0$, т. е. комплексный корень имеет отрицательную вещественную часть, а при малом сопротивлении, когда $\mu < \lambda$, величина λ' вещественна.

Если сопротивление значительное и $\mu > \lambda$, то сделанное нами предположение о том, что числа s являются комплексными, приводит к противоречию и, следовательно, является неприемлемым. В этом случае надо положить $\rho = 0$ и корни уравнения (120) будут представлены в виде

$$s = -\mu \pm \mu',$$

где μ определяется по формуле (122) при $\rho = 0$

$$\mu' = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2},$$

а λ определяется по формуле (124) при $\rho = 0$.

Заметим, что $\mu' < \mu$, так что все вещественные корни будут отрицательными.

Полученные формулы не могут быть использованы для вычисления корней уравнения (120), так как нам неизвестны значения величин ν и ρ , но они могут быть положены в основу приближенного способа определения корней, к чему мы в свое время вернемся, и позволяют сделать некоторые полезные выводы.

При отсутствии сопротивления корни уравнения (120), как это следует из формул (121) и (122), будут чисто мнимыми

$$s = \pm i\lambda \quad (125)$$

и каждой сопряженной паре корней будет соответствовать одна и та же система уравнений

$$\sum_{k=1}^n (-a_{gk}\lambda^2 + c_{gk}) \nu_k = 0, \quad (126)$$

т. е. коэффициенты ν_k оказываются вещественными, ибо коэффициенты системы (126) вещественны, а числа λ^2 могут быть определены как вещественные корни уравнения

$$\|c_{gk} - \lambda^2 a_{gk}\| = 0. \quad (127)$$

Таким образом, паре корней (125) соответствует сумма решений

$$\nu_k e^{i\lambda t} + \nu_k e^{-i\lambda t} = 2\nu_k \cos \lambda t,$$

удовлетворяющая, очевидно, дифференциальному уравнению

$$\ddot{p}(t) + \lambda^2 p(t) = 0. \quad (128)$$

Поэтому общее выражение для q_k может быть представлено при отсутствии сопротивления вместо выражения (119) в виде

$$q_k = \sum_{j=1}^n \nu_{kj} p_j(t), \quad (129)$$

где $p_j(t)$ определяется дифференциальным уравнением (128) при $\lambda = \lambda_j$, а коэффициенты ν_{kj} — системой уравнений (126) при $\lambda = \lambda_j$

$$\sum_{k=1}^n (c_{gk} - \lambda_j^2 a_{gk}) \nu_{kj} = 0, \quad g=1; 2 \dots n. \quad (130)$$

При малом сопротивлении величины μ будут малы и можно считать, что $\rho \ll \nu$. Поэтому вместо формул (122) и (124) можно написать

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\Phi(\nu)}{T(\nu)}, \quad (122')$$

$$\lambda^2 = \frac{V(\nu)}{T(\nu)}. \quad (131)$$

Приближенная формула (122') имеет большое практическое значение, так как позволяет приближенно, но достаточно точно

определить вещественную часть комплексного корня уравнения (116), для чего нужно предварительно решить задачу о свободных колебаниях системы без сопротивления, т. е. найти корни уравнения (127) и решением уравнений (130) определить систему чисел ν_{kj} ; напомним, что эти числа определяются с точностью до постоянного множителя.

Приведенное выше исследование показывает особую важность задачи о свободных колебаниях системы, к рассмотрению которой мы и перейдем.

Условимся в дальнейшем нумеровать корни уравнения (127) в порядке их возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_n.$$

На основании выражения (129) можно сделать вывод, что всякая обобщенная координата при колебаниях системы без сопротивления оказывается суммой простых гармонических колебаний, описываемых функциями $p_j(t)$.

Функции времени $p_j(t)$, определяемые дифференциальным уравнением (128) при $\lambda = \lambda_j$, называются главными координатами, а коэффициенты ν_{kj} — формами главных колебаний.

Обозначим через

$$q_k^{(j)} = \nu_{kj} p_j(t)$$

слагаемое в выражении (129), соответствующее j -ой главной координате. Отношение одноименных слагаемых для различных обобщенных координат определится соотношением

$$q_1^{(j)} : q_2^{(j)} : \dots : q_n^{(j)} = \nu_{1j} : \nu_{2j} : \dots : \nu_{nj},$$

т. е. не зависит от времени и во все время колебаний остается постоянным.

Таким образом, сложное колебательное движение системы с n степенями свободы может быть (при отсутствии сопротивления) представлено как результат наложения n простейших колебаний системы. В каждом из этих колебаний соотношение между обобщенными координатами остается постоянным в течение всего периода движения, а изменение обобщенных координат во времени происходит по гармоническому закону.

При наличии сопротивления, что видно из выражения (119), обобщенная координата также может рассматриваться как сумма простейших затухающих колебаний, но отношение

$$q_1^{(j)} : q_2^{(j)} : \dots : q_n^{(j)}$$

слагаемых

$$q_k^{(j)} = e^{-\mu_j t} (\nu_{kj}' \cos \lambda_{kj}' t - \rho_{kj}' \sin \lambda_{kj}' t)$$

оказывается зависящим от времени.

Установим теперь некоторые свойства форм свободных колебаний.

Запишем систему (130) для двух значений $\lambda = \lambda_j$ и $\lambda = \lambda_r$ в виде

$$\sum_{k=1}^n (c_{gk} - \lambda_j^2 a_{gk}) \nu_{kj} = 0, \quad g=1; 2 \dots n,$$

$$\sum_{g=1}^n (c_{kg} - \lambda_r^2 a_{kg}) \nu_{gr} = 0, \quad k=1; 2 \dots n.$$

Умножим g -ое уравнение первой системы на ν_{gr} и суммируем по всем g , умножим k -ое уравнение второй системы на ν_{kj} и суммируем по всем k , что дает:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n (c_{gk} - \lambda_j^2 a_{gk}) \nu_{kj} \nu_{gr} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n \sum_{g=1}^n (c_{kg} - \lambda_r^2 a_{kg}) \nu_{gr} \nu_{kj} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Меняя во втором выражении порядок суммирования и вычитая из первого, получим

$$\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n \left[(c_{gk} - c_{kg}) - (\lambda_j^2 a_{gk} - \lambda_r^2 a_{kg}) \right] \nu_{kj} \nu_{gr} = 0. \quad (133)$$

Если имеет место взаимность коэффициентов

$$a_{gk} = a_{kg}; \quad c_{gk} = c_{kg},$$

то из равенства (133) следует

$$(\lambda_j^2 - \lambda_r^2) \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \nu_{kj} \nu_{gr} = 0,$$

а так как по условию $\lambda_j \neq \lambda_r$ при $j \neq r$, то

$$\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \nu_{kj} \nu_{gr} = 0 \quad \text{при } j \neq r. \quad (134)$$

На основании условия (134) из любого равенства (132) следует второе условие

$$\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} \nu_{kj} \nu_{gr} = 0 \quad \text{при } j \neq r. \quad (135)$$

Условия (134) и (135), связывающие формы главных колебаний, соответствующие различным

частотам, называются условиями ортогональности форм главных колебаний.

Использованный нами способ вывода условий ортогональности является чисто алгебраическим и основан лишь на предположении о том, что коэффициенты a_{gk} и c_{gk} удовлетворяют условиям взаимности. Если система дифференциальных уравнений свободных колебаний выводится при помощи уравнений Лагранжа второго рода, то коэффициенты a_{gk} и c_{gk} всегда будут обладать свойством взаимности, но и при ином выводе системы дифференциальных уравнений условия ортогональности имеют место, если только коэффициенты a_{gk} и c_{gk} обладают свойством взаимности.

Если коэффициенты системы (130) не обладают свойством взаимности, то решением этой системы мы можем определить формы главных колебаний, но не сможем написать условия ортогональности.

В том случае, когда система дифференциальных уравнений составляется по схеме Лагранжа, возможен частный способ вывода условий ортогональности, позволяющий в ряде задач сразу написать эти условия.

Если бы мы с самого начала могли принять главные координаты за обобщенные, то при составлении уравнений Лагранжа должны были бы получиться уравнения (128) при $\lambda = \lambda_j$, что возможно если

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{p}_j^2, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n C_j p_j^2, \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

где

$$\lambda_j^2 = \frac{C_j}{M_j}. \quad (137)$$

В справедливости этого утверждения нетрудно убедиться непосредственным вычислением.

Для установления условий, при которых возможно представление кинетической и потенциальной энергий в виде (136), подставим выражение (129) в выражения (85) и (90), что после изменения порядка суммирования дает:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \dot{p}_j \dot{p}_r \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \gamma_{kj} \gamma_{gr}, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n p_j p_r \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} \gamma_{kj} \gamma_{gr}. \end{aligned}$$

Кинетическая и потенциальная энергии могут быть представлены в виде формул (136) только в том случае, если выполняются условия (134) и (135) и, кроме того:

$$M_j = \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \dot{y}_{kj} \dot{y}_{gj}, \quad (138)$$

$$C_j = \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} \dot{y}_{kj} \dot{y}_{gj}. \quad (139)$$

Величина M_j называется j -ой обобщенной массой, величина C_j — j -ой обобщенной жесткостью.

Таким образом, условия ортогональности (134) и (135) могут быть получены из условий обращения в нуль коэффициентов при произведениях обобщенных скоростей и обобщенных координат в преобразованных к главным координатам выражениях для кинетической и потенциальной энергий.

Подставляя выражение (129) в выражение (97) для функции рассеивания, после перемены порядка суммирования получим

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \dot{p}_j \dot{p}_r \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n b_{gk} \dot{y}_{kj} \dot{y}_{gr}. \quad (140)$$

Если

$$b_{gk} = a a_{gk} + c c_{gk}, \quad (141)$$

где a и c — постоянные, коэффициенты при произведениях обобщенных скоростей в выражении для преобразованной функции рассеивания пропадают, и она может быть записана в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n F_j \dot{p}_j^2, \quad (142)$$

где

$$F_j = \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n b_{gk} \dot{y}_{kj} \dot{y}_{gj} = a M_j + c C_j. \quad (143)$$

В этом случае главные координаты p_j , входящие в выражение (129), будут определяться дифференциальными уравнениями

$$M_j \ddot{p}_j + F_j \dot{p}_j + C_j p_j = 0, \quad (144)$$

так что формы главных колебаний будут существовать и при наличии сопротивления.

При приближенном учете сопротивления в преобразованном выражении (140) для функции рассеивания отбрасывают члены с произведением скоростей и принимают для функции рассеивания выражение (142), которое в этом случае будет приближенным; указанный способ приближенного учета со-

противления эквивалентен использованию формулы (122) и был предложен Рэлеем.

Входящие в общие выражения главной координаты постоянные интегрирования определяются по начальным значениям главных координат $p_j(0)$ и $\dot{p}_j(0)$ [см. выражение (8) при $\mu=0$ и $\lambda'=\lambda$], при решении же задач задаются начальные значения $q_k(0)$ и $\dot{q}_k(0)$ для обобщенных координат.

Если воспользоваться условиями ортогональности, например (134), то систему равенств (129) можно в общем виде решить относительно главных координат.

Умножая k -ое равенство (129) на $a_{gk}v_{gr}$ и суммируя по всем g и k , получим

$$\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} v_{gr} q_k = \sum_{j=1}^n p_j \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} v_{kj} v_{gr},$$

откуда, принимая во внимание условие (134) и обозначение (138),

$$p_r = \frac{1}{M_r} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} v_{gr} q_k. \quad (145)$$

Пользуясь формулой (145), можно выразить начальные значения главных координат через начальные значения обобщенных координат.

В выражении (129) под q_k и p_j можно понимать некоторые числа, что позволяет нам сделать вывод: всякая система n чисел $v_1, v_2, \dots, v_n$ может быть разложена по формам свободных колебаний системы с n степенями свободы

$$v_k = \sum_{j=1}^n v_{kj} d_j, \quad (146)$$

где величины d_r определяются по выражению (145) при замене p_r на d_r и q_k на v_k .

В заключение заметим, что в задаче об определении частот свободных колебаний при отсутствии сопротивления введение главных координат не вносит никаких упрощений, так как частоты определяются до нахождения форм колебаний. Введение главных координат представляет интерес для некоторых теоретических исследований и позволяет дать в общем виде решение задачи о вынужденных колебаниях системы при отсутствии сопротивления.

§ 6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Расчет вынужденных колебаний, т. е. интегрирование системы (82) или другой, ей эквивалентной, проще всего выполняется для системы без сопротивления или для системы с сопротивле-

нием, если коэффициенты функции рассеивания удовлетворяют условию (141).

Предположим, что решена задача о свободных колебаниях системы, т. е. определены частоты λ_j и формы свободных колебаний φ_{kj} . Тогда, производя замену координат по формуле (129), преобразуем кинетическую и потенциальную энергии к виду (136); что же касается функции рассеивания, то она приближенно преобразуется к виду (142); если коэффициенты функции рассеивания удовлетворяют условию (141), то выражение (142) является точным.

Подставляя выражения (136) и (142) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} + \frac{\partial V}{\partial p_j} = P_j, \quad (147)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$M_j \ddot{p}_j + F_j \dot{p}_j + C_j p_j = P_j, \quad (148)$$

в которой все уравнения разделены, т. е. задача свелась к нахождению вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы. После нахождения решений уравнений (148) обобщенные координаты должны быть определены по формуле (129).

Еще раз, во избежание недоразумений, подчеркнем, что при отсутствии сопротивления, т. е. при $F_j = 0$, мы получаем точное решение задачи о вынужденных колебаниях, при наличии же сопротивления, если не выполняется условие (141), решение получается приближенным, но при малом сопротивлении, с которым обычно приходится иметь дело, погрешность такого решения невелика.

Для фактического составления уравнений (148) необходимо вычислить коэффициенты M_j , F_j , C_j и обобщенную силу P_j .

Составление выражений (85) для кинетической энергии обычно не представляет затруднения, так что вычисление обобщенной массы M_j по формуле (138) всегда может быть выполнено. Обобщенная жесткость определяется по формуле (137).

Составление выражения для функции рассеивания также не представляет затруднений и коэффициенты F_j определяются по формуле (143).

Принимая во внимание, что обобщенная сила есть коэффициент при соответствующей вариации обобщенной координаты в общем выражении для суммы работ

$$\delta R = \sum_{g=1}^n Q_g \delta q_g, \quad (149)$$

произведем в выражении (149) замену вариаций δq_g согласно выражению

$$\delta q_k = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \delta p_j,$$

вытекающему из формулы (129). После перемены порядка суммирования

$$\delta R = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{g=1}^n Q_g \gamma_{gj} \right) \delta p_j,$$

поэтому

$$P_j = \sum_{g=1}^n Q_g \gamma_{gj}. \quad (150)$$

Если вводимые в расчет неизвестные функции времени не являются обобщенными координатами, то изложенный выше способ нахождения вынужденных колебаний неприменим. Мы не останавливаемся на рассмотрении этого вопроса, так как он имеет частный характер.

Когда на систему действует гармоническая возмущающая нагрузка и

$$P_j(t) = P_j \cos(\omega t + \delta), \quad (151)$$

можно, воспользовавшись выражениями (129), (29) и (24), получить общее выражение для вынужденных колебаний

$$q_k = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \alpha_j \frac{P_j}{N_j} \cos(\omega t + \delta - \varepsilon_j), \quad (152)$$

где [см. (23), (28), (30), (31), (1) и (148)]

$$\left. \begin{aligned} z_j &= \frac{\omega}{\lambda_j}, \quad \gamma_j = \frac{1}{2\lambda_j} \frac{F_j}{M_j}, \\ \alpha_j &= \frac{1}{\sqrt{(1 - z_j^2)^2 + 4\gamma_j^2 z_j^2}}, \\ \cos \varepsilon_j &= \alpha_j (1 - z_j^2), \quad \sin \varepsilon_j = \alpha_j 2\gamma_j z_j. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Задача об установившихся колебаниях системы при действии гармонической возмущающей нагрузки может быть решена и непосредственно, без использования метода главных координат. Переписав систему (82) для этого частного случая в виде

$$\sum_{k=1}^n (a_{gk} \ddot{q}_k + b_{gk} \dot{q}_k + c_{gk} q_k) = Q_g \cos(\omega t + \delta), \quad (154)$$

положим

$$q_k = A_k \cos \omega t + B_k \sin \omega t, \quad (155)$$

что, после подстановки в систему (154) и сравнения коэффициентов при тригонометрических функциях времени, приводит к си-

системе $2n$ линейных уравнений для определения коэффициентов A_k и B_k :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n [(c_{gk} - a_{gk}\omega^2) A_k + b_{gk}\omega B_k] &= Q_g, \quad g=1; 2 \dots n, \\ \sum_{k=1}^n [b_{gk}\omega A_k - (c_{gk} - a_{gk}\omega^2) B_k] &= 0, \quad g=1; 2 \dots n. \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

В последней системе для удобства все знаки изменены на обратные.

Решение совместной системы из $2n$ уравнений представляет обычно весьма трудоемкую работу и удобнее всего решать эту систему по методу Гаусса.

Если коэффициенты a_{gk} , b_{gk} и c_{gk} обладают свойством взаимности, то система (156) является канонической и для ее решения целесообразнее всего использовать сокращенный алгоритм Гаусса. Решение системы (156) существенно упрощается, если некоторые из коэффициентов равны нулю.

Для нахождения вынужденных колебаний системы при действии гармонической нагрузки можно было бы поступить так, как и при решении этого вопроса в § 3 для системы с одной степенью свободы.

Вводя в рассмотрение комплексную обобщенную силу $Q_g e^{(\omega t + \delta) i}$ и замечая, что

$$Q_g \cos(\omega t + \delta) = \operatorname{Re} Q_g e^{(\omega t + \delta) i},$$

перепишем систему (154) в виде

$$\sum_{k=1}^n (a_{gk} \ddot{q}_k + b_{gk} \dot{q}_k + c_{gk} q_k) = Q_g e^{(\omega t + \delta) i} \quad (157)$$

и будем искать ее решение в форме

$$\tilde{q}_k = A_k e^{(\omega t + \delta) i}. \quad (158)$$

Подставляя выражение (158) в систему (157), получим для определения коэффициентов A_k систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n (c_{gk} - a_{gk}\omega^2 + ib_{gk}\omega) A_k = Q_g. \quad (159)$$

Если найдены коэффициенты A_k , то решение системы (154) определится формулой

$$q_k = \operatorname{Re} \tilde{q}_k. \quad (160)$$

Указанный способ решения может представить интерес только в том случае, когда решение системы (159) выполнимо в общем

виде. Если же данную систему приходится решать обычным способом, т. е. полагать

$$A_k = v_k + p_k i$$

и отделять вещественную часть от мнимой, то этот способ никакими преимуществами не обладает.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрим колебание простейшей системы, изображенной на рис. 11.

Пусть q_1 и q_2 —абсолютные перемещения масс m_1 и m_2 , отсчитываемые от их положения статического равновесия, c_1 и c_2 —жесткости верхней и нижней пружин, β_1 —коэффициент сопротивления в абсолютном движении массы m_1 , β_2 —коэффициент сопротивления в относительном движении масс m_2 и m_1 .

На основании принципа Даламбера можно написать:

$$\begin{aligned} -m_1 \ddot{q}_1 - c_1 q_1 + c_2 (q_2 - q_1) - \beta_1 \dot{q}_1 + \beta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + H_1 \cos \omega t &= 0, \\ -m_2 \ddot{q}_2 - c_2 (q_2 - q_1) - \beta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + H_2 \cos \omega t &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 + c_2 (q_1 - q_2) + \beta_1 \dot{q}_1 + \beta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= H_1 \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) + \beta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= H_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Воспользовавшись системой (161), решим несколько вопросов, представляющих практический интерес.

1. Попробуем установить, при каких условиях обе частоты системы с двумя степенями свободы могут быть определены как частоты двух систем с одной степенью свободы каждая.

Для решения этого вопроса рассмотрим свободные колебания системы без сопротивления, когда дифференциальные уравнения преобразуются к виду

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 + c_2 (q_1 - q_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) &= 0, \end{aligned}$$

и, подставляя

$$q_1 = v_1 \cos \lambda t, \quad q_2 = v_2 \cos \lambda t,$$

получим систему однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \lambda^2) v_1 - c_2 v_2 &= 0, \\ -c_2 v_1 + (c_2 - m_2 \lambda^2) v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель, найдем уравнение частот

$$(c_1 + c_2 - m_1 \lambda^2) (c_2 - m_2 \lambda^2) - c_2^2 = 0$$

или

$$\lambda^4 - [\lambda_1^2 + (1 + a)\lambda_2^2]\lambda^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 = 0, \quad (162)$$

где

$\lambda_1^2 = \frac{c_1}{m_1}$ — есть квадрат частоты колебания одной массы m_1 ,

$\lambda_2^2 = \frac{c_2}{m_2}$ — есть квадрат частоты колебания массы m_2 , вычисленный в предположении неподвижности массы m_1 ,

$a = \frac{m_2}{m_1}$ — отношение масс.

Из уравнения (162) видно, что при a малом по сравнению с единицей, т. е. при малой по сравнению с m_1 массе m_2 , частоты с двумя степенями свободы мало отличаются от λ_1 и λ_2 .

Колебание большей массы m_1 называется общей вибрацией, а колебание меньшей массы m_2 — местной вибрацией. С последней часто приходится сталкиваться на практике. При определении частот свободных колебаний для местной вибрации можно считать остальную систему неподвижной.

2. Не следует думать, что практическая независимость частот местной и общей вибрации свидетельствует о независимости их вынужденных колебаний.

Принимая для простоты в системе (161) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, положим

$$q_1 = A_1 \cos \omega t, \quad q_2 = A_2 \cos \omega t,$$

что после подстановки и сравнения коэффициентов при одинаковых функциях времени приводит к системе уравнений

$$(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) A_1 - c_2 A_2 = H_1,$$

$$-c_2 A_1 + (c_2 - m_2 \omega^2) A_2 = H_2,$$

решая которую найдем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{H_1}{m_1} (\lambda_2^2 - \omega^2) + \frac{H_2}{m_2} \lambda_2^2 a \right], \\ A_2 &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{H_1}{m_1} \lambda_2^2 + \frac{H_2}{m_2} (\lambda_1^2 + a \lambda_2^2 - \omega^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

где

$$\Delta = \omega^4 - [\lambda_1^2 + (1 + a)\lambda_2^2]\omega^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2, \quad (164)$$

λ_1 , λ_2 и a были определены выше.

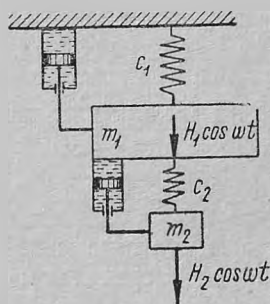


Рис. 11.

Если $\Delta \neq 0$, т. е. мы не попадаем в резонанс, то при $H_2 = 0$ и $\omega = \lambda_2$ амплитуда A_1 колебаний массы m_1 обращается в нуль. В этом случае масса m_2 , подвешенная к массе m_1 на пружине жесткостью c_2 , успокаивает вынужденные колебания массы m_1 и называется динамическим гасителем колебаний.

Успокоение колебаний массы m_1 происходит вследствие того, что в каждый момент времени реакция пружины c_2 равна по величине и обратна по знаку возмущающей силе $H_1 \cos \omega t$.

Действительно, пружина c_2 прикладывает к неподвижной массе m_1 усилие

$$R_2 = c_2 q_2 = c_2 A_2 \cos \omega t,$$

которое на основании (163) при $H_2 = 0$ и (164) при $\omega = \lambda_2$ определится формулой

$$R_2 = -\frac{c_2 H_1}{a \lambda_2^2 m_1} \cos \omega t;$$

если же принять во внимание выражения для a и λ_2^2 , то окончательно получим

$$R_2 = -H_1 \cos \omega t,$$

что и требовалось доказать.

Амплитуда вынужденных колебаний массы m_2 определится в рассматриваемом случае по формуле

$$A_2 = \frac{H_1}{a m_1 \lambda_2^2}$$

или, принимая во внимание выражения для a и λ_2^2 ,

$$A_2 = \frac{H_1}{c_2},$$

т. е. амплитуда колебаний массы m_2 равна статической деформации пружины при действии на нее силы H_1 .

Динамический гаситель колебаний применяется обычно в том случае, когда основная масса m_1 попадает в резонанс, т. е. при $\lambda_1 = \omega$. При выборе элементов гасителя, естественно, стремятся к тому, чтобы вес его был возможно меньше, другими словами, чтобы отношение a было мало по сравнению с единицей.

Однако величина отношения a не может быть взята очень малой, ибо при этом существенно возрастает амплитуда колебания гасителя, в чем можно убедиться следующим образом.

В резонансном случае

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \omega^2,$$

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{c_2}{m_2},$$

откуда

$$c_2 = ac_1.$$

Таким образом, амплитуда колебаний гасителя определится по формуле

$$A_2 = \frac{H_1}{c_1} \frac{1}{a},$$

а поскольку $\frac{H_1}{c_1}$ есть статическая деформация пружины при действии на нее силы H_1 , то из полученной формулы следует, что амплитуда колебания гасителя будет в $\frac{1}{a}$ раз больше, чем статическая деформация пружины c_1 .

Поэтому динамический гаситель колебаний при малом значении a можно использовать лишь в том случае, когда статическая деформация пружины c_1 при действии на нее силы H_1 достаточно мала.

Во всяком случае при проектировании гасителя удлинение пружины ограничивается либо из конструктивных соображений, либо из соображений ее прочности, и это накладывает ограничения на выбор элементов гасителя.

Так, например, для гашения колебаний в резонансном режиме элементы гасителя должны удовлетворять двум условиям:

$$\frac{c_2}{m_2} = \omega^2, \quad \frac{H_1}{c_1} \frac{1}{a} = A_2^{(0)},$$

где $A_2^{(0)}$ — допустимая амплитуда колебаний гасителя.

Динамический гаситель колебаний без сопротивления неустойчив в работе, т. е. при малом отклонении частоты возмущающей силы ω от значения $\omega = \lambda_2$ могут возникнуть значительные колебания массы m_1 . Это следует из того, что корни уравнения (162) при малом a мало отличаются от λ_1 и λ_2 .

Поэтому динамический гаситель без сопротивления применим лишь при строго постоянной частоте возмущающей силы, либо же при наличии автоматического регулирования частоты гасителя и возможности сохранения равенства частоты гасителя частоте возмущающей силы.

Иногда роль динамического гасителя колебаний могут играть отдельные части конструкции. Известны случаи, когда значительная вибрация днищевых перекрытий существенно уменьшала общую вибрацию корабля.

3. Как уже было указано выше, гаситель без сопротивления может при определенных условиях полностью погасить колебания основной массы m_1 , но оказывается неустойчивым в работе.

Если ввести в систему сопротивление в относительном движении гасителя, то такой гаситель не сможет полностью погасить колебания основной массы, но будет устойчив в работе.

Колебание рассматриваемой системы описывается системой уравнений (161) при $\beta_1=0$, $H_2=0$ и $\beta_2=\beta$. Вводя для удобства дальнейших выкладок комплексную силу $H_1 e^{i\omega t}$, перепишем систему (161) в виде

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + (c_1 + c_2) \tilde{q}_1 - \beta \tilde{q}_2 - c_2 \tilde{q}_2 &= H_1 e^{i\omega t}, \\ m_2 \ddot{q}_2 + \beta \dot{q}_2 + c_2 \tilde{q}_2 - \beta \tilde{q}_1 - c_2 \tilde{q}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Полагая

$$\tilde{q}_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad \tilde{q}_2 = A_2 e^{i\omega t},$$

после подстановки в систему (165) и сравнения коэффициентов при одинаковых функциях времени получим для определения коэффициентов A_1 и A_2 систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 + i\beta\omega) A_1 - (c_2 + i\beta\omega) A_2 &= H_1, \\ -(c_2 + i\beta\omega) A_1 + (c_2 - m_2 \omega^2 + i\beta\omega) A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

В дальнейшем нас будет интересовать выражение для амплитуды перемещения массы m_1 , а так как

$$q_1 = \operatorname{Re} A_1 e^{i\omega t} = v_1 \cos \omega t - \rho_1 \sin \omega t,$$

где

$$A_1 = v_1 + i\rho_1,$$

то

$$q_{1\max} = \sqrt{v_1^2 + \rho_1^2} = |A_1|,$$

и задача сводится к определению модуля комплексного числа A_1 .

Решение системы (166) и исследование его в общем виде достаточно громоздко. Мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда при попадании в резонанс и при отсутствии сопротивления возможно полное погашение колебаний. В этом случае, как указано выше,

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{c_2}{m_2} = \lambda^2 = \text{const}, \quad (167)$$

что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Вводя обозначения:

$$z = \frac{\omega}{\lambda}, \quad \psi = \frac{\beta}{\sqrt{c_2 m_2}}, \quad a = \frac{m_2}{m_1} \quad (168)$$

и принимая во внимание соотношения (167), преобразуем систему (166) к виду

$$(1 + a - z^2 + ia\psi z) A_1 - (a + ia\psi z) A_2 = \frac{H_1}{c_1} \cdot$$

$$-(1 + i\psi z) A_1 + (1 - z^2 + i\psi z) = 0,$$

решая которую можно получить

$$\alpha_0 = \frac{|A_1|}{q_{\text{ст}}} = \frac{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2\psi^2}}{\sqrt{[-az^2 + (1 - z^2)^2] + \psi^2 z^2 [-1 + (1 + a)z^2]^2}}, \quad (169)$$

где

$$q_{\text{ст}} = \frac{H_1}{c_1}$$

есть статическое отклонение массы m_1 от положения равновесия.

Если $\psi = 0$, то при $z = 1$ амплитуда $A_1 = 0$; так и должно быть на основании предыдущего исследования.

В предельном случае, когда $\psi = \infty$,

$$\alpha_0 = \left| \frac{1}{-1 + (1 + a)z^2} \right|, \quad (170)$$

т. е. рассматриваемая система колеблется как масса $m_1 + m_2$ на пружине жесткостью c_1 , что и соответствует физическому смыслу.

Если $\psi \neq 0$, то амплитуда не может обратиться в нуль и возникает вопрос о выборе оптимального значения коэффициента сопротивления.

Рассматривая коэффициент динамичности как функцию величин z и ψ , выберем значение ψ таким образом, чтобы максимумы резонансной кривой были расположены наиболее низко, т. е. чтобы были выполнены условия:

$$\frac{\partial \alpha_0^2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0^2}{\partial \psi} = 0.$$

На рис. 12 приведены графики коэффициента динамичности для различных случаев и значений коэффициента сопротивления. Кривая a соответствует системе с одной степенью свободы, кривая b — гасителю без сопротивления, кривая $в$ — гасителю с сопротивлением и кривая $г$ — бесконечно большому значению коэффициента сопротивления, когда система с гасителем вырождается в систему с одной степенью свободы.

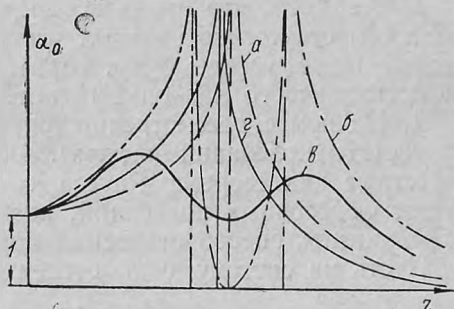


Рис. 12.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопросы о влиянии изменений, вносимых в упругую систему, на ее колебания. При выполнении исследований будем предполагать, что для рассматриваемой системы известны частоты, формы свободных колебаний, обобщенные массы и обобщенные жесткости. Таким образом, считаем известными выражения:

$$q_k = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} p_j(t), \quad (171)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{p}_j^2(t), \quad V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n C_j p_j^2(t), \quad (172)$$

$$\lambda_j^2 = \frac{C_j}{M_j}. \quad (173)$$

Подчеркнем, что принимая выражения (171) и (172), мы предполагаем отсутствие кратных частот и, следовательно, все полученные ниже выводы будут справедливы лишь для этого случая, представляющего наибольший интерес.

1. Начнем с рассмотрения вопроса о влиянии наложения связи на частоты колебаний системы. Результаты этого исследования, известные как теорема Раусса о влиянии наложения связи на частоты свободных колебаний, позволят нам в следующем параграфе указать способ отделения корней уравнения частот.

Пусть на систему с n степенями свободы наложена связь

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0,$$

превращающая ее в систему с $n-1$ степенью свободы. Так как мы рассматриваем малые колебания, то, раскладывая уравнение связи в ряд Маклорена, можем записать его в виде

$$\sum_{k=1}^n f'_k q_k = 0, \quad (174)$$

где

$$f'_k = \frac{\partial f}{\partial q_k} \text{ при } q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0.$$

Подставляя в уравнение связи (174) выражение (171), преобразуем его к виду

$$\sum_{i=1}^n B_i p_i = 0, \quad (175)$$

где

$$B_j = \sum_{k=1}^n f'_k \gamma_{kj}. \quad (176)$$

Чтобы решить задачу о колебаниях системы с наложенной связью, примем за обобщенные координаты $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ и, воспользовавшись уравнением связи (175), найдем

$$p_n = -\frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n-1} B_j p_j, \quad (177)$$

после чего выражения (172) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} M_j \dot{p}_j^2 + \frac{M_n}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} B_j B_i \dot{p}_j \dot{p}_i \right], \\ V &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} C_j p_j^2 + \frac{C_n}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} B_j B_i p_j p_i \right]. \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Выполненные преобразования справедливы, если $B_n \neq 0$, что мы можем предполагать не умаляя общности, так как хоть один из коэффициентов B_j должен быть отличен от нуля. Если бы все коэффициенты B_j были равны нулю, то это свидетельствовало бы о том, что никаких связей на систему не наложено.

Подставляя выражения (178) в уравнения Лагранжа (147) при $\Phi \equiv 0$ и $P_j \equiv 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$M_j \ddot{p}_j + C_j p_j + \frac{B_j}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} B_i (M_n \ddot{p}_i + C_n p_i) = 0, \quad j=1; 2 \dots n-1 \quad (179)$$

которая подстановкой

$$p_j = A_j \cos \lambda t$$

преобразуется в систему линейных однородных уравнений

$$M_j (\lambda_j^2 - \lambda^2) A_j + \frac{B_j M_n}{B_n^2} (\lambda_n^2 - \lambda^2) B = 0, \quad (180)$$

где

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i. \quad (181)$$

Решая уравнение (180) относительно A_j , получим

$$A_j = -\frac{B_j M_n}{B_n^2 M_j} \frac{\lambda_n^2 - \lambda^2}{\lambda_j^2 - \lambda^2} B, \quad (182)$$

что после подстановки в выражение (181) и сокращения на $B \neq 0$ приводит к уравнению частот

$$-1 = \frac{M_n}{B_n^2} (\lambda_n^2 - \lambda^2) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_j^2}{M_j} \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

или

$$\sum_{j=1}^n \frac{B_j^2}{M_j} \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda^2} = 0. \quad (183)$$

При $\lambda=0$ левая часть уравнения (183) больше нуля, при $B_j \neq 0$ и переходе через значение $\lambda=\lambda_j$ терпит разрыв непрерывности и меняет знак. Нетрудно сообразить, что

$$\lambda_j < \lambda_j^* < \lambda_{j+1},$$

где λ_j^* — j -ый корень уравнения (183).

В этом можно также убедиться, рассматривая график уравнения (183), изображенный на рис. 13. Если некоторые из коэффициентов B_j равны нулю, то уравнение (183) не содержит всех частот, так как в нем отсутствуют члены с равными нулю значениями B_j .

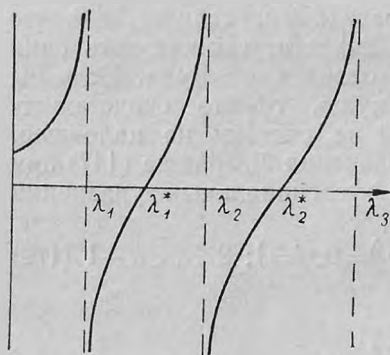


Рис. 13.

В этом случае соответствующие обобщенные координаты p_j , как видно из уравнения (179), определяются отдельными дифференциальными уравнениями, т. е. называются главными координатами, и соответствующие им частоты λ_j^* совпадают с частотами λ_j исходной системы.

Поэтому соотношение (184) следует в общем случае писать в виде

$$\lambda_j \leq \lambda_j^* < \lambda_{j+1}, \quad (185)$$

т. е. при наложении связи на систему частоты преобразованной системы либо располагаются между частотами исходной системы (разделяют их), либо могут быть равны соответствующей по номеру частоте исходной системы.

В справедливости соотношения (185) можно убедиться, рассматривая расположение корней уравнения (183) при стремлении к нулю одного из коэффициентов B_j .

Пусть, например, B_2 стремится к нулю. Тогда перепишем уравнение (183) в виде

$$\sum_{j=1}^n \frac{B_j^2}{M_j} \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda^2} = - \frac{B_2^2}{M_2} \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda^2}, \quad (186)$$

где штрих у суммы обозначает, что пропускается член, соответствующий $j=2$.

На рис. 14 представлен график, на котором корни уравнения (186) определяются как абсциссы точек пересечения кривых y_2 , выражающих левую часть уравнения (186), и кривой, графически выражающей правую часть того же уравнения.

При уменьшении B_2 кривые y_2 будут все более тесно вписываться в прямой угол и, очевидно, что λ_2^* будет стремиться к λ_2 .

2. Рассмотрим теперь вопрос о том, возможно ли в системе общего вида погасить вынужденные колебания с помощью гасителя.

При присоединении гасителя к системе число степеней свободы увеличивается на единицу и поэтому решение поставленного вопроса сводится к исследованию вынужденных колебаний системы, получившей лишнюю степень свободы.

Примем за обобщенные координаты главные координаты p_j исходной системы и координату q , являющуюся обобщенным перемещением гасителя. Тогда кинетическая и потенциальная энергии системы запишутся в общем случае в виде:

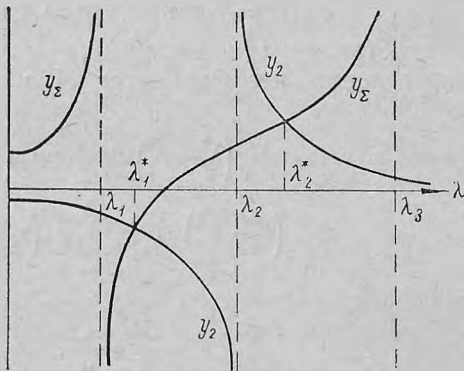


Рис. 14.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{p}_j^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 + \mu \dot{q} \sum_{j=1}^n \mu_j \dot{p}_j, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n C_j p_j^2 + \frac{1}{2} \sigma q^2 + \sigma q \sum_{j=1}^n \sigma_j p_j, \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

где безразмерные коэффициенты μ_j и σ_j зависят от структуры системы. Если гаситель реализуется в виде массы, присоединяемой к исходной системе на упругой связи, то $\mu_j=0$, в общем же случае коэффициенты $\mu_j \neq 0$. Коэффициенты σ_j не могут быть все равны нулю, так как это свидетельствовало бы о том, что гаситель присоединен к неподвижному основанию (q —есть абсолютная координата).

Подставляя выражения (187) в уравнения Лагранжа, получим:

$$\left. \begin{aligned} M_j \ddot{p}_j + C_j \dot{p}_j + \mu \mu_j \ddot{q} + \sigma \sigma_j q &= P_j(t), \\ \mu \ddot{q} + \sigma q + \sum_{j=1}^n (\mu \mu_j \ddot{p}_j + \sigma \sigma_j p_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

В последнем уравнении обобщенная сила равна нулю, так как к гасителю возмущающие силы не прикладываются.

Полагая

$$P_j(t) = P_j \cos \omega t, \quad p_j = A_j \cos \omega t, \quad q = A \cos \omega t \quad (189)$$

и подставляя эти выражения в уравнения (188), получим для определения коэффициентов A_j и A следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} M_j (\lambda_j^2 - \omega^2) A_j + \mu \mu_j (\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2) A &= P_j, \\ (\lambda_q^2 - \omega^2) A + \sum_{j=1}^n \mu_j (\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2) A_j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

где

$$\lambda_q^2 = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \nu_j = \frac{\sigma_j}{\mu_j}, \quad (191)$$

а λ_j определяется формулой (173); λ_q есть частота колебаний гасителя при прикреплении упругой связи к неподвижному основанию.

Решая первое уравнение (190) относительно A_j , найдем

$$A_j = \frac{1}{M_j (\lambda_j^2 - \omega^2)} [P_j - \mu \mu_j (\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2) A]. \quad (192)$$

Подставляя же выражение (192) во второе уравнение (190), получим уравнение для определения амплитуды A

$$\left[(\lambda_q^2 - \omega^2) - \mu \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^2}{M_j} \frac{(\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2)^2}{\lambda_j^2 - \omega^2} \right] A + \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{M_j} \frac{\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2}{\lambda_j^2 - \omega^2} P_j = 0. \quad (193)$$

Таким образом, задача о вынужденных колебаниях рассматриваемой системы с гасителем решается в общем виде, и мы имеем возможность выбрать элементы гасителя так, чтобы колебание системы с гасителем удовлетворяло заранее заданным условиям.

Число этих условий должно быть не более двух—мы можем распоряжаться лишь двумя параметрами гасителя μ и σ .

Пусть, например, элементы гасителя нужно подобрать таким образом, чтобы в системе отсутствовали колебания, соответствующие s -ой главной координате исходной системы. Такая задача возникает в случае совпадения частоты возмущающей силы ω с s -ой частотой λ_s свободных колебаний исходной системы.

В этом случае $A_s=0$ и из выражения (192) при $j=s$ получим

$$A = \frac{P_s}{\mu \mu_s (\nu_s \lambda_q^2 - \omega^2)}. \quad (194)$$

Подставляя выражение (194) в уравнение (193), преобразуем его к виду

$$\left[(\lambda_q^2 - \omega^2) - \mu \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^2 (\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2)^2}{M_j (\lambda_j^2 - \omega^2)} \right] \frac{P_s}{\mu \mu_s (\nu_s \lambda_q^2 - \omega^2)} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{M_j} \frac{\nu_j \lambda_q^2 - \omega^2}{\lambda_j^2 - \omega^2} P_j = 0, \quad (195)$$

где штрих у сумм обозначает, что при суммировании нужно пропускать член, соответствующий $j=s$.

Уравнение (195) устанавливает одну связь между элементами гасителя. Второе уравнение связи между элементами гасителя можно установить, если ограничить амплитуду деформации упругой связи, как мы уже делали в § 7. Это условие нельзя записать в общем виде и его следует составлять для каждой системы частного вида.

В заключение нашего исследования рассмотрим вопрос о том, как изменяются частоты исходной системы при присоединении к ней гасителя.

Уравнение частот можно получить, если положить в уравнении (193) $\omega = \lambda$, $P_j = 0$ и предположить $A \neq 0$, т. е. приравнять нулю квадратную скобку при A , что дает

$$\frac{1}{\mu} (\lambda_q^2 - \lambda^2) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^2 (\nu_j \lambda_q^2 - \lambda^2)^2}{M_j (\lambda_j^2 - \lambda^2)}. \quad (196)$$

На рис. 15 приведено графическое решение уравнения (196) для $n=4$, причем корни уравнения определяются абсциссами

пересечений кривых и прямой. Из рассмотрения этого графика можно сделать следующие выводы:

1) $\lambda_j^* < \lambda$, т. е. частоты системы с гасителем ниже соответствующих частот системы без гасителя;

2) При малых μ (прямая сильно наклонена к оси λ^2) частоты системы с гасителем мало отличаются от частот системы без гасителя за исключением частот, лежащих вблизи $\lambda = \lambda_q$.

Если $\lambda_q = \lambda_j$, т. е. совпадает с одной из частот исходной системы, то вблизи λ_j располагаются две частоты системы с гасителем $\lambda_j^* < \lambda_j$ и $\lambda_{j+1}^* > \lambda_j$.

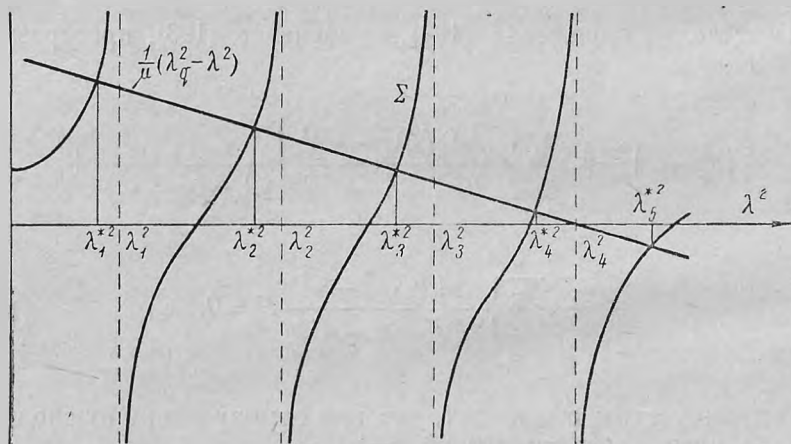


Рис. 15.

Гаситель без сопротивления оказывается неустойчивым в работе, так как если его элементы подобраны из условия погашения резонансных колебаний при $\omega = \lambda_j$, то при малом изменении частоты возмущающей силы система с гасителем попадает в резонанс.

Это свойство гасителя без сопротивления было уже отмечено в предыдущем параграфе.

§ 9. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Основной и самой трудоемкой задачей при исследовании свободных колебаний системы с несколькими степенями свободы является определение частот свободных колебаний. Только после определения частот возможно определение форм свободных колебаний и решение задачи до конца.

Исключением является лишь случай действия гармонической возмущающей нагрузки, когда вынужденные колебания могут

быть определены непосредственно, без предварительного нахождения частот и форм свободных колебаний.

Решение уравнения частот общего вида (116) при наличии сопротивления может быть произведено лишь после развертывания определителя по степеням s , затем надо воспользоваться численными методами определения комплексных корней алгебраических уравнений высших степеней. Решение линейной системы (117) также оказывается трудоемким, ибо коэффициенты будут комплексными.

В § 5 уже указывалось на возможность приближенного учета влияния сопротивления на колебания системы, и мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением вопроса об определении частот и форм свободных колебаний при отсутствии сопротивления.

Прежде чем переходить к рассмотрению алгебраических способов определения частот и форм свободных колебаний, остановимся на некоторых частных приемах, которые позволяют достаточно точно находить низшие частоты и формы свободных колебаний, представляющие в ряде случаев наибольший интерес.

Энергетический метод. При отсутствии сил сопротивления частоты свободных колебаний могут быть определены по формуле (131); последняя, принимая во внимание выражения (85) и (90), может быть переписана в виде

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} \gamma_g \gamma_k}{\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \gamma_g \gamma_k}. \quad (197)$$

Если формы свободных колебаний γ_{kj} известны, то по формуле (197) можно найти точное значение λ_j ; если же мы подставим в эту формулу приближенные значения соответствующих форм колебаний (которые могут быть иногда определены на основании физических соображений), то формула (197) может быть использована для получения приближенного значения частоты.

Покажем, что при пользовании формулой (197) определяемое значение частоты не может быть меньше первой, т. е. всегда

$$\lambda \geq \lambda_1. \quad (198)$$

Для доказательства этого свойства формулы (197) предположим, что числа γ_k разложены в соответствии с выражением (146) по формам свободных колебаний. Подставляя выражение (146) при $k=g$ и $k=g$ в формулу (197), изменяя порядок суммирования и принимая во внимание условия ортогональности (134) и

(135), а также формулы (138), (139) и (137), преобразуем формулу (197) к виду

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 M_j d_j^2}{\sum_{j=1}^n M_j d_j^2} = \lambda_1^2 \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^2 M_j d_j^2}{\sum_{j=1}^n M_j d_j^2}.$$

Так как по условию $M_j > 0$ и

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_n,$$

то числитель полученной формулы больше знаменателя, откуда и следует справедливость формулы (198).

Если

$$d_1 = d_2 = \dots = d_{r-1} = 0,$$

т. е. выбранная приближенная форма колебаний ортогональна по отношению к $r-1$ низшей форме колебаний, то

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{j=r}^n \lambda_j^2 M_j d_j^2}{\sum_{j=r}^n M_j d_j^2} = \lambda_r^2 \frac{\sum_{j=r}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_r}\right)^2 M_j d_j^2}{\sum_{j=r}^n M_j d_j^2} \geq \lambda_r^2.$$

Поэтому при приближенном определении энергетическим методом высших частот мы не можем определить даже знака погрешности, так как приближенные формы колебаний не ортогональны по отношению к низшим.

Нетрудно доказать теорему Релея о том, что в действительном движении частоты колебаний являются минимальными, т. е.

$$\frac{d\lambda^2}{d\nu_k} = 0. \quad (199)$$

Перепишав формулу (197) в виде

$$\sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} \nu_g \nu_k - \lambda^2 \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n a_{gk} \nu_g \nu_k = 0,$$

воспользовавшись правилом дифференцирования неявных функций и условием (199), приходим к исходной системе (130) при $\lambda_j = \lambda$ и $\nu_{kj} = \nu_k$, что и доказывает теорему Релея.

Изложение теории колебаний может быть построено на использовании формулы (199), но мы не считаем такой способ достаточно наглядным и будем в дальнейшем в основном пользоваться дифференциальными уравнениями движения.

Метод последовательных приближений. Если система дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания системы, решена относительно перемещений, например, составлена обратным методом, т. е. может быть записана в виде [см. уравнение (106)]

$$q_r = - \sum_{k=1}^n K_{rk} \ddot{q}_k, \quad (200)$$

то, полагая в ней

$$q_k = v_k \cos(\lambda t + \epsilon),$$

получим для определения форм свободных колебаний систему однородных уравнений

$$v_r = \lambda^2 \sum_{k=1}^n K_{rk} v_k, \quad (201)$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{v_r}{\sum_{k=1}^n K_{rk} v_k}. \quad (202)$$

Формула (202) может быть использована для определения частот свободных колебаний при подстановке в нее приближенных значений форм колебаний. Обычно этой формулой не пользуются, так как нельзя указать знак погрешности при определении частоты.

Покажем, что если вычислять величины $v_r^{(p)}$ по рекуррентной формуле

$$v_r^{(p)} = \sum_{k=1}^n K_{rk} v_k^{(p-1)}, \quad (203)$$

где $v_k^{(0)}$ — произвольно выбранная система чисел, не ортогональная к первой форме колебаний, то мы придем к определению первой формы колебаний, а квадрат первой частоты определится по формуле

$$\lambda_1^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{v_r^{(p-1)}}{v_r^{(p)}}$$

или приближенно

$$\lambda_1^2 \approx \frac{v_r^{(p-1)}}{v_r^{(p)}}. \quad (204)$$

В соответствии с формулой (146) можно положить

$$v_k^{(0)} = \sum_{j=1}^n v_{kj} d_j, \quad (205)$$

где по условию $d_1 \neq 0$. Подставляя выражение (205) в (203) при $p=1$, найдем

$$v_r^{(1)} = \sum_{k=1}^n K_{rk} v_k^{(0)} = \sum_{j=1}^n d_j \sum_{k=1}^n K_{rk} v_{kj}.$$

Внутренняя сумма на основании системы (201) при $\lambda = \lambda_j$ и $v_k = v_{kj}$ равна $\frac{v_{rj}}{\lambda_j^2}$, так что

$$v_r^{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{v_{rj}}{\lambda_j^2} d_j$$

или вообще

$$v_r^{(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{v_{rj}}{\lambda_j^{2p}} d_j. \quad (206)$$

Если $d_1 \neq 0$, а по условию

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n,$$

то при больших значениях p

$$v_r^{(p)} = \frac{1}{\lambda_1^{2p}} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right)^{2p} v_{rj} d_j \approx \frac{d_1}{\lambda_1^{2p}} v_{r1}, \quad (207)$$

т. е. мы действительно приходим к определению первой формы колебаний. Воспользовавшись формулой (207), нетрудно доказать справедливость соотношения (204).

Если бы мы выбрали величины $v_r^{(0)}$ ортогональными по отношению к $s-1$ низшей форме колебаний ($d_1 = d_2 = \dots = d_{s-1} = 0$), то выражение (206) должно было бы быть записано в виде

$$v_r^{(p)} = \sum_{j=s}^n \frac{v_{rj}}{\lambda_j^{2p}} d_j = \frac{1}{\lambda_s^{2p}} \sum_{j=s}^n \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_j} \right)^{2p} v_{rj} d_j \approx \frac{d_s}{\lambda_s^{2p}} v_{rs}, \quad (208)$$

т. е. мы пришли бы к определению s -ой формы свободных колебаний, и соответствующие частоты λ_s могли бы быть определены по формуле (204).

Быстрота сходимости процесса последовательных приближений—возможность отбрасывания в выражениях (207) и (208) всех

членов, кроме первого,—зависит как от соотношения коэффициентов d_j , т. е. выбора исходной формы колебаний, так и от соотношения частот свободных колебаний.

Чем меньше отношение $\lambda_s : \lambda_{s+1}$, тем меньше последовательных приближений можно будет сделать для получения достаточно точных результатов.

Обычно

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\lambda_2}{\lambda_3} < \dots$$

и процесс последовательных приближений лучше всего сходится при определении первой формы свободных колебаний. С увеличением номера формы колебаний сходимость процесса существенно ухудшается.

Применение процесса последовательных приближений для определения первой формы свободных колебаний оказывается наиболее эффективным в тех задачах, где первая и вторая частоты значительно отличаются одна от другой.

При использовании метода последовательных приближений для определения высших форм колебаний нужно, во-первых, взять исходные формы колебаний ортогональными по отношению ко всем ранее найденным и, во-вторых, нужно, чтобы все последовательные приближения тоже были ортогональны к ранее найденным формам.

Указанные условия могут быть выполнены в случае применения метода последовательной ортогонализации, на рассмотрении которого мы остановимся в § 31, так как он практически используется лишь при определении форм свободных колебаний непризматических балок.

При определении форм свободных колебаний методом последовательных приближений обычно для определения частот пользуются не формулой (204), а определяют частоты с помощью первого приближения энергетического метода, принимая за форму свободных колебаний форму, найденную методом последовательных приближений.

Такой способ определения частот называется комбинированным методом.

Численные методы. Рассмотренные выше способы вычисления форм и частот свободных колебаний пригодны лишь для определения низших частот и форм, для определения же высших частот и форм приходится применять численные методы.

Решение уравнения частот

$$f(\lambda^2) = \|c_{gk} - \lambda^2 a_{gk}\| = 0, \quad (209)$$

если это уравнение выше четвертой степени (определитель выше второго порядка), производится обычно путем подбора, т. е. за-

даются рядом значений λ , строят график функции $f(\lambda^2)$ и путем графической интерполяции находят нужные корни.

Вычисление частных значений функции $f(\lambda^2)$ возможно либо непосредственно, без разворачивания определителя по степеням λ^2 , либо же после представления $f(\lambda^2)$ в виде полинома

$$f(\lambda^2) = a_n \lambda^{2n} + a_{n-1} \lambda^{2(n-1)} + \dots + a_1 \lambda^2 + a_0.$$

Академиком А. Н. Крыловым был разработан специальный прием вычисления, применимый для определителей, у которых величина λ^2 или $z = \lambda^{-2}$ входит лишь в элементы, находящиеся на главной диагонали. Такой вид уравнения частот получится, если систему дифференциальных уравнений решить либо относительно ускорений, либо относительно обобщенных координат; система последнего вида может быть получена сразу, если составлять дифференциальные уравнения обратным методом.

Существует также метод А. М. Данилевского, заключающийся в приведении определителя предыдущего типа к виду определителя Фробениуса, но неясно, приводит ли этот способ к меньшему объему вычислений, чем указанный выше.

Теоретически наиболее простым способом разворачивания определителя (209) по степеням λ^2 является следующий.

Для $n+1$ -го значения λ_j путем вычисления $n+1$ -го определителя порядка n находят значение функций $f_j = f(\lambda_j^2)$, после чего решают систему уравнений

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda_j^{2k} = f_j, \quad j=1; 2 \dots n+1, \quad (210)$$

из которой определяют значения коэффициентов a_k .

Вместо решения системы уравнений (210) можно воспользоваться интерполяционной формулой Лагранжа, согласно которой

$$f(\lambda^2) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{P_j(\lambda^2)}{P_j(\lambda_j^2)} f_j, \quad (211)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_j(\lambda^2) &= \frac{P(\lambda^2)}{\lambda^2 - \lambda_j^2}, \\ P(\lambda^2) &= (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) \dots (\lambda^2 - \lambda_{n+1}^2). \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Как известно, интерполяционный полином для алгебраического полинома является единственным.

Заметим, что численное вычисление определителя, т. е. определение значений величин f_j , должно быть произведено достаточно точно.

Если воспользоваться формулами Вьета, связывающими коэффициенты алгебраического уравнения с его корнями, то выражение (211) можно представить в виде полинома по степеням λ^2 . Мы на этом не останавливаемся, так как получаются достаточно громоздкие формулы для определения коэффициентов полинома.¹

В некоторых случаях целесообразнее решать уравнение частот путем подбора, для чего требуется построить график функции $f(\lambda^2)$, т. е. значительное число раз определить числовую величину определителя порядка n .

Если достаточно вычислить несколько низших корней уравнения частот, то лучше сделать это путем подбора, не развертывая уравнения по степеням λ^2 , если же нужно вычислить все корни, то для уменьшения объема вычислений следует развернуть определитель по степеням λ^2 , а затем строить график функции $f(\lambda^2)$.

Во всяком случае, при любом способе развертывания уравнения частот, а также и при нахождении частот путем подбора необходимо вычислять значения числовых определителей.

Теоретические схемы вычисления определителей путем последовательного развертывания их по элементам любой строки или столбца непригодны, так как приводят к вычислению малой разности. Мы считаем наиболее рациональным использовать для вычисления определителей алгоритм Гаусса. При вычислении по схеме Гаусса определитель преобразованной системы с треугольной матрицей коэффициентов равен определителю исходной системы; величина же определителя системы с треугольной матрицей равна произведению его элементов, стоящих на главной диагонали.

Покажем применение алгоритма Гаусса на примере решения системы уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + b_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + b_2 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + b_3 &= 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + b_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

Все вычисления приведены в табл. 4, заполнение которой производится следующим образом.

В строке 1 записываются коэффициенты первого уравнения системы (213), а в последнем столбце, служащем для контроля

¹ См. книгу В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, М., 1950, где указаны интерполяционные полиномы другого вида и приведены таблицы, облегчающие построение этих полиномов.

Таблица 4

N	x_1	x_2	x_3	x_4	l	S
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	S_1
I	-1	$-\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$-\frac{b_1}{a_{11}}$	$-\frac{S_1}{a_{11}}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	S_2
I · a_{21}	$-a_{21}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{21}$
$\Sigma = 2^{(1)}$		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$S_2^{(1)}$
II		-1	$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	S_3
I · a_{31}	$-a_{31}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{31}$
II · $a_{32}^{(1)}$		$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{32}^{(1)}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{32}^{(1)}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{32}^{(1)}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{32}^{(1)}$	
$\Sigma = 3^{(2)}$			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$S_3^{(2)}$
III			-1	$-\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$-\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	S_4
I · a_{41}	$-a_{41}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{41}$
II · $a_{42}^{(1)}$		$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{42}^{(1)}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{42}^{(1)}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{42}^{(1)}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{42}^{(1)}$	
III · $a_{43}^{(2)}$			$-\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{43}^{(2)}$	$-\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{43}^{(2)}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{43}^{(2)}$	
$\Sigma = 4^{(3)}$				$a_{44}^{(3)}$	$b_4^{(3)}$	$S_4^{(3)}$

правильности вычислений, сумма всех коэффициентов, стоящих в соответствующей строке.

Заполнение строки I не требует пояснений.

В строке 2 записываются коэффициенты второго уравнения и затем производится исключение неизвестного x_1 при помощи I — преобразованного уравнения 1.

В строке 2⁽¹⁾ пишем сумму двух вышележащих строк, т. е. коэффициенты уравнения, получающегося из уравнения 2 в результате исключения из него неизвестного x_1 при помощи первого уравнения. Нужно следить за тем, чтобы сумма коэффициентов в строке 2⁽¹⁾ была равна величине $S_2^{(1)}$, вычисленной независимо.

В строке II записано преобразованное уравнение 2⁽¹⁾.

В строке 3 дается третье уравнение и из него исключается неизвестное x_1 при помощи преобразованного уравнения I. Записанная под чертой в столбце x_2 величина $-a_{32}^{(1)}$ является суммой двух вышележащих коэффициентов с обратным знаком и необходима для исключения неизвестной x_2 при помощи преобразованного уравнения II. В строке 3⁽²⁾ пишется сумма трех вышележащих строк, т. е. коэффициент третьего преобразованного уравнения, получающегося в результате исключения неизвестных x_1 и x_2 из третьего уравнения.

Последующие преобразования производятся описанным выше способом и дополнительных пояснений не требуют.

Если необходимо решить систему уравнений, то мы берем систему уравнений 1, 2⁽¹⁾, 3⁽²⁾ и 4⁽³⁾ и обратным ходом, т. е. начиная с уравнения 4⁽³⁾, производим описанные выше операции по исключению неизвестных, в результате чего приходим к системе уравнений, каждое из которых содержит по одному неизвестному.

Определитель преобразованной системы уравнений вычисляется по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} a_{44}^{(3)},$$

и нам остается лишь доказать равенство данного определителя определителю исходной системы (213).

Для этого достаточно заметить, что вторая строка преобразованного определителя получается в результате сложения элементов второй строки исходного определителя с элементами его первой строки, умноженными на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (см. табл. 4), т. е. в результате выполнения операций, при которых величина определителя не меняется.

Чем больше число побочных коэффициентов в системе (213) будет равно нулю, тем проще будет решение системы уравнений и вычисление определителя.

Поэтому при решении задач нужно выбирать обобщенные координаты таким образом, чтобы возможно большее число побочных коэффициентов обращалось в нуль.

Если система уравнений (213) каноническая, т. е. между коэффициентами имеет место соотношение

$$a_{ij} = a_{ji},$$

то объем вычислений в схеме Гаусса существенно сокращается, так как (см. табл. 4)

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32}^{(1)} = a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} = a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} = a_{23}^{(1)},$$

$$a_{41} = a_{14}, \quad a_{42}^{(1)} = a_{42} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{41} = a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{21} = a_{24}^{(1)},$$

$$a_{43}^{(2)} = a_{43} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{41} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{42}^{(1)} = a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{31} - \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{32}^{(1)} = a_{34}^{(2)}$$

и вообще

$$a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}. \quad (214)$$

Поэтому вычисления для канонической системы могут быть выполнены по сокращенной схеме, приведенной в табл. 5. Крестиками в табл. 5 указаны те величины, которые не нужно записывать или вычислять при решении канонической системы уравнений. Сравнение табл. 4 и 5 показывает, что объем вычислений при канонической системе уравнений существенно сокращается (при большом числе уравнений почти в 2 раза).

В случае канонической системы уравнений вычисления целесообразно вести в форме табл. 6, особенно если все вычисления производятся на арифмометре любого типа¹; в табл. 6 приняты обозначения: $a_{jq} = b_j$; $a_{js} = S_j$.

В верхней половине таблицы записывается исходная система уравнений, все же вычисления производятся в нижней половине.

Первая строка нижней половины совпадает с первой строкой верхней половины, т. е.

$$\alpha_{1j} = a_{1j},$$

находящиеся же в первом столбце коэффициенты β_{1j} определяются по формуле

$$\beta_{1j} = - \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}.$$

¹ См. Л. К. Нарец, Расчет статически неопределимых систем на малых вычислительных машинах, Госстройиздат, М., 1958.

Таблица 5

N	x_1	x_2	x_3	x_4	l	S
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	S_1
I	-1	$-\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$-\frac{b_1}{a_{11}}$	$-\frac{S_1}{a_{11}}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	S_2
I · a_{12}	$-a_{12}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{12}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{12}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{12}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{12}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{12}$
$\Sigma = 2^{(1)}$		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$S_2^{(1)}$
II		-1	$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$
3	+	+	a_{33}	a_{34}	b_3	S_3
I · a_{13}		+	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{13}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{13}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{13}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{13}$
II · $a_{23}^{(1)}$		+	$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)}$
$\Sigma = 3^{(2)}$			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$S_3^{(2)}$
III			-1	$-\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$-\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$
4	+	+	+	a_{44}	b_4	S_4
I · a_{14}		+	+	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{14}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{14}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{14}$
II · $a_{24}^{(1)}$		+	+	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{24}^{(1)}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{24}^{(1)}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{24}^{(1)}$
III · $a_{34}^{(2)}$			+	$-\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{34}^{(2)}$	$-\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{34}^{(2)}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{34}^{(2)}$
$\Sigma = 4^{(3)}$				$a_{44}^{(3)}$	$b_4^{(3)}$	$S_4^{(3)}$

Коэффициенты α_{2j} второй строки вычисляются по формуле

$$\alpha_{2j} = a_{2j} + \alpha_{1j}\beta_{12},$$

и нетрудно проверить, что

$$\alpha_{21} = a_{21} + \alpha_{11}\beta_{11} = 0.$$

Находящиеся во втором столбце коэффициенты β_{2j} определяются по формуле

Таблица 6

x_1	x_2	x_3	x_4	1	S
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{1q}	$a_{1\text{в}}$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{2q}	$a_{2\text{в}}$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{3q}	$a_{3\text{в}}$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{4q}	$a_{4\text{в}}$
α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{1q}	$\alpha_{1\text{в}}$
β_{12}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{2q}	$a_{2\text{в}}$
β_{13}	β_{23}	a_{33}	a_{34}	a_{3q}	$a_{3\text{в}}$
β_{14}	β_{24}	β_{34}	a_{44}	a_{4q}	$a_{4\text{в}}$

$$\beta_{2j} = -\frac{a_{2j}}{a_{22}}.$$

Коэффициенты α_{3j} вычисляются по формуле

$$\alpha_{3j} = a_{3j} + \alpha_{1j}\beta_{13} + \alpha_{2j}\beta_{23},$$

и нетрудно проверить, что

$$\alpha_{31} = a_{31} + \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{21}\beta_{23} = 0,$$

$$\alpha_{32} = a_{32} + \alpha_{12}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} = 0$$

и т. д.

Таким образом, коэффициенты нижней половины табл. 6 определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ij} &= -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \\ \alpha_{ij} &= a_{ij} + \sum_{s=1}^{i-1} \alpha_{sj}\beta_{si}. \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

При пользовании второй формулой (215) можно перепутать индексы и допустить ошибку и поэтому при заполнении нижней половины табл. 6 следует руководствоваться простым правилом: любой коэффициент α_{ij} равен сумме соответствующего коэффициента a_{ij} и попарных произведений коэффициентов α_{sj} , стоящих в том же столбце, на соответствующие коэффициенты β_{si} , стоящие в той же строке. Если коэффициенты α_{sj} берутся сверху вниз, то соответствующие коэффициенты β_{si} надо брать слева направо.

Вычисление суммы произведений попарно во второй формуле (215) производится на малых счетных машинах без выписывания промежуточных результатов. Если нет возможности применить машины, то вычисления целесообразней вести не в табл. 6, а в табл. 5.

Вычисления особенно упрощаются, если некоторые из побочных коэффициентов системы (213) обращаются в нуль.

Для вычисления определителя при трехчленной системе уравнений, к которой, например, приводит задача о крутильных колебаниях неразветвленного валопровода, разработан метод цепных дробей, распространение которого на более сложные случаи оказывается достаточно громоздким.¹

Вместе с тем применение метода Гаусса к этой задаче, а также к ее обобщениям на случай разветвленного валопровода, приводит к элементарным выкладкам, в чем мы рекомендуем убедиться читателю.

Рассмотренные выше преобразования определителя по схеме Гаусса могут быть доведены до конца лишь в том случае, когда ни один из диагональных элементов $a_{jj}^{(j-1)}$ преобразованного определителя не обращается в нуль. Если один из этих элементов, например $a_{ss}^{(s-1)}$, обращается в нуль, то в последующих уравнениях (начиная с $s+1$ -го) неизвестное x_j не может быть исключено и определитель не приводится к треугольной форме.

Обращение в нуль элемента $a_{jj}^{(j-1)}$ имеет место в том случае, если принятое при вычислении значение λ совпадает с одной из частот «укороченной» системы, получающейся из исследуемой при наложении на нее связей

$$q_{j+1} = q_{j+2} = \dots = q_n = 0.$$

В статических задачах строительной механики, где широко используется алгоритм Гаусса, рассматриваемый нами случай исключается, так как миноры определителя, соответствующие элементам главной диагонали, не могут быть равны нулю.

При построении графика уравнения $f(\lambda^2)$ указанный особый случай всегда легко обойти: достаточно несколько изменить значение λ , для которого производится вычисление. Однако частоты «укороченных» систем могут располагаться достаточно тесно, поэтому целесообразно остановиться на вопросе о том, как довести до конца вычисление определителя, если один из элементов на главной диагонали обратится в нуль или окажется весьма малой величиной.

Пусть при вычислении по схеме табл. 4 коэффициент $a_{22}^{(1)}$ равен нулю или мал по сравнению с другими коэффициентами, стоящими в строке 2⁽¹⁾. Деление на нуль не имеет смысла. Если же коэффициент $a_{22}^{(1)}$ мал, то в строке II получатся после деления большие числа, дальнейшие операции с которыми неудобны и

¹ В. П. Терских, Метод цепных дробей, Судпромгиз, 1955.

Таблица 7

N	x_1	x_2	x_3	x_4	l	S
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	S_1
I	-1	$-\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$-\frac{b_1}{a_{11}}$	$-\frac{S_1}{a_{11}}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	S_2
I · a_{21}	$-a_{21}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{21}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{21}$
$\Sigma = 2^{(1)}$		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$S_2^{(1)}$
II		$-\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	-1	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	S_3
I · a_{31}	$-a_{31}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{31}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{31}$
II · $a_{33}^{(1)}$		$-\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{33}^{(1)}$	$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{33}^{(1)}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{33}^{(1)}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{33}^{(1)}$
$\Sigma = 3^{(2)}$		$a_{32}^{(2)}$		$a_{34}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$S_3^{(2)}$
III		-1		$-\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{32}^{(2)}}$	$-\frac{b_3^{(2)}}{a_{32}^{(2)}}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{a_{32}^{(2)}}$
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	S_4
I · a_{41}	$-a_{41}$	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{b_1}{a_{11}} a_{41}$	$-\frac{S_1}{a_{11}} a_{41}$
II · $a_{43}^{(1)}$		$-\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{43}^{(1)}$	$-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$-\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{43}^{(1)}$	$-\frac{b_2^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{43}^{(1)}$	$-\frac{S_2^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} a_{43}^{(1)}$
III · $a_{42}^{(2)}$		$-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{32}^{(2)}}$		$-\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{32}^{(2)}} a_{42}^{(2)}$	$-\frac{b_3^{(2)}}{a_{32}^{(2)}} a_{42}^{(2)}$	$-\frac{S_3^{(2)}}{a_{32}^{(2)}} a_{42}^{(2)}$
$\Sigma = 4^{(3)}$				$a_{44}^{(3)}$	$b_4^{(3)}$	$S_4^{(3)}$

могут привести к вычислению малой разности, а следовательно, к потере точности.

Если при этом коэффициент $a_{23}^{(1)}$ не мал по сравнению с другими, то строку II целесообразно получить делением строки $2^{(1)}$ на $-a_{23}^{(1)}$.

Схема вычислений в рассматриваемом случае указана в табл. 7 и особых пояснений не требует. Если в строке $3^{(2)}$ коэффициент $a_{32}^{(2)}$ не мал по сравнению с другими, то целесообразно разделить на него строку $3^{(2)}$ и записать результаты в строку III.

Исключение неизвестных x_1 , x_2 и x_3 из уравнения 4 производится обычным способом при помощи уравнений I, II и III, но в несколько иной последовательности, как это видно из нижней части табл. 7.

Каждое из преобразованных уравнений получается путем использования соответствующего исходного уравнения и всех предыдущих и, следовательно, определитель системы не меняется.

Вычисление определителя системы производится весьма просто: при помощи транспозиции он приводится к треугольной форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & 0 & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ 0 & a_{23}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{32}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{23}^{(1)}a_{32}^{(2)}a_{44}^{(3)}.$$

Следовательно, применяя несколько видоизмененный алгоритм, который будем называть обобщенным алгоритмом Гаусса, можно и в особом случае также просто, как и в обычном, вычислить определитель системы или найти его корни.

Необходимо отметить, что в случае использования обобщенного алгоритма Гаусса вычисления для канонической системы нельзя производить по сокращенной схеме.

Использование алгоритма Гаусса при вычислении частного значения характеристических определителей (уравнения частот) представляет особый интерес еще и в том отношении, что совместно с вычислением частного значения характеристического определителя для рассматриваемой системы находятся частные значения характеристических определителей для всех «укороченных» систем, получающихся из исходной при помощи наложения связей.

Это обстоятельство позволяет указать способ отделения корней, основанный на использовании доказанной в § 8 теоремы Рауса, т. е. указать, между какими корнями уравнения частот

находится: то значение λ , для которого вычисляется частное значение характеристического определителя.*

Возможность отделения корней значительно сокращает объем вычислений, необходимых для определения корней частотного уравнения путем подбора.

Обозначим через $\Delta_n(\lambda)$ характеристический определитель (209), соответствующий системе с n степенями свободы, т. е. определитель

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda^2 a_{11} & c_{12} - \lambda^2 a_{12} & \dots & c_{1n} - \lambda^2 a_{1n} \\ c_{21} - \lambda^2 a_{21} & c_{22} - \lambda^2 a_{22} & \dots & c_{2n} - \lambda^2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - \lambda^2 a_{n1} & c_{n2} - \lambda^2 a_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda^2 a_{nn} \end{vmatrix} \quad (216)$$

Если мы наложим на систему связь $q_n = 0$, то характеристический определитель $\Delta_{n-1}(\lambda)$ системы с наложенной связью получится из определителя (216) путем вычеркивания последнего столбца и нижней строки; характеристический определитель $\Delta_{n-2}(\lambda)$ системы с двумя наложенными связями $q_n = q_{n-1} = 0$ получится таким же образом из характеристического определителя $\Delta_{n-1}(\lambda)$ и т. д.

Подсчитаем по схеме Гаусса численное значение определителя $\Delta_n(\lambda)$ для некоторого значения $\lambda = \lambda_0$ **

$$\Delta_n(\lambda_0) = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (217)$$

Если в исходном определителе вычеркнуть $n-p$ последних строк и столбцов, то численное значение получающегося определителя при $\lambda = \lambda_0$

$$\Delta_p(\lambda_0) = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{pp}^{(p-1)}. \quad (218)$$

* Излагаемый ниже способ отделения корней разработан автором совместно с В. А. Постновым.

Я. Л. Нудельман в статье «Об одном способе решения уравнений частот и критических сил, составленных методом сил», Сб. Трудов Одесского гидротехнического института, вып. VI, 1954, разработал аналогичный прием для стержневых систем, но не обратил внимания на то, что им по существу был предложен способ численного решения частотного уравнения для механических систем. Вероятно, поэтому указанная работа осталась незамеченной и на нее нет даже указания в литературе [1]. Мы считаем целесообразным получить способ отделения корней, непосредственно опираясь на теорему Рауса, а не пользоваться более сложными соображениями, как это сделано в упомянутой статье.

** Не следует смешивать коэффициенты a_{ij} системы линейных уравнений с коэффициентами кинетической энергии. При преобразованиях по схеме Гаусса под a_{ij} подразумеваются величины

$$c_{ij} - \lambda_0^2 a_{ij}.$$

Формулы (217) и (218) справедливы в том случае, когда ни один из диагональных элементов треугольного определителя не обращается в процессе преобразований в нуль. Если это имеет место и приходится пользоваться обобщенным алгоритмом Гаусса, то вычеркивание строк и столбцов в преобразованном определителе необходимо производить до приведения его к треугольной форме при помощи транспозиции.

Таким образом, вычислив по схеме Гаусса величину определителя $\Delta_n(\lambda_0)$, мы без дополнительных вычислений получаем численные значения всех определителей $\Delta_p(\lambda_0)$ и, следовательно, можем определить знаки

$$\text{sign}^* \Delta_1(\lambda_0), \text{sign} \Delta_2(\lambda_0), \dots, \text{sign} \Delta_{n-1}(\lambda_0), \text{sign} \Delta_n(\lambda_0). \quad (219)$$

Если же один из определителей обратится в нуль, то вместо его знака мы будем в ряду (219) записывать нуль.

Обозначим через $\lambda_j^{(p)}$ j -ый корень уравнения частот $\Delta_p(\lambda) = 0$. Тогда, на основании теоремы Рауса (185) можно написать

$$\lambda_j^{(p)} \leq \lambda_j^{(p-1)} < \lambda_{j+1}^{(p)}. \quad (220)$$

Мы рассматриваем случай отсутствия кратных частот, поэтому при переходе через корень $\lambda_j^{(p)}$ определитель $\Delta_p(\lambda)$ изменяет знак, и нам нужно установить, как чередуются знаки определителя при переходе через корни в случае изменения переменной λ в пределах $0 < \lambda < \infty$.

Воспользовавшись выражением (216) при $n=p$, получим

$$\begin{aligned} \text{sign} \Delta_p(\infty) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{sign} \lambda^{2p} \left\| \frac{c_{gk}}{\lambda^2} - a_{gk} \right\| = \\ &= \text{sign} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} (-1)^p = \text{sign} (-1)^p. \end{aligned}$$

Определитель является дискриминантом определенно положительной квадратичной формы — кинетической энергии, и поэтому он больше нуля.

* sign — знак «сигнум», применяется как определитель знака величины.

Например, $y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{» } x = 0 \\ +1 & \text{» } x > 0 \end{cases}$ в сокращенной записи обозначают $y = \text{sign } x$.

Таким образом, $\text{sign } \Delta_p(\lambda_p^{(p)} < \lambda) = \text{sign } (-1)^p$, $\text{sign } \Delta_p(\lambda_{j-1}^{(p)} < \lambda < \lambda_j^{(p)}) = \text{sign } (-1)^{j-1}$, ибо при переходе через корень λ_j знак определителя должен изменяться, а $\text{sign } \Delta_p(\lambda < \lambda_1^{(p)}) = +$. Последнее равенство можно получить из того соображения, что $\Delta_p(0)$ представляет собой дискриминант определенно положительной функции—потенциальной энергии.¹

Чтобы установить правило разделения корней, составим таблицу чередования знаков характеристических определителей различных порядков, получаемых из определителя $\Delta_n(\lambda)$ путем наложения связей, и схему взаимного расположения их корней.

$$\begin{array}{c}
 + \lambda_1^{(1)} - \\
 + \lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} + \\
 + \lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} - \\
 + \lambda_1^{(4)} - \lambda_2^{(4)} + \lambda_3^{(4)} - \lambda_4^{(4)} + \\
 + \lambda_1^{(5)} - \lambda_2^{(5)} + \lambda_3^{(5)} - \lambda_4^{(5)} + \lambda_5^{(5)} - \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

Пусть, например, для системы с пятью степенями свободы $\text{sign } \Delta_1(\lambda_0) = +$, $\text{sign } \Delta_2(\lambda_0) = -$, $\text{sign } \Delta_3(\lambda_0) = -$, $\text{sign } \Delta_4(\lambda_0) = +$, $\text{sign } \Delta_5(\lambda_0) = +$.

Тогда можно утверждать, что $\lambda_0 < \lambda_1^{(1)}$, а так как $\lambda_1^{(2)} \leq \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)}$, то может быть только два случая: либо $\lambda_1^{(2)} \leq \lambda_0 < \lambda_2^{(2)}$, либо $\lambda_0 < \lambda_1^{(2)}$. $\text{Sign } \Delta_2(\lambda_0) = -$, поэтому согласно схеме нужно считать $\lambda_1^{(2)} < \lambda_0 < \lambda_2^{(2)}$.

По теореме Раусса $\lambda_1^{(3)} \leq \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)} \leq \lambda_2^{(2)} < \lambda_3^{(3)}$ и $\lambda_1^{(3)} < \lambda_0 < \lambda_3^{(3)}$, а так как $\text{sign } \Delta_3(\lambda_0) = -$, то $\lambda_1^{(3)} < \lambda_0 < \lambda_2^{(3)}$ и т. д.

На схеме пунктиром показано определение места числа λ_0 и из схемы видно, что $\lambda_2^{(5)} < \lambda_0 < \lambda_3^{(5)}$.

Определение места числа λ_0 среди корней уравнения $\Delta_n(\lambda) = 0$ может быть произведено по правилу, справедливость которого мы рекомендуем проверить читателю.

¹ Мы не использовали этого свойства для установления закона чередования знаков, так как пришлось бы отдельно рассматривать особый случай $\lambda = 0$.

Если r есть число перемен знака в ряду

$$\text{sign } \Delta_1(\lambda_0), \text{sign } \Delta_2(\lambda_0), \dots \text{sign } \Delta_n(\lambda_0), \quad (221)$$

то

$$\lambda_r^{(n)} \leq \lambda_0 < \lambda_{r+1}^{(n)}. \quad (222)$$

Когда λ_0 оказывается корнем одного из уравнений $\Delta_p(\lambda_0) = 0$, то при подсчете перемен знака соответствующий член в ряду (221) пропускается. Поэтому если λ_0 есть корень уравнения $\Delta_p(\lambda) = 0$ и число перемен знака в ряду равно r , то $\lambda_0 = \lambda_r^{(p)}$.

Если λ_0 не оказывается корнем одного из уравнений $\Delta_p(\lambda) = 0$ и, следовательно, можно использовать формулу (218), то число перемен знака в ряду (221) равно числу отрицательных чисел

$$a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (223)$$

Предположим, на систему с n степенями свободы наложено k связей и нам известно, что $\lambda_s^{(n-k)} \leq \lambda_0 < \lambda_{s+1}^{(n-k)}$, т. е. $\text{sign } \Delta_{n-k}(\lambda_0) = \text{sign}(-1)^s$. Тогда, воспользовавшись рассмотренной выше схемой, легко установить следующее обобщенное правило для определения места λ_0 среди частот системы с n степенями свободы.

Если r есть число перемен знака в ряду

$$\text{sign}(-1)^s, \text{sign } \Delta_{n-k+1}(\lambda_0), \text{sign } \Delta_{n-k+2}(\lambda_0) \dots \text{sign } \Delta_n(\lambda_0), \quad (224)$$

то

$$\lambda_{s+r}^{(n)} \leq \lambda_0 < \lambda_{s+r+1}^{(n)} \quad (225)$$

где s есть число корней уравнения $\Delta_{n-k}(\lambda) = 0$, удовлетворяющих условию $\lambda_j^{(n-k)} \leq \lambda_0$.

При наложении на систему $n-1$ связи, что имело место в рассмотренном выше случае, ряд (224) превращается в ряд

$$\text{sign}(-1)^s, \text{sign } \Delta_2(\lambda_0), \text{sign } \Delta_3(\lambda_0) \dots \text{sign } \Delta_n(\lambda_0), \quad (226)$$

где возможны лишь два значения s : $s=0$ при $\lambda_0 < \lambda_1^{(1)}$ и $s=1$ при $\lambda_0 \geq \lambda_1^{(1)}$. Число перемен знака в ряду (226) равно числу перемен знака в ряду (221), так как

$$\text{sign } \Delta_1(\lambda_0 < \lambda_1^{(1)}) = +, \text{sign } \Delta_1(\lambda_0 > \lambda_1^{(1)}) = -.$$

Обобщенное правило отделения корней уравнения частот будет использовано нами в гл. III при рассмотрении вопроса об отделении частот стержневых систем.

Изложенная выше схема решения системы уравнений по способу Гаусса непосредственно используется при решении задачи

о вынужденных колебаниях в случае действия гармонической возмущающей силы, а также для определения форм свободных колебаний.

При определении j -ой формы свободных колебаний полагаем в системе (126) $\lambda = \lambda_j$, $\nu_k = \nu_{kj}$; принимаем $\nu_{rj} = 1$, отбрасываем одно из уравнений и решаем систему из $n-1$ линейных неоднородных уравнений. Если по смыслу задачи $\nu_{jj} \neq 0$, то обычно принимают $\nu_{jj} = 1$ или любую величину ν_{rj} , лишь бы она по смыслу задачи не была тождественно равна нулю.

§ 10. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ, РАССМАТРИВАЕМОЙ КАК МНОГОМАССОВАЯ СИСТЕМА

Любую упругую систему с распределенной массой — балку, раму, перекрытие — можно приближенно рассматривать как невесомую, обладающую лишь упругостью и нагруженную сосредоточенными массами систему. Чем больше мы возьмем сосредоточенных масс, тем ближе такая система будет к рассматриваемой системе с распределенной массой.

При подобной замене задача о колебаниях упругих тел непосредственно сводится к использованию теории колебаний системы со многими степенями свободы. Не исключена возможность, что при развитии вычислительной техники такой способ расчета колебаний упругих тел найдет широкое применение.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением колебаний невесомой балки, несущей сосредоточенные массы. Уравнения колебаний такой балки могут быть составлены различным образом.

Например, можно воспользоваться обратным методом составления уравнений движения, выбирая за обобщенные координаты перемещения масс, но этот способ решения задачи предполагает знание коэффициентов влияния, а они могут быть найдены по таблицам лишь для призматических балок.

Для вывода системы дифференциальных уравнений воспользуемся известной схемой расчета неразрезных балок на независимых опорах, считая опоры расположенными под массами. Излагаемый ниже способ удобен еще и в том отношении, что позволяет легко учесть сдвиг при расчете колебаний балки, а также ее непризматичность; при достаточном числе масс балку можно считать призматической на участке между соседними массами.

Углы поворота опорных сечений неразрезной балки, нагруженной опорными моментами, определяются по формулам (рис. 16):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{j-1} &= -\frac{M_{j-1}l_j}{3EI_j} \psi_{1j} - \frac{M_j l_j}{6EI_j} \psi_{2j}, \\ \alpha_j &= \frac{M_{j-1}l_j}{6EI_j} \psi_{2j} + \frac{M_j l_j}{3EI_j} \psi_{1j}, \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1j} &= 1 + 6(1 + \nu) \frac{I_j}{l_j^2 A_j}, \\ \psi_{2j} &= 1 - 12(1 + \nu) \frac{I_j}{l_j^2 A_j}, \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

I_j —главный момент инерции поперечного сечения балки в j -вом пролете,
 A_j —площадь поперечного сечения балки в том же пролете,
 ν —коэффициент Пуассона.

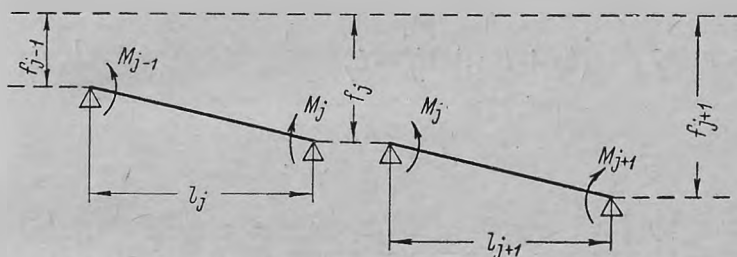


Рис. 16.

Приравнявая углы поворота опорных сечений на j -ой фиктивной опоре, получим (см. рис. 16)

$$\begin{aligned} & \frac{M_{j-1} l_j}{6EI_j} \psi_{2j} + \frac{M_j l_j}{3EI_j} \psi_{1j} + \frac{f_j - f_{j-1}}{l_j} = \\ & = - \frac{M_j l_{j+1}}{3EI_{j+1}} \psi_{1, j+1} - \frac{M_{j+1} l_{j+1}}{6EI_{j+1}} \psi_{2, j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{l_{j+1}}, \end{aligned}$$

где f_i —полное смещение j -вой массы.

Умножая полученное условие равенства углов поворота опорных сечений на множитель $\frac{6EI_0}{l_0}$ и вводя обозначения:¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_0}{I_j} \frac{l_j}{l_0} \psi_{2j} &= a_{2j}, & \frac{I_0}{I_j} \frac{l_j}{l_0} \psi_{1j} &= a_{1j}, \\ \frac{6EI_0}{l_0} f_j &= F_j, & \frac{l_0}{l_j} &= b_j. \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

¹ При отсутствии сдвига $\psi_{2j} = \psi_{1j} = 1$, так что $a_{2j} = a_{1j} = a_j$.

преобразуем это уравнение к виду

$$a_{2j}M_{j-1} + 2(a_{1j} + a_{1,j+1})M_j + a_{2,j+1}M_{j+1} - \\ - b_jF_{j-1} + (b_j + b_{j+1})F_j - b_{j+1}F_{j+1} = 0, \quad (230)$$

которым и будем пользоваться в дальнейшем.

Предположим теперь, что к сосредоточенной массе весом P_j приложена возмущающая сила $Q_j(t)$, а опора отсутствует. Тогда, приравнявая нулю давление на отсутствующую опору, получим¹

$$\frac{M_j - M_{j-1}}{l_j} + \frac{M_j - M_{j+1}}{l_{j+1}} + Q_j(t) - \frac{P_j}{g} \ddot{f}_j = 0$$

или

$$-b_jM_{j-1} + (b_j + b_{j+1})M_j - b_{j+1}M_{j+1} + l_0Q_j(t) = \frac{1}{d_j} \ddot{F}_j, \quad (231)$$

где

$$d_j = \frac{6EI_0}{l_0^3} \frac{g}{P_j}.$$

Если крайней левой опоре присвоить индекс «0», а крайней правой — индекс « $n+1$ », то уравнения (230) и (231) будут справедливы лишь при $1 \leq j \leq n$. В случае написания этих уравнений для значений $j=1$ и $j=n$ должны быть приняты во внимание значения M_0 , f_0 , M_{n+1} и f_{n+1} .

При написании уравнений (230) и (231) для концевых сечений балки, т. е. для $j=0$ и $j=n+1$, необходимо учитывать граничные условия на концах балки.

Так, например, для балки совершенно свободной (что соответствует задаче об общей вибрации корабля)

$$M_0 = M_{n+1} = 0$$

и уравнения (231) при $j=0$ и $j=n+1$ они должны быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} -b_1M_1 + l_0Q_0(t) &= \frac{1}{d_0} \ddot{F}_0, \\ -b_{n+1}M_n + l_0Q_{n+1}(t) &= \frac{1}{d_{n+1}} \ddot{F}_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

На выписывании граничных условий в других случаях устройства опор балки мы не останавливаемся.

Дифференцируя уравнения (230) два раза по времени и исключая вторые производные $\ddot{F}_j$ при помощи уравнений (231) и

¹ Уравнение (231) можно было бы написать как дифференциальное уравнение движения сосредоточенной массы.

(232), можно получить систему дифференциальных уравнений для определения неизвестных изгибающих моментов. В этом случае в дифференциальные уравнения входят не обобщенные координаты в обычном смысле, а другие функции времени — изгибающие моменты, характеризующие движение системы.

Рассмотрим свободные колебания свободной многомассовой балки, для чего положим в уравнениях (230), (231) и (232) при $Q_j(t) \equiv 0$:

$$M_j(t) = \mu_j \cos \lambda t, \quad F_j(t) = \varphi_j \cos \lambda t,$$

что после подстановки и сокращения на общий множитель приводит к системе уравнений при $1 \leq j \leq n$:

$$a_{2j} \mu_{j-1} + 2(a_{1j} + a_{1,j+1}) \mu_j + a_{2,j+1} \mu_{j+1} - b_j \varphi_{j-1} + (b_j + b_{j+1}) \varphi_j - b_{j+1} \varphi_{j+1} = 0, \quad (233)$$

$$-b_j \mu_{j-1} + (b_j + b_{j+1}) \mu_j - b_{j+1} \mu_{j+1} = -\frac{\lambda^2}{d_j} \varphi_j, \quad (234)$$

кроме того,

$$-b_1 \mu_1 = -\frac{\lambda^2}{d_0} \varphi_0, \quad -b_{n+1} \mu_n = -\frac{\lambda^2}{d_{n+1}} \varphi_{n+1}, \quad (235)$$

$$\mu_0 = \mu_{n+1} = 0. \quad (236)$$

Исключая из уравнений (233) величины φ_j при помощи уравнений (234) и (235), получим систему уравнений «пяти моментов», на выписывании которой мы не останавливаемся.

Не рассматривая подробно вопрос о применении схемы Гаусса к рассматриваемой частной задаче, сделаем несколько замечаний.

Матрица системы уравнений «пяти моментов» является неполной, так что расчет по второй формуле (215) оказывается несложным. Поэтому вычисление определителя системы по схеме Гаусса при заданном $\lambda = \lambda_0$ оказывается достаточно простым.

Вместе с тем для каждого нового значения λ_0 нужно заново перевычислять все элементы определителя, что значительно увеличивает объем вычислений при нахождении частот путем подбора.

Наконец, существенным недостатком определения частот свободных колебаний по указанной схеме является то, что нельзя использовать изложенный в предыдущем параграфе способ отделения корней, так как изгибающие моменты не являются обобщенными координатами в общепринятом смысле слова и обращение изгибающих моментов в нуль не означает наложения связи на систему.

Если бы мы решили систему (230) относительно амплитуд моментов μ_j и исключили бы их из уравнений (231), то пришли бы к системе уравнений, которая может быть получена при помощи уравнений Лагранжа. Указанный способ вывода позволяет

обойтись без знания коэффициентов влияния, необходимых для вычисления потенциальной энергии, что особенно удобно при рассмотрении непрямоугольных балок ступенчато-переменного сечения.

Матрица получаемой системы уравнений будет полной, но от λ будут зависеть лишь элементы на главной диагонали. Поэтому при вычислении корней подбором нужно перевычислять только элементы определителя, стоящие на главной диагонали.

Несмотря на то, что вычисления по второй формуле (215) усложняются (увеличивается число слагаемых), при использовании малых счетных машин это не должно привести к значительному усложнению решения задачи.

Вместе с тем можно использовать указанный выше способ отделения корней, приводящий к уменьшению числа вычисляемых определителей.

Если бы мы рассматривали задачу о вынужденных колебаниях балки при действии на нее гармонической нагрузки

$$Q_j(t) = Q_j \cos \omega t,$$

то, положив в (230) и (231)

$$M_j = \mu_j \cos \omega t, \quad F_j = \varphi_j \cos \omega t, \quad (237)$$

мы пришли бы к расчету балки на независимых упругих опорах с отрицательными коэффициентами жесткости

$$K_j = - \frac{P_j \omega^2}{g}, \quad (238)$$

загруженной в опорных сечениях сосредоточенными силами Q_j .

Поэтому расчет вынужденных колебаний такой балки не отличается по существу от расчета балки, лежащей на независимых упругих опорах, и может быть выполнен соответствующим способом.

Расчет вынужденных колебаний представляет особый интерес вблизи резонанса; решение же этой задачи требует обязательного введения в рассмотрение сил сопротивления.

К вопросу о том, как учитываются силы сопротивления при колебаниях балок, мы вернемся в § 11.

ГЛАВА II

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

§ 11. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

Применение принципа возможных перемещений к исследованию изгиба и устойчивости балок, перекрытий, пластин и оболочек должно быть хорошо известно читателю из предыдущих разделов курса строительной механики корабля. В задачах статики и устойчивости на этом принципе основан метод Ритца.

В задачах колебаний принцип возможных перемещений также может быть использован с большим успехом, но в отличие от задач статики мы должны при подсчете суммы работ всех внешних и внутренних сил учесть работу сил инерции и сил сопротивления.

Представим упругую линию балки в виде суммы

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \varphi_k(x), \quad (239)$$

где $q_k(t)$ — пока неизвестные функции времени, называемые обобщенными координатами, $\varphi_k(x)$ — выбираемые нами фундаментальные функции; в задачах статики и устойчивости обобщенные координаты были постоянными величинами.

Фундаментальные функции $\varphi_k(x)$ должны быть выбраны таким образом, чтобы в виде ряда (239) при $n \rightarrow \infty$ можно было представить упругую линию балки, а функции времени $q_k(t)$ рассматривать как обобщенные координаты. При этом возможное изменение упругой линии балки

$$\delta v = \sum_{g=1}^n \delta q_g \varphi_g(x), \quad (240)$$

где δq_g — произвольные и независимые приращения обобщенных координат q_g , не зависящие от времени, не должно нарушать

связей, наложенных на систему; в выражении (240) мы заменили индекс k через g для удобства дальнейших выкладок.

Под связями мы понимаем условия, запрещающие какие-либо перемещения, например жесткие опоры и жесткие заделки.

Напротив, упругие опоры и упругие заделки не являются в нашем понимании связями, так как они допускают поступательные или угловые перемещения.

Будем в дальнейшем, в соответствии с установившейся в строительной механике корабля терминологией, называть условия, накладываемые на перемещения жесткими опорами и жесткими заделками,—кинематическими условиями, а условия, накладываемые на перемещения упругими опорами и упругими заделками,—силовыми условиями.

Возвращаясь к рассмотрению выражения (240) для возможного изменения упругой линии балки мы можем заключить, что наложенные на балку связи не будут нарушены при любом возможном перемещении, если все фундаментальные функции удовлетворяют кинематическим условиям.

Выбор фундаментальных функций не является единственным и быстрота сходимости ряда (239) зависит от удачного выбора этих функций. Если выбранные фундаментальные функции удовлетворяют не только кинематическим, но и силовым условиям, то сходимость ряда (239) улучшается.

При выборе фундаментальных функций нужно следить за тем, чтобы они не удовлетворяли все одновременно лишним кинематическим условиям.

Например, если взять систему функций

$$\varphi_k(x) = \sin^2 \frac{k\pi x}{l},$$

то все они удовлетворяют условиям свободного опирания на жесткие опоры:

$$\varphi_k(0) = \varphi_k''(0), \quad \varphi_k(l) = \varphi_k''(l),$$

но одновременно удовлетворяют и условиям жесткой заделки $\varphi_k'(0) = \varphi_k'(l) = 0$. Поэтому эта система функций не может быть использована для решения задач о колебаниях (или изгибе) свободно опертых балок.

Что касается сделанной выше оговорки о выборе системы фундаментальных функций, при котором возможно в виде ряда (239) представить упругую линию балки, то имелась в виду так называемая полнота системы функций $\varphi_k(x)$.

Не останавливаясь на математическом определении понятия полноты системы функций, так как это очень сильно увело бы нас в сторону, поясним понятие полноты на следующем примере.

Известно, что при очень общих предположениях функция $F(x)$, заданная в интервале $(0, l)$, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$F(x) = \sum_k a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (241)$$

где

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

причем при $n \rightarrow \infty$ ряд (241) сходится к значению функции $F(x)$ везде, за исключением точек разрыва; в точках разрыва сумма ряда стремится к полусумме значений функции $F(x)$ слева и справа от точки разрыва.

Система функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$ является полной, но если бы в этой системе была пропущена хоть одна функция, то ряд (241) при $n \rightarrow \infty$ уже не сходил бы к значению функции $F(x)$.

При решении задач колебаний в виде (239) практически приходится ограничиваться небольшим числом членов суммы и нужно заботиться о том, чтобы не допустить пропуска в числе нескольких первых фундаментальных функций $\varphi_k(x)$.

В дальнейшем мы укажем некоторые способы выбора фундаментальных функций, практически гарантирующие их полноту, сейчас же лишь отметим, что можно полагать

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{j=1}^n a_{jk} x^j, \quad (242)$$

где коэффициенты a_{jk} должны быть подобраны таким образом, чтобы были удовлетворены все кинематические условия.

Перейдем теперь к выводу уравнений для определения обобщенных координат $q_k(t)$, причем ограничимся для начала рассмотрением простейшего случая поперечных колебаний балки, не имеющей упругих заделок и упругих опор.

Принимая для стрелки прогиба выражение (239), найдем потенциальную энергию изгиба

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dx = \frac{EI_0}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n q_g(t) q_k(t) c_{gk}, \quad (243)$$

где

$$c_{gk} = \int_0^l \frac{I}{I_0} \varphi_g''(x) \varphi_k''(x) dx, \quad (244)$$

I_0 — среднее значение момента инерции.

Вариация потенциальной энергии, т. е. изменения ее при возможном отклонении, определится по формуле

$$\delta V = \frac{EI_0}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n (q_g + \delta q_g) (q_k + \delta q_k) c_{gk} - \\ - \frac{EI_0}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n q_g q_k c_{gk} = \frac{EI_0}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n (q_g \delta q_k + q_k \delta q_g + \delta q_g \delta q_k) c_{gk}.$$

Отбрасывая в полученном выражении произведение вариаций $\delta q_g \delta q_k$ как малую высшего порядка и меняя в первом слагаемом местами индексы g и k , что не изменит суммы, так как $c_{gk} = c_{kg}$, получим

$$\delta V = EI_0 \sum_{g=1}^n \delta q_g \sum_{k=1}^n q_k(t) c_{gk} = \sum_{g=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_g} \delta q_g. \quad (245)$$

Пусть на балку действует поперечная нагрузка интенсивностью $f(x, t)$, а интенсивность сил инерции определяется выражением

$$-m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -m \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \varphi_k(x),$$

где m — погонная масса балки.

Приращение работы внешних сил и сил инерции на возможном перемещении

$$\delta U = \int_0^l \left[f(x, t) - m \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \varphi_k(x) \right] \sum_{g=1}^n \delta q_g \varphi_g(x) dx$$

или

$$\delta U = \sum_{g=1}^n \left[Q_g(t) - \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) a_{gk} \right] \delta q_g, \quad (246)$$

где

$$a_{gk} = a_{kg} = \int_0^l m \varphi_g(x) \varphi_k(x) dx, \quad (247)$$

$$Q_g(t) = \int_0^l f(x, t) \varphi_g(x) dx. \quad (248)$$

Остановимся на вопросе об учете сил сопротивления при колебаниях балок.

Силы сопротивления при колебаниях балок могут быть как внешними, вызываемыми сопротивлением среды, в которой ко-

леблются балки, так и внутренними, связанными с рассеиванием энергии в материале балки.

Если внешние силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости поперечных сечений балки и коэффициент сопротивления равен $\beta(x)$, то интенсивность сил сопротивления определится выражением

$$-\beta(x) \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \varphi_k(t),$$

а приращение работы сил сопротивления по формуле

$$\delta U_{\beta} = \int_0^l \left[-\beta(x) \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \varphi_k(x) \right] \sum_{g=1}^n \delta q_g \varphi_g(x) dx$$

или

$$\delta U_{\beta} = - \sum_{g=1}^n \delta q_g \sum_{k=1}^n b_{gk} \dot{q}_k(t), \quad (249)$$

где

$$b_{gk} = b_{kg} = \int_0^l \beta(x) \varphi_g(x) \varphi_k(x) dx. \quad (250)$$

Выражение (249) можно записать в виде

$$\delta U_{\beta} = - \sum_{g=1}^n \frac{\partial \Phi_{\beta}}{\partial \dot{q}_g} \delta \dot{q}_g, \quad (251)$$

где

$$\Phi_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n b_{gk} \dot{q}_g(t) \dot{q}_k(t). \quad (252)$$

Для учета внутренних сил сопротивления нужно принять какую-нибудь гипотезу.

Примем за основу гипотезу Фогта, согласно которой напряжения при колебаниях балки с учетом внутренних сопротивлений определяются по формуле¹

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (253)$$

где ε — линейная деформация.

Сумма работ напряжений

$$\sigma_1 = E\varepsilon$$

¹ Вопрос об учете внутренних сопротивлений будет более подробно рассмотрен в § 24.

на возможном перемещении определена нами как приращение потенциальной энергии на возможном перемещении; для подсчета же суммы работ дополнительных напряжений

$$\sigma_2 = \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

поступим следующим образом.

Линейная деформация при изгибе пропорциональна второй производной от стрелки прогиба

$$v'' = \sum_{k=1}^n q_k(t) \varphi_k''(x),$$

а ее производная по времени — пропорциональна величине

$$\dot{v}'' = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \varphi_k''(x).$$

Так как в общие выражения для работы внутренних сил на возможном перемещении напряжения σ_1 и σ_2 должны входить одинаковым образом, а работа напряжений σ_1 равна приращению потенциальной энергии с обратным знаком, то работа напряжений σ_2 может быть подсчитана по формуле (245) при замене E на μ , а $q_k(t)$ на $\dot{q}_k(t)$ и перемене знака на обратный

$$\delta U_{\sigma_2} = -\mu I_0 \sum_{g=1}^n \delta q_g \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) c_{gk}. \quad (254)$$

Выражение (254) может быть записано в виде

$$\delta U_{\sigma_2} = - \sum_{g=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_g} \delta \dot{q}_g, \quad (255)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu I_0 \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n c_{gk} \dot{q}_g(t) \dot{q}_k(t). \quad (256)$$

Подставляя в выражение принципа возможных перемещений

$$\delta U + \delta U_{\beta} + \delta U_{\sigma_2} - \delta V = 0$$

выражения (245), (246), (249), (254) и приравнявая нулю коэффициенты при вариациях координат δq_g , получим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^n [a_{gk} \ddot{q}_k + \mu I_0 c_{gk} \dot{q}_k(t) + b_{gk} \dot{q}_k(t) + E I_0 c_{gk} q_k(t)] = Q_g(t), \\ g=1; 2 \dots \quad (257)$$

определяющую неизвестные координаты $q_k(t)$.

Система дифференциальных уравнений (257) совпадает по структуре с системой уравнений (82), описывающей колебание системы с n степенями свободы, причем коэффициенты системы (257) обладают свойством взаимности.

Если при решении задачи о колебаниях балки нужно учесть влияние упругих опор, упругих заделок или непрерывного упругого основания, то следует соответственно изменить выражение для вычисления потенциальной энергии. На выписывании этого выражения в общем виде мы не останавливаемся и лишь заметим, что свойство взаимности коэффициентов c_{gk} остается без изменения.

При наличии на балке сосредоточенных масс или необходимости учета инерции вращения поперечных сечений, нужно соответственно изменить выражение для подсчета суммы работы сил инерции на возможном перемещении.

Учет сосредоточенных масс прост и на нем можно не останавливаться. Работа же на возможном перемещении инерционных сил, возникающих при вращении поперечных сечений, может быть определена следующим образом.

Если ρ есть радиус инерции масс в поперечном сечении, то интенсивность моментов сил инерции при вращении поперечных сечений равна

$$-m\rho^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} = -m\rho^2 \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \varphi'_k(x),$$

где, напомним, угол поворота считается положительным при вращении по часовой стрелке, так что и положительное угловое ускорение окажется направленным по часовой стрелке.

Возможное перемещение, на котором совершает работу интенсивность моментов сил инерции при вращении поперечных сечений, будет приращением угла поворота поперечных сечений

$$\delta v' = \sum_{g=1}^n \delta q_g \varphi'_g(x),$$

а работа моментов сил инерции на возможном перемещении определится выражением

$$\delta U_p = - \int_0^l m\rho^2 \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \varphi'_k(x) \sum_{g=1}^n \delta q_g \varphi'_g(x) dx$$

или

$$\delta U_p = - \sum_{g=1}^n \delta q_g \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) a'_{gk}, \quad (258)$$

где

$$a'_{gk} = a'_{kg} = \int_0^l m\rho^2 \varphi'_g(x) \varphi'_k(x) dx. \quad (259)$$

Нетрудно сообразить, что учет инерции вращения поперечных сечений балки сводится к замене в системе (257) коэффициентов a_{gk} суммой $a_{gk} + a'_{gk}$.

Учет деформаций сдвига при принятой схеме решения задачи привел бы к значительному усложнению расчетной схемы, ибо стрелку прогиба от сдвига пришлось бы задать независимо выражением вида

$$v_2(x) = \sum_{k=1}^r q_{n+k}(t) \varphi_k(x), \quad (260)$$

где $r \leq n$, а фундаментальные функции принимаются для упрощения задачи такими же, как и в выражении (239). В этом случае выражения (245), (246), (249) и т. д. должны быть изменены и число дифференциальных уравнений в системе (257) увеличивается, т. е. решение задачи существенно усложняется.

Мы не будем останавливаться на подробном рассмотрении вопроса об учете сдвига и вернемся к нему при рассмотрении некоторых задач. Сейчас лишь заметим, что в рамках изложенной в § 10 схемы расчета балки как многомассовой системы, учет сдвига практически не усложнял расчетной схемы.

Рассмотрим более подробно колебание балки, обладающей лишь внутренним сопротивлением, подчиняющимся гипотезе Фогта. В этом случае система (257) запишется в виде

$$\sum_{k=1}^n [a_{gk} \ddot{q}_k(t) + \mu_0 I_0 c_{gk} \dot{q}_k(t) + EI_0 c_{gk} q_k(t)] = Q_g(t). \quad (261)$$

Если на балку действует гармоническая возмущающая нагрузка

$$f(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \delta),$$

то возмущающая сила $Q_g(t)$ определяется по формуле (248) и может быть представлена в виде

$$Q_g(t) = Q_g \cos(\omega t + \delta). \quad (262)$$

Рассматриваемый случай колебаний при наличии сопротивления соответствует случаю существования главных координат, когда выполняется соотношение (141).

Введем в рассмотрение комплексную возмущающую силу $Q_g e^{i(\omega t + \delta)}$ и воспользуемся подстановкой (158), так что система (261) примет вид

$$\sum_{k=1}^n \left[EI_0 \left(1 + \frac{\mu}{E} \omega i \right) c_{gk} - a_{gk} \omega^2 \right] A_k = Q_g. \quad (263)$$

Система (263) может быть переписана в виде

$$\sum_{k=1}^n (E_c I_0 c_{gk} - a_{gk} \omega^2) A_k = Q_g, \quad (264)$$

где

$$E_c = E \left(1 + \frac{\mu \omega}{E} i \right), \quad (265)$$

т. е. модуль нормальной упругости E заменен комплексной величиной (265).

Если найдено общее выражение для коэффициентов A_k в системе без сопротивления, то, заменив в этом выражении модуль нормальной упругости комплексной величиной (265) и воспользовавшись формулой (160), т. е. взяв действительную часть, можно найти вынужденные колебания для системы с сопротивлением.

Заметим, что все наши выводы остаются справедливыми и в том случае, если коэффициент μ является любой функцией частоты ω возмущающей силы.

Задача о нахождении вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей силы допускает следующую статическую интерпретацию.

Рассмотрим изгиб балки, нагруженной нагрузкой $f(x)$ и лежащей на сплошном упругом основании жесткостью

$$k = -m\omega^2. \quad (266)$$

Решая эту задачу методом Ритца, т. е. разыскивая упругую линию в виде ряда

$$v(x) = \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x),$$

можно получить для определения коэффициентов A_k систему (264) при $\mu = 0$, если же произвести расчет для балки с комплексным модулем нормальной упругости (265), то получим систему (264).

Убедиться в справедливости отмеченной выше статической интерпретации задачи о вынужденных колебаниях при действии гармонической нагрузки можно и на основании следующих соображений.

Если на балку действует возмущающая сила $f(x) \cos(\omega t + \delta)$, а колебание балки происходит по закону $v(x, t) = v(x) \cos(\omega t + \delta)$, то изгиб балки происходит под действием нагрузки

$$q(x, t) = [f(x) + m\omega^2 v(x)] \cos(\omega t + \delta)$$

и дифференциальное уравнение изгиба

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = q$$

примет вид

$$EI v^{IV} = f(x) + m\omega^2 v(x).$$

Если найдена комплексная стрелка прогиба $\tilde{v}(x)$ балки на «упругом» основании, то вынужденные колебания такой балки определятся по выражению

$$v(x, t) = \operatorname{Re} \tilde{v}(x) e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (267)$$

Таким образом, решение задачи о вынужденных колебаниях при действии гармонической возмущающей силы сводится к расчету балки на «упругом» отрицательном основании, имеющей комплексный модуль нормальной упругости и загруженной поперечной нагрузкой, равной амплитуде возмущающей нагрузки.

Решение задачи о колебаниях балки может быть существенно упрощено, если выполняется одно из условий

$$a_{gk} = 0 \quad \text{при} \quad g \neq k$$

или

$$c_{gk} = 0 \quad \text{при} \quad g \neq k,$$

и становится совершенно элементарным, если выполняются оба этих условия.

В последнем случае каждая из обобщенных координат определяется из отдельного дифференциального уравнения, т. е. называется «главной координатой» (см. § 5), фундаментальные же функции будут называться формами главных свободных колебаний.

Формы главных свободных колебаний определяются дифференциальными уравнениями и будут подробно рассмотрены в гл. III, где показано, что они действительно удовлетворяют двум указанным выше условиям ортогональности. Нахождение функций, удовлетворяющих этим условиям, предполагает точное решение задачи о свободных колебаниях.

При приближенном решении задачи можно всегда удовлетворить одному из условий, если воспользоваться способом последовательной ортогонализации.

В общем виде любое из указанных выше условий может быть записано в виде

$$L(\varphi_g \varphi_k) = 0 \quad \text{при} \quad g \neq k, \quad (268)$$

где $L()$ есть линейный оператор, выражающийся в частном случае интегралами (244) и (247); он может иметь и более сложный вид, например, при наличии упругих опор, упругих заделок, сосредоточенных масс.

Любой линейный оператор обладает свойством

$$L\left(\sum_j a_j \varphi_j\right) = \sum_j a_j L(\varphi_j), \quad (269)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, и этим свойством мы в дальнейшем воспользуемся.

Пусть имеется система функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x) \dots \psi_n(x),$$

удовлетворяющая кинематическим условиям задачи. Построим новую систему функций:

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x),$$

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) + \alpha_{21}\varphi_1(x),$$

$$\varphi_3(x) = \psi_3(x) + \alpha_{31}\varphi_1(x) + \alpha_{32}\varphi_2(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_g(x) = \psi_g(x) + \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_{gj}\varphi_j(x)$$

и будем последовательно определять коэффициенты α_{gj} из условия «ортогональности» (268).

Воспользовавшись последними из написанных выше выражений и свойством (269) линейного оператора, получим

$$L \left[\left(\psi_g(x) + \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_{gj}\varphi_j(x) \right) \varphi_k(x) \right] = L[\psi_g(x) \varphi_k(x)] + \\ + \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_{gj} L[\varphi_j(x) \varphi_k(x)] = 0.$$

При $g=2$ и $k=1$

$$L(\psi_2\varphi_1) + \alpha_{21}L(\varphi_1^2) = 0;$$

при $g=3$ и $k=1, k=2$

$$L(\psi_3\varphi_1) + \alpha_{31}L(\varphi_1^2) = 0,$$

$$L(\psi_3\varphi_2) + \alpha_{32}L(\varphi_2^2) = 0,$$

так как

$$L(\varphi_1\varphi_2) = 0$$

и при последовательном построении функций φ_g , если $j < g$,

$$L(\psi_g\varphi_j) + \alpha_{gj}L(\varphi_j^2) = 0.$$

Указанный прием последовательной ортогонализации приводит к достаточно громоздким вычислениям, но им иногда целесообразно пользоваться.

Выполнение условий $\alpha_{gk}=0$ и $c_{gk}=0$ при $g \neq k$ или же одного из них возможно при знакопеременных подынтегральных выражениях в интегралах (244), (247) и им подобных для более сложных задач, чем рассмотренные выше. Знакопеременность упомянутых выражений имеет место только при знакопеременных фундаментальных функциях, отличающихся одна от другой числом нулей, что будет показано на ряде примеров.

В связи с этим свойством фундаментальных функций энергетический метод целесообразно использовать лишь при решении таких задач, когда в сумме (239) можно ограничиться небольшим числом членов.

При больших значениях g и k вычисление интегралов типа (244) и (247) связано с потерей точности, ибо подынтегральные функции будут иметь значительное число нулей. Поэтому возможно такое положение, при котором увеличение числа членов в ряду (239) практически не будет приводить к повышению точности расчета.

Выше мы ограничились рассмотрением применения принципа возможных перемещений к расчету колебаний балок. В случае применения принципа возможных перемещений к расчету колебаний перекрытий, пластин и т. п. усложняются лишь выражения стрелок прогиба, формулы для вычисления потенциальной энергии, существо же метода остается без изменения. Ниже будут рассмотрены примеры решения таких задач.

§ 12. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

Для применения уравнений Лагранжа второго рода (98) к исследованию колебаний нужно знать выражения кинетической энергии, потенциальной энергии и функции рассеивания в функции от обобщенных координат, а также выражение обобщенных сил $Q_g(t)$ через заданную возмущающую нагрузку.

Ограничимся в дальнейшем для простоты рассмотрением поперечных колебаний балки, упругая линия которой представлена в виде ряда (239).

В этом случае потенциальная энергия определяется формулой (243) *, функция рассеивания при учете лишь внутренних сопротивлений — формулой (256), и нам остается только найти выражение для кинетической энергии поперечных колебаний, определяемой по формуле

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{v}^2 dx,$$

что по подстановке выражения (239) преобразуется к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_g \sum_k a_{gk} \dot{q}_g(t) \dot{q}_k(t), \quad (270)$$

где коэффициенты a_{gk} вычисляются по формуле (247).

* Если нет упругих опор и упругих заделок.

По определению

$$Q_g \delta q_g = \int_0^l f(x, t) \varphi_g(x) \delta q_g dx,$$

что приводит для обобщенной силы к выражению (248).

Подставляя выражения (270), (243), (252) и (256) в уравнения Лагранжа (98), получим систему дифференциальных уравнений (257).

Иначе и не могло быть, так как уравнения Лагранжа второго рода представляют собой запись принципа возможных перемещений в обобщенных координатах; можно было не рассматривать применение принципа возможных перемещений к исследованию колебаний упругих тел, а сразу использовать уравнения Лагранжа.

Вместе с тем смысл уравнений Лагранжа не всегда четко понимается. Содержание предыдущего параграфа, в котором уравнения колебаний получаются непосредственно, исходя из принципа возможных перемещений, должно облегчить понимание уравнений Лагранжа и смысл их использования при исследовании колебаний упругих тел.

В дальнейшем, при решении отдельных частных задач нам будет удобнее пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода и терминологией, принятой в общей теории малых колебаний, так как при этом все задачи колебаний решаются совершенно однообразно. Решение их распадается на следующие этапы:

1) выбираются фундаментальные функции, удовлетворяющие кинематическим условиям задачи;

2) составляются общие выражения для потенциальной энергии, кинетической энергии и функции рассеивания, которые выражаются через обобщенные координаты и обобщенные скорости;

3) вычисляются обобщенные силы;

4) используются уравнения Лагранжа второго рода и составляются дифференциальные уравнения малых колебаний, которые и решаются при помощи изложенных выше приемов.

Указанные выше способы решения задач колебаний упругих тел не являются единственно возможными при задании упругой линии в виде (239). Можно, например, при расчете свободных колебаний, воспользоваться теоремой Релея (см. § 9).

Теорема Релея, для использования которой надо лишь знать коэффициенты a_{gk} и c_{gk} кинетической и потенциальной энергий, дает возможность составить уравнения для определения форм свободных колебаний минуя составление дифференциальных уравнений движения. Расчет вынужденных колебаний без учета сопротивления при такой схеме решения сводится к использованию метода главных координат.

Мы не останавливаемся на рассмотрении указанного способа решения задач колебаний, так как не считаем его достаточно наглядным.¹

¹ Этот прием решения задач колебаний подробно развит в работе [12].

§ 13. КОЛЕБАНИЕ СВОБОДНО ОПЕРТОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Для иллюстрации методики применения уравнений Лагранжа второго рода к исследованию колебаний упругих тел, рассмотрим колебание свободно опертой призматической балки, уравнение упругой линии которой может быть задано в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (271)$$

где фундаментальные функции удовлетворяют всем граничным условиям задачи.

Будем при решении задачи учитывать инерцию вращения поперечных сечений, т. е. вычислять кинетическую энергию балки по формуле

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{m\rho^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 dx, \quad (272)$$

где m — погонная масса балки, ρ — радиус инерции погонной массы, и считать, что балка лежит на упругом основании с коэффициентом жесткости k_0 , т. е. вычислять потенциальную энергию балки по формуле

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{k_0}{2} \int_0^l v^2 dx. \quad (273)$$

Подставляя в выражения (272) и (273) ряд (271) и принимая во внимание, что

$$\int_0^l \sin \frac{g\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_0^l \cos \frac{g\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } g \neq k \\ \frac{l}{2} & \text{при } g = k, \end{cases} \quad (274)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{ml}{4} \sum_k \left[1 + k^2 \left(\frac{\pi\rho}{l} \right)^2 \right] \dot{q}_k^2(t), \\ V &= \frac{EI}{4} \sum_k \left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 + \frac{k_0}{EI} \right] q_k^2(t). \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

Обобщенная сила определится по формуле

$$Q_g(t) = \int_0^l f(x, t) \sin \frac{g\pi x}{l} dx, \quad (276)$$

где $f(x, t)$ — действующая на балку поперечная нагрузка.

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа (98), после подстановки в них выражений (275) и (276), получим

$$m \left[1 + g^2 \left(\frac{\pi \rho}{l} \right)^2 \right] \ddot{q}_g(t) + EI \left[\left(\frac{g\pi}{l} \right)^4 + \frac{k_0}{EI} \right] q_g(t) = \frac{2}{l} Q_g(t)$$

для любого значения g .

В рассматриваемой задаче обобщенные координаты $q_g(t)$ в дифференциальных уравнениях разделились, т. е. оказались главными координатами, фундаментальные же функции $\sin \frac{g\pi x}{l}$ — формами главных свободных колебаний.

Формы главных свободных колебаний свободно опертой балки имеют нули в точках с абсциссами

$$x_{jk} = \frac{j l}{k}$$

при $1 \leq j \leq k-1$ и отличаются одна от другой количеством нулей.

Отметим, что функции $\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$ являются не только формами свободных колебаний свободно опертой призматической балки, но и формами колебаний той же призматической балки при учете инерции вращения поперечных сечений и влияния упругого основания.

Частоты свободных колебаний рассматриваемой балки определяются по формуле

$$\lambda_g^{(p)} = \lambda_g^{(0)} \sqrt{\frac{1 + \frac{k_0 l^4}{EI g^4 \pi^4}}{1 + g^2 \left(\frac{\pi \rho}{l} \right)^4}}, \quad (277)$$

где

$$\lambda_g^{(0)} = \frac{g^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (278)$$

есть частота свободных колебаний свободно опертой балки без учета влияния инерции вращения поперечных сечений и упругого основания на частоты свободных колебаний.

Рассмотрение формул (277) и (278) позволяет сделать некоторые выводы, полезные для дальнейшего и носящие общий характер:

1) отношение двух последовательных частот свободных колебаний

$$\frac{\lambda_g^{(0)}}{\lambda_{g+1}^{(0)}} = \left(\frac{g}{g+1} \right)^2$$

меньше единицы и стремится к единице с увеличением номера частоты;

2) наличие упругого основания увеличивает частоту свободных колебаний, причем это влияние уменьшается при увеличении номера частоты;

3) инерция вращения поперечных сечений уменьшает частоту свободных колебаний, причем это влияние увеличивается с номером частоты.

Учтем теперь влияние сдвига на колебания свободно опертой балки, для чего предположим, что выражением (271) определяется стрелка прогиба от изгиба, а стрелка прогиба от сдвига выражением

$$v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(1)}(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (279)$$

где, вообще,

$$q_k^{(1)}(t) \neq q_k(t).$$

При учете сдвига кинетическая и потенциальная энергии определяются по формулам:

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial(v + v_1)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{m\rho^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 dx, \quad (280)$$

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{k_0}{2} \int_0^l (v + v_1)^2 dx + \frac{Gf}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (281)$$

где f —площадь стенки балки,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{—модуль сдвига,}$$

ν —коэффициент Пуассона.

Подставляя в формулы (280) и (281) выражения (271) и (279) и принимая во внимание соотношения (274), получим:

$$T = \frac{ml}{4} \sum_k \left\{ \left[\dot{q}_k(t) + \dot{q}_k^{(1)}(t) \right]^2 + k^2 \left(\frac{\pi \rho}{l} \right)^2 \dot{q}_k^2(t) \right\}, \quad (282)$$

$$V = \frac{EI l}{4} \sum_k \left\{ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 q_k^2(t) + \frac{k_0}{EI} [q_k(t) + q_k^{(1)}(t)]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1 + \nu)} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{f}{l} q_k^{(1)2}(t) \right\}. \quad (283)$$

Обобщенные силы $Q_g(t)$ и $Q_g^1(t)$, являющиеся, по определению, множителями при δq_k и $\delta q_k^{(1)}$ в общем выражении работы внешних сил на возможном перемещении, будут равны и определяться выражением (276).

Уравнения Лагранжа (98) должны быть записаны в рассматриваемом случае как для обобщенной координаты $q_g(t)$, так и для обобщенной координаты $q_g^{(1)}(t)$, т. е. принимая во внимание равенство обобщенных сил $Q_g^{(1)}(t) = Q_g(t)$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g} + \frac{\partial V}{\partial q_g} &= Q_g(t), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_g^{(1)}} + \frac{\partial V}{\partial q_g^{(1)}} &= Q_g(t). \end{aligned} \right\} \quad (284)$$

Подставляя в уравнения (284) выражения (282) и (283), получим:

$$\begin{aligned} m(\ddot{q}_g + \ddot{q}_g^{(1)}) + mg^2 \left(\frac{\pi \rho}{l} \right)^2 \ddot{q}_g + EI \left(\frac{g\pi}{l} \right)^4 q_g + k_0(q_g + q_g^{(1)}) &= \\ = \frac{2}{l} Q_g(t), \end{aligned} \quad (285)$$

$$m(\ddot{q}_g + \ddot{q}_g^{(1)}) + k_0(q_g + q_g^{(1)}) + \frac{Ef}{2(1+\nu)} \left(\frac{g\pi}{l} \right)^2 q_g^{(1)} = \frac{2}{l} Q_g(t), \quad (286)$$

т. е. обобщенные координаты q_g и $q_g^{(1)}$ определяются системой двух дифференциальных уравнений и не могут быть разделены, так что в этой задаче они не являются главными.

Рассмотрим сначала случай $\rho=0$, т. е. пренебрежем инерцией вращения поперечных сечений.

Умножая дифференциальное уравнение (286) на множитель

$$g^2(1+\nu) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{I}{f} = \alpha g^2 \quad (287)$$

и складывая с уравнением (285), получим:

$$\begin{aligned} m(1+\alpha g^2)(\ddot{q}_g + \ddot{q}_g^{(1)}) + \left[EI \left(\frac{g\pi}{l} \right)^4 + k_0(1+\alpha g^2) \right] (q_g + q_g^{(1)}) &= \\ = \frac{2}{l} (1+\alpha g^2) Q_g(t) \end{aligned}$$

или

$$(\ddot{q}_g + \ddot{q}_g^{(1)}) + \lambda_g^{(j)2} (q_g + q_g^{(1)}) = \frac{2}{ml} Q_g(t), \quad (288)$$

где

$$\lambda_g^{(j)} = \lambda_g^{(0)} \sqrt{1 + \frac{k_0 l^4}{EI g^4 \pi^4} (1 + \alpha g^2)}, \quad (289)$$

а величина $\lambda_g^{(0)}$ определяется по формуле (278).

На основании уравнения (288) можно сделать вывод, что функции времени $q_g(t) + q_g^{(1)}(t)$, входящие в выражение суммарной стрелки прогиба балки

$$v(x_1 t) + v_1(x, t) = \sum_k \left[q_k(t) + q_k^{(1)}(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l}$$

являются главными координатами, а функции $\sin \frac{k\pi x}{l}$ — формами главных колебаний при учете сдвига для суммарных стрелок прогиба свободно опертой призматической балки, лежащей на упругом основании.

Вычитая из уравнения (285) уравнение (286) (при $\rho=0$), получим:

$$q_g(t) - \frac{1}{\alpha g^2} q_g^{(1)}(t) = 0$$

или

$$q_g^{(1)}(t) = \alpha g^2 q_g(t), \quad (290)$$

откуда видно, что обе обобщенные координаты изменяются по одному и тому же закону.

Используя соотношение (290), можно преобразовать дифференциальное уравнение (288) к одному из следующих видов:

$$\ddot{q}_g + \lambda_g^{(j)^2} q_g = \frac{2}{ml(1 + \alpha g^2)} Q_g(t),$$

$$\ddot{q}_g^{(1)} + \lambda_g^{(j)^2} q_g^{(1)} = \frac{2}{ml} \frac{\alpha g^2}{(1 + \alpha g^2)} Q_g(t).$$

На основании их и формулы (289) можно сделать следующие выводы:

1) обобщенные координаты q_g и $q_g^{(1)}$ являются главными координатами для стрелок прогиба от изгиба и от сдвига;

2) фундаментальные функции $\sin \frac{g\pi x}{l}$ являются формами главных свободных колебаний свободно опертой балки для стрелок прогиба от изгиба и от сдвига.

Сделанные выше выводы носят частный характер и справедливы лишь для призматической свободно опертой балки. Во всех других случаях они, если и могут быть использованы, то лишь для приближенного решения задачи;

3) учет сдвига уменьшает частоты свободных колебаний, причем это влияние иногда значительно больше влияния инерции вращения, так как для тонкостенных балок

$$\left(\frac{\pi \rho}{I} \right)^2 \ll 2(1 + \nu) \frac{I}{l^2 f};$$

4) обобщенные силы в уравнении (288) для определения главной координаты суммарной стрелки прогиба такие же, как и в уравнении для определения главной координаты стрелки прогиба от изгиба при неучете инерции вращения и влияния сдвига.

Поэтому основное влияние на изменение стрелок прогиба при учете сдвига должно оказывать изменение частотных характеристик стержня.

В дальнейшем нам потребуется формула для частоты колебаний свободно опертой стержня с учетом сдвига и без учета упругого основания. Формулу (289) при $k_0=0$, принимая во внимание выражение (278), удобно для дальнейших применений переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \frac{l}{g\pi} \sqrt[4]{\frac{m}{EI} \left[1 + 2(1+\nu) \frac{I}{fl^2} g^2 \right]}. \quad (291)$$

На основании формулы (278) можно сделать вывод, что g -ая частота свободно опертой балки без учета сдвига, инерции вращения поперечных сечений и упругого основания может рассматриваться как первая частота свободных колебаний свободно опертой балки с приведенной длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{l}{g},$$

а эта длина равна расстоянию между узлами в g -ой форме свободных колебаний. Поэтому формула (291) может быть переписана в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \frac{l_{\text{пр}}}{\pi} \sqrt[4]{\frac{m}{EI} \left[1 + 2(1+\nu) \frac{I}{fl_{\text{пр}}} \right]}. \quad (292)$$

Формулой (292) мы воспользуемся в дальнейшем при приближенном определении высших частот стержней с любыми граничными условиями, причем будем понимать под $l_{\text{пр}}$ расстояние между узлами в рассматриваемой форме свободных колебаний.

В анализируемых нами двух случаях—при раздельном учете инерции вращения или сдвига—каждой фундаментальной функции соответствовала одна частота свободных колебаний, как это видно из формул (277) и (289).

Если же учитывать сдвиг и инерцию вращения совместно, то каждой фундаментальной функции соответствуют две частоты свободных колебаний.

Полагая в уравнениях (285) и (286) при $Q_g(t) \equiv 0$

$$q_g(t) = A_g \cos \lambda t, \quad q_g^{(1)}(t) = B_g \cos \lambda t,$$

получим систему однородных уравнений для определения A_g и B_g :

$$\begin{aligned} \left[-m\lambda^2 + k_0 + EI \left(\frac{g\pi}{l} \right)^4 - mg^2 \left(\frac{\pi\rho}{l} \right)^2 \lambda^2 \right] A_g + (-m\lambda^2 + k_0) B_g &= 0, \\ (-m\lambda^2 + k_0) A_g + \left[-m\lambda^2 + k_0 + \frac{Ef}{2(1+\nu)} \left(\frac{g\pi}{l} \right)^2 \right] B_g &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель системы уравнений нулю и производя преобразования, получим следующее уравнение частот

$$\begin{aligned} \alpha g^4 \left(\frac{\pi\rho}{l} \right)^2 \lambda^4 - \lambda^2 \lambda_g^{(0)2} \left[1 + g^2 \left(\frac{\pi\rho}{l} \right)^2 + \alpha g^2 + \alpha \frac{k_0 l^4}{\pi^4 EI} \left(\frac{\pi\rho}{l} \right)^2 \right] + \\ + \lambda_g^{(0)2} \left[\frac{k_0}{m} (1 + \alpha g^2) + \lambda_g^{(0)2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (293)$$

где α определяется по формуле (287), а $\lambda_g^{(0)}$ — по формуле (278).

Рассмотрим для простоты балку без упругого основания и введем обозначения:

$$\alpha g^2 = k_g^{(1)}, \quad g^2 \left(\frac{\pi\rho}{l} \right)^2 = k_g^{(2)}, \quad (294)$$

так что уравнение (293) можно будет переписать в виде

$$k_g^{(1)} k_g^{(2)} \lambda^4 - \lambda^2 \lambda_g^{(0)2} (1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)}) + \lambda_g^{(0)4} = 0,$$

решая которое получим:

$$\begin{aligned} \lambda_g^{(1)2} &= \frac{1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)} - \sqrt{(1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)})^2 - 4k_g^{(1)}k_g^{(2)}}}{2k_g^{(1)}k_g^{(2)}} \lambda_g^{(0)2}, \\ \lambda_g^{(2)2} &= \frac{1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)} + \sqrt{(1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)})^2 - 4k_g^{(1)}k_g^{(2)}}}{2k_g^{(1)}k_g^{(2)}} \lambda_g^{(0)2}, \end{aligned} \quad (295)$$

причем первый корень целесообразно записать в виде

$$\lambda_g^{(1)2} = \frac{2\lambda_g^{(0)2}}{1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)} + \sqrt{(1 + k_g^{(1)} + k_g^{(2)})^2 - 4k_g^{(1)}k_g^{(2)}}}. \quad (296)$$

При $k_g^{(1)}=0$ формула (296) переходит в формулу (278), когда $k_0=0$, а если $k_g^{(2)}=0$ — в формулу (277) то же при $k_0=0$. Таким образом, формула (296) определяет частоту колебаний при одновременном учете сдвига и инерции вращения поперечных сечений.

Формула (295) определяет вторые частоты при учете сдвига и инерции вращения поперечных сечений, соответствующие принятой форме колебаний. Очевидно, что $\lambda_g^{(2)} > \lambda_g^{(1)}$, и поэтому возможны такие случаи, когда, например, вторая частота, соответ-

ствующая первой форме колебаний, окажется одного порядка с одной из первых частот, соответствующей одной из высших форм колебаний.

Если можно пренебречь сдвигом или инерцией вращения, то, как это видно из формулы (295), вторые частоты обращаются в бесконечность. При необходимости же учитывать и сдвиг и инерцию вращения (например, корпуса судна), вторые частоты оказываются конечными и с ними приходится считаться.

Затронутый нами вопрос имеет особое значение для правильного расчета вынужденных колебаний при действии гармонической нагрузки, частота которой близка к одной из высших частот свободных колебаний.

§ 14. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И ПРОСТЕЙШИХ РАМ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В настоящем параграфе мы ограничимся решением задач в первом приближении, т. е. будем представлять упругую линию в виде

$$v(x_1t) = q(t) \varphi(x), \quad (297)$$

так что дифференциальное уравнение для определения обобщенной координаты запишется в виде

$$M\ddot{q} + Cq = Q(t), \quad (298)$$

где обобщенная сила $Q(t)$ вычисляется по формуле (248), «обобщенная масса» M есть численный коэффициент в преобразованном выражении для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} M \dot{q}^2, \quad (299)$$

а «обобщенная жесткость» C — численный коэффициент в преобразованном выражении для потенциальной энергии системы

$$V = \frac{1}{2} C q^2. \quad (300)$$

Частота свободных колебаний определяется формулой

$$\lambda^2 = \frac{G}{M}. \quad (301)$$

Такой приближенный способ решения задач колебаний был предложен Релеем и часто называется его именем.

Пример 1. Найти частоту колебаний первого тона призматического консольного стержня, жестко заделанного в опорном сечении,

Для выбора фундаментальной функции $\varphi(x)$ можно воспользоваться следующими соображениями.

Если мы рассматриваем какое-то главное колебание

$$v = \varphi(x) \cos \lambda t.$$

то стержень оказывается загруженным силами инерции интенсивностью

$$-m\ddot{v} = m\lambda^2 \varphi(x) \cos \lambda t,$$

и форма колебаний может быть определена путем интегрирования дифференциального уравнения

$$EI\varphi^{IV}(x) = m\lambda^2 \varphi(x),$$

т. е. интенсивность нагрузки на стержень пропорциональна стрелке прогиба.

Поэтому фундаментальная функция для определения частоты первого тона консольного стержня должна быть близка к упругой линии консоли при нагрузке, интенсивность которой увеличивается к свободному концу.

Для приближенного решения задачи примем, что фундаментальная функция изменяется по такому же закону, как и упругая линия консоли, загруженной равномерно распределенной нагрузкой

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{l^2} \left(6 - 4 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (302)$$

Постоянный множитель в уравнении упругой линии мы опускаем, так как он не влияет на окончательный результат.

Если учитывать только кинетическую энергию поступательных перемещений поперечных сечений стержня, то

$$M = \int_0^l m \varphi^2(x) dx; \quad (303)$$

если учитывать только потенциальную энергию изгиба, то

$$C = \int_0^l EI \varphi''^2(x) dx. \quad (304)$$

Подставляя в формулы (303) и (304) выражение (302), получим:

$$M = \frac{104}{45} ml, \quad C = \frac{144}{5} \frac{EI}{l^3},$$

так что согласно формуле (301) частота колебаний первого тона будет

$$\lambda = \sqrt{\frac{162 EI}{13 ml^4}} = 3,53 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}. \quad (305)$$

Данное значение отличается от точного (см. § 22) всего на 0,5%.

Если принять за форму колебаний упругую линию консоли, нагруженной силой на конце, т. е. положить

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right), \quad (306)$$

то

$$M = \frac{33}{35} ml, \quad C = 12 \frac{EI}{l^3},$$

так что

$$\lambda = \sqrt{\frac{140 EI}{11 ml^4}} = 3,57 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}. \quad (307)$$

Формула (305), как это следует из теоремы Релея, является более точной, чем формула (307).

При определении частоты колебаний первого тона консоль можно заменить некоторой «эквивалентной» массой M_s , прикрепленной на конце невесомой консоли тех же размеров. В этом случае форма колебаний (306) будет являться точной, обобщенная масса определится по формуле

$$M = M_s \varphi^2(l) = 4M_s,$$

а так как обобщенная жесткость своей величины не изменила, то

$$\lambda = \sqrt{3 \frac{EI}{M_s l^3}}.$$

Приравнивая частоты, получим

$$M_s = \frac{39}{162} ml = 0,240 ml.$$

Мы не останавливаемся на подборе фундаментальной функции для определения частоты колебаний второго тона, так как использование для этого статических упругих линий при специально подобранной нагрузке приводит к достаточно сложным выкладкам.

Пример 2. Найти частоту колебаний первого тона жестко заделанного стержня.

Изгиб стержня при колебаниях первого тона симметричен относительно середины пролета, поэтому примем

$$\varphi(x) = 1 - \cos \frac{2\pi x}{l}. \quad (308)$$

Функция (308) удовлетворяет всем кинематическим условиям задан.

Воспользовавшись формулами (303) и (304), можно получить:

$$M = \frac{3}{2} ml, \quad C = 8\pi^4 \frac{EI}{l^3},$$

так что частота определяется по формуле

$$\lambda = \pi^2 \sqrt{\frac{16}{3} \frac{EI}{ml^4}} = 22,8 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}},$$

тогда как точное значение численного коэффициента равно 22,35; погрешность приближенной формулы около 1,5%.

Пример 3. Найти частоты колебаний безопорного призматического стержня.

В рассматриваемой задаче кинематические условия отсутствуют и при выборе фундаментальных функций необходимо воспользоваться тем, что при колебаниях безопорного стержня главный вектор и главный момент сил инерции должны быть равны нулю:

$$\int_0^l m \ddot{v} dx = 0, \quad \int_0^l m \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \ddot{v} dx = 0. \quad (309)$$

В последней формуле сумма моментов сил инерции вычислена относительно середины длины стержня.

Мы не рассматриваем условия равенства нулю главного вектора продольных усилий, появляющегося в том случае, если центр инерции масс в поперечном сечении не лежит на нейтральной оси.

Подставляя в условия уравниваемости (309) выражение (297), получим:

$$\int_0^l m \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^l m \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \varphi(x) dx = 0. \quad (310)$$

Будем искать фундаментальную функцию в виде

$$\varphi_n(x) = \alpha_n + 20\beta_n \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) + \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (311)$$

где $n=1$ при определении формы колебаний первого тона, $n=2$ — второго тона и т. д.; коэффициенты α_n и β_n определяем из условий уравниваемости (310).

Подставляя выражение (311) в условия (310), найдем: при n нечетном — для симметричных форм колебаний

$$\varphi_n(x) = -\frac{2}{n\pi} + \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (312)$$

при n четном—для антисимметричных форм колебаний

$$\varphi_n(x) = \frac{12}{n\pi} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) + \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (313)$$

Интересно отметить, что для достаточно высоких форм колебаний фундаментальные функции будут мало отличаться от форм колебаний свободно опертой балки. Это обстоятельство имеет общий характер, и мы вернемся к его рассмотрению в § 32.

Подставляя выражение (312) в формулы (303) и (304) и используя формулу (301), получим для симметричных форм колебаний (при n —нечетном)

$$\lambda_n = k_n \sqrt{\frac{EI}{ml^4}},$$

где

$$k_n = \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{1 - \frac{8}{(n\pi)^2}}}. \quad (314)$$

Из формулы (314) следует:

$$k_1 = 22,7, \quad k_3 = 93,1,$$

тогда как точное решение (см. § 22) дает

$$k_1 = 22,38, \quad k_3 = 121,0.$$

Следовательно, первая частота определяется с большой степенью точности, погрешность же при определении третьей частоты достигает 23%. Обращаем внимание на то, что третья частота оказалась меньше истинной.

Так как первая частота определилась очень точно, то это свидетельствует о близости первой фундаментальной функции к первой форме колебаний. Для уточненного определения третьей частоты следует воспользоваться указанным в § 11 приемом последовательной ортогонализации и представить третью фундаментальную функцию в виде

$$\varphi_3(x) = -\frac{2}{3\pi} + \sin \frac{3\pi x}{l} + \alpha_{31} \left(-\frac{2}{\pi} + \sin \frac{\pi x}{l} \right), \quad (315)$$

где коэффициент α_{31} должен быть определен из условия ортогональности третьей фундаментальной функции по отношению к первой

$$\int_0^l \varphi_3(x) \left(-\frac{2}{\pi} + \sin \frac{\pi x}{l} \right) dx = 0,$$

откуда можно получить

$$\alpha_{31} = \frac{8}{3\pi^2 - 24} = 1,428.$$

Условие ортогональности определяемой нами функции $\varphi_3(x)$ относительно функции $\varphi_2(x)$ выполняется, так как первая из них симметрична относительно середины пролета балки, а вторая антисимметрична.

Подставляя найденное значение α_{31} в выражение (315), найдем

$$\varphi_3(x) = -1,121 + 1,428 \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Вычисляя по формулам (303) и (304) обобщенную массу и обобщенную жесткость, получим уточненное значение

$$k_3 = 124,0,$$

несколько большее точного значения, приведенного выше.

Принятое нами условие ортогональности соответствует выражению кинетической энергии через квадраты обобщенных скоростей и может быть названо условием ортогональности по кинетической энергии. Условию же ортогональности по потенциальной энергии

$$\int_0^l \varphi_n''(x) \varphi_k''(x) dx = 0 \text{ при } n \neq k,$$

т. е. условию выражения потенциальной энергии через квадраты обобщенных координат, удовлетворяет исходная система функций (312) и (313).

Прибегнув к ортогонализации фундаментальных функций по кинетической энергии и улучшив третью частоту свободных колебаний, мы нарушили вместе с тем ортогональность по потенциальной энергии.

Таким образом, в рассматриваемом случае выполнение условия ортогональности по кинетической энергии оказалось более важным, чем выполнение условия ортогональности по потенциальной энергии.

Однако вопрос о том, что в общем случае приводит к более точному результату при решении задач энергетическим методом, мы вынуждены оставить открытым, так как он совершенно не исследован.

Для высших частот указанный метод достаточно громоздок и погрешность при определении частот возрастает, но при определении частот до третьей включительно его следует рекомендовать.

Пример 4. Найти частоту колебаний первого тона для рамы изображенной на рис. 17.

В зависимости от соотношений размеров стоек рамы и ригеля (горизонтальной балки) форма колебаний первого тона рамы бывает либо симметричной (см. рис. 17, а), либо антисимметричной (см. рис. 17, в).

Симметричная форма колебаний может быть приближенно представлена как упругая линия рамы, нагруженной указанной на рис. 17, б нагрузкой, где p_0 — погонный вес ригеля, p_1 — погонный вес стойки. Антисимметричная форма колебаний может быть приближенно представлена как упругая линия рамы, нагруженной горизонтальной силой, приложенной к верхнему узлу (см. рис. 17, з).

Последовательность расчета сводится к следующему:

1) определяется расчетом упругая линия рамы $\varphi(s)$, которая и принимается за форму колебаний;

2) вычисляется потенциальная энергия изгиба рамы, причем для упрощения вычислений целесообразно воспользоваться теоремой Клапейрона. Произведение потенциальной энергии на $q^2(t)$, где $q(t)$ — обобщенная координата, определит потенциальную энергию при колебаниях;

3) полагая стрелку прогиба при колебаниях равной $\varphi(s)q(t)$, вычисляют кинетическую энергию при поперечных колебаниях. При антисимметричной форме колебаний необходимо учесть кинетическую энергию ригеля при его поступательном (горизонтальном) перемещении.

После этого частоты свободных колебаний определяются обычным путем.

Мы не будем приводить решения рассматриваемой задачи и лишь заметим, что оно будет достаточно трудоемко и громоздко. Точное решение этой задачи, приводимое в § 27, оказывается значительно более простым.

Энергетический метод расчета колебаний целесообразно применять в тех случаях, когда выбор фундаментальных функций достаточно прост и можно при решении ограничиться небольшим числом членов ряда (239). Если эти условия не удовлетворяются, то в ряде случаев более простым оказывается точное решение.

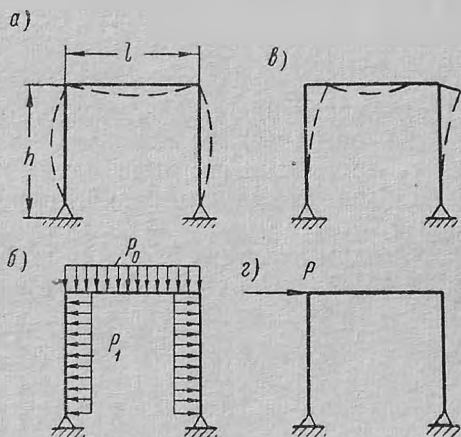


Рис. 17.

§ 15. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРАБЛЯ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Задача об определении частот свободных поперечных колебаний корабля отличается от задачи, рассмотренной в примере 3 предыдущего параграфа лишь тем, что необходимо учесть непризматичность корабля, деформацию сдвига, инерцию вращения поперечных сечений, изменение сил поддержания при вибрации и присоединенную массу воды.

В дальнейшем мы будем полагать

$$m = \frac{P}{g} = \frac{1}{g} (p_1 + r_k), \quad (316)$$

где

g — ускорение силы тяжести,

p_1 — погонный вес корабля,

r_k — погонный вес присоединенной массы воды, соответствующий k -ой форме колебаний, определяемый с учетом рекомендаций § 37.

Фундаментальные функции могут быть приняты согласно формуле (311), но целесообразнее принять их в виде

$$\varphi_k(\xi) = \alpha_k + 20\beta_k(\xi - 0,5) + f_k(\xi), \quad (317)$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad (318)$$

$f_k(\xi)$ — формы главных свободных колебаний безопорной призматической балки, аналитические выражения которых приведены в § 22.

Фундаментальные функции (317) удовлетворяют всем граничным условиям на концах безопорной балки, тогда как функции (311) удовлетворяют лишь условиям обращения в нуль изгибающего момента. Поэтому можно ожидать, что использование выражения (317) приведет к получению более точных результатов, чем использование выражения (311).

Практическое использование выражения (317) несколько не сложнее, чем использование выражения (311), так как численные значения $\sin \frac{k\pi x}{l}$ и численные значения функций $f_k(\xi)$ определяются по таблицам.

Численные значения функций $f_k(\xi)$ и их производных для $k=1$, $k=2$ и $k=3$ приведены в табл. 8.

При пользовании таблицей нужно иметь в виду, что производные вычислены по безразмерной координате ξ , так что

$$\frac{df_k}{dx} = \frac{1}{l} f'_k(\xi), \quad \frac{d^2 f_k}{dx^2} = \frac{1}{l^2} f''_k(\xi), \quad (319)$$

ξ	$f_1(\xi)$	$f_1'(\xi)$	$f_1''(\xi)$	$f_2(\xi)$	$f_2'(\xi)$	$f_2''(\xi)$	$f_3(\xi)$	$f_3'(\xi)$	$f_3''(\xi)$
0	1,000	-4,65	0	1,000	-7,84	0	1,000	-11,00	0
0,05	0,767	-4,64	0,58	0,607	-7,76	4,0	0,454	-10,68	14,9
0,10	0,537	-4,57	2,12	0,228	-7,31	14,0	-0,056	-9,22	45,9
0,15	0,313	-4,42	4,31	-0,117	-6,32	26,2	-0,441	-6,12	76,4
0,20	0,097	-4,14	6,95	-0,398	-4,74	37,2	-0,642	-1,82	91,2
0,25	-0,099	-3,71	9,67	-0,585	-2,69	44,5	-0,622	2,63	83,0
0,30	-0,272	-3,16	12,19	-0,662	-0,39	46,4	-0,396	6,08	52,8
0,35	-0,413	-2,49	14,90	-0,625	2,71	42,0	-0,045	7,65	-8,0
0,40	-0,520	-1,72	16,28	-0,483	3,71	31,8	0,328	6,87	-38,2
0,45	-0,585	-0,87	17,39	-0,262	4,95	17,1	0,601	4,03	-71,8
0,50	-0,607	0	17,78	0	5,40	0	0,712	0	-84,8

начало координат находится на левом конце, функции

$$f_1(\xi), f_1''(\xi), f_2'(\xi), f_3(\xi), f_3''(\xi)$$

симметричны относительно середины, а функции

$$f_1'(\xi), f_2(\xi), f_2''(\xi), f_3'(\xi)$$

антисимметричны относительно середины.

Условия уравниваемости для корабля должны быть записаны несколько иначе, чем условия (310), так как в них должны быть учтены и реакции упругого основания—изменение сил поддержания при изгибе. Однако при приближенном решении задачи нет смысла учитывать влияние упругого основания на форму колебаний; например, для свободно опертой балки влияние это отсутствует и, вообще, нет оснований считать его большим. Неучет влияния упругого основания на форму колебаний внесет в расчет меньшую погрешность, чем приближенное задание формы колебаний.

Что касается влияния упругого основания на частоты свободных колебаний, то, как уже отмечалось в § 13, это влияние уменьшается при увеличении номера частоты и для первой частоты оно наибольшее. Для свободно опертой балки (без учета инерции вращения поперечных сечений) формула (277) дает

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} \sqrt{1 + \frac{k_0 l^4}{\pi^4 EI}}. \quad (320)$$

Вводя известное обозначение для аргумента u

$$u = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}},$$

характеризующего влияние упругого основания на изгиб балки, преобразуем формулу (320) для первой частоты к виду

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{2u}{\pi} \right)^4}. \quad (320')$$

Аргумент u для морских судов обычно меньше 0,5, так что упругое основание даже первую частоту увеличивает не больше чем на 2%. Для безопорной балки это влияние еще меньше.

Влияние упругого основания на частоту свободных колебаний существенно для гибких речных судов и там его нужно учитывать. Для морских же судов, которые мы в основном и имеем в виду, этим влиянием можно пренебречь.

Подставляя выражения (317) и (318) в условия уравниваемости (310) и принимая во внимание обозначение (316), после

несложных преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k \int_0^1 \frac{p}{p_0} d\xi + 20\beta_k \int_0^1 \frac{p}{p_0} (\xi - 0,5) d\xi + \int_0^1 \frac{p}{p_0} f_k(\xi) d\xi &= 0, \\ \alpha_k \int_0^1 \frac{p}{p_0} (\xi - 0,5) d\xi + 20\beta_k \int_0^1 \frac{p}{p_0} (\xi - 0,5)^2 d\xi + \\ + \int_0^1 \frac{p}{p_0} (\xi - 0,5) f_k(\xi) d\xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (321)$$

Вычисление интегралов, входящих в условия уравновешенности (321), и фундаментальных функций $\varphi_k(\xi)$ производится в табл. 9. В последнем столбце этой таблицы вычислены исправленные суммы; для получения интегралов, входящих в уравнения (321), надо умножить соответствующие суммы на $\Delta = \frac{1}{20}$.

Если решить первое уравнение (321) относительно α_k , а второе относительно β_k , то, используя данные табл. 9, можно переписать уравнения (321) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{\Sigma_7}{\Sigma_3} - \frac{\Sigma_6}{\Sigma_3} \beta_k, \\ \beta_k &= -\frac{\Sigma_6}{\Sigma_3} - \frac{\Sigma_7}{\Sigma_3} \alpha_k. \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

Систему (322) целесообразнее всего решать методом последовательных приближений. Для этого полагают в первом приближении $\beta_k = 0$ и находят из первого уравнения $\alpha_k^{(1)}$, подставляют значение $\alpha_k = \alpha_k^{(1)}$ во второе уравнение и находят $\beta_k^{(1)}$, подставляют $\beta_k = \beta_k^{(1)}$ в первое уравнение и находят $\alpha_k^{(2)}$, и т. д.

Данный процесс сходится очень быстро.

Для нахождения расчетной формулы, определяющей частоты свободных колебаний судна с учетом сдвига и инерции вращения поперечных сечений, воспользуемся уравнениями Лагранжа. Представим стрелку прогиба от изгиба в виде

$$v_1(x, t) = q_1(t) \varphi_k(x), \quad (323)$$

а стрелку прогиба от сдвига в виде

$$v_2(x, t) = q_2(t) \varphi_k(x). \quad (324)$$

Таблица 9

№ строки	Теоретический шпангоут	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\Sigma_{\text{испр.}}$
1	$p_1^* : p_0$																						—
2	$r_K^{**} : p_0$																						—
3	$p : p_0 = (1) + (2)$																						$\Sigma_{\text{вс}}$
4	$20(\xi - 0,5)$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	—
5	$f_K(\xi)$																						—
6	$(3) \cdot (4)$																						Σ_6
7	$(3) \cdot (5)$																						Σ_7
8	$(6) \cdot (4)$																						Σ_8
9	$(7) \cdot (4)$																						Σ_9
10	$\beta_K \cdot (4)$																						—
11	$\varphi_K(\xi) = a_1 + (10) + (5)$																						—

* p_1 — погонный вес судна.** r_K — погонный вес присоединяемой воды, соответствующий рассматриваемой форме колебания.

Потенциальная энергия изгиба и сдвига определится по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI v_1''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l Gf v_2'^2 dx, \quad (325)$$

где f —площадь стенки балки, G —модуль сдвига, начало координат на левом конце.

Подставляя в формулу (325) выражения (323) и (324), получим

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{EI_0}{l^3} q_1^2(t) C + \frac{Gf_0}{l} q_2^2(t) B \right], \quad (326)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_0^l \frac{l}{I_0} \varphi_k'^2(\xi) d\xi, \\ B &= \int_0^l \frac{f}{f_0} \varphi_k'^2(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

ξ определяется формулой (318), производные в выражениях (327) берутся по переменной ξ ; I_0 и f_0 —некоторые средние значения момента инерции площади поперечного сечения и площади стенки, вводимые для удобства исследования.

Кинетическая энергия колеблющейся балки

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\rho}{g} (\dot{v}_1 + \dot{v}_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\rho_1}{g} \rho^2 \dot{v}_1'^2 dx, \quad (328)$$

где ρ —радиус инерции масс в поперечном сечении и второй интеграл определяет кинетическую энергию вращения поперечных сечений.

Подставляя в формулу (328) выражения (323) и (324), а также принимая во внимание равенство (318), преобразуем выражение для кинетической энергии к виду

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 l}{g} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 A + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 l^2}{gl} \right)_{\text{ср}} \dot{q}_1'^2 B_1, \quad (329)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^l \frac{\rho}{\rho_0} \varphi_k^2(\xi) d\xi, \\ B_1 &= \int_0^l \varphi_k'^2(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

При вычислении второго интеграла в выражении (328) использована теорема о среднем, так как, во-первых, поправка на инерцию вращения для низших частот невелика и, во-вторых, мы не имеем данных для учета инерции вращения присоединенной воды; поэтому нет смысла вычислять интеграл более точно.

Подставляя выражения (326) и (329) в уравнения Лагранжа (98) при $\Phi \equiv 0$ и $Q_g \equiv 0$, получим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{\rho_0 l}{g} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) A + \left(\frac{\rho_1 l^2}{g l} \right)_{\text{ср}} \ddot{q}_1 B_1 + \frac{E I_0}{l^3} q_1 C = 0,$$

$$\frac{\rho_0 l}{g} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) A + \frac{G f_0}{l} q_2 B = 0.$$

Умножая второе уравнение на множитель

$$k_1 = \frac{E I_0}{l^3} C \frac{l}{G f_0 B} = 2(1 + \nu) \frac{I_0}{l^2 f_0} \frac{C}{B}, \quad (331)$$

где ν — коэффициент Пуассона, и складывая с первым, получим

$$\frac{\rho_0 l}{g} A (1 + k_1) \ddot{q}(t) + \left(\frac{\rho_1 l^2}{g l} \right)_{\text{ср}} B_1 \ddot{q}_1(t) + \frac{E I_0}{l^3} C \ddot{q}(t) = 0, \quad (332)$$

где

$$\ddot{q}(t) = \ddot{q}_1(t) + \ddot{q}_2(t) \quad (333)$$

есть обобщенная координата для суммарной стрелки прогиба

$$v(x, t) = q(t) \varphi_k(x). \quad (334)$$

Для приближенного учета малого влияния инерции вращения на низшие частоты колебаний положим в уравнении (332)

$$q_1(t) \approx q(t),$$

после чего это уравнение приводится к виду

$$\frac{\rho_0 l}{g} A (1 + k_1 + k_2) \ddot{q}(t) + \frac{E I_0}{l^3} C \ddot{q}(t) = 0, \quad (335)$$

где

$$k_2 = \left[\frac{\rho_1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{l} \right)^2 \right]_{\text{ср}} \frac{B_1}{A}. \quad (336)$$

Квадрат частоты свободных колебаний с учетом сдвига и инерции вращения определится по формуле

$$\lambda_k^2 = \frac{E I_0 g}{\rho_0 l^4} \frac{C}{A} \frac{1}{1 + k_1 + k_2}, \quad (337)$$

из которой видно, что учет сдвига и инерции вращения уменьшает частоты свободных колебаний.

Таблица 10

№ группы	Теоретический шангоут	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\Sigma_{\text{испр.}}$
1	$\frac{p}{p_0}$																						—
2	$\frac{I}{I_0}$																						—
3	$\varphi_K(\xi)$																						—
4	$\varphi_K''(\xi)$																						—
5	(1) (3) ²																						Σ_5
6	(2) (4) ²																						Σ_6
7	$\frac{f}{f_0}$																						—
8	$\varphi_K'(\xi)$																						—
9	(8) ²																						Σ_9
10	(7) (9)																						Σ_{10}

Формула (337) была впервые получена П. Ф. Папковичем, правильно оценившим влияние сдвига и инерции вращения на частоты свободных колебаний

Все вычисления, связанные с определением частоты свободных колебаний, производятся в табл. 10, в последнем столбце которой записываются исправленные значения сумм соответствующих строк. Табл. 10 заполняется следующим образом. В первой и второй строках записываются исходные данные для расчета, а в третьей строке—значения ординат фундаментальной функции, заимствуемые из 11 строки табл. 9.

В четвертой строке записываются значения второй производной формы колебаний

$$\varphi_k''(\xi) = f_k''(\xi),$$

а значения функции $f_k''(\xi)$ заимствуются из табл. 9.

Если при определении частоты колебаний высших тонов форма колебаний уточняется путем последовательной ортогонализации, то указанный порядок заполнения строк 3 и 4 справедлив лишь при вычислении первой частоты, т. е. при $k=1$; порядок заполнения строк 3 и 4 в случае применения последовательной ортогонализации для $k > 1$ будет указан ниже.

Дальнейшие формулы, за исключением формулы (339), справедливы для любого значения k .

В строке 5 производится вычисление величины A , определяемой первой формулой (330), так что

$$A = \frac{1}{20} \Sigma_5.$$

В строке 6 вычисляется величина C , определяемая первой формулой (327)

$$C = \frac{1}{20} \Sigma_6.$$

Частота свободных колебаний $\lambda_k^{(0)}$ без учета сдвига и инерции вращения определится согласно формуле (337) при $k_1=k_2=0$ и, принимая во внимание выражения для A и C , по формуле

$$\lambda_k^{(0)} = \sqrt{\frac{E_0 I g}{\rho_0 l^4}} \sqrt{\frac{\Sigma_6}{\Sigma_5}}. \quad (338)$$

В строках 7—10 таблицы вычислены величины B и B_1 , входящие в выражения (331) и (336) для вычисления поправок на сдвиг и вращение. Производная $\varphi_k'(\xi)$ определяется согласно выражению (317) по формуле

$$\varphi_k'(\xi) = 20 \beta_k + f_k'(\xi), \quad (339)$$

где производная $f'_k(\xi)$ устанавливается по табл. 9; при уточненном выборе фундаментальных функций для определения высших частот зависимость (339) изменяется.

Согласно вторым формулам (327) и (330):

$$B = \frac{1}{20} \Sigma_{10}, \quad B_1 = \frac{1}{20} \Sigma_9,$$

так что выражения (331) и (336) могут быть переписаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 2 \left(1 + \nu \right) \frac{I_0 \Sigma_6}{I^2 f_0 \Sigma_{10}}, \\ k_2 &= \left[\frac{p_1}{p_0} \left(\frac{p}{l} \right)^2 \right]_{\text{ср}} \frac{\Sigma_9}{\Sigma_5}. \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

Частота свободных колебаний с учетом сдвига и инерции вращения определится выражением

$$\lambda_k = \frac{\lambda_k^{(0)}}{\sqrt{1 + k_1 + k_2}} \quad (341)$$

При использовании метода последовательной ортогонализации в задаче об определении частот поперечных колебаний судна возникает затруднение, ибо различным формам колебаний соответствуют различные присоединенные массы и остается открытым вопрос о том, как надо писать условие ортогональности, если ортогонализировать по кинетической энергии, т. е. подбирать фундаментальные функции так, чтобы обращать кинетическую энергию в сумму квадратов.

Можно ожидать (см. пример 3 § 14), что в рассматриваемой задаче для уточненного определения высших частот надо воспользоваться ортогонализацией по кинетической, а не по потенциальной энергии, и мы на использовании этого последнего условия не останавливаемся, хотя оно формально и избавило бы нас от всяких затруднений.

В рассматриваемой задаче фундаментальные функции должны удовлетворять условиям уравновешенности (310), причем для каждой фундаментальной функции должна быть принята соответствующая присоединенная масса воды. Чтобы условие уравновешенности не было нарушено при последовательной ортогонализации, каждая из функций $\varphi_k(\xi)$, определяемых выражением (317), из которых будет строиться ортогональная система функций, должна удовлетворять соответствующему условию уравновешенности.

Другими словами, если надо построить функцию $\varphi_2(\xi)$, то предварительно определяют по формуле (317) функции $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, уравновешенные относительно $m = \frac{1}{g}(p_1 + r_2)$, где r_2 соответствует второму тону колебаний. После этого функция $\varphi_2(\xi)$ строится из условия ортогональности по отношению к функ-

ции $\bar{\varphi}_1(\xi)$, причем в условие ортогональности должна быть введена погонная масса с учетом присоединенной воды, соответствующей второму тону колебаний.

Если нужно построить функцию $\varphi_3(\xi)$, то предварительно определяют по формулам (317) функции $\bar{\varphi}_1(\xi)$, $\bar{\varphi}_2(\xi)$ и $\bar{\varphi}_3(\xi)$, уравновешенные относительно $m = \frac{1}{g}(p_1 + r_3)$. После этого функция $\varphi_3(\xi)$ строится из условия ортогональности по отношению к $\bar{\varphi}_1(\xi)$ и $\bar{\varphi}_2(\xi)$, причем в условие ортогональности вводится та же погонная масса.

Учитывая приближенность решения задачи, достаточно ортогонализировать функцию $\varphi_3(\xi)$ лишь по отношению к $\bar{\varphi}_1(\xi)$, т. е. принимать для $\varphi_3(\xi)$ двучленное выражение, функцию же $\varphi_2(\xi)$ ортогонализировать по отношению к $\bar{\varphi}_1(\xi)$ не следует, так как это условие приближенно удовлетворяется: одна из функций почти симметрична относительно середины, а другая — антисимметрична.

Поэтому приведенная выше схема расчета полностью применима и при $k=2$.

Необходимые построения уравновешенных функций производятся в табл. 9, функция $\varphi_3(\xi)$ определяется по формуле

$$\varphi_3(\xi) = \bar{\varphi}_3(\xi) + \alpha_{31} \bar{\varphi}_1(\xi), \quad (342)$$

а коэффициент α_{31} — из уравнения

$$\int_0^1 \frac{p}{p_0} \bar{\varphi}_3(\xi) \bar{\varphi}_1(\xi) d\xi + \alpha_{31} \int_0^1 \frac{p}{p_0} \bar{\varphi}_1^2(\xi) d\xi = 0, \quad (343)$$

где присоединенная масса воды соответствует третьему тону колебаний.

При определении частоты колебаний третьего тона строки 3, 4 и 8 табл. 10 должны быть заполнены на основании вычислений по формуле (342). Мы не останавливаемся на составлении таблицы для вычисления интегралов, входящих в уравнение (343), и вычисления функции $\varphi_3(\xi)$ и ее производных.

Энергетический метод определения частот свободных колебаний не следует рекомендовать для определения частот выше третьей, так как он не будет обеспечивать достаточной точности.

§ 16. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЧТЫ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мачта является консольным стержнем переменного сечения, упруго заделанным в корпусе судна,¹ и при определении частот свободных колебаний мачты прежде всего возникает вопрос

¹ Имеются в виду безвантовые мачты.

о том, можно ли рассматривать ее колебания независимо от корпуса судна. Подобный же вопрос должен был возникнуть и в предыдущем параграфе, но там мы его не поднимали.

В § 7 было установлено, что если при цепном расположении двух масс одна из них мала по сравнению с другой и малая масса присоединена к большей, то одна из частот рассматриваемой системы с двумя степенями свободы практически равна частоте колебаний большей массы при отсутствии меньшей, а вторая частота равна частоте колебаний меньшей массы при неподвижной большей массе.

Масса мачты всегда мала по сравнению с массой корпуса и рассматриваемый вопрос сходен с описанным в § 7.

Поэтому, не останавливаясь на более подробном исследовании вопроса о совместных свободных колебаниях корпуса и мачты, будем в дальнейшем рассматривать колебание мачты как консольного стержня, упруго заделанного в неподвижном корпусе. Расчеты показывают, что поправки к частотам при анализе совместных колебаний меньше, чем погрешности определения частот при пользовании приближенными методами.

При такой постановке задачи следует для определения частот воспользоваться формулами (338) и (341) и показать лишь способ построения фундаментальных функций; в случае упругой заделки необходимо изменить первую формулу (327) для определения величины C .

Если мачта упруго заделана с коэффициентом податливости $\mathfrak{A}$, то выражение (325) для потенциальной энергии должно быть дополнено членом

$$\frac{1}{2} \frac{v_1'^2(0)}{\mathfrak{A}},$$

определяющим потенциальную энергию упругой заделки, в связи с чем коэффициент C нужно будет вычислять по формуле

$$C = \int_0^1 \frac{I}{I_0} \varphi_k^{*2}(\xi) d\xi + \frac{I}{EI_0 \mathfrak{A}} \varphi_k'^2(0), \quad (344)$$

тогда как формулы для вычисления A , B и B_1 останутся без изменения.

В рассматриваемом случае формула (338) преобразуется к виду

$$\lambda_k^{(0)} = \sqrt{\frac{EI_0 g}{\rho_0 l^4}} \sqrt{\frac{\sum_6 + \frac{20l}{EI_0 \mathfrak{A}} \varphi_k'^2(0)}{\Sigma_5}}; \quad (345)$$

формулы (340) и (341) остаются без изменения, значения всех Σ_j заимствуются из табл. 10, вычисленной для соответствующих функций $\varphi_k(\xi)$.

ξ	$f_1(\xi)$	$f'_1(\xi)$	$f''_1(\xi)$	$f_2(\xi)$	$f'_2(\xi)$	$f''_2(\xi)$	$f_3(\xi)$	$f'_3(\xi)$	$f''_3(\xi)$
0	0	0	3,52	0	0	22,00	0	0	62,0
0,05	0,004	0,164	3,22	0,025	0,95	16,25	0,070	2,50	37,6
0,10	0,016	0,312	3,05	0,090	1,68	11,42	0,200	3,67	14,2
0,15	0,036	0,470	2,79	0,183	2,00	6,64	0,390	4,92	-7,2
0,20	0,064	0,604	2,55	0,290	2,31	1,52	0,570	3,12	-24,5
0,25	0,096	0,729	2,33	0,410	2,39	-3,00	0,690	1,59	-37,4
0,30	0,134	0,830	2,08	0,510	2,04	-6,96	0,720	0,36	-40,8
0,35	0,177	0,928	1,74	0,600	1,61	-10,25	0,660	-2,35	-38,2
0,40	0,225	1,015	1,62	0,660	1,02	-13,00	0,510	-4,05	-28,4
0,45	0,276	1,087	1,40	0,690	0,30	-14,74	0,290	-5,20	-15,5
0,50	0,330	1,153	1,19	0,690	-0,46	-15,70	0,006	-5,60	1,2
0,55	0,390	1,216	0,99	0,640	-1,25	-15,78	-0,230	-5,05	18,1
0,60	0,450	1,255	0,81	0,570	-2,04	-15,10	-0,420	-3,77	32,6
0,65	0,514	1,285	0,63	0,450	-2,73	-13,65	-0,570	-1,89	42,7
0,70	0,574	1,320	0,48	0,270	-3,35	-11,57	-0,630	-0,36	47,0
0,75	0,644	1,340	0,35	0,100	-3,87	-9,20	-0,550	2,66	37,6
0,80	0,712	1,355	0,25	-0,100	-4,29	-6,65	-0,380	4,72	26,3
0,85	0,782	1,365	0,12	-0,300	-4,55	-4,00	-0,140	6,34	26,3
0,90	0,854	1,370	0,06	-0,540	-4,72	-2,10	0,180	7,34	14,1
0,95	0,926	1,370	0,00	-0,780	-4,75	-0,55	0,580	7,78	4,1
1,00	1,000	1,370	0,00	-1,000	-4,78	0	1,000	7,84	0,0

Положим

$$\varphi_k(\xi) = \alpha \xi + f_k(\xi), \quad (346)$$

где $f_k(\xi)$ — формы свободных колебаний жестко заделанной призматической консоли, численные значения которой приведены в табл. 11, α — угол поворота опорного сечения мачты.

Воспользовавшись граничным условием: при $\xi = 0$

$$\Re EI^* \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dv}{dx},$$

подставляя в него выражение (346) и используя соотношение (319), получим

$$\alpha = \frac{\Re EI^*}{l} f_k''(0),$$

где I^* — момент инерции площади опорного поперечного сечения мачты.

Таким образом, фундаментальные функции (346) окончательно определяются выражением

$$\varphi_k(\xi) = \frac{\Re EI^*}{l} f_k''(0) \xi + f_k(\xi),$$

откуда следует:

$$\varphi_k'(\xi) = \frac{\Re EI^*}{l} f_k''(0) + f_k'(\xi),$$

$$\varphi_k''(\xi) = f_k''(\xi),$$

так что заполнение 3, 4 и 8-й строк табл. 10 затруднений не представит.

Воспользовавшись методом последовательной ортогонализации, можно и в рассматриваемой задаче уточнить фундаментальные функции.

Указанный выбор фундаментальных функций может привести к достаточно точным результатам, если мачта не слишком сильно отличается от призматической и определяемая частота не выше второго — третьего порядка.

§ 17. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХОДОВОЙ ВИБРАЦИИ КОРАБЛЯ

Рассмотрим задачу о расчете вынужденной вибрации корабля при действии на него гармонической нагрузки интенсивностью $q(x) \cos \omega t$, где функция $q(x)$ определяется специальным расчетом (см. § 36).

Вынужденные колебания корпуса могут быть в этом случае найдены в виде

$$v(x, t) = \left[A_{-1} + A_0(\xi - 0,5) + \sum_{k=1}^n A_k f_k(\xi) \right] \cos \omega t, \quad (347)$$

где $f_k(\xi)$ — формы свободных колебаний безопорной призматической балки, определяемые по табл. 8; коэффициенты A_{-1} , A_0 и A_k подлежат вычислению.

Для определения коэффициентов A_{-1} , A_0 и A_k целесообразнее всего воспользоваться отмеченной в § 11 статической интерпретацией и рассмотреть задачу об изгибе балки нагрузкой интенсивностью $q(x)$ и лежащей на отрицательном упругом основании с коэффициентом жесткости

$$k = -\frac{p}{g} \omega^2,$$

где p — погонный вес судна и присоединенной массы воды.

Так как расчет вибрации представляет наибольший интерес вблизи резонанса, то присоединенную массу воды надо брать соответствующую форме вынужденных колебаний, близкой к ожидаемой форме колебаний при попадании в резонанс.

Расчет особенно прост, если не учитывать сдвига и инерции вращения. В этом случае потенциальная энергия определяется по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dx - \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \frac{p}{g} v^2(x) dx, \quad (348)$$

где

$$v = A_{-1} + A_0(\xi - 0,5) + \sum_{k=1}^n A_k f_k(\xi), \quad (349)$$

а силовая функция нагрузки — по формуле

$$U = \int_0^l q(x) v dx. \quad (350)$$

Подставляя ряд (349) в выражение (348) и принимая во внимание соотношение (318), можно получить

$$V = \frac{1}{2} \sum_{g=-1}^n \sum_{k=-1}^n \left[\frac{EI_0}{l} c_{gk} - m_0 l \omega^2 a_{gk} \right] A_g A_k, \quad (351)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{gk} &= \int_0^1 \frac{I}{I_0} f_g''(\xi) f_k''(\xi) d\xi, \\ a_{gk} &= \int_0^1 \frac{p}{p_0} f_g(\xi) f_k(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (352)$$

$$f_{-1}(\xi) \equiv 1, \quad f_0(\xi) = \xi - 0,5, \quad (353)$$

$m_0 = \frac{p}{g}$, g — ускорение силы тяжести. На основании формул (353)

$c_{-1, k} = c_{0, k} = 0$ при любом значении k .

Подставляя выражение (349) в (350), получим

$$U = \sum_{g=-1}^n A_g d_g L, \quad (354)$$

где

$$d_g = \int_0^1 q(\xi) f_g(\xi) d\xi. \quad (355)$$

Составляя уравнения равновесия

$$\frac{\partial (V - U)}{\partial A_g} = 0,$$

получим систему уравнений:

$$\sum_{k=-1}^n \left[\frac{EI_0}{l^3} c_{gk} - m_0 \omega^2 l a_{gk} \right] A_k = d_g L, \quad g = -1; 0; 1 \dots n, \quad (356)$$

с помощью которой можно определить все коэффициенты A_k , т. е. полностью решить рассматриваемую задачу.

Рекомендуем читателю получить систему уравнений (356), используя уравнения Лагранжа.

Для учета внутренних сопротивлений воспользуемся рекомендациями § 11; заменим в системе (356) модуль E комплексной величиной

$$E(1 + \alpha i), \quad (357)$$

где [см. формулу (265)]

$$\alpha = \frac{\mu \omega}{E}, \quad (357')$$

и положим

$$A_k = A'_k + i A''_k. \quad (358)$$

Отделяя в системе уравнений вещественную часть от мнимой, получим систему уравнений для определения коэффициентов A'_k и A''_k :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=-1}^n \left\{ \left[\frac{EI_0}{l^3} c_{gk} - m_0 \omega^2 l a_{gk} \right] A'_k - \alpha \frac{EI_0}{l^3} c_{gk} A''_k \right\} &= d_g L, \\ \sum_{k=-1}^n \left\{ \alpha \frac{EI_0}{l^3} c_{gk} A'_k + \left[\frac{EI_0}{l^3} c_{gk} - m_0 \omega^2 l a_{gk} \right] A''_k \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (359)$$

при $g = -1; 0; 1 \dots n$; система уравнений (359) будет канонической, если изменить во второй сумме знаки на обратные.

Решая систему (359), можно определить коэффициенты A_k' и A_k'' . Решение рассматриваемой задачи на основании выражений (158), (160), (347) и (358) должно быть записано в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=-1}^n (A_k' \cos \omega t - A_k'' \sin \omega t) f_k(\xi). \quad (360)$$

Число членов ряда (360), необходимое для достаточно точного решения задачи, должно определяться на основании следующих соображений.

Если частота ω близка к n -й частоте колебаний корпуса, то форма вынужденных колебаний должна быть близка к форме свободных колебаний этого тона и соответствующий член в ряде должен быть главным, если только он не оказывается малым вследствие малости соответствующих обобщенной силы и коэффициента динамичности.

Если, например, мы ожидаем резонанс с третьей частотой свободных колебаний, то $n=3$ и число уравнений в системе (360) будет не менее 10, т. е. задача оказывается достаточно громоздкой.

Решение задачи указанным способом практически приемлемо, если расчет колебаний производится при резонансе не выше чем с третьей или четвертой частотой и решение системы уравнений осуществляется на счетной машине.

Еще более громоздким оказывается расчет вынужденных колебаний при учете стрелок прогиба от сдвига, так как для стрелки прогиба от сдвига нужно задать выражение типа (358) с другими коэффициентами, т. е. число неизвестных коэффициентов возрастет в два раза.

Однако, если воспользоваться уже использованной статической интерпретацией задачи о вынужденных колебаниях, то можно решить задачу о вынужденных колебаниях с учетом сдвига, принимая выражение (358) для суммарной стрелки прогиба. При этом число неизвестных сохраняется, но усложняется составление системы уравнений для их определения.

Напомним, что при расчетах балок на упругом основании можно воспользоваться либо методом Ритца, задавая независимо стрелки прогиба от изгиба и от сдвига, либо же началом о наименьшей работе, задавая в виде ряда неизвестные реакции упругого основания, т. е. суммарную стрелку прогиба, так как эти величины связаны известным соотношением¹

$$r = -kv.$$

¹ См., например, Я. И. Короткин, А. З. Локшин, Н. Л. Сиверс, Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем, Машгиз, 1953.

При таком способе решения мы полагаем

$$r = \sum_g r_g \varphi_g(\xi),$$

составляем выражение для суммарной потенциальной энергии балки, на которую действует нагрузка $q-r$, и упругого основания, на которое действует нагрузка r , после чего неизвестные определяются из системы уравнений, даваемых началом о наименьшей работе

$$\frac{\partial V}{\partial r_g} = 0;$$

потенциальная энергия балки вычисляется с учетом изгиба и сдвига.

Подобным же образом можно произвести и расчет вынужденных колебаний.

Мы не останавливаемся на деталях этого расчета, так как он оказывается достаточно громоздким; изложенный в § 10 способ расчета более удобен хотя бы потому, что очень просто составляются исходные уравнения задачи.

§ 18. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХОДОВОЙ ВИБРАЦИИ МАЧТЫ

Ходовая вибрация мачты вызывается смещением и углом поворота опорного сечения мачты, появляющимся при общей вибрации корабля. Смещение и угол поворота могут возникнуть как при общей поперечной вибрации, рассмотренной выше, так и при горизонтальной вибрации и кручении, на рассмотрении которых мы остановимся в § 34.

При расчете ходовой вибрации мачты эти величины нам должны быть известны, и мы будем предполагать, что:

$$\left. \begin{aligned} v_i(t) &= v_0 \cos \omega t, \\ \psi(t) &= \psi_0 \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (361)$$

где $v_i(t)$ — смещение опорного сечения, $\psi(t)$ — угол поворота опорного сечения; если мачта упруго заделана в корпусе, то под $\psi(t)$ подразумевается угол поворота поперечного сечения корпуса при изгибе или закручивании.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением схемы расчета, считая, что мачта жестко заделана в корпусе, и не будем учитывать сдвига.

Для решения рассматриваемой задачи целесообразно воспользоваться уравнениями Лагранжа, так как использование статической интерпретации задачи о вынужденных колебаниях было бы

при задании не внешних усилий, а перемещений, весьма искусственным и не наглядным.

Абсолютное перемещение поперечного сечения мачты представим в виде

$$v(x, t) = v_t(t) + x\psi(t) + \sum_g q_g(t) f_g(\xi), \quad (362)$$

где первых два слагаемых определяют перемещение мачты как твердого тела, сумма—стрелку прогиба от изгиба, $f_k(\xi)$ находят по табл. 11.

Кинетическая энергия мачты определится выражением

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{v}^2 dx,$$

что по подстановке выражения (362) может быть преобразовано к виду

$$T = \frac{1}{2} \left[\dot{v}_t^2 \int_0^l m dx + 2\dot{v}_t \dot{\psi} \int_0^l m x dx + \dot{\psi}^2 \int_0^l m x^2 dx \right] + \\ + m_0 l \sum_g (\dot{v} a_g + \dot{\psi} b_g l) \dot{q}_g + \frac{m_0 l}{2} \sum_g \sum_k q_g q_k a_{gk}, \quad (363)$$

где

$$a_g = \int_0^1 \frac{p}{p_0} f_g(\xi) d\xi, \quad b_g = \int_0^1 \frac{p}{p_0} \xi f_g(\xi) d\xi,$$

$$a_{gk} = \int_0^1 \frac{p}{p_0} f_g(\xi) f_k(\xi) d\xi,$$

$m = \frac{p}{g}$, p —погонный вес мачты, $m_0 = \frac{p_0}{g}$, p_0 —среднее значение погонного веса мачты, g —ускорение силы тяжести.

Потенциальная энергия изгиба определится выражением

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dx,$$

что после подстановки (362) и преобразований может быть представлено в виде

$$V = \frac{1}{2} \frac{EI_0}{l^3} \sum_g \sum_k q_g q_k c_{gk}, \quad (364)$$

где

$$c_{gk} = \int_0^1 \frac{I}{I_0} f_g''(\xi) f_k''(\xi) d\xi. \quad (365)$$

Подставляя выражения (363) и (364) в уравнения Лагранжа (98) при $\Phi \equiv 0$ и $Q_g \equiv 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_k \left[m_0 l a_{gk} \ddot{q}_k(t) + \frac{EI_0}{l^3} c_{gk} q_k(t) \right] = -m_0 l (\ddot{v}_t a_g + \ddot{\psi} b_g l). \quad (366)$$

Рекомендуем читателю убедиться, что уравнения (366) можно получить, считая стержень загруженным силами инерции в его поступательном перемещении, определяемом первыми двумя слагаемыми в выражении (362).

Полагая в уравнении (366)

$$q_k = A_k \cos \omega t$$

и принимая во внимание (361), получим

$$\sum_k \left[\frac{EI_0}{l^3} c_{gk} - m_0 l \omega^2 a_{gk} \right] A_k = d_g l, \quad (367)$$

где введено обозначение

$$d_g = m \omega^2 (v_0 a_g + \psi b_g l). \quad (368)$$

Система уравнений (367) совпадает с системой (356). Поэтому все, что было сказано в предыдущем параграфе об учете сопротивления и сдвига при установившихся колебаниях, относится и к ходовой вибрации мачты.

§ 19. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРАЦИИ ПЛОСКИХ ПЕРЕКРЫТИЙ

Упругая поверхность перекрытия, опертого на прямоугольный контур, может быть представлена в виде

$$w(x, y, t) = \sum_g \sum_k q_{gk}(t) X_g(x) Y_k(y), \quad (369)$$

где фундаментальные функции $X_g(x)$ и $Y_k(y)$ должны удовлетворять соответствующим кинематическим условиям.

Обычно за фундаментальные функции берутся формы свободных колебаний соответственно заданных призматических балок (мы познакомимся с ними в § 22).

Выражение (369) подставляется в общие выражения для потенциальной и кинетической энергии перекрытий, которые оказываются однородными квадратичными функциями обобщенных координат q_{gk} и обобщенных скоростей $\dot{q}_{gk}$ соответственно. Выражение (369) можно представить в виде одинарного ряда, если каждой паре чисел g и k будут соответствовать числа натурального ряда. При этом выражения потенциальной и кинетической энергий примут такой же вид, как и для балки.

Обобщенная сила нагрузки $f(x, y, t)$ вычисляется обычными приемами, так что

$$Q_{gk} = \iint f(x, y, t) X_g(x) Y_k(y) dx dy, \quad (370)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь перекрытия.

Следовательно, расчет вибрации плоских перекрытий энергетическим методом никаких принципиальных затруднений не представляет, но оказывается еще более громоздким, чем расчет балок, ибо исходные формулы имеют более сложный вид.

Например, для перекрытия, состоящего из большого числа равноотстоящих балок главного направления и одной перекрестной связи, расположенной посередине (см. рис. 18), потенциальная и кинетическая энергия определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,5l}^2 dx + \frac{EI}{2a} \int_0^L \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy, \\ T &= \frac{M}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{y=0,5l}^2 dx + \frac{m}{2a} \int_0^L \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (371)$$

При написании выражения для потенциальной энергии предполагалось, что перекрытие не имеет упругих опор, и не учитывался сдвиг.

Подстановка в выражения (371) двойного ряда приводит к очень громоздким выражениям и мы их не выписываем. Практически расчет перекрытий энергетическим методом возможен лишь в том случае, когда в ряду оставляется не более трех членов.

Полагая для изображенного на рис. 18 перекрытия

$$w = \left[q_1(t) \sin \frac{\pi y}{l} + q_2(t) \sin \frac{3\pi y}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{L},$$

т. е. предполагая симметричную относительно перекрестной связи форму колебаний и подставляя эти выражения в формулы (371), можно получить:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EI}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 (q_1 - q_2)^2 \frac{L}{2} + \frac{EI}{2a} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 (q_1^2 + 81q_2^2) \frac{Ll}{4}, \\ T &= \frac{M}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 \frac{L}{2} + \frac{m}{2a} (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) \frac{Ll}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

Если ограничиться одним членом ряда, т. е. положить $q_2=0$, $q_2=0$, то частота свободных колебаний перекрытия определится по формуле

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{Ei}{m}} \sqrt{\frac{\frac{L}{2a} + \left(\frac{l}{L}\right)^3 \frac{I}{i}}{\frac{L}{2a} + \frac{M}{m} \frac{L}{l}}} \quad (373)$$

При малых значениях I и M , т. е. в случае легкой и гибкой перекрестной связи, формула (373) дает значение частоты, несколько большее первой частоты балки главного направления, а при отсутствии перекрестной связи ($I=0$, $M=0$)—точное значение первой частоты.

Этой формулой нужно пользоваться с большой осторожностью, так как при увеличении момента инерции I перекрестной балки частота λ_1 будет увеличиваться и может оказаться равной любой величине.

Физически должно быть ясно, что при увеличении жесткости перекрестной связи наступит такой момент, когда наименьшая частота будет соответствовать антисимметричной форме колебаний балок главного направления относительно перекрестной связи и наименьшая частота будет определяться как для свободно опертой балки половинной длины, т. е.

$$\lambda'_1 = 4 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{Ei}{m}}$$

Так как во всяком случае $\lambda_1 \leq \lambda'_1$, то это приводит к условию

$$\frac{L}{2a} + \left(\frac{l}{L}\right)^3 \frac{I}{i} \leq 16 \left[\frac{L}{2a} + \frac{M}{m} \frac{L}{l} \right],$$

откуда следует

$$\frac{I}{i} \leq \left(\frac{L}{l}\right)^3 \left[15 \frac{L}{2a} + 16 \frac{M}{m} \frac{L}{l} \right].$$

Чем сильнее выполняется полученное неравенство, тем более точный результат при определении первой частоты дает формула (373).

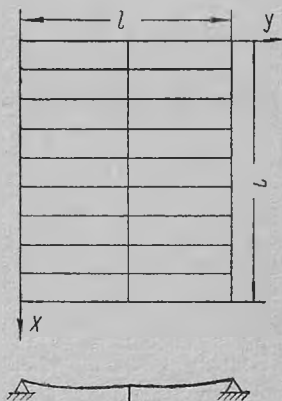


Рис. 18.

Решение задачи с использованием выражений (372) приводит к более точной формуле для определения первой частоты, но и эта формула непригодна при больших жесткостях перекрестной балки.

Рассмотренный пример указывает на необходимость осторожного применения энергетического метода при решении задач, в которых имеются местные усиления жесткости, так как в этих случаях бывает очень трудно достаточно точно аппроксимировать форму колебаний одним членом ряда.

§ 20. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРАЦИЙ ПЛАСТИН

Расчет вибрации пластин производится так же, как и расчет вибрации перекрытий, но потенциальная энергия изгиба пластин определяется по формуле

$$V_1 = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (374)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины, h — ее толщина.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением вибрации свободно опертых пластин, для которых получается точное решение, и положим

$$w(x, y, t) = \sum_g \sum_k q_{gk}(t) \sin \frac{g\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (375)$$

что по подстановке в формулу (374) приводит к следующему выражению для потенциальной энергии изгиба:

$$V_1 = \frac{D}{2} \frac{ab}{4} \sum_g \sum_k \left[\left(\frac{g\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right] q_{gk}^2(t). \quad (376)$$

Если пластина лежит на упругом основании жесткостью k_0 и в ее срединной поверхности действуют растягивающие цепные напряжения p_1 и p_2 , то потенциальная энергия деформации упругого основания и срединной поверхности пластины представится в виде

$$V_2 = \frac{k_0}{2} \int_0^a \int_0^b w^2 dx dy + \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b \left[p_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + p_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (377)$$

Подставляя выражение (375) в (377), получим

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{ab}{4} \sum_g \sum_k \left[k_0 + p_1 h \left(\frac{g\pi}{a} \right)^2 + p_2 h \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right] q_{gk}^2(t). \quad (378)$$

Кинетическая энергия пластины

$$T = \frac{m}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (379)$$

где $m = \frac{\rho}{g}$, ρ — вес пластины на единицу площади, g — ускорение силы тяжести, после подстановки выражения (375) преобразуется к виду

$$T = \frac{m}{2} \frac{ab}{4} \sum_g \sum_k \dot{q}_{gk}^2. \quad (380)$$

Полагая $V = V_1 + V_2$ и подставляя выражения V и T в уравнения Лагранжа (98) при замене q_g на q_{gk} , $\Phi \equiv 0$ и $Q_g \equiv 0$, получим

$$m \ddot{q}_{gk} + \left\{ D \left[\left(\frac{g\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k_0 + p_1 h \left(\frac{g\pi}{a} \right)^2 + p_2 h \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right\} q_{gk} = 0. \quad (381)$$

Квадрат частоты свободных колебаний определится формулой

$$\lambda_{gk}^2 = \frac{1}{m} \left\{ D \left[\left(\frac{g\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k_0 + p_1 h \left(\frac{g\pi}{a} \right)^2 + p_2 h \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right\}. \quad (382)$$

Из формулы (382) видно, что частота свободных колебаний существенно зависит от цепных напряжений, и это нужно иметь в виду при определении частот свободных колебаний судовых пластин, участвующих в общем изгибе корабля.

При отсутствии упругого основания и цепных напряжений наименьшая частота свободных колебаний пластины соответствует $g=k=1$ и

$$\lambda_{\min}^2 = \frac{D g \pi^4}{\rho b^4} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]^2.$$

Если пластина попадает в резонанс с первой частотой и возникает необходимость повысить первую частоту подкреплением пластины при помощи установки ребра, то нужно ставить ребро параллельно длинной стороне пластины, т. е. уменьшать меньшую сторону пластины.

Действительно, если, например, $a:b=5$ и мы уменьшим короткую сторону b в два раза, то, как видно из последней формулы, первая частота возрастает в 15,2 раза, если же уменьшим в два раза длинную сторону a , то частота увеличится всего в 1,12 раза.

При попадании в резонанс с высшими частотами установка ребер нецелесообразна, так как увеличив высшие частоты мы одновременно увеличим и низшие и выйдя из резонанса с одной частотой можно попасть в резонанс с другой.

Не представляет труда решение задачи о вынужденной вибрации пластины при поступательном перемещении ее опорного контура по любому закону $w_0(t)$. В этом случае при вычислении кинетической энергии надо полагать

$$w = w_0(t) + \sum_g \sum_k q_{gk}(t) \sin \frac{g\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b},$$

что после подстановки в формулу (379) приводит к следующему выражению для кинетической энергии:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} ab \dot{w}_0^2 + m \dot{w}_0 \sum_g \sum_k \frac{a}{g\pi} \frac{b}{k\pi} (1 - \cos g\pi) (1 - \cos k\pi) \dot{q}_{gk} + \\ & + \frac{m}{2} \frac{ab}{4} \sum_g \sum_k \dot{q}_{gk}^2. \end{aligned} \quad (383)$$

Подставляя в уравнение Лагранжа вместо выражения (380) выражение (383), получим в левой части то же выражение, что и в левой части уравнения (381), а в правой части будет стоять выражение

$$- m \ddot{w}_0 \frac{4}{gk\pi^2} (1 - \cos g\pi) (1 - \cos k\pi).$$

Решение такого уравнения, особенно при гармоническом колебании опорного контура

$$w_0(t) = w_0 \cos \omega t,$$

не представляет затруднения.

Для учета внутренних сопротивлений нужно заменить модуль E нормальной упругости комплексной величиной (357), найти решение $\tilde{w}(x, y) e^{i\omega t}$ для $w_0(t) = w_0 e^{i\omega t}$, после чего найти решение задачи по формуле

$$w(x, y, t) = \operatorname{Re} \tilde{w}(x, y) e^{i\omega t}.$$

Приближенные решения задач колебаний прямоугольных пластин при других граничных условиях могут быть получены, если принять для w выражение в виде (369).

При расчете вибрации пластин и плоских перекрытий, соприкасающихся с водой, нужно учитывать присоединенные массы воды в соответствии с указаниями § 37.

К вопросам расчета вибрации прямоугольных пластин при других граничных условиях мы вернемся в § 33.

ГЛАВА III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматического стержня, лежащего на упругом основании, может быть получено, если воспользоваться принципом Даламбера и ввести в правую часть дифференциального уравнения изгиба интенсивность сил инерции $-m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, т. е. записать его в виде

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + k_0 v = q(x, t) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (384)$$

где $q(x, t)$ — интенсивность возмущающей нагрузки.

В настоящем параграфе мы ограничимся задачей о свободных колебаниях и рассмотрим уравнение

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + k_0 v = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (385)$$

Если в уравнении (385) положить

$$v(x, t) = \sum_n v_n(x) \cos(\lambda_n t + \varepsilon_n), \quad (386)$$

то сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях времени, получим для определения форм главных свободных колебаний $v_n(x)$ дифференциальное уравнение

$$EI v_n^{IV} + k_0 v_n = m \lambda_n^2 v_n, \quad (387)$$

или

$$v_n^{IV} = \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^4 v_n, \quad (388)$$

где

$$\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4 = \frac{m\lambda_n^2 - k_0}{EI}, \quad (389)$$

l —величина, имеющая размерность длины и часто принимаемая равной длине стержня, μ_n —безразмерная величина, определяемая, как это будет видно ниже, при удовлетворении граничным условиям.

Обращаем внимание на то, что дифференциальное уравнение (388) получается одинаковым для призматического стержня на упругом основании и без упругого основания. Так как величина μ_n определяется только граничными условиями, то на основании формулы (389) можно сделать вывод: частоты λ_n свободных колебаний балки без упругого основания будут меньше, чем при наличии упругого основания. Физически это понятно—при наличии упругого основания балка как бы становится более жесткой.

Уравнение (387) при $k_0 = 0$ может рассматриваться как дифференциальное уравнение изгиба стержня на упругом основании с отрицательным коэффициентом жесткости

$$\bar{k}_0 = -m\lambda_n^2.$$

Общий интеграл уравнения (388) можно записать в виде

$$v_n(x) = a_n \operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l} + b_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} + c_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + d_n \sin \frac{\mu_n x}{l}, \quad (390)$$

или

$$v_n(x) = A_n U_0 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) + B_n U_1 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) + C_n U_2 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) + D_n U_3 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right), \quad (391)$$

где $U_j \left(\frac{\mu_n x}{l} \right)$ —частные интегралы уравнения (388), удовлетворяющие при $\frac{\mu_n x}{l} = 0$ начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= 1, & U_0' &= 0, & U_0'' &= 0, & U_0''' &= 0, \\ U_1 &= 0, & U_1' &= \frac{\mu_n}{l}, & U_1'' &= 0, & U_1''' &= 0, \\ U_2 &= 0, & U_2' &= 0, & U_2'' &= \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2, & U_2''' &= 0, \\ U_3 &= 0, & U_3' &= 0, & U_3'' &= 0, & U_3''' &= \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (392)$$

Штрихами обозначены производные по аргументу x .

Функции $U_j \left(\frac{\mu_n x}{l} \right)$ очень удобны при использовании метода начальных параметров и имеют аналитическое выражение:¹

$$\left. \begin{aligned} U_0 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l} + \cos \frac{\mu_n x}{l} \right), \\ U_1 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} + \sin \frac{\mu_n x}{l} \right), \\ U_2 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l} - \cos \frac{\mu_n x}{l} \right), \\ U_3 \left(\frac{\mu_n x}{l} \right) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} - \sin \frac{\mu_n x}{l} \right). \end{aligned} \right\} \quad (393)$$

Для функций $U_j \left(\frac{\mu_n x}{l} \right)$ справедливо следующее правило дифференцирования по переменной x :

$$U'_0 = \frac{\mu_n}{l} U_3, \quad U'_1 = \frac{\mu_n}{l} U_0, \quad U'_2 = \frac{\mu_n}{l} U_1, \quad U'_3 = \frac{\mu_n}{l} U_2 \quad (394)$$

и, кроме того, функции с четными значениями индекса j являются четными, а с нечетными значениями j — нечетными.

Формы свободных колебаний $v_n(x)$ удовлетворяют двум условиям ортогональности, которые могут быть получены на основании простых энергетических соображений.

Если решать задачу о свободных колебаниях балки энергетическим методом и представить упругую линию балки в виде

$$v(x, t) = \sum_n v_n(x) q_n(t), \quad (395)$$

то для определения функций $q_n(t)$ мы должны были бы получить дифференциальные уравнения

$$\ddot{q}_n(t) + \lambda_n^2 q_n(t) = 0, \quad (396)$$

которым удовлетворяют функции $\cos(\lambda_n t + \varepsilon_n)$, входящие в выражение (386). Это возможно только в том случае, если коэффициенты в общих выражениях для кинетической и потенциальной энергий удовлетворяют условиям: при $k \neq n$

$$a_{nk} = 0, \quad c_{nk} = 0. \quad (397)$$

¹ Таблицы численных значений функции U_j имеются в работе [1], но там для них приняты другие обозначения, а именно: U_0 обозначено S ; U_1 — T ; U_2 — U ; U_3 — V . Таблицы этих функций, называемые иногда функциями А. Н. Крылова, имеются также в книге И. В. Ананьева «Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем», Гостехиздат, 1946.

Для призматической балки, если она не является упруго опертой или упруго заделанной, кинетическая и потенциальная энергии определяются по формулам:

$$T = \frac{m}{2} \int_{(l)} \dot{v}^2 dx,$$

$$V = \frac{EI}{2} \int_{(l)} v''^2 dx + \frac{k_0}{2} \int_{(l)} v^2 dx,$$

что по подстановке выражения (395) приводит на основании условий (397) к следующим условиям ортогональности:¹ при $k \neq n$

$$\int_{(l)} v_n(x) v_k(x) dx = 0, \quad (398)$$

$$EI \int_{(l)} v_n''(x) v_k''(x) dx + k_0 \int_{(l)} v_n(x) v_k(x) dx = 0,$$

причем второе условие на основании первого преобразуется к виду: при $k \neq n$

$$\int_{(l)} v_n''(x) v_k''(x) dx = 0; \quad (399)$$

все интегралы берутся по длине балки.

Формы свободных колебаний $v_n(x)$ должны удовлетворять граничным условиям, что позволяет составить для определения четырех произвольных постоянных, входящих в дифференциальное уравнение, систему четырех однородных уравнений.

Система однородных уравнений может иметь отличное от нуля решение, т. е. колебание будет существовать лишь в том случае, когда определитель системы равен нулю. Приравнивание определителя системы нулю и дает возможность составить уравнение частот.

Постоянные интегрирования могут быть определены из однородной системы уравнений лишь с точностью до неопределенного множителя, значение которого обычно выбирается исходя из удобства вычислений.

Если множитель выбирается из условия

$$\int_{(l)} v_n^2(x) dx = 1, \quad (400)$$

то соответствующая форма колебаний называется нормированной.

Уравнение для определения форм свободных колебаний может быть записано не только в дифференциальной форме (388), но и

¹ Условия ортогональности могут быть получены путем использования дифференциального уравнения (388) и граничных условий.

в интегральной форме, и эта последняя представляет удобство для некоторых общих исследований.

Пусть $G(x, s)$ есть стрелка прогиба в произвольном сечении x балки без упругого основания, нагруженной в сечении $x=s$ единичной сосредоточенной силой. Тогда, загружая балку силами инерции и реакциями упругого основания, можно на основании принципа Даламбера и принципа сложений действия нагрузок написать

$$v(x, t) = \int_{(l)} \left[-m \frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial t^2} - k_0 v(s, t) \right] G(x, s) ds.$$

Подставляя в полученное уравнение выражение (386) и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях времени, получим для определения форм свободных колебаний $v_n(x)$ однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$v_n(x) = v_n^2 \int_{(l)} G(x, s) v_n(s) ds, \quad (401)$$

где ядро интегрального уравнения $G(x, s)$ удовлетворяет свойству взаимности

$$G(x, s) = G(s, x); \quad (402)$$

в уравнение (401) введено обозначение

$$v_n^2 = m \lambda_n^2 - k_0. \quad (403)$$

Воспользовавшись уравнением (401), нетрудно установить условие ортогональности (398). Действительно, запишем уравнение (401) для двух различных значений v_n :

$$v_n(x) = v_n^2 \int_{(l)} G(x, s) v_n(s) ds,$$

$$v_k(x) = v_k^2 \int_{(l)} G(x, s) v_k(s) ds.$$

Умножим первое уравнение на $\frac{1}{v_n^2} v_k(x)$, второе — на $\frac{1}{v_k^2} v_n(x)$, вычтем второе из первого и проинтегрируем по всей длине балки. Получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{1}{v_k^2} \right) \int_{(l)} v_n(x) v_k(x) dx &= \int_{(l)} \int_{(l)} G(x, s) v_n(s) v_k(x) ds dx - \\ &- \int_{(l)} \int_{(l)} G(x, s) v_k(s) v_n(x) ds dx. \end{aligned}$$

Если поменять местами во втором интеграле переменные x и s и принять во внимание свойство взаимности (402), то легко убедиться, что правая часть написанного равенства равна нулю. А так как по условию $\gamma_n \neq \gamma_k$ при $n \neq k$, то отсюда следует условие ортогональности (398).¹

Ядро интегрального уравнения (401) может быть вычислено с учетом сдвига, поэтому условие ортогональности (398) справедливо для форм колебаний суммарной стрелки прогиба балки с учетом сдвига. К данному выводу можно прийти и на основании энергетических соображений.

Условие ортогональности (399) также может быть получено из интегрального уравнения, но этот вывод более сложен и мы на нем не останавливаемся.

§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОПРОЛЕТНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим несколько примеров на составление уравнений частот и определение форм свободных колебаний призматических балок, представляющих наибольший практический интерес.

Пример 1. Составить уравнение частот и найти формы свободных колебаний для свободно опертого стержня, лежащего на упругом основании (рис. 19); эта задача была уже рассмотрена в § 13.

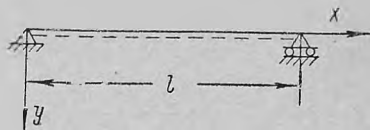


Рис. 19.

Граничные условия для рассматриваемого стержня имеют вид:

$$v(0, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$v(l, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial x^2} = 0,$$

что по подстановке выражения (386) приводит к следующим граничным условиям для форм свободных колебаний:

$$v_n(0) = 0, \quad v_n''(0) = 0,$$

$$v_n(l) = 0, \quad v_n''(l) = 0.$$

В этой задаче удобно принять для $v_n(x)$ выражение (390), так как граничные условия при $x=0$ приводят к системе двух уравнений для определения производных постоянных a_n и c_n :

$$a_n + c_n = 0, \quad \mu_n^2 (a_n - c_n) = 0,$$

¹ Условие ортогональности в виде (398) можно представить и при наличии сосредоточенных масс, но для этого надо записать интегральное уравнение в интегралах Стильтьеса.

из которых следует

$$a_n = c_n = 0,$$

поэтому

$$v_n(x) = b_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} + d_n \sin \frac{\mu_n x}{l}. \quad (404)$$

Подчиняя выражение (404) граничным условиям при $x=l$, получим систему однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_n \operatorname{sh} \mu_n + d_n \sin \mu_n &= 0, \\ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 (b_n \operatorname{sh} \mu_n - d_n \sin \mu_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (405)$$

которая может иметь решение, отличное от нуля только тогда, когда ее определитель равен нулю, что приводит к уравнению частот

$$-2 \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 \operatorname{sh} \mu_n \sin \mu_n = 0.$$

Так как $\mu_n \neq 0$, то корнями этого уравнения могут быть лишь корни уравнения

$$\sin \mu_n = 0, \quad (406)$$

определяемые очевидным выражением

$$\mu_n = n\pi, \quad (407)$$

где n —целое число. Подставляя найденное значение μ_n в формулу (389), получим для определения частоты свободных колебаний выражение (277) при $\rho=0$ и $g=n$.

Из системы уравнений (405) при подстановке в нее значения μ_n по формуле (407) следует, что $b_n=0$, и форма колебаний свободно опертой балки определится выражением

$$v_n(x) = d_n \sin \frac{n\pi x}{l};$$

нормированная же форма свободных колебаний определится согласно условию (400) выражением

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (408)$$

В расчетах обычно принимают

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (409)$$

Пример 2. Составить уравнение частот и найти формы свободных колебаний для безопорного стержня (рис. 20).

Примем начало координат в середине пролета, так что граничные условия запишутся в виде:

$$EI \frac{\partial^2 v(\pm 0,5l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v(\pm 0,5l, t)}{\partial x^3} = 0,$$

что по подстановке выражения (386) приводит к следующим граничным условиям для форм свободных колебаний:

$$v_n''(\pm 0,5l) = 0, \quad v_n'''(\pm 0,5l) = 0.$$

Рассмотрим отдельно симметричную и антисимметричную формы колебаний.

Для получения симметричной формы колебаний нужно в выражении (390) принять $b_n = d_n = 0$, т. е. искать $v_n(x)$ в виде

$$v_n(x) = a_n \operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l} + c_n \cos \frac{\mu_n x}{l},$$

что после подстановки в граничные условия приводит к системе двух однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 (a_n \operatorname{ch} 0,5 \mu_n - c_n \cos 0,5 \mu_n) &= 0, \\ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^3 (a_n \operatorname{sh} 0,5 \mu_n + c_n \sin 0,5 \mu_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (410)$$

Для получения системы уравнений достаточно использовать граничные условия для одного из концов балки, так как рассматривая симметричную форму колебаний, мы, по существу, использовали граничные условия:

$$v_n'(0) = 0, \quad v_n'''(0) = 0,$$

которые могут быть написаны для среднего сечения балки.

Приравняв определитель системы уравнений нулю, получим уравнение частот

$$\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^5 (\operatorname{ch} 0,5 \mu_n \sin 0,5 \mu_n + \cos 0,5 \mu_n \operatorname{sh} 0,5 \mu_n) = 0.$$

Так как $\mu_n \neq 0$ (мы не рассматриваем перемещения балки как твердого тела) и корни уравнения $\cos 0,5 \mu_n = 0$ не являются корнями уравнения частот, то, разделив уравнение частот на неравный нулю множитель $\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^5 \operatorname{ch} 0,5 \mu_n \cos 0,5 \mu_n$, приведем его к виду

$$\operatorname{tg} 0,5 \mu_n = -\operatorname{th} 0,5 \mu_n. \quad (411)$$

Полагая

$$a_n = \frac{1}{2 \operatorname{ch} 0,5\mu_n}, \quad c_n = \frac{1}{2 \cos 0,5\mu_n},$$

мы тождественно удовлетворим первому из уравнений (410), второе же уравнение обратится в уравнение частот (411), т. е. также будет удовлетворено, ибо μ_n являются корнями этого уравнения. В результате выражение для симметричных форм свободных колебаний может быть записано в виде

$$v_n(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l}}{\operatorname{ch} 0,5\mu_n} + \frac{\cos \frac{\mu_n x}{l}}{\cos 0,5\mu_n} \right), \quad (412)$$

причем

$$v_n(\pm 0,5l) = 1. \quad (413)$$

Для нахождения антисимметричной формы колебаний нужно в выражении (390) положить $a_n = c_n = 0$, т. е. искать $v_n(x)$ в виде

$$v_n(x) = b_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} + d_n \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

что после подстановки в граничные условия приводит к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 (b_n \operatorname{sh} 0,5\mu_n - d_n \sin 0,5\mu_n) &= 0, \\ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^3 (b_n \operatorname{ch} 0,5\mu_n - d_n \cos 0,5\mu_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (414)$$

Уравнение частот легко преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} 0,5\mu_n = \operatorname{th} 0,5\mu_n. \quad (415)$$

Полагая

$$b_n = -\frac{1}{2 \operatorname{sh} 0,5\mu_n}, \quad d_n = -\frac{1}{2 \sin 0,5\mu_n},$$

мы тождественно удовлетворим первому уравнению системы (414), в результате же подстановки во второе уравнение системы придем к уравнению частот (415). Поэтому форма антисимметричных колебаний может быть записана в виде

$$v_n(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l}}{\operatorname{sh} 0,5\mu_n} + \frac{\sin \frac{\mu_n x}{l}}{\sin 0,5\mu_n} \right), \quad (416)$$

причем

$$v_n(\pm 0,5l) = \mp 1. \quad (417)$$

Графическое решение уравнений частот (411) и (415) приведено на рис. 21, а графики функций $v_n(x)$ — на рис. 22.

Присваивая симметричным формам нечетные номера, а антисимметричным — четные, можно объединить два уравнения частот (411) и (415), записав их в виде

$$\operatorname{tg} 0,5\mu_n = (\pm 1)^n \operatorname{th} 0,5\mu_n. \quad (418)$$

Так как при больших значениях μ_n величина $\operatorname{th} 0,5\mu_n \rightarrow 1$, то большие корни уравнения (418) могут быть определены по формуле

$$\mu_n = \frac{2n+1}{2} \pi. \quad (419)$$

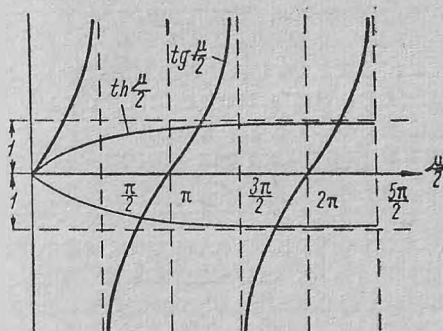


Рис. 21

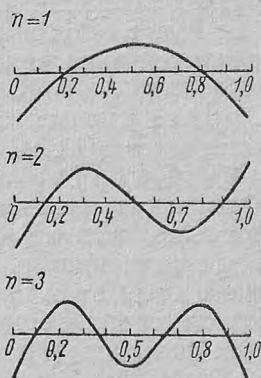


Рис. 22

Точные значения корней уравнения (418) следующие:

$$\mu_1 = 4,73, \quad \mu_2 = 7,85, \quad \mu_3 = 11,0 \dots,$$

а по приближенной формуле:

$$\mu_1 = 4,71; \quad \mu_2 = 7,85 \dots,$$

т. е. формула (419) дает практически точное значение даже для μ_2 .

Уравнения (411) и (415) имеют корни $\mu_n = 0$ и этим корням для безопорной балки на упругом основании соответствуют колебания балки как твердого тела, т. е. ее качка.

Действительно, при $\mu_n = 0$ уравнение (388) может быть удовлетворено подстановкой

$$v_n(x) = a_n + b_n x,$$

т. е. имеет решение не равное нулю, удовлетворяющее граничным условиям для безопорного стержня. Частота колебаний при этом определится согласно формуле (389) выражением

$$\lambda_0^2 = \frac{k_0}{m},$$

и в этом частном случае частоты вертикальной качки (форма колебаний a_n) и килевой качки (форма колебаний $b_n x$) оказываются равными.

Заметим, что формы колебаний $v_n(x)$ ортогональны относительно формы вертикальной и килевой качки, т. е. имеют место соотношения:

$$\int_{(l)} v_n(x) dx = 0, \quad \int_{(l)} x v_n(x) dx = 0,$$

справедливость которых мы рекомендуем читателю доказать. Этими условиями мы пользовались уже в § 15 под названием условий уравниваемости сил и моментов сил инерции.

Формы колебаний a_n и $b_n x$, соответствующие равным частотам, не будут ортогональны, и условия ортогональности для них выполняются лишь при принятии начала координат в середине пролета балки.

Обратим внимание на некоторые выводы, следующие из рассмотренного примера, которые могут быть подтверждены на всех приводимых ниже примерах и носят общий характер; этими выводами мы воспользуемся в § 32.

Во-первых, при больших значениях n значения μ_n для безопорного стержня и для свободно опертого стержня, как видно из сопоставления формул (419) и (407), стремятся к совпадению, и, во-вторых, влияние граничных условий сказывается для высоких форм колебаний лишь вблизи концов.

Действительно, рассматривая, например, выражение (412) и предполагая, что $x \neq 0,5l$, можно для больших значений μ_n написать (при $x > 0$)

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l}}{\operatorname{ch} 0,5\mu_n} = \frac{e^{\frac{\mu_n x}{l}}}{e^{0,5\mu_n}} = e^{-\mu_n \left(0,5 - \frac{x}{l}\right)}.$$

Это отношение при больших значениях n стремится к нулю. Поэтому при больших значениях n симметричные формы колебаний безопорного стержня могут быть представлены в виде

$$v_n(x) = \cos \frac{\mu_n x}{l},$$

так как постоянный множитель не существен; антисимметричные формы запишутся в виде

$$v_n(x) = \sin \frac{\mu_n x}{l}.$$

Оба полученных выражения тождественны и отличаются лишь выбором начала отсчета, расстояние же l_n между нулями этих

функций, т. е. узлами форм колебаний, соответствует изменению аргументов на величину π и равно

$$l_n = \frac{\pi l}{\mu_n}.$$

Если взять свободно опертый стержень длиной l_n , то первая частота такого стержня совпадает с n -й частотой рассматриваемого безопорного стержня, и первая форма колебаний будет соответствовать форме колебаний этого стержня между двумя последовательными узлами вдали от его опор.

Таблица 12

n	1	2	3	4	5
$\lambda_n:\lambda_1$	1	2,76	5,40	9,00	13,4

Для свободно опертого стержня частоты изменяются пропорционально квадрату номера частоты; изменение частот для безопорного стержня приведено в табл. 12.

Пример 3. Составить уравнение частот и найти формы колебаний для стержня, упруго заделанного на жестких опорах с одинаковыми коэффициентами податливости (рис. 23).

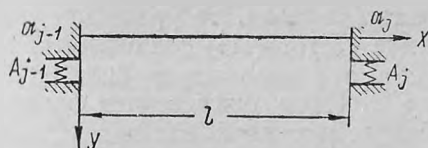


Рис. 23.

Граничные условия в рассматриваемом случае запишутся в виде: при $x = \pm 0,5l$

$$v=0, \quad \mp \Re(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

что по подстановке выражения (386) приводит к следующим граничным условиям для формы колебаний:

$$v_n(\pm 0,5l)=0, \quad v'_n(\pm 0,5l) = \mp \frac{1-\kappa}{2\kappa} l v''_n(\pm 0,5l), \quad (420)$$

где условный коэффициент опорной пары κ определяется по формуле

$$\frac{1}{\kappa} = 1 + \frac{2\Re EI}{l}, \quad (421)$$

$\Re$ — коэффициент податливости упругой заделки.

Ограничиваясь рассмотрением симметричной формы колебаний, т. е. полагая в выражении (390) $b_n = d_n = 0$, после подстановки в граничные условия при $x = 0,5l$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_n \operatorname{ch} 0,5\mu_n + c_n \cos 0,5\mu_n &= 0, \\ a_n \operatorname{sh} 0,5\mu_n - c_n \sin 0,5\mu_n &= -\frac{1-\kappa}{2\kappa} \mu_n (a_n \operatorname{ch} 0,5\mu_n - c_n \cos 0,5\mu_n) \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} a_n \operatorname{ch} 0,5\mu_n + c_n \cos 0,5\mu_n &= 0, \\ a_n \left(\operatorname{sh} 0,5\mu_n + \frac{1-\kappa}{2\kappa} \mu_n \operatorname{ch} 0,5\mu_n \right) - c_n \left(\sin 0,5\mu_n + \right. \\ \left. + \frac{1-\kappa}{2\kappa} \mu_n \cos 0,5\mu_n \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (422)$$

Приравнявая нулю определитель, после несложных преобразований получим уравнение частот

$$\operatorname{tg} 0,5\mu_n + \operatorname{th} 0,5\mu_n = - \frac{1-\kappa}{2\kappa} \mu_n. \quad (423)$$

Полагая

$$a_n = -\cos 0,5\mu_n, \quad c_n = \operatorname{ch} 0,5\mu_n,$$

удовлетворим первому уравнению (422), тогда форма симметричных колебаний может быть, например, записана в виде

$$v_n(x) = \operatorname{ch} 0,5\mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} - \cos 0,5\mu_n \operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l}. \quad (424)$$

Если $\kappa=1$, т. е. стержень жестко заделан, то уравнение частот (423) превращается в уравнение частот (411) для симметричных колебаний безопорного стержня, так что частоты колебаний безопорного и жестко заделанного стержня оказываются одинаковыми; равенство частот в приведенных двух задачах может быть доказано в общем виде, но мы на этом не останавливаемся.

Для свободно опертого стержня ($\kappa=0$) уравнение (423) преобразуется к виду:

$$\operatorname{ctg} 0,5\mu_n = 0$$

или

$$\cos 0,5\mu_n = 0, \quad (425)$$

имеющему корни: $\mu_1=\pi$, $\mu_2=3\pi$, $\mu_3=5\pi \dots$, соответствующие симметричным формам колебаний, в чем нетрудно убедиться на основании выражения (406).

При больших значениях μ_n корни уравнения (423) приближаются к корням уравнения (425), т. е. стремятся к совпадению с корнями уравнения для свободно опертого стержня. Можно также показать, на чем мы не останавливаемся, что влияние граничных условий на формы колебаний стержня сказывается лишь вблизи концов.

Пример 4. Составить уравнение частот для стержня, упруго заделанного на упругих опорах (рис. 23).

Граничные условия:

при $x=0$

$$\mathfrak{U}_{j-1} EI_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} = \frac{\partial v_j}{\partial x}, \quad A_{j-1} EI_j \frac{\partial^3 v_j}{\partial x^3} = -v_j,$$

при $x=l_j$

$$\mathfrak{A}_j EI_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} = -\frac{\partial v_j}{\partial x}, \quad A_j EI_j \frac{\partial^3 v_j}{\partial x^3} = v_j,$$

После подстановки выражения (386) и замены индекса n на jn они преобразуются:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_{j-1} EI_j v_{jn}''(0) &= v_{jn}'(0), & A_{j-1} EI_j v_{jn}'''(0) &= -v_{jn}(0), \\ \mathfrak{A}_j EI_j v_{jn}''(l_j) &= -v_{jn}'(l_j), & A_j EI_j v_{jn}'''(l_j) &= v_{jn}(l_j). \end{aligned} \right\} \quad (426)$$

Условия (426) удобно записать в следующем виде:

при $x=0$

$$\left. \begin{aligned} e_{j-1}^r &= \frac{l_j}{\mu_j} \frac{v_{jn}''}{v_{jn}'}, & f_{j-1}^r &= \frac{l_j^3}{\mu_j^3} \frac{v_{jn}'''}{v_{jn}'}, \\ e_j^l &= \frac{l_j}{\mu_j} \frac{v_{nj}''}{v_{jn}'}, & f_j^l &= \frac{l_j^3}{\mu_j^3} \frac{v_{jn}'''}{v_{jn}'}, \end{aligned} \right\} \quad (427)$$

где согласно выражению (389)

$$\left(\frac{\mu_j}{l_j} \right)^4 = \frac{m_j k_n^2 - k_{oj}}{EI_j}. \quad (428)$$

Мы опустили для простоты индекс n у величин μ_j , как и у величин e и f , которые могут зависеть от n . Связь между величинами $e_{j-1}^r \dots f_j^l$ с одной стороны и коэффициентами податливости с другой устанавливается сравнением выражений (426) и (427); на выписывании соответствующих формул мы не останавливаемся.

Нижний индекс у величин e и f показывает, к какой опоре они относятся, верхний индекс r (rechts) — что балка находится справа от рассматриваемой опоры, а индекс l (links), что балка находится слева от опоры.

Подчиняя выражения (390) или (391) граничным условиям (427) и приравнявая определитель нулю, можно после преобразований получить следующее уравнение частот¹:

$$\begin{aligned} & e_{j-1}^r f_{j-1}^r [e_j^l f_j^l D(\mu_j) - e_j^l A(\mu_j) + f_j^l B(\mu_j) + E(\mu_j)] + \\ & + e_{j-1}^r [e_j^l f_j^l A(\mu_j) - e_j^l S(\mu_j) - f_j^l C(\mu_j) + A(\mu_j)] - \\ & - f_{j-1}^r [e_j^l f_j^l B(\mu_j) + e_j^l C(\mu_j) - f_j^l S(\mu_j) + B(\mu_j)] + \\ & + e_j^l f_j^l E(\mu_j) - e_j^l A(\mu_j) + f_j^l B(\mu_j) + D(\mu_j) = 0, \end{aligned} \quad (429)$$

¹ Уравнение (429) впервые получено в [3].

где

$$\left. \begin{aligned} A(\mu) &= \operatorname{ch} \mu \sin \mu + \operatorname{sh} \mu \cos \mu, \\ B(\mu) &= \operatorname{ch} \mu \sin \mu - \operatorname{sh} \mu \cos \mu, \\ C(\mu) &= 2 \operatorname{ch} \mu \cos \mu, \\ S(\mu) &= 2 \operatorname{sh} \mu \sin \mu, \\ D(\mu) &= \operatorname{ch} \mu \cos \mu - 1, \\ E(\mu) &= \operatorname{ch} \mu \cos \mu + 1. \end{aligned} \right\} \quad (430)$$

Таблицы вспомогательных функций $A(\mu) \dots E(\mu)$ для $0 \leq \mu \leq 10$ приведены в работах [3] и [5].

Так как уже $\operatorname{ch} 4 : \operatorname{sh} 4 < 1,04$, то для больших значений аргумента можно принять данное отношение равным единице. Поэтому при нахождении корней уравнения (429) больше четырех, во избежание вычислений малой разности, следует разделить его на $\operatorname{ch} \mu$; в уравнении останутся лишь тригонометрические функции.

Это равносильно тому, что при нахождении высших частот нужно принять для функции $A, B, \dots E$ следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A^\infty(\mu) &= \sin \mu + \cos \mu, \\ B^\infty(\mu) &= \sin \mu - \cos \mu, \\ C^\infty(\mu) &= 2 \cos \mu, \\ S^\infty(\mu) &= 2 \sin \mu, \\ D^\infty(\mu) &= E^\infty(\mu) = \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (431)$$

Уравнением (429) удобно пользоваться для решения ряда задач, в которых достаточно ограничиться определением частот.

Например, для свободно опертого стержня:

$$e_{j-1}^r = e_j^l = 0, \quad f_{j-1}^r = f_j^l = \infty,$$

поэтому, разделив уравнение (429) на произведение $f_{j-1}^r f_j^l$, положив $e_{j-1}^r = e_j^l = 0$ и отбросив все члены, имеющие делителем хотя бы одну из величин f_{j-1}^r или f_j^l , получим

$$S(\mu) = 0,$$

что приводит к уравнению (406).

Для безопорного стержня возьмем начало координат в середине пролета, тогда для симметричных форм колебаний можно написать:

$$e_{j-1}^r = \infty, \quad f_{j-1}^r = e_j^l = f_j^l = 0,$$

что приводит к уравнению частот

$$A(\mu) = 0,$$

легко преобразующемуся к виду (411); на получении других ранее выведенных уравнений мы не останавливаемся.

Если стержень оперт на жесткие опоры, то $f_{j-1}^r = f_j^l = \infty$, и уравнение (429) существенно упрощается:

$$e_{j-1}^r e_j^l D(\mu_j) + (e_{j-1}^r - e_j^l) B(\mu_j) + S(\mu_j) = 0. \quad (432)$$

Пример 5. Составить уравнение частот для симметрично заделанного стержня, несущего в середине пролета сосредоточенную массу M , и опертого на упругую опору с коэффициентом жесткости K (рис. 24).

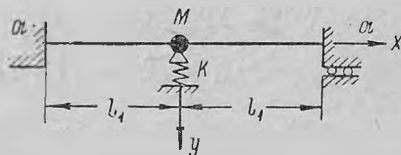


Рис. 24.

Граничные условия для форм колебаний могут быть записаны в виде (см. пример 3):

$$v_n(\pm l_1) = 0, \quad v_n'(\pm l_1) = \mp \frac{1-\alpha}{\alpha} l_1 v_n''(\pm l_1), \quad (433)$$

где

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{2EI}{l_1}. \quad (434)$$

При $x=0$ условия зависят от рассматриваемой формы колебаний.

При симметричной форме колебаний

$$v_n'(0) = 0;$$

второе же условие должно устанавливать связь между перерезывающей силой, реакцией упругой опоры и силой инерции массы M , т. е. при $x=0$

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} \left(Kv + M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right),$$

что после подстановки выражения (386) и сравнения коэффициентов при одинаковых функциях времени приводит к условию

$$v_n''(0) = \frac{1}{2} \frac{M\lambda_n^2 - K}{EI} v_n(0). \quad (435)$$

В рассматриваемой задаче

$$\left. \begin{aligned} e_{j-1}^r = \infty, \quad f_{j-1}^r &= \frac{1}{2} \frac{M\lambda_n^2 - K}{EI} \left(\frac{l_1}{\mu} \right)^3, \\ e_j^l &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\mu}, \quad f_j^l = \infty \end{aligned} \right\} \quad (436)$$

или на основе выражения (428)

$$f_{j-1}^r = \alpha \mu - \frac{1}{2} \frac{K}{EI} \left(1 - 2\alpha \frac{k_0 l_1}{K} \right) \left(\frac{l_1}{\mu} \right)^3, \quad (437)$$

где

$$\alpha = \frac{M}{2ml_1}. \quad (438)$$

Разделив уравнение (429) на произведение $e_{j-1}^r f_j^l$, получим:

$$f_{j-1}^r e_j^l D(\mu) + f_{j-1}^r B(\mu) + e_j^l A(\mu) - C(\mu) = 0$$

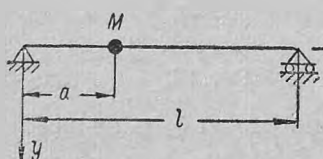


Рис. 25.

или, решая относительно f_{j-1}^r и подставляя значение e_j^l согласно формуле (436)

$$f_{j-1}^r = \frac{(1-\kappa)\mu C(\mu) + \kappa A(\mu)}{(1-\kappa)\mu B(\mu) - \kappa D(\mu)}, \quad (439)$$

где f_{j-1}^r определяется формулой (437)

При отсутствии в середине пролета сосредоточенной массы M и упругой опоры жесткостью K коэффициент $f_{j-1}^r = 0$, и мы получаем уравнение (423).

В случае антисимметричных форм колебаний:

$$v_n(0) = 0, \quad v_n''(0) = 0,$$

так что

$$e_{j-1}^r = 0, \quad f_{j-1}^r = \infty.$$

Величины e_j^l и f_j^l определяются формулами (436) и уравнение частот приводится к виду

$$\kappa B(\mu) + (1-\kappa)\mu S(\mu) = 0. \quad (440)$$

Пример 6. Составить уравнение частот для свободно опертого стержня, несущего в сечении $x=a$ сосредоточенную массу M , и опертого на упругую опору жесткостью K (рис. 25).

В рассматриваемой задаче мы воспользуемся обычным приемом составления уравнения частот¹.

При переходе через сечение, в котором расположена масса и упругая опора, должно быть выполнено условие сопряжения

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \bigg|_{a-0}^{a+0} = -Kv(a, t) - M \frac{\partial^2 v(a, t)}{\partial t^2},$$

¹ Уравнение (429) не может быть использовано при составлении уравнений частот для любых стержневых систем. Рекомендуем обратиться к книге [3], в которой авторами уравнения (429) вопрос об области его применения рассмотрен достаточно подробно.

которое после подстановки выражения (386) приводится к виду

$$EI v_n'' \Big|_{a-0}^{a+0} = - (K - M\lambda_n^2) v_n(a),$$

тогда как v_n , v_n' и v_n'' остаются непрерывными.

Граничные условия для форм колебаний будут:

$$v_n(0) = v_n(l) = 0, \quad v_n''(0) = v_n''(l) = 0.$$

Выражение для формы колебаний может быть принято в виде

$$v_n(x) = b_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} + d_n \sin \frac{\mu_n x}{l} + \parallel_{x>a} D_3 U_3 \left(\mu_n \frac{x-a}{l} \right),$$

где D_3 подлежит определению из условия сопряжения.

Так как при $x=a$ аргумент $\mu_n \frac{x-a}{l}$ равен нулю, то на основании условий (392) можно заключить, что $v_n(x)$, $v_n'(x)$ и $v_n''(x)$ остаются непрерывными.

Подставляя $v_n(x)$ в условие сопряжения и используя условия (392), получим:

$$EID_3 \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^3 = (M\lambda_n^2 - K) \left(b_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n a}{l} + d_n \sin \frac{\mu_n a}{l} \right)$$

или

$$D_3 = f_n \left(b_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n a}{l} + d_n \sin \frac{\mu_n a}{l} \right),$$

$$f_n = \frac{M\lambda_n^2 - K}{EI} \left(\frac{l}{\mu_n} \right)^3.$$

Таким образом, форма колебаний может быть записана в виде

$$v_n(x) = b_n \left[\operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} + \parallel_{x>a} f_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n a}{l} U_3 \left(\mu_n \frac{x-a}{l} \right) \right] + \\ + d_n \left[\sin \frac{\mu_n x}{l} + \parallel_{x>a} f_n \sin \frac{\mu_n a}{l} U_3 \left(\mu_n \frac{x-a}{l} \right) \right].$$

Подчиняя полученное выражение для $v_n(x)$ граничным условиям при $x=l$, получим систему двух однородных уравнений, приравнявие определителя которой нулю приведет нас к уравнению частот. На выписывании последней ввиду его громоздкости мы не останавливаемся.

Пример 7. Составить уравнение частот и найти формы колебаний консольного стержня (рис. 26).

Граничные условия для форм колебаний будут:

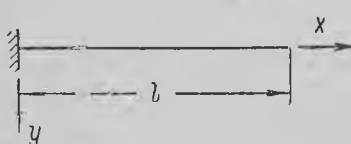
$$v_n(0)=0, \quad v'_n(0)=0,$$

$$v''_n(l)=0, \quad v'''_n(l)=0.$$

Принимая выражение для форм свободных колебаний в виде (391), можно найти на основании граничных условий при $x=0$ и условий (392), что

$$A_n=B_n=0.$$

Граничные условия при $x=l$, если принять во внимание правила дифференцирования (394), приводят к системе уравнений:



$$\left. \begin{aligned} C_n U_0(\mu_n) + D_n U_1(\mu_n) &= 0, \\ C_n U_3(\mu_n) + D_n U_0(\mu_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (441)$$

так что уравнение частот может быть записано в виде

$$U_0^2(\mu_n) - U_1(\mu_n) U_3(\mu_n) = 0. \quad (442)$$

Рис. 26.

Первому уравнению (441) можно, например, удовлетворить, положив:

$$C_n = 4U_1(\mu_n), \quad D_n = -4U_0(\mu_n),$$

так что форма колебаний, принимая во внимание выражения (393) для функций $U_j\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} v_n(x) = & (\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n) \left(\operatorname{ch} \frac{\mu_n x}{l} - \cos \frac{\mu_n x}{l} \right) - \\ & - (\operatorname{ch} \mu_n + \cos \mu_n) \left(\operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l} - \sin \frac{\mu_n x}{l} \right). \end{aligned} \quad (443)$$

Разделив выражение (443) на

$$v_n(l) = 2(\operatorname{ch} \mu_n \sin \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n \cos \mu_n) = 2B(\mu_n),$$

мы и получим функции, ординаты которых приведены в табл. 11.

Приведение уравнения частот (442) к простейшему виду требует выполнения довольно громоздких преобразований, которые можно избежать, если воспользоваться уравнением (429).

В рассматриваемой задаче

$$e'_{j-1} = f'_{j-1} = \infty, \quad e'_j = f'_j = 0.$$

Разделив уравнение (429) на произведение $e'_{j-1} f'_{j-1}$, можно получить уравнение частот

$$E(\mu_n) = 0.$$

Рекомендуем сравнить это уравнение с уравнением (442).

§ 23. РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОПРОЛЕТНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Для решения задачи о вынужденных колебаниях стержня при произвольной нагрузке разложим нагрузку в ряд по формам свободных колебаний рассматриваемого стержня¹

$$q(x, t) = \sum_n q_n(t) v_n(x). \quad (444)$$

Коэффициент $q_n(t)$ разложения (444) легко определить, если воспользоваться условием ортогональности (398), для чего следует выражение (444) умножить на $v_r(x)$ и проинтегрировать по длине балки. Это приводит к уравнению

$$\int_0^l q(x, t) v_r(x) dx = q_r(t) \int_0^l v_r^2(x) dx, \quad (445)$$

пользуясь которым можно определить все функции $q_r(t)$.

Будем искать решение уравнения (384) в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_n v_n(x) p_n(t), \quad (446)$$

где $v_n(x)$ — формы главных свободных колебаний, удовлетворяющие уравнению (388), а функция $p_n(t)$ подлежит определению. Подставляя выражения (446) и (444) в дифференциальное уравнение (384) и принимая во внимание уравнение (388), после сравнения коэффициентов при одинаковых формах свободных колебаний, получим

$$p_n''(t) + \lambda_n^2 p_n(t) = \frac{1}{m} q_n(t), \quad (447)$$

т. е. определение неизвестных функций $p_n(t)$ свелось к решению ряда задач на колебание системы с одной степенью свободы.

Система уравнений (447) может быть получена и энергетическим методом, для чего следует принять упругую линию в виде (446), выразить кинетическую и потенциальную энергии через обобщенные скорости и перемещения, найти значения обобщенных сил и подставить найденные выражения в уравнения Лагранжа второго рода, что и приведет к системе дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций времени.

Так как за фундаментальные функции $v_n(x)$ принимаются формы главных свободных колебаний, то кинетическая и потен-

¹ Не следует смешивать функции $q_n(t)$ с обобщенными координатами в гл. I и II.

циальная энергии будут иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_n M_n \dot{p}_n^2(t), \\ V &= \frac{1}{2} \sum_n C_n p_n^2(t), \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

где M_n , C_n и частота λ_n связаны соотношением (137) при $j=n$, а обобщенная масса M_n определяется выражением (247) при $g=k=n$ и замене фундаментальных функций через формы главных свободных колебаний

$$M_n = m \int_{(l)} v_n^2(x) dx. \quad (449)$$

Обобщенная сила определится согласно формуле (248)

$$P_n(t) = \int_{(l)} q(x, t) v_n(x) dx, \quad (450)$$

так что, подставляя выражения (448) и (450) в уравнения Лагранжа при $\Phi=0$, получим

$$\ddot{p}_n(t) + \lambda_n^2 p_n(t) = \frac{1}{M_n} P_n(t). \quad (451)$$

Если принять во внимание выражения (445), (449) и (450), то можно убедиться в полном совпадении уравнений (451) и (447).

При решении задачи о вынужденных колебаниях приходится вычислять интеграл от квадрата формы колебаний.

Непосредственное вычисление интеграла оказывается весьма громоздким и поэтому, следуя А. Н. Крылову, выведем специальную формулу¹.

На основании уравнения (388)

$$\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4 \int_{(l)} v_n(x) v_k(x) dx = \int_{(l)} v_n^{IV}(x) v_k(x) dx$$

или после интегрирования по частям и повторного использования уравнения (388)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4 \int_{(l)} v_n v_k dx &= v_n'' v_k - v_n'' v_k' + v_n' v_k'' - v_n v_k''' \Big|_{(l)} + \\ &+ \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^4 \int_{(l)} v_n v_k dx, \end{aligned}$$

¹ См. работу [4].

откуда

$$\int_{(l)} v_n v_k dx = \frac{l^4}{\mu_n^4 - \mu_k^4} |v_n''' v_k - v_n'' v_k' + v_n' v_k'' - v_n v_k''|_{(l)}, \quad (452)$$

где символ $|\dots|_{(l)}$ означает, что вычисляется разность значений соответствующего выражения при верхнем и нижнем пределах.

При $k=n$ в правой части полученного выражения получается неопределенность $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой воспользуемся правилом Лопиталя.

Введем обозначение

$$\Omega(\mu) = v''' v_k - v'' v_k' + v' v_k'' - v v_k''', \quad (453)$$

так что выражение (452) может быть при $n=k$ и с использованием правила Лопиталя записано в виде

$$\int_{(l)} v_k^2 dx = l^4 \left(\frac{1}{4\mu^3} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_k}.$$

Функция v зависит от сложного аргумента

$$\xi = \frac{\mu x}{l},$$

поэтому можно написать:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\mu}{l} \frac{dv}{d\xi}, \quad \frac{dv_k}{dx} = \frac{\mu_k}{l} \frac{dv_k}{d\xi}.$$

Обозначая через $v^{(j)}$ производную порядка j по сложному аргументу, перепишем выражение (453) в виде

$$\Omega(\mu) = \frac{1}{l^3} (\mu^3 v^{(3)} v_k - \mu^2 \mu_k v^{(2)} v_k^{(1)} + \mu \mu_k^2 v^{(1)} v_k^{(2)} - \mu_k^3 v v_k^{(3)}).$$

Дифференцируя полученное выражение по μ и замечая, что

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{x}{l} v^{(1)},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} &= \frac{1}{l^3} (3\mu^2 v^{(3)} v_k - 2\mu \mu_k v^{(2)} v_k^{(1)} + \mu_k^3 v^{(1)} v_k^{(2)}) + \\ &+ \frac{x}{l^4} (\mu^3 v^{(4)} v_k - \mu^2 \mu_k v^{(3)} v_k^{(1)} + \mu \mu_k^2 v^{(2)} v_k^{(2)} - \mu_k^3 v^{(1)} v_k^{(3)}). \end{aligned}$$

поэтому¹

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_k} = \frac{\mu_k^2}{l^3} (3v_k^{(3)} v_k - v_k^{(2)} v_k^{(1)}) + \frac{\mu_k^3}{l^4} [(v_k^{(1)})^2 - 2v_k^{(1)} v_k^{(3)} + (v_k^{(2)})^2].$$

¹ При преобразованиях нужно принять во внимание, что $v_k^{(4)} = v_k$.

Таким образом

$$\int_{(l)} v_k^2 dx = \frac{l}{4} \left| \frac{1}{\mu_k} \left(3v_k^{(3)} v_k - v_k^{(2)} v_k^{(1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{x}{l} \left[(v_k)^2 - 2v_k^{(1)} v_k^{(3)} + (v_k^{(2)})^2 \right] \right|_{(l)}. \quad (454)$$

Если на каждом конце стержня обращаются в нуль стрелка прогиба или перерезывающая сила, изгибающий момент или угол поворота, то первые два слагаемых в правой части выражения (454) обращаются в нуль и оно преобразуется к виду

$$\int_{(l)} v_k^2 dx = \frac{l}{4} \left| \frac{x}{l} \left[(v_k)^2 - 2v_k^{(1)} v_k^{(3)} + (v_k^{(2)})^2 \right] \right|_{(l)}. \quad (455)$$

Полагая, например, $v_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} = \sin \xi$, получим известный результат

$$\int_{(l)} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

Пример. Рассмотрим в качестве примера колебание безопорного стержня, лежащего на упругом основании, при действии на него произвольной возмущающей нагрузки $q(x, t)$. Начало координат примем в середине пролета, что дает возможность использовать формы свободных колебаний, определенные в примере 2 § 22.

Полагаем

$$v(x, t) = \eta(t) + x\psi(t) + \sum_n v_n(x) p_n(t) \quad (456)$$

и представляем нагрузку $q(x, t)$ в виде ряда

$$q(x, t) = q_0(t) + q_{-1}(t)x + \sum_n q_n(t) v_n(x). \quad (457)$$

Умножая выражение (457) последовательно на 1, x и $v_r(x)$, интегрируя в пределах $(-0,5l, +0,5l)$ и используя условия ортогональности и уравновешенности, получим:

$$\left. \begin{aligned} q_0(t) &= \frac{1}{l} \int_{-0,5l}^{+0,5l} q(x, t) dx, \\ q_{-1}(t) &= \frac{12}{l^3} \int_{-0,5l}^{+0,5l} xq(x, t) dx, \\ q_r(t) \int_{-0,5l}^{+0,5l} v_r^2 dx &= \int_{-0,5l}^{+0,5l} q(x, t) v_r(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

Воспользовавшись формулой (455), граничными условиями и граничными значениями (413) и (417) для форм колебаний, получим

$$\int_{-0,5l}^{+0,5l} v_r^2 dx = \frac{l}{4},$$

так что

$$q_r(t) = \frac{4}{l} \int_{-0,5l}^{+0,5l} q(x, t) v_r(x) dx.$$

В рассматриваемом примере, как это следует из примера 2 § 22,

$$\lambda_0^2 = \lambda_{-1}^2 = \frac{k_0}{m},$$

а дифференциальные уравнения (447) должны быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} + \frac{k_0}{m} \eta &= \frac{1}{ml} \int_{-0,5l}^{+0,5l} q(x, t) q x, \\ \ddot{\psi} + \frac{k_0}{m} \psi &= \frac{12}{ml^3} \int_{-0,5l}^{+0,5l} x q(x, t) dx, \\ \ddot{p}_n + \lambda_n^2 p_n &= \frac{4}{ml} \int_{-0,5l}^{+0,5l} q(x, t) v_n(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Изгибающий момент в стержне определится по выражению

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = EI \sum_n v_n''(x) p_n(t). \quad (460)$$

На основании выражений (459) и (460) можно сделать выводы: если к стержню приложена нагрузка, изменяющаяся по длине по линейному закону

$$q(x, t) = a(t) + xb(t),$$

то стержень будет перемещаться как твердое тело (испытывать качку), изгибающий же момент будет тождественно равен нулю, так как при нулевых начальных условиях $p_n(t) \equiv 0$.

Рассмотрим случай, когда к концу стержня приложен импульс A ; подобная задача встречается при расчете судна на удар носовой оконечностью о встречную волну, но там приходится рассматривать нагрузку, кратковременно действующую на некотором протяжении корпуса.

Если мы ограничимся рассмотрением изгибающего момента на миделе, то согласно выражениям (412), (416), (460)

$$M(0, t) = \frac{1}{2} EI \sum_n^{1; 3; \dots} \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{ch} 0,5 \mu_n} - \frac{1}{\cos 0,5 \mu_n} \right) \bar{p}_n(t), \quad (461)$$

и нам нужно лишь определить функции $p_n(t)$, соответствующие нечетным значениям.

В случае действия импульса A на правый конец стержня, где для нечетных n $v_n(+0,5l) = 1$, нужно считать, что на систему с одной степенью свободы, движение которой описывается последним уравнением (459), действует вместо «силы»

$$\int_{-0,5l}^{+0,5l} q(x, t) v_n(x) dx$$

импульс величиной A .

По формуле (18) без учета сил сопротивления получим

$$p_n(t) = \frac{4A}{m l \lambda_n} \sin \lambda_n t.$$

Воспользовавшись формулой (389) и полагая в ней $k_0 = 0$, преобразуем выражение для изгибающего момента к виду

$$M(0, t) = \frac{2A}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}} \sum_n^{1; 3; \dots} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} 0,5 \mu_n} - \frac{1}{\cos 0,5 \mu_n} \right) \sin \lambda_n t. \quad (462)$$

Полученный ряд расходится и не может быть использован для вычисления изгибающего момента.

С расходимостью или очень плохой сходимостью рядов при действии кратковременных нагрузок приходится сталкиваться достаточно часто и до настоящего времени нет еще эффективного способа решения подобных задач. Приведенный нами пример имеет своей целью обратить внимание читателя на указанное обстоятельство.

Иногда для «усиления» сходимости рядов определяют изгибающие моменты не при помощи дифференцирования, а при помощи интегрирования. Покажем, что этот прием, по существу, ничего не дает.

Если решение задачи найдено в виде (446), то подставляя выражения (446) и (444) в правую часть преобразованного уравнения (384)

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = q(x, t) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k_0 v,$$

получим

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \sum_n [q_n(t) - m\ddot{p}_n(t) - k_0 p_n(t)] v_n(x). \quad (463)$$

Уравнение (447) на основании соотношения (389) можно переписать в виде

$$m\ddot{p}_n + \left[EI \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^4 + k_0 \right] p_n = q_n(t),$$

что позволяет преобразовать выражение (463)

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \sum_n \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^4 v_n(x) p_n(t). \quad (464)$$

Выражение (464) получается из выражения (446) после четырехкратного дифференцирования, как это следует из уравнения (388), и его интегрирование не может привести к улучшению сходимости.

Определение изгибающего момента путем интегрирования имеет смысл только при приближенном решении задачи, где погрешность может возникнуть при дифференцировании приближенно задаваемых фундаментальных функций.

§ 24. РАССЕИВАНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассеивание энергии при колебаниях стержней и других упругих тел может происходить вследствие внешних и внутренних сопротивлений.

При наличии внешних сопротивлений часть энергии колебаний поглощается в необратимой форме внешней средой и рассеивается в конечном счете в виде тепла; при наличии внутренних сопротивлений часть энергии колебаний также поглощается в необратимой форме в материале конструкции.

Свойство материалов поглощать в необратимой форме часть энергии колебаний называется в отечественной литературе рядом терминов: «внутреннее сопротивление», «внутреннее неупругое сопротивление», «упругий гистерезис», «демпфирование» и т. д. Часто употребляется термин «внутреннее неупругое сопротивление» в противоположность «упругому сопротивлению», т. е. силам упругости.

Поглощение энергии обуславливается в основном неупругими свойствами материала, известными под общим названием упругих несовершенств.

Эти упругие несовершенства проявляются в том, что связь между напряжениями и деформациями оказывается различной при

изменении знака производной деформации по времени, т. е. при нагрузке и при разгрузке.

Характер такой зависимости при установившемся режиме колебаний показан на рис. 27, из которого видно, что кривая нагрузки—разгрузки образует так называемую петлю гистерезиса, площадь которой и характеризует величину рассеивания энергии за один цикл колебаний: тангенс угла наклона оси петли гистерезиса равен модулю нормальной упругости E .

Природа упругих несовершенств до сих пор изучена недостаточно. Не останавливаясь на изложении различных точек зрения, мы отметим лишь наиболее важные факторы, влияющие на величину внутреннего рассеивания энергии, и укажем практические способы учета внутренних сопротивлений¹.

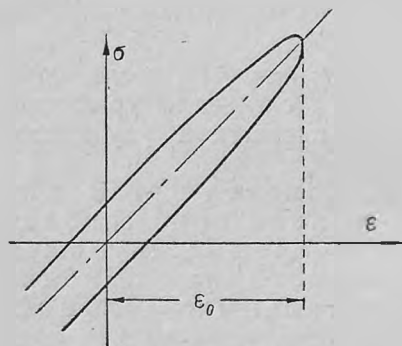


Рис. 27.

Будем в дальнейшем иметь в виду, в основном, установившийся режим колебаний, так как учет рассеивания энергии представляет наибольший интерес при установившемся гармоническом колебании.

За количественную характеристику поглощения энергии при наличии внутренних сопротивлений в технике принимается так называемый коэффициент поглощения ψ , равный отношению площади петли гистерезиса ΔW к потенциальной энергии деформации, соответствующей амплитуде деформаций ϵ_0 , т. е.

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}; \quad (465)$$

связь коэффициента поглощения с другими характеристиками сопротивления установим ниже.

Форма петли гистерезиса в какой-то мере зависит от закона изменения нагрузки за цикл колебаний, но основным для оценки внутренних сопротивлений является площадь петли гистерезиса; форму петли следует принять такой, чтобы расчетные формулы оказались бы наиболее простыми.

Отметим некоторые основные свойства, которыми обладает коэффициент поглощения для стали:

1. Зависимость коэффициента поглощения от амплитуды динамических напряжений может быть весьма различной для разных

¹ Эти вопросы подробно рассмотрены в работе [8], с которой мы рекомендуем ознакомиться читателю; там же можно найти обширную библиографию.

материалов. Для стали коэффициент поглощения при малых динамических напряжениях сначала возрастает, а затем остается практически постоянным. При этом мы предполагаем, что в состоянии покоя напряжения отсутствуют.

2. Величины динамических напряжений в конструкциях, возникающие при вибрации, обычно малы по сравнению со статическими (в состоянии покоя) и в этом случае можно предполагать, что коэффициент поглощения не должен зависеть от величины динамических напряжений.

3. Если статические напряжения находятся в пределах пропорциональности, то коэффициент поглощения практически не зависит от величины этих напряжений. Однако, если статические напряжения, хотя бы в отдельных частях конструкции, например, в местах концентрации напряжений, превосходят предел пропорциональности, то коэффициент поглощения возрастает.

4. Коэффициент поглощения не зависит от частоты колебаний. Численное значение коэффициента поглощения для стали при изгибных колебаниях образцов $\psi \approx 0,01$; что же касается конструкций, то, например, для железнодорожных мостов $0,01 < \psi < 0,3$, т. е. колеблется в очень широких пределах.

Столь значительное расхождение величин коэффициента поглощения для образца и для конструкций должно быть объяснено наличием в конструкциях концентраций статических напряжений, которые могут достигать величин, близких к пределу текучести материала, наличием остаточных напряжений, возникших, например, при изготовлении конструкций, рассеиванием энергии в различных узлах и соединениях и т. п.

Все это свидетельствует о том, что в настоящее время мы не имеем возможности, зная коэффициент поглощения для материала, определить расчетом коэффициент поглощения для конструкции. Даже для различных конструкций, например, для мостов и корпусов судов, а также для различных судов, коэффициенты поглощения будут различны.

Поэтому нецелесообразно принимать сложный способ учета внутренних сопротивлений и из всех возможных нужно выбрать наиболее простой, способный учесть самые главные стороны явления.

Свяжем, следуя Е. С. Сорокину, напряжения σ с деформацией ϵ зависимостью¹

$$\sigma = E\epsilon \pm \gamma_c E\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}}, \quad (466)$$

¹ Изображенная уравнением (466) петля гистерезиса не будет эллипсом, так как $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \pm \infty$ при $\epsilon = \pm \epsilon_0$, т. е. не равно $\pm \frac{1}{E}$.

где ϵ_0 — амплитуда деформации; при $\epsilon > 0$ (при нагрузке) нужно взять верхний знак, а при $\epsilon < 0$ (при разгрузке) нужно взять нижний знак и установим связь коэффициента внутреннего сопротивления γ_c с коэффициентом поглощения ψ ; выражением (466) хорошо аппроксимируется петля гистерезиса вида, изображенного на рис. 27.

По определению

$$\Delta W = 2\gamma_c E \epsilon_0 \int_{-\epsilon_0}^{+\epsilon_0} \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}} d\epsilon,$$

полагая $\epsilon = \epsilon_0 \sin t$, $d\epsilon = \epsilon_0 \cos t dt$, получим

$$\Delta W = 2\gamma_c E \epsilon_0^2 \int_{-0,5\pi}^{+0,5\pi} \cos^2 t dt = \gamma_c \pi E \epsilon_0^2.$$

Величина потенциальной энергии деформации W определится выражением

$$W = \frac{1}{2} E \epsilon_0^2.$$

Таким образом, на основании формулы (465)

$$\psi = 2\pi\gamma_c. \quad (467)$$

Использование зависимости (466) для вывода дифференциального уравнения поперечных колебаний в общем случае привело бы к сложному нелинейному уравнению, которое к тому же еще пришлось бы писать различным образом для нагрузки и для разгрузки.

Ограничиваясь в дальнейшем случае установившихся вынужденных гармонических колебаний, т. е. полагая

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t,$$

преобразуем выражение (466)

$$\sigma = E \epsilon_0 \cos \omega t - \gamma_c E \epsilon_0 \sin \omega t,$$

что можно написать и в виде

$$\sigma = E \epsilon_0 + \frac{\gamma_c}{\omega} E \frac{\partial \epsilon}{\partial t}. \quad (468)$$

В формуле (468) мы оставили один знак, так как при выбранной форме записи знак второго члена всегда будет совпадать со знаком производной от деформации по времени.

Зависимость (468) совпадает по виду с зависимостью, соответствующей гипотезе Фогта, и разница заключается лишь в том,

что коэффициент сопротивления μ в формуле Фогта оказался обратно пропорциональным частоте, т. е.¹

$$\mu = \frac{\gamma c}{\omega}. \quad (469)$$

Однако, несмотря на одинаковую форму связи между напряжениями и деформациями по Фогту и по Сорокину, между этими двумя гипотезами существует глубокое различие: если следовать гипотезе Фогта, то нужно сделать вывод о зависимости коэффициента поглощения ψ от частоты, что противоречит опыту.

Для получения дифференциального уравнения поперечных колебаний с учетом внутренних сопротивлений, выведем выражение для изгибающего момента, когда напряжения и деформации связаны зависимостью (468).

Так как при принятом в строительной механике корабля правиле знаков

$$\varepsilon = -y v'', \quad M = - \int_F \sigma y dF,$$

то

$$\sigma = -E y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\gamma c}{\omega} E y \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t},$$

поэтому

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\gamma c}{\omega} EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t}, \quad (470)$$

где I —главный центральный момент инерции площади поперечного сечения.

Если учесть внешнее сопротивление, характеризуемое погонным коэффициентом сопротивления β , и реакцию упругого основания, то дифференциальное уравнение установившихся поперечных колебаний призматической балки с учетом внутреннего сопротивления запишется в виде

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\gamma c}{\omega} EI \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t} + k_0 v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x) \cos(\omega t + \delta), \quad (471)$$

где m —погонная масса балки, $q(x)$ —амплитуда возмущающей нагрузки.

Решение уравнения (471) может быть получено в различной форме.

Разложим функцию $q(x)$ в ряд (444) по формам свободных колебаний призматической балки и будем искать решение уравнения (471) в виде (445).

¹ Этот результат был получен в статье Bock G. Schwingungsdämpfung unter Ausnützung der Werkstoffdämpfung, ZAMM, Bd. 12, H. 5, 1932. Автор исходил из независимости декремента затухания от частоты и определял соответствующее значение коэффициента сопротивления, принимая гипотезу Фогта.

Так как формы свободных колебаний $v_n(x)$ призматической балки должны удовлетворять тем же граничным условиям, что и для рассматриваемой балки с учетом внутренних сопротивлений, то решение в виде (446), т. е. существование главных колебаний, возможно лишь в том случае, когда внутреннее сопротивление не входит в граничные условия. Например, такой способ решения неприменим для упруго заделанной балки, ибо выражение для изгибающего момента нужно принимать в виде уравнения (470).

Подставляя выражения (444) и (446) в дифференциальное уравнение (471) и используя дифференциальное уравнение (388), после сравнения коэффициентов при одинаковых формах свободных колебаний, получим дифференциальные уравнения для определения неизвестных функций времени¹

$$\ddot{p}_n(t) + 2\mu \dot{p}_n(t) + \lambda_n^2 p_n(t) = \frac{q_n}{m} \cos(\omega t + \delta), \quad (472)$$

где

$$2\mu = \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma c}{m\omega} EI \left(\frac{\lambda_n}{l} \right)^4, \quad (473)$$

а λ_n определяется формулой (389).

Дифференциальное уравнение (472) совпадает по виду с дифференциальным уравнением системы с одной степенью свободы, на которую действует гармоническая возмущающая сила с амплитудой q_n ; масса системы равна m , а коэффициент, учитывающий сопротивление, определяется зависимостью (473).

Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением балки без упругого основания и применяя выражение (389) при $k_0=0$, запишем выражение (473) в виде

$$2\mu = \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma c}{\omega} \lambda_n^2. \quad (474)$$

Частное решение уравнения (472) определится выражением (29) при соответственном изменении обозначений, так что нахождение стрелки прогиба по выражению (446) не представляет принципиальных затруднений; бывает, что ряд (446) сходится достаточно медленно и для практических расчетов неудобен.

Коэффициент динамичности в n -ом главном колебании определится формулой (30), в которой нужно согласно выражениям (2), (23) и (474) положить

$$2\gamma = \frac{\beta}{m\lambda_n} + \frac{\gamma c}{\omega} \lambda_n. \quad (475)$$

¹ Коэффициент μ в уравнении (472) не следует смешивать с коэффициентом μ в формуле Фогта.

При условном резонансе, когда $\omega = \lambda_n$, $z = 1$, и учете одного лишь внутреннего сопротивления ($\beta = 0$), согласно выражениям (32) и (475)

$$\alpha_n(1) = \frac{1}{\gamma_c}, \quad (476)$$

т. е. коэффициент динамичности не зависит от номера главного колебания.

Этот вывод соответствует опытным данным, полученным при исследовании колебаний стержней в воздухе.

Если принять внутреннее сопротивление по гипотезе Фогта, т. е. положить согласно выражению (469) $\gamma_c = \mu \lambda_n$, то коэффициент динамичности при резонансе окажется обратно пропорциональным частоте соответствующих свободных колебаний, т. е. будет уменьшаться с увеличением частоты, а это противоречит указанным выше опытным данным.

Связь коэффициента внутреннего сопротивления γ_c с декрементом затухания можно формально установить, если подставить в формулу (16) при $\lambda = \lambda_n$ значение μ , определяемое выражением (474) при $\beta = 0$ и $\omega = \lambda_n$, что приводит к выражению

$$\ln \eta = \frac{0,5\gamma_c\pi}{\sqrt{1 - (0,5\gamma_c)^2}}, \quad (477)$$

т. е. декремент затухания оказывается не зависящим от частоты колебаний; это подтверждается также опытами над колебаниями балок в воздухе¹.

При наличии только внешнего сопротивления, как в том нетрудно убедиться, декремент затухания уменьшается для высоких частот.

Формула (477) соответствует закону внутреннего сопротивления, устанавливаемому зависимостью (468), но не соответствует представлению петли гистерезиса согласно выражению (466), так как при наличии затухающих свободных колебаний это выражение не преобразуется к виду (468).

Поскольку опытами над колебаниями балок в воздухе подтверждается и независимость коэффициента динамичности от частоты, и независимость декремента затухания от частоты, то закон сопротивления, определяемый формулой (468), не менее обоснован, чем закон сопротивления, определяемый зависимостью (466), и, по-видимому, любой из них подтверждается в пределах точности эксперимента.

¹ Иногда в технической литературе под декрементом затухания понимается отношение размахов колебаний не через полпериода, а через период, так что в правой части формулы (477) появляется множитель 2.

Мы оставляем открытым вопрос о том, как нужно учитывать внутреннее сопротивление при произвольном законе изменения возмущающей нагрузки, потому что имеющиеся приемы приспособления формулы (468) не являются достаточно обоснованными и учет сопротивления представляет особый интерес только для установившихся колебаний.

Если учесть внутреннее сопротивление по Фогту, т. е. положить $\gamma_c = \mu \lambda_n$, то декремент затухания будет возрастать с возрастанием частоты и при достаточно высоких частотах затухающие колебания вырождаются в апериодическое движение.

Решение уравнения (471), соответствующее вынужденным колебаниям, может быть найдено в виде¹

$$v(x, t) = v_1(x) \cos(\omega t + \delta) - v_2(x) \sin(\omega t + \delta), \quad (478)$$

что после подстановки в дифференциальное уравнение (471) и сравнения коэффициентов при одинаковых функциях времени приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EI v_1^{IV}(x) - (m\omega^2 - k_0) v_1(x) - \gamma_c EI v_2^{IV}(x) - \beta \omega v_2(x) &= q(x), \\ \gamma_c EI v_1^{IV}(x) + \beta \omega v_1(x) + EI v_2^{IV}(x) - (m\omega^2 - k_0) v_2(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (479)$$

Интегрирование системы (479) оказывается достаточно громоздким и более удобным является следующий прием, широко используемый в работе [8].

Подобно тому, как мы делали в гл. I, введем в рассмотрение комплексную нагрузку $q(x) e^{i(\omega t + \delta)}$, так что на основании формулы Эйлера

$$q(x) \cos(\omega t + \delta) = \operatorname{Re} q(x) e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (480)$$

Перепишем дифференциальное уравнение (471) для комплексной нагрузки

$$EI \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial x^4} + \frac{\gamma_c}{\omega} EI \frac{\partial^5 \bar{v}}{\partial x^4 \partial t} + \beta \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + k_0 \bar{v} + m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = q(x) e^{i(\omega t + \delta)} \quad (481)$$

и будем искать его решение в виде

$$\bar{v}(x, t) = \bar{v}_0(x) e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (482)$$

Подставляя выражение (482) в дифференциальное уравнение (481) и сокращая на неравный нулю множитель $e^{i(\omega t + \delta)}$, получим дифференциальное уравнение

$$EI(1 + i\gamma_c) \bar{v}_0^{IV}(x) - (m\omega^2 - k_0 - \beta\omega i) \bar{v}_0(x) = q(x) \quad (483)$$

¹ Знак минус перед вторым членом выражения (478) взят по соображениям, которые будут ясны из дальнейшего.

или, если ввести обозначения:

$$E_c = E(1 + i\gamma_c), \quad (484)$$

$$m_c = m \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2} - i \frac{\beta}{m\omega} \right), \quad (485)$$

то дифференциальное уравнение (483) может быть переписано в виде

$$E_c I \bar{v}^{IV}(x) - m_c \omega^2 \bar{v}(x) = q(x). \quad (486)$$

Если бы мы рассматривали вынужденные колебания балки без сопротивления и без упругого основания, то дифференциальное уравнение (471) приняло бы вид

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x) \cos(\omega t + \delta) \quad (487)$$

и после подстановки

$$v(x, t) = v_0(x) \cos(\omega t + \delta) \quad (488)$$

мы получили бы дифференциальное уравнение

$$EI v_0^{IV}(x) - m \omega^2 v_0(x) = q(x). \quad (489)$$

Условимся в дальнейшем называть функцию $v_0(x)$ в выражении (488) формой вынужденных колебаний.

Если известно решение уравнения (489), то решение уравнения (486) может быть получено при замене E на E_c и m на m_c . Решение уравнения (471) в соответствии с зависимостью (480) должно определиться по формуле

$$v(x, t) = \operatorname{Re} \bar{v}_0(x) e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (490)$$

Решение (490) совпадает с решением (478), так как полагая

$$\bar{v}_0(x) = v_1(x) + i v_2(x), \quad (491)$$

мы на основании (490) получим

$$v(x, t) = v_1(x) \cos(\omega t + \delta) - v_2(x) \sin(\omega t + \delta). \quad (492)$$

Подставляя выражения (484), (485) и (491) в дифференциальное уравнение (486), после отделения вещественной части от мнимой приходим к системе уравнений (479).

Таким образом, для расчета установившихся колебаний при наличии сопротивления нужно прежде всего получить общие решения для установившихся колебаний при отсутствии сопротивления, затем решение задачи сведется к отделению вещественной части решения от мнимой.

Подстановка типа (480) применяется и при действии сосредоточенных сил или моментов, и на основании выражения (470) не-

трудно убедиться в том, что она сводится к замене в граничных условиях или в условиях сопряжения модуля E на комплексный модуль E_c , определяемый формулой (484). При наличии в месте расположения массы M упругой опоры жесткостью K и линейного сопротивления с коэффициентом B нужно ввести в расчет комплексную массу

$$M_c = M \left(1 - \frac{K}{M\omega^2} - i \frac{B}{M\omega} \right). \quad (493)$$

§ 25. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ И УЧЕТЕ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим несколько примеров, представляющих практический интерес.

Пример 1. Найти углы поворота опорных сечений балки, загруженной на правой опоре периодическим изгибающим моментом

$$M_j(t) = M_j \cos(\omega t + \delta). \quad (494)$$

В рассматриваемом примере граничные условия для формы вынужденных колебаний очевидны и запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_0(0) &= 0, & EI v_0''(0) &= 0, \\ v_0(l) &= 0, & EI v_0''(l) &= M_j \cos(\omega t + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (495)$$

а так как в дифференциальном уравнении (489) $q(x) = 0$, то общее выражение для формы вынужденных колебаний может быть представлено в виде (390) при $\mu_n = \mu$, где для балки без упругого основания

$$\left(\frac{\mu}{l} \right)^4 = \frac{m\omega^2}{EI}, \quad (496)$$

т. е.

$$v_0(x) = a_0 \operatorname{ch} \frac{\mu x}{l} + b_0 \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + c_0 \cos \frac{\mu x}{l} + d_0 \sin \frac{\mu x}{l}, \quad (497)$$

На основании граничных условий при $x=0$

$$a_0 = c_0 = 0,$$

подчиняя же выражение (497) граничным условиям при $x=l$, нетрудно получить:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2} \frac{M_j}{EI} \left(\frac{l}{\mu} \right)^3 \frac{1}{\operatorname{sh} \mu}, \\ d_0 &= -\frac{1}{2} \frac{M_j}{EI} \left(\frac{l}{\mu} \right)^3 \frac{1}{\sin \mu}, \end{aligned}$$

ТАК ЧТО

$$v_0(x) = \frac{1}{2} \frac{M_j}{EI} \left(\frac{l}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\mu x}{l}}{\operatorname{sh} \mu} - \frac{\sin \frac{\mu x}{l}}{\sin \mu} \right). \quad (498)$$

Если бы и на левой опоре был приложен изгибающий момент $M_{j-1}(t) = M_{j-1} \cos(\omega t + \delta)$, то для формы вынужденных колебаний можно было бы получить выражение

$$v_0(x) = \frac{1}{2} \frac{M_{j-1}}{EI} \left(\frac{l}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\mu(l-x)}{l}}{\operatorname{sh} \mu} - \frac{\sin \frac{\mu(l-x)}{l}}{\sin \mu} \right). \quad (499)$$

Амплитуды углов поворота опорных сечений балки при действии периодических изгибающих моментов на обеих опорах определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} v'_0(0) &= -\frac{M_{j-1}l}{3EI} \varphi_2(\mu) - \frac{M_j l}{6EI} \varphi_1(\mu), \\ v'_0(l) &= \frac{M_j l}{6EI} \varphi_1(\mu) + \frac{M_j l}{3EI} \varphi_2(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\mu) &= \frac{6}{2\mu} \left(\frac{1}{\sin \mu} - \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \right), \\ \varphi_2(\mu) &= \frac{3}{2\mu} \left(\frac{1}{\operatorname{th} \mu} - \frac{1}{\operatorname{tg} \mu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (501)$$

Формулы (500) имеют такую же структуру, как и формулы для определения углов поворота опорных сечений свободно опертой балки, загруженной в опорном сечении статическим изгибающим моментом.

Для получения выражения углов поворота опорных сечений балки при наличии сопротивления нужно в выражениях (500) и (501) заменить μ на $\bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ определяется формулой (496) при замене m на m_c и E на E_c согласно формулам (484) и (485). После этого искомые углы поворота находят по формулам, вытекающим из (490) или (492), для чего требуется отделить в выражениях (500) и (501) вещественную часть от мнимой.

Формула (496) при подстановке в нее выражений (484) и (485) приобретает вид

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{l} \right)^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \frac{1 - \frac{k_0}{m\omega^2} - i \frac{\beta}{m\omega}}{1 + i\gamma_c}$$

или после умножения числителя и знаменателя на величину $1 - i\gamma_c$

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{l}\right)^4 = \frac{m\omega^2}{EI(1 + \gamma_c^2)} \left\{ \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2} - \frac{\beta\gamma_c}{m\omega}\right) - i \left[\gamma_c \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2}\right) + \frac{\beta}{m\omega} \right] \right\}. \quad (502)$$

Представив выражение (502) в виде

$$\bar{\mu}^4 = \rho^4 (\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad (503)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho^4 \cos \vartheta &= \frac{m\omega^2 l^4}{EI(1 + \gamma_c^2)} \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2} - \frac{\beta\gamma_c}{m\omega}\right), \\ \rho^4 \sin \vartheta &= - \frac{m\omega^2 l^4}{EI(1 + \gamma_c^2)} \left[\gamma_c \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2}\right) + \frac{\beta}{m\omega} \right], \end{aligned} \right\} \quad (504)$$

получим

$$\mu = \rho \left(\cos \frac{1}{4} \vartheta + i \sin \frac{1}{4} \vartheta \right) \quad (505)$$

или

$$\bar{\mu} = \mu' + i\mu'' \quad (506)$$

при понятных обозначениях.

Обычно модуль коэффициента при «мнимой» части в выражении (502) мал по сравнению с модулем вещественной части и для определения $\bar{\mu}$ пользуются следующими приближенными приемами, дающими практически ту же точность, что и при вычислениях по приведенным выше формулам. Это условие может оказаться нарушенным при использовании гипотезы Фогта и расчете вынужденных колебаний достаточно высокой частоты.

Выражение (502) перепишем в виде

$$\bar{\mu} = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2} - \frac{\beta\gamma_c}{m\omega}\right) l^4}{EI(1 + \gamma_c^2)}} \sqrt[4]{1 - i\alpha}, \quad (507)$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma_c \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2}\right) + \frac{\beta}{m\omega}}{1 - \frac{k_0}{m\omega^2} - \frac{\beta\gamma_c}{m\omega}} \quad (508)$$

является по условию величиной малой по сравнению с единицей.

Воспользовавшись правилом бинома Ньютона, получим

$$\sqrt[4]{1 - i\alpha} = 1 - \frac{1}{4} i\alpha + \dots,$$

где отброшены все члены со степенями α выше первой.

Если отбросить малые, по сравнению с единицей, члены под знаком первого радикала в выражении (507), а также и в выражении (508), то можно написать

$$\bar{\mu} = \sqrt[4]{\frac{(m\omega^2 - k_0)l^4}{EI}} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha i\right), \quad (509)$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma c \left(1 - \frac{k_0}{m\omega^2}\right) + \frac{\beta}{m\omega}}{1 - \frac{k_0}{m\omega^2}}. \quad (510)$$

Заметим, что

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{(m\omega^2 - k_0)l^4}{EI}} \quad (511)$$

есть значение параметра μ для балки без сопротивления, но с упругим основанием, поэтому формула (509) может быть записана так:

$$\bar{\mu} = \mu \left(1 - \frac{1}{4} \alpha i\right). \quad (512)$$

Перепишем формулы (500) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}'_0(0) &= -\frac{M_{j-1}l}{3EI(1+i\gamma_c)} \varphi_2(\bar{\mu}) - \frac{M_j l}{6EI(1+i\gamma_c)} \varphi_1(\bar{\mu}), \\ \bar{v}'_0(l) &= \frac{M_{j-1}l}{6EI(1+i\gamma_c)} \varphi_1(\bar{\mu}) + \frac{M_j l}{3EI(1+i\gamma_c)} \varphi_2(\bar{\mu}) \end{aligned} \right\} \quad (513)$$

и покажем, как отделить вещественные части от мнимых в выражениях:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\bar{\mu}) &= \frac{6}{2\bar{\mu}} \left(\frac{1}{\sin \bar{\mu}} - \frac{1}{\operatorname{sh} \bar{\mu}} \right), \\ \varphi_2(\bar{\mu}) &= \frac{3}{2\bar{\mu}} \left(\frac{\operatorname{ch} \bar{\mu}}{\operatorname{sh} \bar{\mu}} - \frac{\cos \bar{\mu}}{\sin \bar{\mu}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (514)$$

Воспользовавшись формулами преобразования тригонометрических и гиперболических функций, а также соотношениями

между тригонометрическими и гиперболическими функциями мнимого и действительного аргумента, можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \sin \bar{\mu} &= \sin \mu' \operatorname{ch} \mu'' + i \cos \mu' \operatorname{sh} \mu'', \\ \cos \bar{\mu} &= \cos \mu' \operatorname{ch} \mu'' - i \sin \mu' \operatorname{sh} \mu'', \\ \operatorname{sh} \bar{\mu} &= \operatorname{sh} \mu' \cos \mu'' + i \operatorname{ch} \mu' \sin \mu'', \\ \operatorname{ch} \bar{\mu} &= \operatorname{ch} \mu' \cos \mu'' + i \operatorname{sh} \mu' \sin \mu'', \end{aligned} \right\} \quad (515)$$

где согласно формулам (506) и (512):

$$\mu' = \mu, \quad \mu'' = -\frac{1}{4} \alpha \mu. \quad (516)$$

Если α мало, а μ невелико, т. е. частота ω не слишком велика, то μ'' мало и в формулах (515) можно положить:

$$\sin \mu'' = \operatorname{sh} \mu'' = -\frac{1}{4} \alpha \mu,$$

$$\cos \mu'' = \operatorname{ch} \mu'' = 1.$$

Подставляя в формулы (514) выражения (515) и заменяя μ' и μ'' согласно выражениям (516), можно в общем виде отделить вещественную часть от мнимой, после чего эту операцию можно выполнить и в выражениях (513).

Мы не будем выполнять указанных преобразований в общем виде, ибо это приводит к весьма громоздким формулам, пользование которыми неудобно.

Так как расчет вынужденных колебаний производится для заданной частоты ω возмущающей нагрузки и нас интересует получение численных результатов, то численный расчет вынужденных колебаний при наличии сопротивления производится следующим образом:

1) определяются расчетом величины μ' и μ'' , для чего нужно воспользоваться зависимостями (504) и (505), либо при малом сопротивлении — зависимостями (510), (511) и (516);

2) по формулам (515) вычисляются частные значения тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента, которые будут комплексными числами в алгебраической форме, после чего не представляет затруднения представить вспомогательные функции (514) в виде комплексных чисел в алгебраической форме;

3) численные значения комплексных функций (514) подставляются в выражения (513), которые после умножения числителя и знаменателя на $1 - i\gamma_c$ и приведения подобных членов, можно представить в виде комплексных чисел, записанных в алгебраической форме;

4) искомые углы поворота на опорах определяются по формулам, вытекающим из общей формулы (490):

$$\left. \begin{aligned} v'_0(0) &= \operatorname{Re} \bar{v}_0(0) e^{i(\omega t + \delta)}, \\ v'_0(l) &= \operatorname{Re} \bar{v}_0(l) e^{i(\omega t + \delta)}. \end{aligned} \right\} \quad (517)$$

Пример 2. Найти углы поворота опорных сечений свободно опертой балки при действии в сечении $x=a$ сосредоточенной возмущающей силы $P \cos(\omega t + \delta)$.

Форма вынужденных колебаний $v_0(x)$ должна удовлетворять граничным условиям:

$$v_0(0) = v(l) = 0, \quad v''_0(0) = v''_0(l) = 0$$

и условию сопряжения (см. пример 6 в § 21)

$$EI v''_0 \Big|_{a-0}^{a+0} = P.$$

В рассматриваемом случае решение уравнения (489) удобно представить в виде

$$v_0(x) = b_0 \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + d_0 \sin \frac{\mu x}{l} + \parallel_{x>a} D_3 U_3 \left(\mu \frac{x-a}{l} \right),$$

удовлетворяющем граничным условиям при $x=0$, где функция U_3 определяется последней формулой (393) при замене μ_n на μ и x на $x-a$ и при $x=a$ удовлетворяет условиям (392).

Используя эти условия и условия сопряжения нетрудно получить

$$D_3 = \frac{P}{EI} \left(\frac{l}{\mu} \right)^3.$$

Подчиняя выражение для $v_0(x)$ граничным условиям при $x=l$ можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} v_0(x) = \frac{1}{2} \frac{P}{EI} \left(\frac{l}{\mu} \right)^3 & \left[\frac{\operatorname{sh} \mu \frac{l-a}{l}}{\operatorname{sh} \mu} \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \mu \frac{l-a}{l}}{\sin \mu} \sin \frac{\mu x}{l} + \parallel_{x>a} \left(\operatorname{sh} \mu \frac{x-a}{l} - \sin \mu \frac{x-a}{l} \right) \right]. \quad (518) \end{aligned}$$

Для амплитуд углов поворота опорных сечений получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} v'_0(0) &= \frac{Pl^2}{6EI} \psi_0 \left(\frac{a}{l}, \mu \right), \\ v'_0(l) &= - \frac{Pl^2}{6EI} \psi_1 \left(\frac{a}{l}, \mu \right), \end{aligned} \right\} \quad (519)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_0\left(\frac{a}{l}, \mu\right) &= \frac{3}{\mu^2} \left[-\frac{\operatorname{sh} \mu \frac{l-a}{l}}{\operatorname{sh} \mu} + \frac{\sin \mu \frac{l-a}{l}}{\sin \mu} \right], \\ \psi_1\left(\frac{a}{l}, \mu\right) &= \frac{3}{\mu^2} \left[-\frac{\operatorname{sh} \mu \frac{a}{l}}{\operatorname{sh} \mu} + \frac{\sin \mu \frac{a}{l}}{\sin \mu} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (520)$$

Для учета сил сопротивления нужно заменить μ на $\bar{\mu}$, E на E_c и вести расчет указанным в предыдущем примере способом.

Пример 3. Найти углы поворота опорных сечений свободно опертой балки при действии на нее равномерно распределенной возмущающей нагрузки $q \cos(\omega t + \delta)$.

Общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения (489) при $q(x) = q$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} v_0(x) &= a_0 \operatorname{ch} \frac{\mu x}{l} + b_0 \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} + c_0 \cos \frac{\mu x}{l} + \\ &+ d_0 \sin \frac{\mu x}{l} - \left(\frac{l}{\mu}\right)^4 \frac{q}{EI}. \end{aligned} \quad (521)$$

Подчиняя выражение (521) условиям свободного опирания на жесткие опоры, найдем следующее выражение для формы вынужденных колебаний:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= -\frac{1}{2} \frac{q}{EI} \left(\frac{l}{\mu}\right)^4 \left(2 - \operatorname{ch} \frac{\mu x}{l} - \cos \frac{\mu x}{l} + \right. \\ &\left. + \operatorname{th} \frac{\mu}{2} \operatorname{sh} \frac{\mu x}{l} - \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \sin \frac{\mu x}{l}\right). \end{aligned} \quad (522)$$

Дифференцируя выражение (522), получим формулы для определения амплитуд углов поворота опорных сечений:

$$v'_0(0) = -v'_0(l) = \frac{ql^3}{24EI} \varphi_0(\mu), \quad (523)$$

где

$$\varphi_0(\mu) = \frac{12}{\mu^3} \left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} - \operatorname{th} \frac{\mu}{2} \right). \quad (524)$$

Для учета сил сопротивления поступаем указанным в примерах 1 и 2 способом.

Пример 4. Найти форму вынужденных колебаний свободно опертой балки, опоры которой перемещаются по закону

$$v_0(0, t) = v_0(l, t) = u \cos(\omega t + \delta).$$

В рассматриваемом случае решение уравнения (489) при $q=0$ нужно искать в виде

$$v_0(x) = v_1(x) + u, \quad (525)$$

что по подстановке в уравнение (489) при $q=0$ приводит к дифференциальному уравнению

$$EI v_1^{IV}(x) - m\omega^2 v_1(x) = m\omega^2 u. \quad (526)$$

Легко убедиться, что функция $v_1(x)$ должна удовлетворять условиям свободного опирания на жесткие опоры.

Полагая в предыдущем примере

$$q = m\omega^2 u = EI \left(\frac{\mu}{l} \right)^4 u, \quad (527)$$

мы получим решение поставленной задачи.

Амплитуды углов поворота определяются по формуле (523) при замене q согласно выражению (527).

§ 26. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК, ОПЕРТЫХ НА ЖЕСТКИЕ ОПОРЫ

При рассмотрении вопроса о колебаниях неразрезных балок мы ограничимся анализом двух задач: задачи об определении частот свободных колебаний и расчетом вынужденных колебаний в случае действия гармонической возмущающей нагрузки.

Составление уравнений частот. Самым простым способом составления уравнений частот для неразрезной балки, опертой на жесткие опоры, является использование уравнений неразрывности деформаций на опорах, т. е. использование методики составления уравнений трех моментов.

Разрезая балку на опорах и заменяя действие отсеченных частей гармоническими изгибающими моментами, получим для определения амплитуд этих моментов систему однородных уравнений, приравнивание определителя которой нулю и приведет к уравнению частот. При составлении уравнений частот не будем учитывать влияние сопротивления.

Пример 1. Составить уравнение частот для балки, жестко заделанной на опорах.

Загружая балку на левой опоре неизвестным изгибающим моментом $M_1 \cos \omega t$, а на правой опоре — изгибающим моментом $M_2 \cos \omega t$, приравняем нулю амплитуды углов поворота опорных сечений, что на основании формул (513) приведет к системе уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{M_1 l}{3EI} \varphi_2(\mu) - \frac{M_2 l}{6EI} \varphi_1(\mu) &= 0, \\ \frac{M_1 l}{6EI} \varphi_1(\mu) + \frac{M_2 l}{3EI} \varphi_2(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая определитель этой системы уравнений нулю, получим уравнение частот

$$4\varphi_2^2(\mu) - \varphi_1^2(\mu) = 0,$$

которое распадается на два:

$$\left. \begin{aligned} 2\varphi_2(\mu) + \varphi_1(\mu) &= 0, \\ 2\varphi_2(\mu) - \varphi_1(\mu) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (528)$$

Первое уравнение соответствует симметричным относительно середины формам колебаний, а второе — антисимметричным.

Уравнение частот может быть составлено и при помощи уравнения (432), если для жестко заделанной балки на основании выражений (427) положить $e_{j-1}^r = e_j^r = \infty$, что приводит к уравнению частот

$$D(\mu) = 0$$

или, на основании выражений (430), к уравнению

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu - 1 = 0. \quad (529)$$

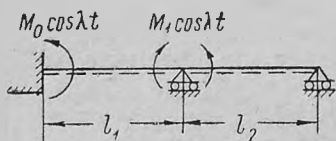


Рис. 28.

Рекомендуем читателю убедиться, что уравнение (529) эквивалентно двум уравнениям (528).

Пример 2*. Составить уравнение частот для неразрезной балки, изображенной на рис. 28.

Разрезая балку на опорах и заменяя действие отсеченных частей гармоническими изгибающими моментами, составим условия непрерывности углов поворота на опорах:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{M_0 l_1}{3EI_1} \varphi_2(\mu_1) - \frac{M_1 l_1}{6EI_1} \varphi_1(\mu_1), \\ \frac{M_0 l_1}{6EI_1} \varphi_1(\mu_1) + \frac{M_1 l_1}{3EI_1} \varphi_2(\mu_1) &= -\frac{M_1 l_2}{3EI_2} \varphi_2(\mu_2), \end{aligned}$$

где

$$\left(\frac{\mu_j}{l_j} \right)^4 = \frac{m_j \lambda^2 - k_{0j}}{EI_j}, \quad j=1; 2.$$

Приравнивая нулю определитель полученной системы уравнений, получим уравнение частот. Уравнение частот приходится решать подбором, задаваясь последовательно различными значениями частоты свободных колебаний.

Определение частоты свободных колебаний неразрезной балки может быть выполнено и при последовательном использовании уравнения (432).

* В данном примере предполагается наличие упругого основания на участках балки с коэффициентом жесткости k_{0j} .

Для этого заметим, что на крайних опорах величины e_0^r и e_n^l определяются граничными условиями, на промежуточных же опорах связь между e_j^r и e_j^l устанавливается из равенства изгибающих моментов и углов поворота опорных сечений сопрягаемых участков балки.

В соответствии с формулами (427)

$$\frac{e_j^l}{e_j^r} = \frac{l_j v_{j,n}'' \mu_{j+1} v_{j+1,n}'}{\mu_j v_{j,n}' \cdot l_{j+1} v_{j+1,n}''}, \quad (530)$$

где μ_j и μ_{j+1} определяются по формуле (428).

Используя условия сопряжения на j -ой опоре:

$$v_{j,n}' = v_{j+1,n}', \quad EI_j v_{j,n}'' = EI_{j+1} v_{j+1,n}''$$

преобразуем отношение (530)

$$\frac{e_j^l}{e_j^r} = \frac{l_j}{l_{j+1}} \frac{I_j}{I_{j+1}} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j}. \quad (531)$$

Если воспользоваться формулой (428), то выражение (531) может быть преобразовано к виду

$$e_j^r = \alpha_j e_j^l, \quad (532)$$

где

$$\alpha_j = \sqrt[4]{\frac{m_j \lambda^2 - k_{0j}}{m_{j+1} \lambda^2 - k_{0,j+1}}} \left(\frac{I_j}{I_{j+1}} \right)^3. \quad (533)$$

Заменяя в уравнении (432) величину e_{j-1}^r согласно выражению (532) и решая его относительно e_j^l , получим при $j \geq 2$

$$e_j^l = \frac{S(\mu_j) + \alpha_{j-1} e_{j-1}^l B(\mu_j)}{B(\mu_j) - \alpha_{j-1} e_{j-1}^l D(\mu_j)}, \quad (534)$$

тогда как при $j=1$

$$e_1^l = \frac{S(\mu_1) + e_0^r B(\mu_1)}{B(\mu_1) - e_0^r D(\mu_1)}, \quad (535)$$

где μ_j определяется по формуле (428).

Определение частот при помощи формул (534) и (535) производим следующим образом:

1) задаемся частным значением частоты λ , находим по формуле (428) все значения μ_j , а по формуле (533)—все значения α_j ; если упругого основания нет, то значения α_j не зависят от частоты и определяются в начале расчета;

2) определяем по таблицам численные значения функций $S(\mu_j)$, $B(\mu_j)$ и $D(\mu_j)$, соответствующие принятому значению частоты λ ;

3) зная из граничных условий на левом конце величину e_0^r по формуле (535) и последовательно применяя формулу (534), определяем расчетом величину e_n^l расч., причем частота свободных колебаний соответствует равенству $e_n^l = e_n^l$ расч.

Если для двух близких значений λ' и λ'' разность $e_n^l - e_n^l$ расч. изменяет знак, то в указанных пределах находится искомое значение частоты свободных колебаний.

Расчет вынужденных колебаний. Расчет вынужденных колебаний неразрезных стержней, опертых на жесткие опоры, при действии гармонической возмущающей нагрузки, не представляет затруднений и мало чем отличается от расчета этих балок на изгиб. Некоторое осложнение вносит лишь учет сил сопротивления.

Общий метод решения заключается в том, что стержень мысленно разрезается на опорах, действие отсеченных частей заменяется неизвестными гармоническими моментами, амплитуды которых определяются из условий равенства углов поворота.

Расчет неразрезных балок при действии произвольной возмущающей нагрузки требует знания форм главных свободных колебаний и, практически, точно не может быть выполнен.

Здесь мы сталкиваемся, во-первых, с большими вычислительными трудностями при определении форм главных свободных колебаний и, во-вторых, получаемые при решении ряды обычно сходятся достаточно медленно. Поэтому подобные задачи приходится в большинстве случаев решать приближенно.

Покажем методику расчета вынужденных колебаний неразрезных балок при действии гармонической нагрузки на примерах.

Пример 3. Составить уравнения для расчета вынужденных колебаний двухпролетной балки, изображенной на рис. 28, считая, что в первом пролете на расстоянии a от левой опоры приложена сосредоточенная сила $P \cos(\omega t + \delta)$.

Условия равенства углов поворота на опорах будут отличаться от соответствующих уравнений примера 2 лишь наличием дополнительного члена во втором уравнении и запишутся в виде:

$$0 = -\frac{M_0 l_1}{3EI_1} \varphi_2(\mu_1) - \frac{M_1 l_1}{6EI_1} \varphi_1(\mu_1),$$

$$\frac{M l_0}{6EI_1} \varphi_1(\mu_1) + \frac{M_1 l_1}{3EI_1} \varphi_2(\mu_1) = -\frac{M_1 l_2}{3EI_2} \varphi_2(\mu_2) + \frac{P l_2^2}{6EI_2} \psi_0\left(\frac{a}{l}, \mu_2\right),$$

где $\psi_0\left(\frac{a}{l}, \mu_2\right)$ определяется первой формулой (520).

Полученная система уравнений может быть решена, если частота возмущающей силы не совпадает с частотой свободных колебаний. В противном случае определитель системы равен нулю и система не имеет конечных решений.

Для расчета вынужденных колебаний с учетом сопротивления нужно заменить в полученной системе уравнений E через E_c согласно формуле (484), μ_j через $\bar{\mu}_j$ согласно формуле (509) при $m=m_j$, $k_0=k_{0j}$ и $I=I_j$, вычислить, пользуясь указаниями примера 1 § 25, комплексные значения вспомогательных функций и написать полученную систему уравнений с комплексными коэффициентами.

В рассматриваемом случае амплитуды изгибающих моментов также будут комплексными, так что, полагая

$$M_j = M'_j + iM''_j,$$

можно отделить в уравнениях вещественные части от мнимых и получить достаточное число уравнений для определения всех неизвестных величин.

Опорные изгибающие моменты будут

$$M_j(t) = \operatorname{Re} (M'_j + iM''_j) e^{i(\omega t + \delta)} = M'_j \cos(\omega t + \delta) - M''_j \sin(\omega t + \delta).$$

При определении стрелок прогиба следует воспользоваться общей формулой (490), в которой функции $\bar{v}_0(x)$ должны быть найдены для каждого пролета, для чего нужно использовать решение примера в § 25.

При определении стрелок прогиба от опорных моментов необходимо в выражениях (498) и (499) считать комплексными величинами не только μ и E , но и амплитуды изгибающего момента M_{j-1} и M_j .

Так, например, стрелка прогиба под силой во втором пролете рассматриваемой балки должна, в соответствии с выражениями (499) и (518) при $x=a$, определяться по формуле

$$\begin{aligned} v_2(a, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \frac{M'_2 + iM''_2}{EI_2(1 + \gamma_c i)} \left(\frac{l_2}{\bar{\mu}_2} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sh} \bar{\mu} \left(1 - \frac{a}{l_2} \right)}{\operatorname{sh} \bar{\mu}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin \bar{\mu} \left(1 - \frac{a}{l_2} \right)}{\sin \bar{\mu}} \right) + \frac{1}{2} \frac{P}{EI_2(1 + \gamma_c i)} \left(\frac{l_2}{\bar{\mu}} \right)^3 \left(- \frac{\operatorname{sh} \bar{\mu} \left(1 - \frac{a}{l_2} \right)}{\operatorname{sh} \bar{\mu}} \operatorname{sh} \bar{\mu} \frac{a}{l_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin \bar{\mu} \left(1 - \frac{a}{l_2} \right)}{\sin \bar{\mu}} \sin \bar{\mu} \frac{a}{l_2} \right) \right] e^{i(\omega t + \delta)}. \end{aligned}$$

Приведенный пример показывает, что расчет вынужденных колебаний с учетом сопротивления оказывается громоздкой задачей даже для простейшей неразрезной балки.

Пример 4. Рассмотрим колебание неразрезной балки постоянного по всей длине сечения, опертой на равноотстоящие жесткие опоры и загруженной на левой опоре гармоническим изгибающим моментом $M_0 \cos \omega t$; на правой опоре изгибающий момент примем равным нулю.

Приравнивая амплитуды углов поворота на j -ой опоре, получим:

$$\frac{M_{j-1}l}{6EI} \varphi_1(\mu) + \frac{M_j l}{3EI} \varphi_2(\mu) = -\frac{M_j l}{3EI} \varphi_2(\mu) - \frac{M_{j+1}l}{6EI} \varphi_1(\mu)$$

или

$$(M_{j-1} + M_{j+1}) \varphi_1(\mu) + 4M_j \varphi_2(\mu) = 0, \quad j=1; 2 \dots n. \quad (536)$$

Решение системы уравнений (536), являющейся уравнением в конечных разностях, может быть найдено в виде

$$M_r = A z^r, \quad (537)$$

где A и z — неизвестные величины.

Подставляя выражение (537) в уравнение (536) и сокращая на неравный нулю множитель $A z^{j-1}$, получим для определения величины z квадратное уравнение

$$\varphi_1(\mu) z^2 + 4\varphi_2(\mu) z + \varphi_1(\mu) = 0,$$

имеющее корни:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}, \\ z_2 &= \sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (538)$$

где [(см. формулы (501)]

$$\sigma = -2 \frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)} = \frac{\operatorname{sh} \mu \cos \mu - \sin \mu \operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} \mu - \sin \mu}, \quad (539)$$

причем произведение корней $z_1 z_2 = 1$.

Если $\sigma^2 > 1$, то формулы (538) определяют два различных вещественных корня и общее решение системы (536) должно быть записано в виде

$$M_r = A_1 z_1^r + A_2 z_2^r, \quad (540)$$

где коэффициенты A_1 и A_2 должны быть определены из граничных условий при $r=0$ и $r=n$, т. е. из уравнений:

$$\begin{aligned} M_0 &= A_1 + A_2, \\ 0 &= A_1 z_1^n + A_2 z_2^n, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$A_1 = M_0 \frac{z_2^n}{z_2^n - z_1^n}, \quad A_2 = -M_0 \frac{z_1^n}{z_2^n - z_1^n},$$

так что

$$M_r = \frac{M_0}{z_2^n - z_1^n} (z_2^n z_1^r - z_1^n z_2^r). \quad (541)$$

Один из корней z больше единицы, а другой меньше, поэтому для бесконечно длинной балки выражение (541) преобразуется к виду

$$M_r = M_0 z_k^r, \quad (542)$$

где z_k есть меньший по модулю корень (538).

Если $\sigma^2 < 1$, то выражения (538) определяют пару комплексных сопряженных корней и, полагая

$$\sigma = \cos \vartheta, \quad (543)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \cos \vartheta + i \sin \vartheta, \\ z_2 &= \cos \vartheta - i \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (544)$$

так что выражение (540) может быть переписано в виде

$$M_r = A_1 (\cos r\vartheta + i \sin r\vartheta) + A_2 (\cos r\vartheta - i \sin r\vartheta)$$

или, вводя обозначения:

$$A_1 + A_2 = A, \quad (A_1 - A_2) i = B,$$

в виде

$$M_r = A \cos r\vartheta + B \sin r\vartheta. \quad (545)$$

Подчиняя выражение (545) граничным условиям, получим:

$$M_0 = A, \quad 0 = A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta \quad (546)$$

и выражение (545) может быть преобразовано

$$M_r = M_0 \frac{\sin(n-r)\vartheta}{\sin n\vartheta}. \quad (547)$$

При $\sigma^2 > 1$, как это видно из формулы (542), влияние гармонического изгибающего момента в бесконечно длинной балке затухает по мере удаления от левого конца балки, а при $\sigma^2 < 1$ такого заключения, как это видно из формулы (547), сделать нельзя.

Приравнявая нулю определитель системы (546), получим уравнения частот для n пролетной балки, опирающейся на равноотстоящие опоры

$$\sin n\vartheta = 0,$$

откуда

$$n\vartheta = k\pi,$$

где k —целое число. Соответствующие частоты могут быть на основании соотношения (543) найдены из уравнения

$$\sigma = \cos \frac{k\pi}{n},$$

где σ —вычисляется по формуле (539).

Определяемые таким образом частоты соответствуют неравным нулю значениям изгибающих моментов на промежуточных опорах балки. Кроме этих частот существуют еще частоты колебаний свободно опертого пролета балки, которые соответствуют нулевым изгибающим моментам и не могут быть получены методом трех моментов, предполагающим неравенство изгибающих моментов нулю.

Не останавливаясь на более подробном рассмотрении колебаний неразрезной балки без сопротивления, так как это представляет лишь академический интерес, рассмотрим установившиеся колебания при наличии сопротивления.

Подставляя в формулу (539) вместо μ комплексную величину μ , определенную по формуле (507), и используя формулы (515), можно отделить вещественную часть от мнимой и найти комплексное значение величины

$$\sigma = \sigma' + i\sigma''. \quad (548)$$

Комплексные корни z_1 и z_2 могут быть найдены следующим образом.

Из условия $z_1 z_2 = 1$ вытекает, что комплексные числа z_1 и z_2 можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1 (\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \\ z_2 &= \rho_2 (\cos \vartheta - i \sin \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (549)$$

причем

$$\rho_1 \rho_2 = 1. \quad (550)$$

Поэтому значение σ нужно подставить в одну из формул (538) и после приведения к тригонометрической форме определить величину ϑ и одно из значений ρ . Второе значение ρ будет найдено из уравнения (550).

В рассматриваемом случае общее выражение для комплексной амплитуды изгибающего момента запишется в соответствии с формулой (540) в виде

$$M_r = A_1 \rho_1^r (\cos r\vartheta + i \sin r\vartheta) + A_2 \rho_2^r (\cos r\vartheta - i \sin r\vartheta); \quad (551)$$

подчиняя же его граничным условиям при $r=0$ и $r=n$, получим систему уравнений:

$$M_0 = A_1 + A_2,$$

$$0 = A_1 \rho_1^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) + A_2 \rho_2^n (\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta),$$

решая которую нетрудно найти:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_0}{1 - \rho_1^{2n} (\cos 2n\vartheta + i \sin 2n\vartheta)}, \\ A_2 &= \frac{M_0}{1 - \rho_2^{2n} (\cos 2n\vartheta + i \sin 2n\vartheta)}. \end{aligned} \right\} \quad (552)$$

Подставляя полученные значения A_1 и A_2 в общее выражение (551), найдем комплексное выражение для M_r , после чего изгибающий момент на r -й опоре определится по формуле

$$M_r(t) = \operatorname{Re} M_r e^{i\omega t}. \quad (553)$$

Рассмотрим более подробно бесконечную балку и примем, что $\rho_1 < 1$ и $\rho_2 > 1$. Тогда, как это видно из формул (552) при $n \rightarrow \infty$, $A_1 = M_0$, $A_2 = 0$, а выражение (551) преобразуется к виду

$$M_r = M_0 \rho_1^r (\cos r\vartheta + i \sin r\vartheta),$$

и на основании формулы (553)

$$M_r(t) = M_0 \rho_1^r (\cos r\vartheta \cos \omega t - \sin r\vartheta \sin \omega t). \quad (554)$$

Из выражения (554) видно, что в реальной балке при учете сил сопротивления изгибающие моменты в опорных сечениях затухают по мере удаления от загруженного конца.

Случай $\rho_1 = \rho_2 = 1$ не может иметь места, поскольку при учете сопротивления, т. е. комплексном σ корни z_1 и z_2 не могут быть сопряженными, как то видно из (538).

§ 27. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ РАМ С НЕПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ

Расчет колебаний простейших рам с неподвижными узлами¹ производится аналогично расчету колебаний неразрезных балок на жестких опорах; ниже мы рассмотрим пример такого расчета.

Для расчета колебаний сложных рам с неподвижными узлами полезно воспользоваться методом угловых деформаций. Метод этот заключается в том, что опорные изгибающие моменты выражаются через углы поворота опорных сечений и составляются «уравнения равновесия» узлов рамы.

¹ Напомним, что рама называется простейшей, если в узле сходится не более двух стержней.

Принимая за положительные направления амплитуд моментов направления против часовой стрелки, как это показано на рис. 29, и считая, что на балку действует гармоническая возмущающая нагрузка, можем на основании формул (500) написать:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p &= -\frac{M_{pr} l_{pr}}{3EI_{pr}} \varphi_2(\mu_{pr}) + \frac{M_{rp} l_{pr}}{6EI_{pr}} \varphi_1(\mu_{pr}) + \beta_{pr}, \\ \alpha_r &= \frac{M_{pr} l_{pr}}{6EI_{pr}} \varphi_1(\mu_{pr}) - \frac{M_{rp} l_{pr}}{3EI_{pr}} \varphi_2(\mu_{pr}) + \beta_{rp}, \end{aligned} \right\} \quad (555)$$

где вспомогательные функции $\varphi_1(\mu_{pr})$ и $\varphi_2(\mu_{pr})$ определяются по формулам (501), β_{pr} — амплитуда угла поворота на p -ой опоре от гармонической возмущающей нагрузки в пролете, β_{rp} — то же на r -ой опоре

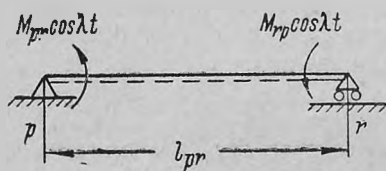


Рис. 29.

$$\left(\frac{\mu_{pr}}{l_{pr}} \right)^4 = \frac{m_{pr} \lambda^2 - k_{0,pr}}{EI_{pr}}, \quad (556)$$

λ — частота опорных моментов и возмущающей силы, $k_{0,pr}$ — коэффициент жесткости упругого основания.

Если определитель системы (555) не равен нулю, т.е. частота возмущающей нагрузки не совпадает с одной из частот свободных колебаний жестко заделанной балки, то, решая систему (555) относительно амплитуд опорных изгибающих моментов, получим:

$$\left. \begin{aligned} M_{pr} &= \overline{M_{pr}} - \frac{2EI_{pr}}{l_{pr}} [2\alpha_p \psi_2(\mu_{pr}) + \alpha_r \psi_1(\mu_{pr})], \\ M_{rp} &= \overline{M_{rp}} - \frac{2EI_{pr}}{l_{pr}} [2\alpha_r \psi_2(\mu_{pr}) + \alpha_p \psi_1(\mu_{pr})], \end{aligned} \right\} \quad (557)$$

где

$$\psi_2(\mu) = \frac{3\varphi_2(\mu)}{4\varphi_2^2(\mu) - \varphi_1^2(\mu)},$$

$$\psi_1(\mu) = \frac{3\varphi_1(\mu)}{4\varphi_2^2(\mu) - \varphi_1^2(\mu)},$$

или, если воспользоваться выражениями (501) и обозначениями (430), после несложных преобразований можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \psi_2(\mu) &= \frac{\mu}{8} \frac{B(\mu)}{A(0,5\mu) B(0,5\mu)}, \\ \psi_1(\mu) &= \frac{\mu}{4} \frac{\operatorname{sh} \mu - \sin \mu}{A(0,5\mu) B(0,5\mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (558)$$

Что касается величин $\overline{M_{pr}}$ и $\overline{M_{rc}}$, то они представляют собой, как это видно из формул (557) при $\alpha_p = \alpha_r = 0$, амплитуды опорных изгибающих моментов в жестко заделанной балке при действии на нее заданной пролетной гармонической возмущающей нагрузки.

Сделанная нами оговорка о неравенстве нулю определителя системы (555) весьма существенна, и метод угловых деформаций неприменим к составлению уравнений частот для жестко заделанной балки.

Для сокращения числа уравнений в некоторых задачах полезно найти зависимость между углом поворота опорного сечения и приложенным к нему моментом, если другой конец стержня свободно оперт.

Полагая, например, в первом уравнении (555) $M_{rp} = 0$, получим

$$M_{pr} = \overline{M'_{pr}} - \frac{3EI_{pr}}{l_{pr}} \frac{\alpha_p}{\varphi_2(\mu_{pr})}, \quad (559)$$

где $\overline{M'_{pr}}$ есть амплитуда опорного изгибающего момента в балке, на которую действует гармоническая возмущающая нагрузка, один конец жестко заделан, а другой свободно оперт.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Составить уравнение частот для симметричных колебаний рамы, изображенной на рис. 17.

Уравнение частот, как и для неразрезной балки на жестких опорах, может быть составлено двумя способами (см. § 26).

Замечая, что при симметричной форме колебаний узловые опорные моменты равны и обозначая через M амплитуду изгибающего момента в узле, составим на основании выражений (500) условие равенства углов поворота опорных сечений стойки и ригеля

$$\frac{Ml_1}{3EI_1} \varphi_1(\mu_1) = -\frac{Ml_2}{3EI_2} [\varphi_1(\mu_2) + 2\varphi_2(\mu_2)], \quad (560)$$

где μ_1 и μ_2 определяются по формуле (556) при замене двойного индекса pr соответственно на 1 и 2.

Так как при симметричной форме колебаний амплитуда узлового изгибающего момента M не равна нулю, то уравнение частот может быть записано в виде

$$\varphi_1(\mu_1) = -\frac{l_1}{l_2} \frac{l_2}{l_1} [\varphi_1(\mu_2) + 2\varphi_2(\mu_2)]. \quad (561)$$

Рекомендуем составить уравнение частот, используя общее уравнение (429), для чего следует учесть, что при симметричной

форме колебаний касательная в середине пролета ригеля горизонтальна, а перерезывающая сила в среднем сечении ригеля равна нулю.

Пример 2. Составить уравнения для расчета колебаний рамы, изображенной на рис. 30; возмущающая нагрузка на рисунке не показана.

Воспользовавшись выражениями (557) при $\alpha_1 = 0$ и (559), можем написать:

$$\left. \begin{aligned} M_{21} &= \boxed{M_{21}} - 4 \frac{EI_{12}}{l_{12}} \alpha_2 \psi_2(\mu_{12}), \\ M_{23} &= \boxed{M'_{23}} - 3 \frac{EI_{23}}{l_{23}} \frac{\alpha_2}{\varphi_2(\mu_{23})}, \\ M_{24} &= \boxed{M'_{24}} - 3 \frac{EI_{24}}{l_{24}} \frac{\alpha_2}{\varphi_2(\mu_{24})}. \end{aligned} \right\} \quad (562)$$

Составим условие уравновешенности узла 2

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \quad (563)$$

и определим амплитуду α_2 угла поворота узла, после чего нетрудно определить все интересующие нас элементы колебаний рамки.

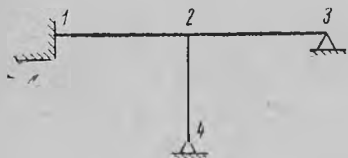


Рис. 30.

При учете сил сопротивления нужно ввести в расчет по формулам (484) и (485) комплексные модуль нормальной упругости и массу, после чего расчет выполняется в соответствии с изложенным в § 24 и 25.

Для получения уравнения частот полагаем в выражениях (562) $\boxed{M_{pr}} = 0$ и подставляем эти выражения в условие уравновешенности (563), что при условии $\alpha_2 \neq 0$ приводит к следующему уравнению частот:

$$4\varepsilon_{21}\psi_2(\mu_{21}) + \frac{3\varepsilon_{23}}{\varphi_2(\mu_{23})} + \frac{3\varepsilon_{24}}{\varphi_2(\mu_{24})} = 0, \quad (564)$$

где

$$\varepsilon_{rp} = \frac{I_{rp}}{I_0} \frac{l_0}{l_{rp}}, \quad (565)$$

I_0 и l_0 — некоторые средние значения момента инерции поперечного сечения и длины.

В рассматриваемом случае рама не обладает симметрией и поэтому, составляя уравнение частот (564) из условия $\alpha_2 \neq 0$ и решая его, мы найдем все частоты рамы.

Теперь предположим, что в узле i рама свободна оперта и имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} l_{12}=l_{23}=l, \quad I_{12}=I_{23}=I, \quad m_{12}=m_{21}=m, \\ l_{24}=l_1, \quad I_{24}=I_1, \quad m_{24}=m_1, \end{aligned} \right\} \quad (566)$$

тогда первое выражение (562) должно быть заменено следующим:

$$M_{21} = -3 \frac{EI_{12}}{l_{12}} \frac{\alpha_2}{\varphi_2(\mu_{12})}. \quad (567)$$

Принимая во внимание соотношения (566) и подставляя значения M_{rp} в уравнение уравновешенности узла (563), получим при $\alpha_2 \neq 0$ следующее уравнение частот:

$$\frac{I}{l} \frac{2}{\varphi_2(\mu)} + \frac{I_1}{l_1} \frac{1}{\varphi_2(\mu_2)} = 0, \quad (568)$$

При $l_1=l$, $I_1=I$ и $m_1=m$ уравнение частот (568) приводится к виду

$$\varphi_2(\mu) = 0$$

что совпадает с уравнением частот для свободно опертой балки, как это и должно быть по физическому смыслу.

Исследуем вопрос о том, возможна ли для симметричной рамы рассматриваемого типа форма колебаний при $\alpha_2=0$.

Для ответа на этот вопрос достаточно составить уравнение частот в предположении, что узловые моменты $M_{rp} \neq 0$, и посмотреть, нет ли среди получающихся решений тех, которые соответствуют условию $\alpha_2=0$.

Воспользуемся формулами (500) и, учитывая принятое в методе угловых деформаций правило знаков для амплитуды опорных моментов, напишем два условия равенства углов поворота опорных сечений в узле 2:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_{21}l}{3EI} \varphi_2(\mu) &= -\frac{M_{23}l}{3EI} \varphi_2(\mu), \\ -\frac{M_{21}l}{3EI} \varphi_2(\mu) &= -\frac{M_{24}l_1}{3EI_1} \varphi_2(\mu_1) \end{aligned} \right\} \quad (569)$$

Исключая из второго уравнения (569) величину M_{24} при помощи условия уравновешенности (563) и приравнивая определитель полученной системы с двумя неизвестными M_{21} и M_{12} нулю, получим уравнение частот

$$\varphi_2(\mu) [2\varepsilon \varphi_2(\mu_1) + \varphi_2(\mu)] = 0,$$

которое распадается на два:

$$\varphi_2(\mu) = 0, \quad (570)$$

$$2\varepsilon \varphi_2(\mu_1) + \varphi_2(\mu) = 0, \quad (571)$$

где

$$z = \frac{I}{I_1} \frac{l_1}{l}. \quad (572)$$

Как видно из второго уравнения (569), уравнению частот (570) соответствует такая форма колебаний, при которой $M_{24}=0$, а угол поворота второго узла $\alpha_2=0$, что следует из первого уравнения (569). В этом случае стержни 1—2 и 2—3 колеблются как жестко заделанные в узле 2, а стержень 2—4 оказывается неподвижным.

Что касается уравнения (571), то оно совпадает с уравнением (568), т. е. соответствует случаю $\alpha_2 \neq 0$, если только $\varphi_2(\rho) \neq 0$ и $\varphi_2(\rho_1) \neq 0$.

В рассматриваемом нами втором варианте решения задачи мы теряем решение для $l=l_1$ и $I=I_1$, когда все стержни рамы могут колебаться как свободно опертые. Это естественно, так как при принятом методе решения существенно предположение, что амплитуды узловых моментов не могут одновременно обращаться в нуль.

Следовательно, при рассмотрении колебаний симметричных систем нужно следить за тем, чтобы не потерять корней уравнения частот.

Применение метода угловых деформаций к расчету колебаний сложных рам с неподвижными узлами не представляет принципиальных затруднений, так как сводится к составлению уравнений уравновешенности узлов. Эти уравнения, в случае отсутствия в узлах сосредоточенных моментов и обладающих инерцией вращения масс, записываются для p -го узла в виде

$$\sum_r M_{pr} = 0. \quad (573)$$

В них подставляются выражения (557); в некоторых случаях, если в составе рамы имеются стержни, свободно опертые одним концом, целесообразно для сокращения числа неизвестных воспользоваться выражением (559).

Таким образом, получается система линейных уравнений относительно неизвестных углов поворота α_p . При рассмотрении вынужденных колебаний приходится решать систему линейных уравнений, причем для учета сил сопротивления нужно вводить в расчет комплексный модуль и комплексную массу, подобно тому, как это уже делалось в ряде примеров, рассмотренных выше.

При решении задачи об определении частот свободных колебаний необходимо приравнять нулю определитель системы однородных уравнений и подбором найти его корни.

В рассматриваемых задачах метод подбора является единственным и им следует пользоваться,

не развертывая определителя. Особый интерес представляет способ отделения корней, указанный в § 9, так как, полагая углы α_r последовательно равными нулю, мы накладываем на систему связи и, следовательно, можем использовать обобщенное правило (225) отделения корней.

Если k есть число неизвестных углов поворота узлов, то, накладывая на систему k связей, мы преобразуем ее в систему, состоящую из ряда жестко заделанных стержней, среди которых могут оказаться и стержни, свободно опертые одним концом, если при составлении уравнений использовалась зависимость (559).

Частоты этих стержней могут быть определены без затруднения. Пусть s есть число частот всех стержней, удовлетворяющих условию $\lambda_j \leq \lambda_0$.

Предполагаем, что все частоты λ_j различны, так как правило отделения корней § 9 было доказано лишь для случая, когда отсутствовали кратные корни. Случай кратных корней подлежит специальному анализу.

Если составить для рассматриваемой системы ряд (224), то тогда место λ_0 среди частот системы может быть определено по обобщенному правилу (225).

При подстановке в уравнение (573) выражений (557) или (559) при $\boxed{M_{pr}} = 0$, мы, как это было уже указано, приходим к системе однородных линейных уравнений для определения неизвестных амплитуд α_r углов поворота узлов.

Коэффициенты этой системы уравнений будут трансцендентными функциями частоты λ и при некоторых значениях частоты будут обращаться в бесконечность; в случае использования формул (557) это произойдет при совпадении λ с одной из частот свободных колебаний жестко заделанных стержней, получающихся из заданной системы при наложении на нее связей, а также с одной из частот стержня, жестко заделанного одним концом и свободно опертого другим, если применялась формула (559).

Для удобства численных расчетов целесообразно так преобразовать систему однородных уравнений, чтобы ее коэффициенты не обращались в бесконечность. Сделать это можно следующим образом.

Пусть, например, при преобразовании уравнения (573) мы использовали лишь выражения (557) при $\boxed{M_{pr}} = 0$. Тогда уравнение (573) преобразуется к виду

$$2\alpha_p \sum_r \frac{EI_{pr}}{l_{pr}} \psi_2(\mu_{pr}) + \sum_r \alpha_r \frac{EI_{pr}}{l_{pr}} \psi_1(\mu_{pr}) = 0. \quad (574)$$

Если воспользоваться выражениями (558) и ввести обозначения:

$$(AB)_{pr} = A(0,5\mu_{pr})B(0,5\mu_{pr}), \quad C_p = \prod_r (AB)_{pr}, \quad (575)$$

то уравнения (574) после умножения на C_p преобразуются к виду

$$\alpha_p \sum_r \frac{EI_{pr}}{l_{pr}} \mu_{pr} B(\mu_{pr}) \frac{C_p}{(AB)_{pr}} + \\ + \sum_r \alpha_r \frac{EI_{pr}}{l_{pr}} \mu_{pr} (\operatorname{sh} \mu_{pr} - \sin \mu_{pr}) \frac{C_p}{(AB)_{pr}} = 0, \quad p=1; 2 \dots k, \quad (576)$$

где k —число неизвестных углов поворота узлов.

Так как произведенное нами преобразование сводится к умножению определителя системы (574) на произведение $C_1 C_2 \dots C_k$, а уравнение

$$C_1 C_2 \dots C_k = 0$$

не содержит частот рассматриваемой системы, то корни определителя системы (576) совпадают с корнями определителя системы (574), а элементы определителя системы (576) не обращаются в бесконечность ни при одном значении λ *.

Приведение определителя системы (576) к треугольной форме и составление ряда (224) производится в полном соответствии с изложенным в § 9.

§ 28. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И РАМ С ПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ

Расчеты колебаний стержневых систем с подвижными узлами значительно сложнее рассмотренных в предыдущем параграфе.

Уравнения колебаний могут быть составлены различными способами и в ряде случаев оказываются удобными частные приемы. Но, как это должно быть ясно из предыдущего параграфа, особое внимание нужно уделять методу деформаций. Применение этого метода позволяет использовать указанный в § 9 способ отделения корней, который иногда значительно сокращает объем вычислений, необходимых для получения частот.

При использовании метода деформаций надо сначала решить вспомогательную задачу о вынужденных колебаниях однопролетной балки с заданными смещениями опор, заданными углами поворота опорных сечений и заданной поперечной нагрузкой, изменяющимися по гармоническому закону. Затем следует поступать так, как это делается в строительной механике при использовании метода угловых деформаций.

Не останавливаясь на анализе колебаний рам с подвижными узлами, потому что они практически не встречаются

* Такое преобразование предложено В. А. Постновым.

и судовых конструкциях, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением двух простейших примеров¹.

Пример 1. Составить уравнение частот для стержней ступенчато-переменного сечения.

Рассматриваемая задача может быть решена различными способами. Остановимся на одном из них, достаточно удобном при небольшом числе участков.

Начало координат в каждом участке примем на левом конце и представим форму колебаний в j -ом участке в виде (391)

$$v_j(x) = A_j U_0 \left(\frac{\mu_j x}{l_j} \right) + B_j U_1 \left(\frac{\mu_j x}{l_j} \right) + C_j U_2 \left(\frac{\mu_j x}{l_j} \right) + D_j U_3 \left(\frac{\mu_j x}{l_j} \right), \quad (577)$$

где [см. выражение (389)]

$$\left(\frac{\mu_j}{l_j} \right)^4 = \frac{m_j \lambda^2 - k_{0j}}{EI_j}, \quad (578)$$

т. е. индексом j характеризуется не номер частоты, а номер участка балки.

В месте сопряжения двух участков стержня должны быть соблюдены условия непрерывности упругой линии, изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$\left. \begin{aligned} v_j(l_j) &= v_{j+1}(0), \quad v'_j(l_j) = v'_{j+1}(0), \\ EI_j v''_j(l_j) &= EI_{j+1} v''_{j+1}(0), \quad EI_j v'''_j(l_j) = EI_{j+1} v'''_{j+1}(0). \end{aligned} \right\} \quad (579)$$

Мы предполагаем, что в рассматриваемых сечениях нет упругих опор, сосредоточенных масс и т. д.

Подставляя в условия сопряжения (579) выражение (577) и используя свойства (392) и (394) функций $U_p \left(\frac{\mu x}{l} \right)$, получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_{j+1} &= A_j U_0(\mu_j) + B_j U_1(\mu_j) + C_j U_2(\mu_j) + D_j U_3(\mu_j), \\ B_{j+1} &= \frac{l_{j+1}}{l_j} \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} [A_j U_3(\mu_j) + B_j U_0(\mu_j) + C_j U_1(\mu_j) + D_j U_2(\mu_j)], \\ C_{j+1} &= \left(\frac{l_{j+1}}{l_j} \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \right)^2 \frac{I_j}{I_{j+1}} [A_j U_2(\mu_j) + B_j U_3(\mu_j) + \\ &\quad + C_j U_0(\mu_j) + D_j U_2(\mu_j)], \\ D_{j+1} &= \left(\frac{l_{j+1}}{l_j} \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \right)^3 \frac{I_j}{I_{j+1}} [A_j U_1(\mu_j) + B_j U_2(\mu_j) + \\ &\quad + C_j U_3(\mu_j) + D_j U_1(\mu_j)]. \end{aligned} \right\} \quad (580)$$

¹ Вопросы составления уравнений колебаний сложных рам достаточно подробно изложены в работе [11], и мы рекомендуем читателю ознакомиться с этим сочинением.

Последовательно используя формулы (580), выразим коэффициенты A_j , B_j , C_j и D_j через два неравные нулю коэффициента для первого участка и затем, подчиняя выражение (577) при $j=n$ двум граничным условиям на правом конце стержня, составим уравнение частот.

Например, если балка без опор, то $C_1=D_1=0$ и неравными нулю будут лишь коэффициенты A_1 и B_1 .

Составление указанным выше способом уравнения частот в общем виде затруднительно в связи с громоздкостью выкладок, но приведенная последовательность вычислений может быть использована при определении частоты путем подбора. Для этого следует задаться рядом значений величины λ и подсчитать величину определителя системы уравнений, определяющей произвольные постоянные из граничных условий на правом конце балки. При изменении знака определителя мы переходим через значение корня, который и может быть найден путем последовательных попыток.

Расчеты особенно просты, если для всех участков $\mu_j=\mu$, т. е. не зависит от номера участка. Это условие будет выполнено, если при отсутствии упругого основания

$$\frac{m_j l_j^4}{EI_j} = \beta^4 = \text{const},$$

откуда следует

$$l_j = \beta \sqrt[4]{\frac{EI_j}{m_j}},$$

а так как

$$\sum_j l_j = \beta \sqrt[4]{E} \sum_j \sqrt[4]{\frac{I_j}{m_j}},$$

где I_j и m_j средние значения соответствующих величин на длине участков, то после нескольких попыток всегда можно найти нужное нам разделение балки на участки.

В этом случае

$$\frac{l_{j+1}}{l_j} \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} = \sqrt[4]{\frac{I_{j+1}}{I_j} \frac{m_j}{m_{j+1}}}$$

и для вычислений по формулам (580) необходимо знать лишь четыре величины $U_0(\mu)$, $U_1(\mu)$, $U_2(\mu)$ и $U_3(\mu)$.

Если бы нужно было произвести расчет вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей нагрузки, то в каждом участке балки в выражение (577) пришлось бы ввести дополнительный член, учитывающий поперечную нагрузку, в связи с чем изменились бы и соотношения (580). Остающиеся неизвестными две произвольные постоянные можно определить, удовлетворяя граничным условиям на правом конце.

При учете сил сопротивления величины μ будут комплексными, так что произвольные постоянные A_n , B_n , C_n и D_n выразятся через две произвольные постоянные в первом участке в виде линейных функций с комплексными коэффициентами.

Решая систему уравнений, вытекающую из граничных условий на правом конце, найдем оставшиеся две произвольных постоянных, которые также окажутся комплексными. После этого расчет заканчивается отделением вещественной части от мнимой, как было подробно рассмотрено в § 25 и 26.

Пример 2. Составить уравнение частот при антисимметричной форме колебаний для рамы, изображенной на рис. 17; уравнение частот для симметричной формы колебаний этой рамы было составлено в примере 1 предыдущего параграфа.

При антисимметричной форме колебаний ригель рамы в середине пролета будет иметь точку перегиба, в которой стрелка прогиба и изгибающий момент равны нулю.

Принимая для стойки рамы начало координат на нижнем конце, можем написать для формы колебания стойки выражение

$$v_1(x) = b_1 \operatorname{sh} \frac{\mu_1 x}{l_1} + d_1 \sin \frac{\mu_1 x}{l_1}, \quad (581)$$

удовлетворяющее граничным условиям на нижнем конце.

Если принять для ригеля начало координат на левом конце, то его форму колебаний можно задать в виде

$$v_2(x) = b_2 \operatorname{sh} \mu_2 \frac{l'_2 - x}{l'_2} + d_2 \sin \mu_2 \frac{l'_2 - x}{l'_2},$$

удовлетворяющем условиям свободного опирания в середине длины ригеля при $x = l'_2 = \frac{1}{2} l_2$.

Так как $v_2(0) = 0$ (стойка считается несжимаемой), то окончательно можно получить

$$v_2(x) = d_2 \left(\sin \mu_2 \frac{l'_2 - x}{l'_2} - \frac{\sin \mu_2}{\operatorname{sh} \mu_2} \operatorname{sh} \mu_2 \frac{l'_2 - x}{l'_2} \right). \quad (582)$$

При смещении верхнего узла в горизонтальном направлении ригель перемещается подобно твердому телу с массой

$$M = m_2 l_2 = 2m_2 l'_2,$$

причем на каждую стойку приходится половина массы.

Поэтому одно из граничных условий на верхнем конце стойки должно быть записано в виде: при $x = l_1$

$$EI_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} = m_2 l'_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2},$$

откуда следует граничное условие для формы колебаний

$$EI_1 v_1'''(l_1) = -m_2 l_2' \lambda^2 v_1(l_1),$$

или на основании формулы (578) при $j=1$ и $k_0=0$

$$v_1'''(l_1) = -\alpha \mu_1 \left(\frac{\mu_1}{l_1} \right)^3 v_1(l_1), \quad (583)$$

где

$$\alpha = \frac{m_2 l_2'}{m_1 l_1}. \quad (584)$$

Подчиняя выражение (581) условию (583), получим следующее выражение для формы колебаний стойки:

$$v_1(x) = d_1 \left(\sin \frac{\mu_1 x}{l_1} + \frac{\cos \mu_1 - \alpha \mu_1 \sin \mu_1}{\operatorname{ch} \mu_1 + \alpha \mu_1 \operatorname{sh} \mu_1} \operatorname{sh} \frac{\mu_1 x}{l_1} \right). \quad (585)$$

В узле рамы углы поворота опорных сечений стойки и ригеля, а также узловые изгибающие моменты должны быть равны, т. е.

$$v_1'(l_1) = v_2'(0), \quad EI_1 v_1''(l_1) = EI_2 v_2''(0),$$

поэтому, используя выражения (582) и (583), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & d_1 \mu_1 \left(\cos \mu_1 + \frac{\cos \mu_1 - \alpha \mu_1 \sin \mu_1}{\operatorname{ch} \mu_1 - \alpha \mu_1 \operatorname{sh} \mu_1} \operatorname{ch} \mu_1 \right) + \\ & + d_2 \mu_2 \left(\cos \mu_2 - \frac{\sin \mu_2}{\operatorname{sh} \mu_2} \operatorname{ch} \mu_2 \right) \frac{l_1}{l_2} = 0, \\ & d_1 \mu_1^2 \left(-\sin \mu_1 + \frac{\cos \mu_1 - \alpha \mu_1 \sin \mu_1}{\operatorname{ch} \mu_1 + \alpha \mu_1 \operatorname{sh} \mu_1} \operatorname{sh} \mu_1 \right) + \\ & + d_2 \mu_2^2 \frac{l_2}{l_1} \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 2 \sin \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель полученной системы уравнений нулю найдем уравнение частот.

Мы не останавливаемся на преобразовании этого уравнения к более простому виду, так как задачей данного примера было показать способ составления уравнения частот.

§ 29. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ПЕРЕКРЫТИЙ

Если плоское перекрытие состоит из системы пересекающихся стержней, соединенных шаровыми шарнирами, способными передавать лишь сосредоточенные реакции, то для составления уравнения частот можно поступить следующим образом.

Заменим действия одного стержня на другой неизвестными гармоническими силами и найдем стрелки прогиба под силами. Приравнявая стрелки прогиба стержней в местах их пересечения, получим систему однородных уравнений для определения амплитуд узловых реакций. Равенство нулю определителя системы уравнений дает нам искомое уравнение частот.

Указанный способ составления уравнения частот является вполне общим, но приводит даже при небольшом количестве стержней к очень громоздким вычислениям. Поэтому мы рассмотрим в дальнейшем некоторые приемы, применимые к частным видам перекрытий.

Расчет вынужденных колебаний перекрытий при действии произвольной нагрузки можно выполнить лишь приближенно, воспользовавшись способами, указанными во второй главе, так как точное решение при помощи метода главных координат практически невыполнимо в связи с трудностями определения форм главных свободных колебаний.

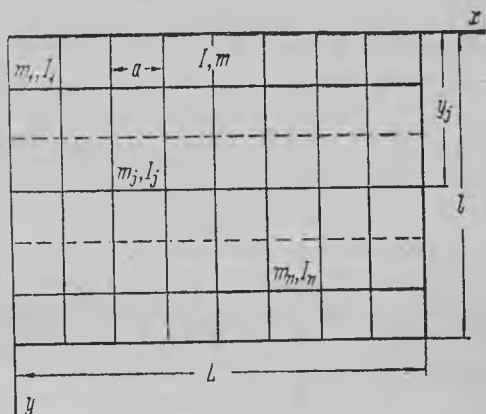


Рис. 31.

Расчет вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей нагрузки может быть всегда сведен к статическому расчету и выполнен одним из методов, применяемых в строительной механике корабля. Для этого перекрытие следует загрузить амплитудой возмущающей нагрузки и считать, что каждая из балок перекрытия лежит на отрицательном упругом основании с коэффициентом жесткости $k_0 = -m\omega^2$, где m — погонная масса рассматриваемой балки, ω — частота возмущающей силы (см. § 24). При учете сопротивления в расчет вводятся комплексные модули нормальной упругости и массы.

Рассмотрим два простейших примера¹.

Пример 1. Составить уравнение частот для перекрытия, подкрепленного большим числом одинаковых равноотстоящих ба-

¹ Более сложные задачи колебаний перекрытий рассмотрены в статьях: А. А. Курдюмов, Колебание плоских перекрытий, свободно опертых по двум кромкам, Труды ЛКИ, вып. XIII, Судпромгиз, 1954.

А. А. Курдюмов, Ходовая вибрация плоских перекрытий, Труды ЛКИ, вып. XXII, Судпромгиз, 1958.

В. А. Постнов, К вопросу об определении частот свободно опертого перекрытия с учетом сдвига, Труды ЛКИ, вып. XXII, Судпромгиз, 1958.

лок главного направления и несколькими перекрестными связями (рис. 31); перекрестные связи считаются одинаково заделанными.

Поскольку балок главного направления много, то мы заменим действие сосредоточенных реакций на перекрестную связь некоторой распределенной нагрузкой, которая определится как возмущающая нагрузка при колебании перекрестной связи

$$\left(EI_j \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_j \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{y=y_j} = r_j. \quad (586)$$

К балке главного направления j -я перекрестная связь прикладывает усилие $R_j = -ar_j$, вызывающее скачок в перерезывающей силе

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \bigg|_{y_j-0}^{y_j+0} = -a \left(EI_j \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_j \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{y=y_j}. \quad (587)$$

Поскольку возмущающей нагрузкой для балки главного направления являются лишь сосредоточенные силы, то дифференциальное уравнение ее колебания должно быть записано в виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (588)$$

Будем искать решение интересующей нас задачи в виде

$$w(x, y) = \sum_n \sum_p X_n(x) Y_{np}(y) A_{np} \cos(\lambda_{np} t + \varepsilon_{np}), \quad (589)$$

где функции $X_n(x)$ — формы свободных колебаний изолированных перекрестных балок, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$X_n^{IV}(x) = \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 X_n(x). \quad (590)$$

Одинаковая заделка перекрестных связей предполагает для всех перекрестных связей одинаковые величины γ_n .

Подставляя выражение (589) в дифференциальное уравнение (588), получим

$$\sum_n \sum_p \left[EI Y_{np}^{IV}(y) - m \lambda_{np}^2 Y_{np}(y) \right] X_n(x) A_{np} \cos(\lambda_{np} t + \varepsilon_{np}) = 0,$$

что может иметь место при любых значениях x и t лишь в том случае, когда функции $Y_{np}(y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$EI Y_{np}^{IV}(y) - m \lambda_{np}^2 Y_{np}(y) = 0. \quad (591)$$

Подставляя выражение (589) в формулу (587) и принимая во внимание уравнение (590), нетрудно получить условия, которым должны удовлетворять функции $Y_{np}(y)$,

$$EIY_{np}'''(y) \Big|_{y_j-0}^{y_j+0} = -a \left[EI_j \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 - m_j \lambda_{np}^2 \right] Y_{np}(y_j). \quad (592)$$

Дифференциальное уравнение (591) определяет формы свободных колебаний изолированных балок главного направления. Условие (592) показывает, что влияние перекрестной связи может быть учтено, если в месте пересечения балки главного направления с j -ой перекрестной связью поместить сосредоточенную массу

$$M_j = am_j \quad (593)$$

и упругую опору с коэффициентом жесткости

$$K_{jn} = aEI_j \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4. \quad (594)$$

Таким образом, задача об определении частот свободных колебаний перекрытия рассматриваемого типа сведена к решению задачи об определении частот свободных колебаний балки главного направления, несущей в местах ее пересечения с перекрестными связями сосредоточенные массы (593) и подпертой в этих же сечениях упругими опорами с коэффициентом жесткости (594).

Решение подобных задач точными методами оказывается достаточно громоздким и в большинстве случаев приходится прибегать к приближенному решению, что обычно достаточно для определения низших частот колебаний перекрытий. Точные решения могут быть получены лишь в простейших случаях:

1. Балки главного направления симметрично заделаны и подкреплены посередине одной перекрестной связью.

В этом случае надо воспользоваться уравнением частот (439), которое, полагая в выражении (437) $k_0 = 0$, $K = aEI_0 \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4$, $\alpha = \frac{am_0}{2ml_1}$ и замечая, что

$$\left(\frac{\mu}{l_1} \right)^4 = \frac{m\lambda_{np}^2}{EI},$$

легко приводится к виду

$$\frac{am_0}{2l_1m} - \frac{1}{2} \frac{a}{l_1} \frac{I_0}{I} \left(\frac{l_1}{L} \right)^4 \left(\frac{\gamma_n}{\mu} \right)^4 = \frac{1}{\mu} \frac{(1-x)\mu C(\mu) + xA(\mu)}{(1-x)\mu B(\mu) - xD(\mu)}, \quad (595)$$

где m_0 —погонная масса перекрестной связи, I_0 —момент инерции площади ее поперечного сечения, l_1 —половина длины балки главного направления.

2. Все перекрестные связи одинаковы и находятся на равных и малых расстояниях b одна от другой.

В этом случае нужно считать, что балка главного направления несет дополнительную погонную массу $\frac{a}{b} m_0$ и опирается на непрерывное упругое основание жесткостью

$$k_n = \frac{a}{b} EI_0 \left(\frac{\lambda_n}{L} \right)^4.$$

Заменяя в формуле (389) λ_n на λ_{np} , μ_n на μ_p , k_0 через k_n , а m через $m + \frac{a}{b} m_0$, получим

$$\lambda_{np}^4 = \frac{aEI_0 \left(\frac{\lambda_n}{L} \right)^4 + bEI \left(\frac{\mu_p}{l} \right)^4}{am_0 + bm}, \quad (596)$$

где l —длина балки главного направления, μ_p —определяется из расчета свободных колебаний изолированной балки главного направления.

Пример 2. Произвести расчет ходовой вибрации рассмотренного выше перекрытия, считая что опорный контур перекрытия перемещается по закону

$$\Delta(x, t) = \left[\delta_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_1 \frac{x}{L} \right] \cos \omega t, \quad (597)$$

где δ_0 —амплитуда колебаний при общей вибрации корабля переборки при $x=0$, δ_1 —то же при $x=L$.

Так как поперечная возмущающая нагрузка на перекрытие отсутствует, то, повторяя рассуждения предыдущего примера, приходим к выводу, что колебание перекрытия описывается дифференциальным уравнением (588) и условиями (587), причем на контуре $w = \Delta(x, t)$ и, кроме того, должны соблюдаться граничные условия относительно заделки опорных сечений.

Положим

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) + \Delta(x, t), \quad (598)$$

где w_0 обращается на контуре в нуль, и подставим это выражение в уравнения (588) и (587). Принимая во внимание выражение (597), получим

$$EI \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = m \omega^2 \left[\delta_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_1 \frac{x}{L} \right] \cos \omega t, \quad (599)$$

$$EI \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \bigg|_{y_j-0}^{y_j+0} = -a \left\{ EI_j \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + m_j \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - m_j \omega^2 \left[\delta_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_1 \frac{x}{L} \right] \right\} \cos \omega t. \quad (600)$$

Положим

$$\delta_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_1 \frac{x}{L} = \sum_n \gamma_n X_n(x), \quad (601)$$

где $X_n(x)$ — формы главных свободных колебаний изолированных перекрестных связей, удовлетворяющие условиям ортогональности (398) при $v_n(x) = X_n(x)$. Поэтому коэффициенты γ_n могут быть определены из уравнения

$$\int_0^l \left[\delta_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_1 \frac{x}{L} \right] X_n(x) dx = \gamma_n \int_0^l X_n^2(x) dx. \quad (602)$$

Будем искать решение уравнений (599) и (600) в виде

$$w_0(x, y, t) = \cos \omega t \sum_n X_n(x) Y_n(y), \quad (603)$$

что после подстановки в эти уравнения, принимая во внимание выражения (590) и (601), приводит к следующим уравнениям:

$$EI Y_n^{IV}(y) - m \omega^2 Y_n(y) = m \omega^2 \gamma_n, \quad (604)$$

$$EI Y_n'''(y) \bigg|_{y_j-0}^{y_j+0} = -a \left[EI_j \left(\frac{y_n}{L} \right)^4 - m_j \omega^2 \right] Y_n(y_j) + a m_j \gamma_n \omega^2. \quad (605)$$

Как видно из уравнений (604) и (605), функция $Y_n(y)$ оказывается формой вынужденных колебаний балки главного направления, находящейся под действием гармонической возмущающей нагрузки интенсивностью

$$q_n = m \omega^2 \gamma_n \cos \omega t, \quad (606)$$

нагруженной в местах пересечения с перекрестными связями сосредоточенными массами (593), сосредоточенными силами

$$P_{jn} = a m_j \gamma_n \omega^2 \cos \omega t \quad (607)$$

и подпертой упругими опорами с коэффициентом жесткости (594); балки главного направления считаются опертыми на жесткие опоры и любым образом заделанными в отношении углов поворота.

При учете внутренних сопротивлений нужно E заменить на E_c согласно выражению (484), так что функция $Y_n(y)$ окажется

комплексной и абсолютное перемещение точек перекрытия определится по формуле

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \left[\delta_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_1 \frac{x}{L} \right] \cos \omega t + \\ & + \sum_n X_n(x) \operatorname{Re} \bar{Y}_n(y) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (608)$$

Учет внутреннего сопротивления следует производить лишь при определении тех функций $Y_n(y)$, для которых соответствующие частоты λ_{np} близки к ω . Расчет ходовой вибрации перекрытия рассмотренного типа не представляет принципиальных затруднений, но оказывается громоздким.

В случае большого числа одинаковых перекрестных связей, для которых $m_j = m_0$, $I_j = I_0$, находящихся на одинаковых расстояниях b одна от другой, сосредоточенные массы заменяются распределенной массой, упругие опоры—упругим основанием, сосредоточенные силы—распределенной нагрузкой и уравнение (604) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} E I Y_n^{IV}(y) - \left[\left(m + \frac{a}{b} m_0 \right) \omega^2 - \frac{a}{b} E I_0 \left(\frac{y_n}{L} \right)^4 \right] Y_n(y) = \\ = \left(m + \frac{a}{b} m_0 \right) \gamma_n \omega^2. \end{aligned} \quad (609)$$

Интегрирование уравнения (609) и отделение вещественной части от мнимой при замене E на E_c не представляет затруднений, так как решение уравнения (609) дается выражением (522) при

$$q = \left(m + \frac{a}{b} m_0 \right) \gamma_n \omega^2$$

и замене в выражении (496) величины $m\omega^2$ на величину

$$\left(m + \frac{a}{b} m_0 \right) \omega^2 - \frac{a}{b} E I_0 \left(\frac{y_n}{L} \right)^4$$

с последующей заменой E на E_c .

Для практического расчета ходовой вибрации перекрытия рассмотренного простейшего типа требуется разработка некоторых частных решений, после чего расчет сведется к выполнению элементарных операций.

§ 30. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ СДВИГА, ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ВНУТРЕННИХ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Влияние инерции вращения поперечных сечений и сдвига на высшие частоты колебаний было уже отмечено в § 13 при решении энергетическим методом задачи о колебании свободно опертого стержня. В настоящем параграфе мы выведем дифференци-

альное уравнение колебаний и исследуем этот вопрос более детально.

Пусть $v^{(1)}$ —стрелка прогиба от изгиба, $v^{(2)}$ —от сдвига, $v = v^{(1)} + v^{(2)}$ —суммарная стрелка прогиба, I —главный момент инерции площади поперечного сечения, f —приведенная площадь стенки балки, m —погонная масса, ρ —радиус инерции масс в поперечном сечении балки.

Интенсивность сил инерции при поперечном колебании стержня равна $m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, а интенсивность моментов при вращении поперечных сечений равна $m \rho^2 \frac{\partial^3 v^{(1)}}{\partial x \partial t^2}$. Эти выражения записаны с учетом принятого правила знаков для углов поворота—положительных при вращении по часовой стрелке—и изгибающих моментов—положительных для правой отсеченной части при направлении против часовой стрелки.

Поэтому мы можем написать следующие выражения для перерезывающей силы и изгибающего момента:

$$\left. \begin{aligned} N &= - \int_0^x m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx + \int_0^x q(x, t) dx + a(t), \\ M &= - \int_0^x \int_0^x m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dx + \int_0^x \int_0^x q(x, t) dx dx + \\ &\quad + \int_0^x m \rho^2 \frac{\partial^3 v^{(1)}}{\partial x \partial t^2} dx + xa(t) + b(t), \end{aligned} \right\} \quad (610)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ —произвольные функции интегрирования. Для безопорного стержня $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$, для свободно опертого стержня $b(t) \equiv 0$; обычно значения этих функций определяются из граничных условий.

Если учитывать внутренние сопротивления, принимая для нормальных напряжений гипотезу (468), то изгибающий момент определится по формуле (470) при замене v на $v^{(1)}$, если же принять аналогичную гипотезу

$$\tau = G\gamma + \frac{\gamma_c'}{\omega} G \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (611)$$

и для касательных напряжений, то перерезывающая сила определится по формуле

$$-N = Gf \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + \frac{\gamma_c'}{\omega} Gf \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x \partial t}, \quad (612)$$

где γ_c' —коэффициент, характеризующий внутреннее сопротивление при сдвиге.

Дифференцируя два раза выражение (470) при $v=v^{(1)}$ и один раз выражение (612), а также используя выражения (610), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих колебания изгиба и сдвига призматической балки:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^4 v^{(1)}}{\partial x^4} + \frac{\gamma_c}{\omega} EI \frac{\partial^5 v^{(1)}}{\partial x^4 \partial t} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m \rho^2 \frac{\partial^4 v^{(1)}}{\partial x^2 \partial t^2} &= q(x, t), \\ Gf \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\gamma_c}{\omega} Gf \frac{\partial^3 v^{(2)}}{\partial x^2 \partial t} - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -q(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (613)$$

где, как уже было отмечено выше,

$$v = v^{(1)} + v^{(2)}, \quad (614)$$

ω — частота вынужденных колебаний, или же, при исследовании свободных колебаний, — частота свободных колебаний.

Так как принятие гипотез (468) и (611) для сложного напряженного состояния является достаточно произвольным, то для упрощения выкладок мы будем считать, что $\gamma'_c = \gamma_c$.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда

$$q(x, t) = q(x) e^{i\omega t}, \quad (615)$$

в соответствии с чем заменим в системе (613) $v^{(1)}$ на $\bar{v}^{(1)}$, а $v^{(2)}$ на $\bar{v}^{(2)}$ и положим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}^{(1)}(x, t) &= \bar{v}_1(x) e^{i\omega t}, & \bar{v}^{(2)}(x, t) &= \bar{v}_2(x) e^{i\omega t}, \\ \bar{v}(x, t) &= \bar{v}(x) e^{i\omega t}, & \bar{v}(x) &= \bar{v}_1(x) + \bar{v}_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (616)$$

Производя указанную подстановку в систему (613), преобразуем ее к виду:

$$\left. \begin{aligned} E_c \bar{v}_1^{IV}(x) - m\omega^2 \bar{v}(x) + m\rho^2 \omega^2 \bar{v}_1''(x) &= q(x), \\ \frac{E_c f}{2(1+\nu)} \bar{v}_2''(x) + m\omega^2 \bar{v}(x) &= -q(x), \end{aligned} \right\} \quad (617)$$

где E_c — определяется по формуле (484).

Интегрирование системы (617) проще всего выполнить следующим образом.

Складывая оба уравнения (617), получим

$$\frac{E_c f}{2(1+\nu)} \bar{v}_2''(x) = -E_c \bar{v}_1^{IV}(x) - m\rho^2 \omega^2 \bar{v}_1''(x),$$

откуда

$$\frac{E_c f}{2(1+\nu)} \bar{v}_2''(x) = -E_c \bar{v}_1^{IV}(x) - m\rho^2 \omega^2 \bar{v}_1''(x). \quad (618)$$

Исключая при помощи выражения (618) функцию $\bar{v}_2(x)$ из первого уравнения (617), получим

$$E_c \bar{I} \bar{v}_1^{IV}(x) + m \omega^2 \left(\rho^2 + 2(1 + \nu) \frac{I}{f} \right) \bar{v}_1''(x) - \\ - m \omega^2 \left[1 - 2(1 + \nu) \frac{m \rho^2}{E_c f} \omega^2 \right] \bar{v}_1(x) = q(x). \quad (619)$$

В правой части выражения (618) мы опустили при интегрировании слагаемое вида $ax + b$, где a и b — неизвестные постоянные. Рекомендуем читателю убедиться в том, что суммарная стрелка прогиба не зависит от этих неизвестных постоянных и что принятое допущение $a = b = 0$ не умаляет общности получаемых результатов.

Проинтегрировав уравнение (619) по формуле (618), найдем функцию $\bar{v}_2(x)$, после чего можно определить произвольные постоянные. Для удовлетворения граничным условиям нужно располагать общими выражениями для $\bar{v}_1(x)$ и $\bar{v}_2(x)$, так как все элементы изгиба, за исключением суммарной стрелки прогиба, можно выразить через $\bar{v}_1(x)$. Решение задачи находится по общей формуле (490).

Рассмотрение уравнения (619) показывает, что совместное влияние инерции вращения и сдвига оказывается при больших частотах весьма существенным, поскольку коэффициент при $\bar{v}_1(x)$ может изменить знак. К сожалению, пока отсутствуют работы, в которых детально исследован вопрос о высокочастотных колебаниях стержней при одновременном учете сдвига и инерции вращения.

Для решения задачи о свободных колебаниях с учетом сдвига и инерции вращения, в уравнении (619) нужно положить $q(x) = 0$, $E_c = E$, $\omega = \lambda$, найти общий интеграл уравнения, т. е. общее выражение для $\bar{v}_1(x)$, подставить значение $\bar{v}_1(x)$ в уравнение (618) и найти $\bar{v}_2(x)$, после чего нужно подчинить решение граничным условиям. Приравнявая нулю определитель системы линейных уравнений, получим уравнение частот.

Если в уравнение (619) при $q(x) = 0$, $\rho = 0$ и $E_c = E$ подставить в случае свободно опертого стержня выражение (409), то получим формулу (289).

Сдвиг, как на это уже было указано, уменьшает частоту свободных колебаний и его влияние аналогично влиянию статической сжимающей силы.

Действительно, дифференциальное уравнение свободных колебаний при наличии сжимающей силы T записывается в виде

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

После подстановки

$$v(x, t) = v(x) \cos \omega t$$

получим

$$EI v^{IV}(x) + T v''(x) - m \omega^2 v(x) = 0. \quad (620)$$

Уравнение (620) совпадает с уравнением (619) при $\rho = 0$ и $q(x) = 0$, если пренебречь сопротивлением и положить

$$T = 2(1 + \nu) \frac{l}{f} m \omega^2. \quad (621)$$

Нетрудно показать, что частота свободных колебаний стремится к нулю, если сжимающая сила стремится к ее эйлерову значению.

Действительно, когда $T = T_s$, а функция $v(x) = v_y(x)$ есть форма потери устойчивости, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$EI v_y^{IV}(x) + T_s v_y'(x) = 0,$$

то форма потери устойчивости удовлетворит уравнению (620) при $\omega = 0$, что и требовалось доказать.

§ 31. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К НАХОЖДЕНИЮ ФОРМ И ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотренные способы решений задач колебаний применимы лишь для призматических стержней или для более сложных систем, составленных из призматических стержней.

Для непризматических балок не существует замкнутых способов интегрирования в общем виде и приходится прибегать к различным численным методам. Одним из таких методов является метод последовательных приближений, разработанный лишь для случая $\rho = 0$.

Полагая в выражениях (470) и (612) $\gamma_c = \gamma_c' = 0$ и используя выражения (610), нетрудно получить для непризматического стержня следующую систему уравнений (при $\rho = 0$ и $q(x, t) = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} \right) &= -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(Gf \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} \right) &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Полагая же

$$v^{(1)}(x, t) = v_n^{(1)}(x) \cos \lambda_n t, \quad v_n^{(2)}(x, t) = v_n^{(2)}(x) \cos \lambda_n t,$$

$$v(x, t) = v_n(x) \cos \lambda_n t, \quad v_n(x) = v_n^{(1)}(x) + v_n^{(2)}(x),$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} (EI v_n^{(1)''}(x))'' &= m \lambda_n^2 v_n(x), \\ (Gf v_n^{(2)'}(x))' &= -m \lambda_n^2 v_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (622)$$

В системе (622) с переменными коэффициентами функции $v_n^{(1)}(x)$ и $v_n^{(2)}(x)$ уже не могут быть разделены, если не прибегнуть к следующему приему.

Интегрируя первое уравнение (622) последовательно два раза, а второе один раз, получим:

$$\left. \begin{aligned} EI v_n^{(1)''}(x) &= \lambda_n^2 \left[\int_0^x \int_0^x m v_n(x) dx dx + a_n x + b_n \right], \\ Gf v_n^{(2)'}(x) &= -\lambda_n^2 \left[\int_0^x m v_n(x) dx + a_n \right], \end{aligned} \right\} \quad (623)$$

так как

$$[EI v_n^{(1)''}(x)]' = -Gf v_n^{(2)'}(x),$$

что вытекает из формулы (612) при $\gamma'_e = 0$ и теоремы Журавского—Шведлера, согласно которой

$$N = \frac{dM}{dx}.$$

Деля второе уравнение (623) на Gf , дифференцируя, умножая на EI и складывая с первым, получим

$$\begin{aligned} EI v_n''(x) &= \lambda_n^2 \left\{ \int_0^x \int_0^x m v_n(x) dx dx - 2(1+\nu) I \left(\frac{1}{f} \int_0^x m v_n(x) dx \right)' + \right. \\ &\quad \left. + a_n \left[x + 2(1+\nu) \frac{I}{f^2} f' \right] + b_n \right\}. \end{aligned} \quad (624)$$

Если при $x=0$ изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, то $a_n = b_n = 0$.

Разделив выражение (624) на EI и интегрируя два раза, получим

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \lambda_n^2 \left\{ \int_0^x \int_0^x \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x m v_n(x) dx dx dx dx - \int_0^x \frac{1}{Gf} \int_0^x m v_n(x) dx dx + \right. \\ &\quad \left. + a_n \int_0^x \int_0^x \frac{x + 2(1+\nu) \frac{I}{f^2} f'}{EI} dx dx + b_n \int_0^x \int_0^x \frac{dx dx}{EI} + c_n x + d_n \right\}. \end{aligned} \quad (625)$$

Постоянные a_n , b_n , c_n и d_n , входящие в выражение (625), могут быть определены из граничных условий; этот вопрос мы рассмотрим ниже.

Уравнение (625) может быть записано в эквивалентной, но более компактной форме, если воспользоваться интегральными уравнениями (см. § 21).

Пусть $G(x, s)$ есть стрелка прогиба в сечении $x=x$ от единичной силы, приложенной в сечении $x=s$, вычисленная с учетом сдвига. Найдем по принципу наложения выражение для суммарной стрелки прогиба от сил инерции

$$v(x, t) = - \int_I m(s) G(x, s) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} ds$$

или, полагая

$$v(x, t) = v_n(x) \cos \lambda_n t,$$

получим

$$v_n(x) = \lambda_n^2 \int_I m(s) G(x, s) v_n(s) ds, \quad (626)$$

где интеграл вычисляется по всей длине стержня.

Функция влияния $G(x, s)$ обладает свойством взаимности (402). Умножим уравнение (626) на $\sqrt{m(x)}$ и обозначим

$$v_n^*(x) = \sqrt{m(x)} v_n(x), \quad (627)$$

так что уравнение (626) можно переписать в виде

$$v_n^*(x) = \lambda_n^2 \int_I K(x, s) v_n^*(s) ds, \quad (628)$$

где

$$K(x, s) = \sqrt{m(x) m(s)} G(x, s) = K(s, x) \quad (629)$$

есть так называемое ядро интегрального уравнения.

Уравнение (628) совпадает с уравнением (401) при замене $v_n(x)$ на $v_n^*(x)$, $G(x, s)$ на $K(x, s)$ и v_n на λ_n . Поэтому, принимая во внимание свойства ортогональности (398) и обозначение (627), можно заключить, что в рассматриваемом случае фундаментальные функции удовлетворяют условию ортогональности:

$$\text{при } k \neq n \quad \int_I v_n^*(x) v_k^*(x) dx = \int_I m v_n(x) v_k(x) dx = 0. \quad (630)$$

Покажем, что формы и частоты свободных колебаний могут быть определены, если воспользоваться методом последователь-

ных приближений находя последовательные приближения по формуле¹

$$\varphi_p(x) = \int_{(l)} K(x, s) \varphi_{p-1}(s) ds, \quad (631)$$

где $\varphi_0(x)$ — произвольно взятое исходное приближение.
Полагая

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n^*(x), \quad (632)$$

где коэффициенты разложения a_n могут быть установлены из условий ортогональности, определим функцию $\varphi_1(x)$, для чего подставим выражение (632) в уравнение (631) при $p=1$:

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{(l)} K(x, s) v_n^*(s) ds.$$

На основании уравнения (628)

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} v_n^*(x). \quad (633)$$

Последовательно применяя эту формулу, получим

$$\varphi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{2p}} v_n^*(x). \quad (634)$$

Если $a_1 \neq 0$, то выражение (634) можно записать в виде

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{\lambda_1^{2p}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^{2p} v_n^*(x). \quad (635)$$

Так как по условию $\lambda_1 < \lambda_n$ при $n > 1$, то при увеличении p все коэффициенты ряда (635), кроме первого, стремятся к нулю и функция $\varphi_p(x)$ стремится к первой форме колебаний. Воспользовавшись формулой (635), нетрудно получить

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{p-1}(x)}{\varphi_p(x)} = \lambda_1^2$$

или приближенно

$$\lambda_1^2 = \frac{\varphi_{p-1}(x)}{\varphi_p(x)}. \quad (636)$$

¹ Рекомендуем читателю сравнить излагаемое здесь с методом последовательных приближений, изложенным в § 9.

Если в выражении (632) $a_1=a_2=\dots=a_{r-1}=0$, то вместо выражения (635) можно написать

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{\lambda_r^{2p}} \sum_{n=r}^{\infty} a_n \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_n} \right)^{2p} v_n(x), \quad (637)$$

а так как $\lambda_r < \lambda_n$ при $n > r$, то при увеличении p функция $\varphi_p(x)$ стремится к r -ой форме колебаний. В этом случае формула (636) определит λ_r^2 .

Сходимость процесса последовательных приближений с увеличением номера формы колебаний обычно ухудшается, на что уже указывалось в § 9.

Определение методом последовательных приближений одной из высших форм колебаний $v_r(x)$ возможно лишь в том случае, если предварительно найдены все предшествующие формы колебаний $v_1(x)$, $v_2(x)$... $v_{r-1}(x)$. Если эти формы найдены, то, задавшись некоторой функцией $\varphi_0^{(1)}(x)$, близкой к ожидаемой форме колебаний $v_r(x)$, принимают за исходное приближение функцию $\varphi_0(x)$, определяемую выражением

$$\varphi_0(x) = \varphi_0^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{0j} v_j(x), \quad (638)$$

где коэффициенты α_{0j} должны быть подобраны таким образом, чтобы при разложении функции $\varphi_0(x)$ в ряд (632) $a_1=a_2=\dots=a_{r-1}=0$; это выполнимо, если функция $\varphi_0(x)$ будет ортогональна по отношению ко всем функциям $v_j(x)$ при $1 \leq j \leq r-1$.

Воспользовавшись условиями ортогональности (630), нетрудно получить, что коэффициенты α_{0j} определяются из уравнений

$$\int_{(l)} m \varphi_0^{(1)}(x) v_j(x) dx + \alpha_{0j} \int_{(l)} m v_j^2(x) dx = 0. \quad (639)$$

Ортогонализацию необходимо производить на каждом этапе процесса последовательных приближений, так как возможно появление ошибок в связи с приближенностью вычислений, т. е. определять p -е приближение по формуле

$$\varphi_p(x) = \varphi_p^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{pj} v_j(x), \quad (640)$$

где

$$\varphi_p^{(1)}(x) = \int_{(l)} K(x, s) \varphi_{p-1}(s) ds. \quad (641)$$

Коэффициенты α_{pj} определяются из уравнений, получаемых из (639) при замене индекса «0» на индекс « p », т. е. из уравнений

$$\int_{(j)} m \varphi_p^{(1)}(x) v_j(x) dx + \alpha_{pj} \int_{(j)} m v_j^2(x) dx = 0. \quad (642)$$

Как видно из изложенного, применение метода последовательных приближений к нахождению высших частот колебаний осложняется необходимостью ортогонализации последовательных приближений относительно ранее найденных форм главных колебаний, и мы, по существу, все время занимаемся уточнением исходного приближения, а не нахождением последовательных приближений в указанном выше смысле.

Следует ожидать, что в связи с приближенностью вычислений способ последовательных приближений не будет давать достаточно надежных результатов при определении высших форм колебаний, но в настоящее время мы не имеем данных для определенного суждения о пределах практической применимости метода последовательных приближений.

В методе последовательных приближений не учитывается инерция вращения, а совместное влияние сдвига и инерции вращения при расчете общей вибрации корабля начинает сильно сказываться примерно с 5-го тона свободных колебаний. Поэтому можно предполагать, что для балок с развитыми поясками и тонкой стенкой применение метода последовательных приближений может дать хороший результат при вычислении форм свободных колебаний не выше чем до 4—5-го тона.

Для определения частот свободных колебаний пользуются обычно так называемым комбинированным методом, заключающимся в том, что формы колебаний определяются методом последовательных приближений, а частота свободных колебаний — энергетическим методом, причем за фундаментальную функцию принимается найденная форма колебаний.

При практическом использовании метода последовательных приближений незачем пользоваться выражением (631), что потребовало бы построения ядра уравнения и, кроме того, усложнило бы вычисления в процессе последовательных приближений.

Если в выражении (625) определить постоянные из граничных условий, то это выражение может быть записано в виде

$$v_n(x) = \lambda_n^2 L[v_n(x)], \quad (643)$$

где $L[...]$ есть некоторый линейный оператор.

Соотношение (643) эквивалентно интегральному уравнению (628), на что было уже указано выше.

Поэтому при практическом использовании метода последовательных приближений вместо формулы (631) нужно пользо-

ваться формулой

$$\varphi_p(x) = L[\varphi_{p-1}(x)]. \quad (644)$$

Покажем на примерах определение вида линейных операторов $L[...]$.

Пример 1. Найти оператор $L[...]$ для безопорного стержня.

Как уже было указано выше, если начало координат находится на свободном конце стержня, то $a_n = b_n = 0$ и при $\lambda_n = 1$ выражение (625) преобразуется к виду [при замене $v_n(x)$ в левой части на $\varphi_p(x)$, а в правой части на $\varphi_{p-1}(x)$]

$$\varphi_p(x) = L[\varphi_{p-1}(x)] = L_1[\varphi_{p-1}(x)] + 20c_p(x - 0,5l) + d_p, \quad (645)$$

где

$$\begin{aligned} L_1[\varphi_{p-1}(x)] = & \int_0^x \int_0^x \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x m \varphi_{p-1}(x) dx dx dx dx - \\ & - \int_0^x \frac{1}{Gf} \int_0^x m \varphi_{p-1}(x) dx dx \end{aligned} \quad (646)$$

и изменены для удобства произвольные постоянные.

Произвольные постоянные c_p и d_p не могут быть определены из граничных условий при $x=l$, где изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, так как при вычислении этих величин линейный член в выражении (645) тождественно обратится в нуль и произвольные постоянные в граничные условия не войдут. Они должны быть определены из условия уравновешенности сил и моментов сил инерции (321), которые примут в нашем случае вид:

$$\left. \begin{aligned} d_p \int_0^1 \frac{m}{m_0} d\xi + 20c_p \int_0^1 \frac{m}{m_0} (\xi - 0,5) d\xi + \int_0^1 \frac{m}{m_0} L_1(\varphi_{p-1}) d\xi = 0, \\ d_p \int_0^1 \frac{m}{m_0} (\xi - 0,5) d\xi + 20c_p \int_0^1 \frac{m}{m_0} (\xi - 0,5)^2 d\xi + \\ + \int_0^1 \frac{m}{m_0} (\xi - 0,5) L_1(\varphi_{p-1}) d\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (647)$$

где, как обычно,

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

Формы свободных колебаний определяются с точностью до постоянного множителя, поэтому выражения (645) и (646) могут быть переписаны в виде:

$$\varphi_p(\xi) = L_1[\varphi_{p-1}(\xi)] + 20c_p(\xi - 0,5) + d_p, \quad (648)$$

$$\begin{aligned} L_1[\varphi_{p-1}(\xi)] = & \int_0^\xi \int_0^\xi \frac{I_0}{I} \int_0^\xi \int_0^\xi \frac{m}{m_0} \varphi_{p-1}(\xi) d\xi d\xi d\xi d\xi - \\ & - 2(1 + \nu) \frac{I_0}{I^2 f_0} \int_0^\xi \frac{f_0}{f} \int_0^\xi \frac{m}{m_0} \varphi_{p-1}(\xi) d\xi d\xi, \end{aligned} \quad (649)$$

где I_0 , f_0 и m_0 — некоторые средние значения соответствующих величин.

Вычисления по формуле (648) выполняются в табл. 13, которую мы приводим только для одного этапа приближений и для правила трапеций по 20 ординатам. Если требуется найти несколько приближений, то строки 4—12 повторяются соответствующее число раз.

По поводу заполнения табл. 13 нужно сделать замечание.

При вычислении интегралов с переменным верхним пределом результаты суммирования по стрелке надо умножать на $\frac{1}{2}\Delta$, т. е.

в нашем случае на $\frac{1}{40}$, так как $\Delta = \frac{1}{20}$. Поэтому результаты четырехкратного суммирования (строка 9) надо умножить на $\left(\frac{1}{40}\right)^4 = \frac{10^{-4}}{256}$, а результаты двойного суммирования (строка 6) — на $\left(\frac{1}{40}\right)^2 = \frac{10^{-2}}{16}$.

При вычислении в строке 10 таблицы значения $L_1(\varphi_{p-1})$ мы выносим за скобку величину $\left(\frac{1}{40}\right)^4$, а это сводится к тому, что данные строки 8 берутся со множителем $\frac{10^{-2}}{16} : \frac{10^{-4}}{256} = 16 \cdot 10^2$.

Формы свободных колебаний определяются с точностью до постоянного сомножителя, поэтому в строке 10 введен множитель A , подбираемый так, чтобы значения $L_1(\varphi_{p-1})$ были порядка единицы.

Коэффициенты системы (647) вычисляются в табл. 9, в которой вместо численных значений функции $f_n(\xi)$ подставляются численные значения $L_1(\varphi_{p-1})$, заимствованные из строки 13 табл. 13. Значения функции φ_p вычисляются в строке 15 табл. 13.

Таблица 13

№ стро- ки	Теоретический шпангоут	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	$m : m_0$																					
2	$I_0 : I$																					
3	$\varphi_{p-1} \left(\frac{z}{2} \right)$																					
4	$(1) \cdot (3)$																					
5	$\Sigma \Sigma (4)$																					
6	$\Sigma \Sigma (5)$																					
7	$(2) \cdot (6)$																					
8	$\Sigma \Sigma (7)$																					
9	$\Sigma \Sigma (8)$																					
10	$f_0 : f$																					
11	$(10) \cdot (5)$																					
12	$\Sigma \Sigma (11)$																					
13	$[(9) - 32(1 + \nu) \frac{I_0}{f_0^2} (12) \cdot 10^2] A$																					
14	$20\sigma_p (\xi - 0,5)$																					
15	$\varphi_p = d_p + (14) + (13)$																					

При определении методом последовательных приближений высших форм колебаний, табл. 13 используется для определения функций $\varphi_p^{(1)}$, значения которых берутся из 15-й строки таблицы.

Кроме того, должна быть составлена таблица для вычисления интегралов, входящих в уравнения (642), которую мы ввиду ее элементарности не приводим. После определения коэффициентов α_{pj} значения функции $\varphi_p(x)$ подсчитываются по формуле (640). Это вычисление целесообразно выполнять также в таблице.

Высшие формы колебаний имеют значительное количество нулей (не меньше, чем номер формы) и для возможности достаточно точного их определения нужно уменьшать интервал интегрирования.

Если разбить интервал интегрирования на 20 участков, как это обычно делается в расчетах вибрации, то определение формы колебаний первого тона будет произведено с достаточной точностью. Что же касается, например, формы колебаний пятого тона, то погрешность при ее определении будет примерно такой же, как при определении формы первого тона в случае разбиения интервала всего на четыре участка.

Пример 2. Найти оператор $L[...]$ для консольного стержня.

Принимая начало координат на свободном конце, можно записать оператор $L[...]$ в виде

$$\varphi_p = L[\varphi_{p-1}] = L_1[\varphi_{p-1}] + c_p(\xi - 1) + d_p, \quad (650)$$

где оператор $L_1[...]$ определяется по формуле (649).

Будем считать, что консоль жестко заделана на жесткой опоре. Тогда из условия $\varphi_p(1) = 0$ следует

$$d_p = -L_1(\varphi_{p-1})_{\xi=1}. \quad (651)$$

Для составления условия равенства нулю угла поворота опорного сечения, т. е. производной стрелки прогиба от изгиба, нужно в выражении (649) отбросить в правой части второй член, учитывающий стрелку прогиба от сдвига, так что

$$c_p = - \int_0^1 \frac{I_0}{I} \int_0^\xi \int_0^\xi \frac{m}{m_0} \varphi_{p-1}(\xi) d\xi d\xi d\xi. \quad (652)$$

Все вычисления выполняются в виде табл. 13, в которой нужно лишь изменить строку 14.

Как уже было указано в предыдущем примере, для получения величины интеграла с переменным верхним пределом нужно результат суммирования по стрелке умножить на $\frac{1}{40}$, в строке же 13 мы умножаем результат четырехкратного суммирования по

стрелке на величину

$$A = \left(\frac{a}{40}\right)^4,$$

где

$$a = 40 \sqrt[4]{A}.$$

Тогда, если обозначить через (j, r) число, стоящее на пересечении j -ой строки и r -го столбца таблицы, можно определить постоянные c_p и d_p по формулам:

$$c_p = -(8; 0) \left(\frac{a}{40}\right)^3,$$

$$d_p = -(13; 0),$$

в строке (14) записать значения $c_p(\xi-1)$, а в строке (15) произвести указанные действия.

Вышие формы колебаний вычисляются таким же образом, как и в предыдущем примере.

Мы не останавливаемся на вопросе о применении метода последовательных приближений к определению форм вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей нагрузки, ибо процесс сходится лишь при $\omega < \lambda_1$, что обычно не представляет практического интереса¹.

§ 32. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ВЫСШИХ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

При рассмотрении вопроса об определении высших частот колебаний неоднократно подчеркивалась сложность данной задачи с чисто вычислительной точки зрения. Сложность эта связана

с тем, что формы колебаний высших тонов являются функциями знакопеременными с большим числом нулей.

Заслуживает внимания приближенный способ определения высших частот, идея которого была высказана в книге Гогенэмзера и Прагера [3].

Способ этот основан на том, что высшие формы колебаний на участках между соседними точками перегиба (рис. 32) близки к синусоидам и заметные искажения будут иметь место лишь на участках, близких к опорам. Поэтому частота колебаний n -го тона может быть определена как частота колебаний первого тона свободно опертой балки, длина которой равна расстоянию между

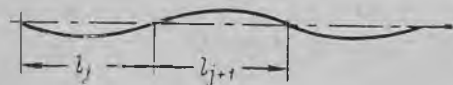


Рис. 32.

Способ этот основан на том, что высшие формы колебаний на участках между соседними точками перегиба (рис. 32) близки к синусоидам и заметные искажения будут иметь место лишь на участках, близких к опорам. Поэтому частота колебаний n -го тона может быть определена как частота колебаний первого тона свободно опертой балки, длина которой равна расстоянию между

¹ Исследование вопроса о сходимости этого процесса можно, например, найти в работах [3] или [5].

узлами в средней части рассматриваемой формы свободных колебаний, элементы же балки (масса и т. п.) имеют среднее значение на исследуемом участке.

Если l_j есть расстояние между узлами в n -й форме свободных колебаний, то формула (292) для определения частоты с учетом сдвига может быть при $g=n$ переписана в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{l_j}{\pi} \sqrt[4]{\frac{m_j}{EI_j} \left[1 + 2(1 + \nu) \frac{I_j}{f_j l_j^2} \right]}, \quad (653)$$

где m_j и I_j — средние значения соответствующих величин на рассматриваемом участке.

Формула (653) справедлива для участков, достаточно удаленных от опор. Поэтому для высших форм колебаний

$$\frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{\pi} \sqrt[4]{\frac{m_j}{EI_j} \left[1 + 2(1 + \nu) \frac{I_j}{f_j l_j^2} \right]}. \quad (654)$$

Если взять произвольно заделанный призматический стержень, то согласно формуле (389) при $k_0=0$

$$\lambda_n = \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

т. е. n -я частота произвольно заделанного стержня может быть определена как первая частота свободно опертого стержня

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{\pi^2}{l_{\text{пр}}^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

где приведенная длина определяется зависимостью

$$l_{\text{пр}} = \frac{\pi}{\mu_n} l. \quad (655)$$

Подставляя под знак радикала в выражении (654) вместо l_j его приближенное значение $l_j = l_{\text{пр}}$, преобразуем это выражение к виду

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{\mu_n} \sqrt[4]{\frac{m_j}{EI_j} \left[1 + 2(1 + \nu) \frac{I_j}{\pi^2 f_j l^2} \mu_n^2 \right]}, \quad (656)$$

так как для свободно опертого стержня $n\pi = \mu_n$, что приближенно справедливо и для других условий заделки призматического стержня при больших значениях n .

Заменяя в правой части (656) сумму интегралом, получим приближенную формулу для определения частоты свободных колебаний

$$\frac{1}{V\lambda_n} = \frac{1}{v_n} \int_0^4 \sqrt{\frac{m}{EI} \left[1 + 2(1 + \nu) \frac{I}{\pi^2 f l^2} v_n^2 \right]} dx. \quad (657)$$

Полученная формула является обобщением формулы Гогенэм-зер и Прагера на случай учета сдвига. Напомним, что v_n определяется для призматической балки с такими же граничными условиями, как и рассматриваемая непризматическая.

§ 33. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний пластины при учете постоянных цепных усилий растяжения-сжатия и упругого основания может быть на основании принципа Даламбера записано в виде¹

$$D\nabla^2\nabla^2 w + k_0 w - T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, t) - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (658)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, k_0 — коэффициент жесткости упругого основания, T_1 и T_2 — усилия в срединной поверхности, положительные при растяжении, m — масса пластины на единицу площади.

Рассмотрим сначала задачу о свободных колебаниях пластины и будем искать решение дифференциального уравнения (658) при $q(x, t) \equiv 0$ в виде

$$w(x, y, t) = \sum_n w_n(x, y) \cos(\lambda_n t + \varepsilon_n). \quad (659)$$

Подставляя выражение (659) в дифференциальное уравнение (658) при $q(x, t) \equiv 0$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях времени, получим

$$D\nabla^2\nabla^2 w_n - T_1 \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - (m\lambda_n^2 - k_0) w_n = 0. \quad (660)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (660) может быть выполнено в замкнутом виде лишь в некоторых простейших случаях так же, как и в случае расчета пластин на изгиб.

¹ $\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

В случае свободно опертой пластины можно принять для w_n выражение

$$w_n = w_{np}(x, y) = A_{np} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{p\pi y}{b},$$

удовлетворяющее условиям свободного опирания на жесткие кромки, подставить это выражение в дифференциальное уравнение (660) и из условия равенства нулю коэффициента A_{np} получить уравнение для определения частоты $\lambda_n = \lambda_{np}$, что приведет к формуле (382).

Если свободно оперты две параллельные кромки пластины, например, при $x=0$ и $x=a$, то, положив

$$w_n = f_{np}(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (661)$$

и подставив выражение (661) в уравнение (660) при замене λ_n на λ_{np} , получим дифференциальное уравнение для определения неизвестных функций $f_{np}(y)$:

$$f_{np}^{IV}(y) - \left[2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{T_2}{D} \right] f_{np}''(y) + \left[- \frac{m\lambda_{np}^2 - k_0 - T_1 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}{D} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 \right] f_{np}(y) = 0$$

или

$$f_{np}^{IV}(y) - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 (1 + \eta_n) f_{np}''(y) + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 (1 - \gamma_{np}^2) f_{np}(y) = 0, \quad (662)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{np}^2 &= \frac{m\lambda_{np}^2 - k_0}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^4 - \frac{T_1}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2, \\ \eta_n &= \frac{T_2}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (663)$$

Второй индекс у частоты λ_{np} выбирается таким образом, чтобы при заданном n большему значению p соответствовала бы и большая частота.

Полагая в уравнении (662)

$$f_{np}(y) = A e^{sy},$$

получим характеристическое уравнение

$$s^4 - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 (1 + \eta_n) s^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 (1 - \gamma_{np}^2) = 0, \quad (664)$$

имеющее корни

$$s = \pm \frac{n\pi}{a} \sqrt{1 + \eta_n} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - \gamma_{np}^2}{(1 + \eta_n)^2}}}. \quad (665)$$

Характер корней, а следовательно, и аналитическое выражение общего интеграла уравнения (662) зависит от величин γ_{np}^2 и η_n ; при определении частот величина η_n является заданной, а величина γ_{np} подлежит определению.

С целью определения величины γ_{np} нужно подчинить общий интеграл уравнения (662) граничным условиям и приравнять нулю определитель линейной системы уравнений для произвольных постоянных. Величины γ_{np} определяются как корни этого уравнения; зная же численные значения γ_{np} по первому выражению (663), можно найти значения частот колебаний.

Рассмотрим более подробно задачу о свободных колебаниях пластинки без цепных напряжений и без упругого основания, т. е. при $T_1 = T_2 = 0$ и $k_0 = 0$. В этом случае $\eta_n = 0$ и выражение (665) преобразуется к виду

$$s = \pm \frac{n\pi}{a} \sqrt{1 \pm \gamma_{np}}, \quad (666)$$

где согласно первому выражению (663)

$$\gamma_{np}^2 = \frac{m\lambda_{np}^2}{D} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^4, \quad (667)$$

При $\gamma_{np} < 1$ все корни (666) вещественны, а при $\gamma_{np} > 1$ два корня вещественны, а два — мнимые.

Легко показать, что для пластинок, не несущих сосредоточенных масс, величина $\gamma_{np} > 1$.

Действительно, если пластинка на кромках $y = \text{const}$ совершенно свободна, то задача об определении частоты свободных колебаний пластинки сводится к определению частоты свободных колебаний свободно опертой балки-полоски, а эта частота определяется по формуле (278) при $EI = D$, т. е. по формуле

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 \frac{D}{m}.$$

Наличие закреплений на продольных кромках пластины повышает ее частоту, так что

$$\lambda_{np}^2 > \lambda_n^2,$$

а отсюда, на основании формулы (667), $\gamma_{np} > 1$.

Поэтому корни характеристического уравнения могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} s_{1,2} &= \pm \frac{n\pi}{a} \sqrt{1 + \gamma_{np}}, \\ s_{3,4} &= \pm i \frac{n\pi}{a} \sqrt{\gamma_{np} - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (668)$$

а общий интеграл уравнения (662) (при $\eta_n=0$) будет иметь вид

$$f_{np}(y) = a_{np} \operatorname{ch} \alpha_{np} \frac{n\pi y}{a} + b_{np} \operatorname{sh} \alpha_{np} \frac{n\pi y}{b} + \\ + c_{np} \cos \beta_{np} \frac{n\pi y}{a} + d_{np} \sin \beta_{np} \frac{n\pi y}{a}, \quad (669)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{np} &= \sqrt{1 + \gamma_{np}}, \\ \beta_{np} &= \sqrt{\gamma_{np} - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (670)$$

Рассмотрим задачу об определении частот свободных колебаний пластины, свободно опертой на краях $x=0$, $x=a$, $y=0$ и жестко заделанной на кромке $y=b$.

Функция $f_{np}(y)$ должна в этом случае удовлетворять условиям:

$$f_{np}(0)=0, \quad f''_{np}(0)=0, \quad f_{np}(b)=0, \quad f'_{np} b=0.$$

Первые два условия приводят к выводу, что $a_{np}=c_{np}=0$, на основании же остальных двух получаем:

$$\left. \begin{aligned} b_{np} \operatorname{sh} u_{np} + d_{np} \sin v_{np} &= 0, \\ b_{np} u_{np} \operatorname{ch} u_{np} - d_{np} v_{np} \cos v_{np} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (671)$$

где для сокращения письма положено:

$$u_{np} = \alpha_{np} n\pi \frac{b}{a}, \quad v_{np} = \beta_{np} n\pi \frac{b}{a}. \quad (672)$$

Приравнявая определитель полученной системы уравнений нулю, получим уравнение частот

$$v_{np} \operatorname{sh} u_{np} \cos v_{np} + u_{np} \operatorname{ch} u_{np} \sin v_{np} = 0, \quad (673)$$

решая которое подбором можно для каждого значения n найти нужное число значений величин γ_{np} , а по формуле (667)—значения λ_{np} .

Форма главных свободных колебаний пластинки $w_{np}(x, y)$, соответствующая частоте λ_{np} , может быть получена, если обратить внимание на то, что первому уравнению (671) можно удовлетворить, например, положив:

$$b_{np} = \sin v_{np}, \quad d_{np} = -\operatorname{sh} u_{np},$$

тогда на основании (661) и (669) при $a_{np}=c_{np}=0$

$$w_{np}(x, y) = \left(\sin v_{np} \operatorname{sh} u_{np} \frac{y}{b} - \operatorname{sh} u_{np} \sin v_{np} \frac{y}{b} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (674)$$

Если (при $T_2=0$) известны частоты $\lambda_{np}^{(0)}$ для пластинки без упругого основания и цепного усилия T_1 , то, воспользовавшись первым выражением (663) и выражением (667), можно написать

$$\frac{m\lambda_{np}^{(0)2}}{D} \left(\frac{a}{n\pi}\right)^4 = \frac{m\lambda_{np}^2 - k_0}{D} \left(\frac{a}{n\pi}\right)^4 - \frac{T_1}{D} \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2,$$

откуда

$$\lambda_{np}^2 = \lambda_{np}^{(0)2} + \frac{k_0}{m} + \frac{T_1}{D} \left(\frac{a\pi}{a}\right)^2. \quad (675)$$

Формула (675) справедлива лишь в том случае, когда граничные условия на кромках $y=\text{const}$ будут в обеих задачах одинаковы.

Из формулы (675) видно, что наличие упругого основания и растягивающего усилия ($T_1 > 0$) увеличивает частоту, а сжимающее усилие — уменьшает.

Значение сжимающего усилия, при котором частота обращается в нуль, будет его эйлеровым значением, соответствующим форме потери устойчивости, совпадающей с формой свободных колебаний.

Подобно тому, как формы потери устойчивости для свободно опертой балки совпадают с ее формами свободных колебаний, так и формы потери устойчивости для пластины, свободно опертой на кромках $x=\text{const}$, совпадают с ее формами колебаний. Это, конечно, будет иметь место в том случае, если в обеих задачах граничные условия на кромках $y=\text{const}$ записываются одинаково.

Расчет вынужденных колебаний пластин, свободно опертых на кромках $x=\text{const}$, при действии произвольной возмущающей нагрузки может быть произведен методом главных координат. Этот расчет весьма трудоемок, так как требует предварительного определения форм главных колебаний.

Остановимся на рассмотрении случая, когда действует гармоническая возмущающая нагрузка

$$q(x, y, t) = q(x, y) e^{i\omega t}, \quad (676)$$

и будем искать решение уравнения (658) в виде

$$\bar{w}(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_n f_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (677)$$

Если на пластину действует возмущающая нагрузка

$$q(x, y, t) = q(x, y) \cos \omega t, \quad (678)$$

то вынужденные колебания определяются зависимостью

$$w(x, y, t) = \text{Re} \bar{w}(x, y, t). \quad (679)$$

Раскладывая амплитуду нагрузки $q(x, y)$ в одинарный ряд Фурье

$$q(x, y) = \sum_n q_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (680)$$

и подставляя выражения (676), (677) и (680) и дифференциальное уравнение (658), после сравнения коэффициентов при одинаковых функциях времени и $\sin \frac{n\pi x}{a}$, получим дифференциальное уравнение для определения функций $f_n(y)$

$$f_n^{IV}(y) - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2(1 + \eta_n)f_n''(y) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4(1 - \gamma_n^2)f_n(y) = q_n(y), \quad (681)$$

где γ определяется первой формулой (663) при $\lambda_{np} = \omega$, а η_n — второй формулой (663).

При расчете вынужденных колебаний вблизи резонанса необходимо учитывать внутреннее сопротивление, которое мы будем принимать по гипотезе (468), в связи с чем в дифференциальном уравнении (658) нужно заменить в выражении для цилиндрической жесткости D модуль нормальной упругости комплексной величиной (484), так что цилиндрическая жесткость D заменится комплексной цилиндрической жесткостью

$$D_c = D(1 + i\gamma_c) \quad (682)$$

Принятие комплексной цилиндрической жесткости в данном виде соответствует предположению, что $\gamma_c = \gamma'_c$ [см. (611)].

При учете внутреннего сопротивления величины γ_n и η_n будут комплексными, как следует из формул (663) при $\lambda_{np} = \omega$.

В этом случае не только корни (665) характеристического уравнения (664) будут комплексными, но в уравнении (658) и левая часть будет комплексной, так как и в ней нужно заменить D на D_c согласно формуле (682).

Если ввести обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \sqrt{1 + \eta_n} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1 - \gamma_n^2}{(1 + \eta_n)^2}}} = \alpha'_n + i\alpha''_n, \\ \beta_n &= \sqrt{1 + \eta_n} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \gamma_n^2}{(1 + \eta_n)^2}}} = \beta'_n + i\beta''_n, \end{aligned} \right\} \quad (683)$$

то общий интеграл однородного уравнения можно принять в виде

$$\begin{aligned} f_n(y) &= a_n \operatorname{ch} \alpha'_n \frac{n\pi y}{a} \cos \alpha''_n \frac{n\pi y}{a} + b_n \operatorname{sh} \alpha'_n \frac{n\pi y}{a} \sin \alpha''_n \frac{n\pi y}{a} + \\ &+ c_n \operatorname{ch} \beta'_n \frac{n\pi y}{a} \cos \beta''_n + d_n \operatorname{sh} \beta'_n \frac{n\pi y}{a} \sin \beta''_n \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned} \quad (684)$$

При решении задачи о вынужденных колебаниях нужно к общему интегралу (684) однородного уравнения прибавить частный интеграл, соответствующий правой части уравнения (681), подчинить общий интеграл неоднородного уравнения граничным условиям и определить произвольные постоянные a_n , b_n , c_n и d_n .

После этого вынужденные колебания, соответствующие гармонической возмущающей нагрузке (678), определяются по формуле (679).

Мы не останавливаемся на решении частных задач, поскольку они достаточно громоздки, и ограничимся повторением замечания, которое уже было сделано при рассмотрении вынужденных колебаний перекрытий при учете сопротивлений.

Так как учет сопротивления оказывает особо существенное влияние на окончательный результат (вблизи резонанса), то его следует принимать во внимание лишь при определении тех функций $f_n(y)$, для которых частоты λ_{np} мало отличаются от частоты ω возмущающей нагрузки.

§ 34. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ. СОВМЕСТНЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вывод дифференциального уравнения крутильных колебаний даже для призматического стержня связан со значительными затруднениями и до настоящего времени приходится довольствоваться приближенным дифференциальным уравнением. Затруднение заключается в том, что неизвестно общее решение статической задачи о стесненном кручении и при рассмотрении задачи о крутильных колебаниях приходится пользоваться связью между крутящим моментом и углом закручивания, установленным при решении задачи о чистом кручении призматического стержня, т. е. при действии постоянного по длине стержня крутящего момента.

Это основное допущение противоречит действительности, так как при крутильных колебаниях крутящий момент по длине стержня будет всегда переменным. Можно ожидать, что наиболее значительные погрешности будут возникать при рассмотрении колебаний высших тонов.

Дифференциальное уравнение стесненного кручения может быть составлено для тонкостенного профиля, если принять гипотезу о недеформируемости контура поперечного сечения. Однако эта гипотеза справедлива лишь в особых случаях и в интересующих нас задачах применима не всегда.

Поэтому мы в дальнейшем используем зависимости теории чистого кручения, имея в виду, что получаемые нами уравнения будут приближенными.

Связь между крутящим моментом M_k и углом поворота поперечного сечения φ в теории чистого кручения дается формулой

$$M_k = C\varphi', \quad (685)$$

где C — жесткость при чистом кручении, определяемая для произвольного поперечного сечения методами теории упругости. Для стержня круглого поперечного сечения

$$C = GI_p, \quad (686)$$

где I_p — полярный момент инерции поперечного сечения.

Угол поворота φ поперечного сечения будем считать положительным при вращении от оси cy к oz по кратчайшему направлению. Положительные направления крутящих моментов на торцах стержня показаны на рис. 33.

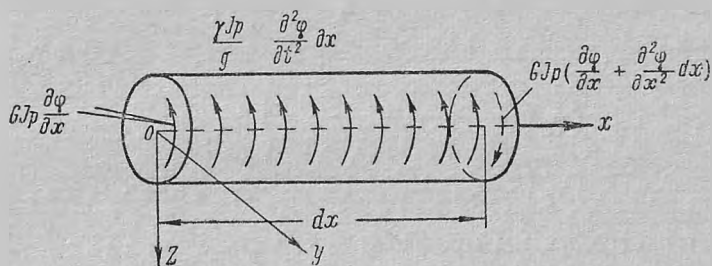


Рис. 33.

Обозначим через γ погонный вес стержня, через ρ_p — полярный радиус инерции масс стержня, тогда интенсивность крутящего момента от моментов сил инерции определится по выражению $\frac{\gamma}{g} \rho_p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ и на основании принципа Даламбера можно для изображенного на рис. 33 элемента стержня написать

$$C \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} \rho_p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx - C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right) + M(x, t) dx = 0,$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$a^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{g}{\gamma \rho_p^2} M(x, t), \quad (687)$$

где

$$a^2 = \frac{Cg}{\gamma \rho_p^2}, \quad (688)$$

$M(x, t)$ — интенсивность внешнего крутящего момента.

Дифференциальное уравнение (687) описывает крутильные колебания призматического стержня.

Решение дифференциального уравнения (687) при $M(x, t) \equiv 0$ может быть найдено в виде

$$\varphi(x, t) = \sum_n \varphi_n(x) \cos(\lambda_n t + \varepsilon_n), \quad (689)$$

аналогичном выражению (386), что по подстановке в уравнение (687) при $M(x, t) \equiv 0$ и сравнении коэффициентов при одинаковых функциях времени приводит к дифференциальному уравнению для определения форм главных свободных колебаний $\varphi_n(x)$.

$$\varphi_n''(x) + \left(\frac{\lambda_n}{a}\right)^2 \varphi_n(x) = 0, \quad (690)$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\varphi_n(x) = a_n \cos \frac{\lambda_n x}{a} + b_n \sin \frac{\lambda_n x}{a}. \quad (691)$$

Формы крутильных колебаний удовлетворяют двум условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} (i) \quad \int \varphi_n(x) \varphi_p(x) dx &= 0 & \text{при } n \neq p, \\ (ii) \quad \int \varphi_p'(x) \varphi_p'(x) dx &= 0 & \text{при } n \neq p. \end{aligned}$$

Доказательство их мы предоставляем читателю.

Вынужденные колебания при произвольном крутящем моменте могут быть найдены при помощи метода главных координат, в случае же действия гармонического возмущающего момента

$$M(\dot{x}, t) = M(x) \cos \omega t \quad (692)$$

решение может быть найдено в виде

$$\varphi(x, t) = \varphi(x) \cos \omega t, \quad (693)$$

так что, подставляя выражения (692) и (693) в дифференциальное уравнение (687) и принимая во внимание (688), получим

$$\varphi''(x) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \varphi(x) = \frac{1}{C} M(x). \quad (694)$$

При необходимости учета внутреннего сопротивления согласно закону (612), нужно при определении жесткости C заменить модуль сдвига G комплексной величиной $G(1 + i\gamma_c')$, проинтегрировать в общем виде уравнение (694) и найти интересующее нас решение по формуле

$$\varphi(x, t) = \operatorname{Re} \bar{\varphi}(x) e^{i\omega t}. \quad (695)$$

Крутильные колебания в чистом виде не представляют особого интереса, так как практически встречаются лишь при рассмотрении колебаний валов. Наибольший интерес для нас представляют связанные изгибно-крутильные колебания и установле-

ние тех условий, при которых возможно раздельное существование изгибных и крутильных колебаний.

Изгиб без кручения, как известно, имеет место, если равнодействующая внешних усилий в каждом поперечном сечении проходит через центр жесткости, или центр изгиба; при рассмотрении задач колебаний нужно относить к внешним усилиям также и силы инерции.

Центр изгиба в общем случае не совпадает с центром тяжести площади поперечного сечения. Если сечение имеет плоскость симметрии, то центр изгиба и центр тяжести площади поперечного сечения лежат в плоскости симметрии, при наличии же двух осей симметрии оба эти центра совпадают и лежат на пересечении осей симметрии.

При рассмотрении задач колебаний существенно расположение центра инерции масс c_g в поперечном сечении относительно центра изгиба c (рис. 34).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии и будем предполагать, что центр инерции масс находится в плоскости симметрии.

Если обозначить через v и w перемещения центра тяжести O площади поперечного сечения в положительном направлении осей Oy и Oz , то на элемент dx стержня будут действовать силы инерции:

$$dY = -\frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dx, \quad dZ = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx$$

и момент сил инерции относительно центра изгиба

$$\begin{aligned} dM &= \frac{\gamma}{g} \left[\rho_p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right] dx = \\ &= \frac{\gamma}{g} \left[(\rho_p^2 + ae) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] dx, \end{aligned}$$

где положительные значения a и e показаны на рис. 34.

Считая жесткость на кручение C , а также моменты инерции I_y и I_z величинами переменными, нетрудно получить дифференциальные уравнения изгибно-крутильных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z(x, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= -\frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + Y(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= \frac{\gamma}{g} \left[(\rho_p^2 + ae) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] + M(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (696)$$

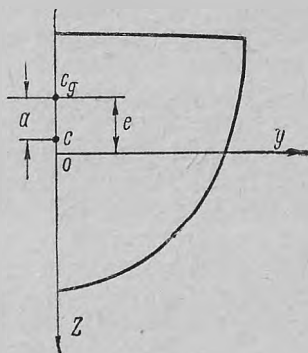


Рис. 34.

где $Y(x, t)$ и $Z(x, t)$ — возмущающая нагрузка, $M(x, t)$ — возмущающий момент, вычисляемый относительно центра изгиба.

Из рассмотрения системы (696), выведенной для сечения с одной осью симметрии, в которой находится и центр инерции масс, можно сделать следующие заключения:

1. Колебания в плоскости симметрии происходят независимо от колебаний кручения.

2. Крутильные колебания не будут зависеть от изгибных колебаний в направлении оси ou лишь при $a=0$, т. е. при совпадении центра инерции с центром изгиба. Однако при наличии крутильных колебаний изгибные могут не существовать лишь при $e=0$, т. е. при совпадении центра инерции масс с центром тяжести поперечного сечения.

В общем случае горизонтальные колебания будут связаны с крутильными; особенно сильно эта связь может проявиться при рассмотрении вынужденных колебаний. До настоящего времени еще отсутствуют достаточно точные и надежные результаты, которые бы позволили сделать количественные выводы о связи изгибных и крутильных колебаний.

§ 35. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. СТОЯЧИЕ И РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ. КОЛЕБАНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА

Выше были рассмотрены изгибные, крутильные и изгибно-крутильные колебания, представляющие наибольший интерес для вибрации корабля. Кроме этих видов колебаний существуют также и продольные колебания стержней, при которых перемещения поперечных сечений происходят вдоль оси стержня.

Продольные колебания стержней могут быть связаны с поперечными, например, при расчете колебаний рамных конструкций, когда вследствие продольных колебаний происходят смещения узлов рамы, или же при колебаниях изолированного стержня, когда центр инерции масс не совпадает с центром тяжести площади поперечного сечения.

Мы не будем рассматривать этих случаев и остановимся лишь на выводе и интегрировании дифференциального уравнения продольных колебаний.

Если обозначить через u — перемещение поперечного сечения стержня в направлении оси ox , F — площадь поперечного сечения и γ — погонный вес стержня, то продольная сила определится согласно закону Гука по выражению

$$T = EF \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (697)$$

Проектируя на ось стержня (рис. 35) все действующие на элемент стержня силы и воспользовавшись принципом Даламбера, получим

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = 0,$$

откуда на основании (697) следует дифференциальное уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (698)$$

Если стержень призматический, то дифференциальное уравнение (698) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (699)$$

где

$$a^2 = \frac{EFg}{\gamma}. \quad (700)$$

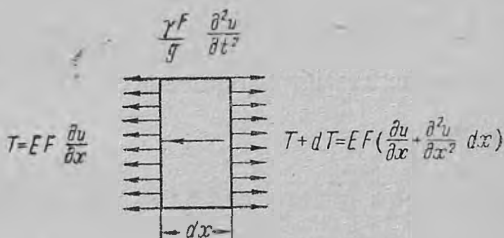


Рис. 35.

Дифференциальное уравнение (699) совпадает по виду с дифференциальным уравнением (687) при $M(x, t) = 0$ и называется волновым уравнением.

Не повторяя того, что уже было сказано об интегрировании дифференциального уравнения крутильных колебаний, остановимся на некоторых новых вопросах.

Дифференциальному уравнению (699) можно удовлетворить, положив

$$u = f(x + ct), \quad (701)$$

где f — пока произвольная функция, допускающая двойное дифференцирование по сложному аргументу $x + ct$.

Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x + ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x + ct),$$

где производная берется по сложному аргументу, то, подставляя полученные выражения в дифференциальное уравнение (699), получим

$$c^2 = a^2,$$

откуда следует

$$c = \pm a.$$

Поэтому решение уравнения (698) может быть представлено в виде

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at). \quad (702)$$

Вид функций f_1 и f_2 определяется начальными условиями движения. Если в начальный момент времени $t=0$

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x), \quad (703)$$

то

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= f(x), \\ -f_1'(x) + f_2'(x) &= \frac{1}{a} g(x), \end{aligned}$$

откуда после интегрирования¹

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x g(z) dz,$$

так что:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \left[f(x) - \frac{1}{a} \int_0^x g(z) dz \right], \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \left[f(x) + \frac{1}{a} \int_0^x g(z) dz \right]. \end{aligned} \right\} \quad (704)$$

Заменяя в первом выражении (704) x на $x - at$, а во втором — на $x + at$ и подставляя их в выражение (702), получим

$$u = \frac{1}{a} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(z) dz. \quad (705)$$

Выражение (705) определяется только начальными условиями и не зависит от граничных условий. Поэтому оно может быть непосредственно использовано лишь для бесконечно длинного стержня, для которого задаются только начальные условия.

Рассмотрим физический смысл решения (702).

Если мы, например, будем изменять x и t таким образом, чтобы $x - at = \text{const}$, т. е. $dx - a dt = 0$, то значение функции в различных сечениях и в различные моменты времени, связанные указанным выше условием, будет неизменно.

При изменении времени на величину dt кривая $f_1(x - at)$ переместится вправо на величину $dx = a dt$, т. е. возмущение будет

¹ Постоянную интегрирования мы полагаем равной нулю, так как окончательное выражение (705) от нее не зависит.

перемещаться вправо со скоростью a . Аналогично кривая $f(x'_i + at)$ будет перемещаться влево со скоростью a .

Таким образом, смещение поперечного сечения стержня является результатом наложения двух распространяющихся волн. Величина a есть скорость распространения звука в стержне.

Решение (702) может быть использовано и для стержня конечной длины, но для этого необходимо рассматривать отражение волн от концов стержня и их наложение одна на другую. Не останавливаясь на рассмотрении этого вопроса¹, заметим лишь, что решение (702) преобразуется в обычное уже для нас решение задачи колебаний в форме (689), т. е. при помощи так называемых стоячих волн.

Каждый член ряда (689) или (386), т. е. каждое главное колебание, называется стоячей волной, поскольку форма колебаний остается неизменной и не перемещается в пространстве.

Если стержень имеет переменное сечение, то его продольные колебания описываются дифференциальным уравнением (698), в общем случае невозможно подобрать решение типа (702) и мы приходим к парадоксальному выводу, что в непризматическом стержне, даже с произвольно малой непризматичностью, не существует распространяющейся волны.

Вывод этот является следствием приближенности дифференциального уравнения (698).

Для изгибных колебаний, даже для призматического стержня, решения вида (702) при произвольном виде функции f не существует².

В этом случае решение уравнения (388) может быть найдено в виде

$$v = Ae^{i(sx + at)}, \quad (706)$$

напоминающем решение (702), что по подстановке в уравнение приводит к соотношению

$$s^4 + k_0 = \frac{m}{EI} a^2.$$

Каждому значению a соответствует четыре значения s и трудно убедиться в том, что решение (706) совпадает с решением в форме стоячих волн.

Рассмотрим вкратце вопрос о колебаниях упругого тела общего вида, т. е. о нахождении решений динамических уравнений тео-

¹ См. работу [4].

² При учете сдвига и инерции вращения можно получить решение при помощи распространяющихся волн, но мы не останавливаемся на рассмотрении этого вопроса.

рии упругости¹:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (707)$$

где ρ — масса единицы объема, объемное расширение ϑ определяется по формуле

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (708)$$

а гармонический оператор $\nabla^2(\dots)$ — по формуле

$$\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2}. \quad (709)$$

Раньше всего заметим, что решение системы (707) может быть найдено в виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_n u_n(x, y, z) \cos(\lambda_n t + \varepsilon_n), \\ v &= \sum_n v_n(x, y, z) \cos(\lambda_n t + \varepsilon_n), \\ w &= \sum_n w_n(x, y, z) \cos(\lambda_n t + \varepsilon_n), \end{aligned} \right\} \quad (710)$$

что по подстановке в систему (707) приводит к системе:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_n + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta_n}{\partial x} &= -\frac{\rho \lambda_n^2}{G} u_n, \\ \nabla^2 v_n + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta_n}{\partial y} &= -\frac{\rho \lambda_n^2}{G} v_n, \\ \nabla^2 w_n + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta_n}{\partial z} &= -\frac{\rho \lambda_n^2}{G} w_n, \end{aligned} \right\} \quad (711)$$

где

$$\vartheta_n = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z}, \quad (712)$$

определяющей формы свободных колебаний.

Входящие в общий интеграл системы (711) произвольные постоянные и неизвестная частота λ_n могут быть найдены из усло-

¹ См., например, Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

вий на поверхности тела; уравнение для частоты получается из условия существования неравного нулю решения системы, а формы определяются с точностью до произвольного множителя.

Таким образом, решение в форме стоячих волн существует только для тела конечных размеров; для тела бесконечных размеров условия на поверхности теряют смысл.

Дифференцируя первое уравнение (707) по x , второе — по y , третье — по z и складывая, получим

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 \vartheta = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}, \quad (713)$$

т. е. для объемного расширения найдем волновое уравнение для трехмерного пространства, частным случаем которого является уравнение (699).

Интегрированию уравнения (713) посвящена большая литература, и мы ограничимся тем, что покажем существование одного типа распространяющихся волн для этого уравнения.

Будем искать решение уравнения (713) в виде

$$\vartheta = f(lx + my + nz - c_1 t), \quad (714)$$

где l , m и n — направляющие косинусы нормали к плоскости, связанные соотношением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (715)$$

Подставляя выражение (714) в уравнение (713) и принимая во внимание (715), получим

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = \frac{\rho}{G} c_1^2,$$

откуда

$$c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}. \quad (716)$$

Величина c_1 есть, очевидно, скорость перемещения плоской волны расширения; формула (716) справедлива в более общем случае, но на доказательстве этого положения мы не останавливаемся.

Пользуясь определением вращения (проекция вихря вектора перемещения):

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

можно получить дифференциальные уравнения вращений, для чего следует из производной первого уравнения (707) по x вычесть производную второго уравнения по y и т. д.:

$$\nabla^2 \omega_x = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \omega_y = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2},$$

$$\Delta^2 \omega_z = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2}.$$

Полученные уравнения совпадают по виду с (713) и нетрудно получить, что вращение (вихрь) распространяется со скоростью

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (717)$$

Если отсутствует расширение, т. е. $\vartheta \equiv 0$, то система (707) распадается на три отдельных уравнения, описывающих распространение волн сдвига, скорость распространения которых будет равна скорости распространения вихря.

Мы не можем останавливаться на рассмотрении других типов решений системы дифференциальных уравнений, но и приведенных выше примеров достаточно, чтобы показать читателю, что решение уравнений колебаний в виде суммы стоячих волн не является единственно возможной формой решения.

Если решение при помощи стоячих волн дает быстро сходящиеся ряды при медленно изменяющихся нагрузках, то при действии кратковременных нагрузок, на что уже было указано в § 23, ряд медленно сходится, а иногда и расходится. В таких случаях можно, вероятно, найти другой тип решения уравнений колебаний, дающий лучшее решение задачи.

Примером, подтверждающим высказанную мысль, является задача о продольном ударе стержней¹; решение этой задачи при помощи стоячих волн приводит к плохо сходящимся, а иногда и расходящимся рядам.

¹ См. работу [9].

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ВИБРАЦИИ КОРАБЛЯ

§ 36. ВОЗМУЩАЮЩИЕ СИЛЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ВИБРАЦИЮ КОРПУСА И ЕГО ОТДЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Основной причиной, вызывающей общую установившуюся вибрацию корпуса—так называемую ходовую вибрацию, является работа его главных механизмов и периодические изменения величины гидродинамических давлений, действующих на обшивку. Наибольшей величины эти гидродинамические давления достигают в районе расположения гребных винтов.

Общая вибрация корпуса вызывает местную вибрацию отдельных частей корпуса—перекрытий, балок набора, пластин и т. п., так как при общей вибрации происходит перемещение опорных конструкций указанных частей корпуса.

Иногда значительная местная вибрация вызывается работой вспомогательных механизмов, особенно поршневых, например, вспомогательными поршневыми двигателями или поршневыми насосами. При неблагоприятных обстоятельствах работа вспомогательных механизмов может вызвать и общую вибрацию.

Качка судна на установившемся волнении не может вызвать установившейся вибрации морского судна, так как период возмущающих сил в 10—15 раз больше периода колебаний первого тона судна и при качке происходит статическая деформация корпуса судна. Общая вибрация на волнении может возникнуть лишь у речных нефтеналивных барж значительного размера (длиной $150 \div 200$ м), попадающих на короткие волны; этого вопроса мы коснемся в § 40. Однако при качке могут возникнуть значительные общие затухающие колебания корпуса, вызванные ударом носовой оконечности о встречную волну; этого вопроса мы коснемся в § 38.

Рассмотрим более подробно природу сил, вызывающих установившуюся вибрацию корпуса.

При работе поршневых машин возникают периодические силы инерции как в движении поршня, так и в кривошипно-шатунном

механизме с частотой, равной частоте оборотов коленчатого вала машины. Главный вектор и главный момент этих периодических сил разлагаются в ряды Фурье, так что получается множество гармонических возмущающих сил, частоты которых кратны частоте оборотов коленчатого вала.

Не останавливаясь на вопросе уравнивания сил инерции в поршневых машинах, мы заметим, что в многоцилиндровых машинах есть возможность полностью уравновесить силы инерции и моменты сил инерции низших порядков, амплитуды которых имеют наибольшую величину¹. Поэтому уже в четырехцилиндровых машинах можно добиться достаточно хорошего уравнивания сил инерции. Однако даже при полном уравнивании сил инерции, что практически имеет место в турбинных установках и в установках с многоцилиндровыми машинами, наблюдается вибрация первого порядка, частота которой равна частоте оборотов гребного вала.

Появление этой вибрации может быть вызвано динамической неуравновешенностью вала, гребного винта, редуктора, допущенными неточностями при монтаже валопровода, а также неточностями при изготовлении гребного винта—различием отдельных лопастей по шагу (это может иметь место и при его динамической уравниваемости).

Существующие в настоящее время требования к динамической уравниваемости таковы, что валы, гребные винты и редукторы считаются полностью динамически уравниваемыми. Поэтому нам надо остановиться лишь на рассмотрении вопроса о влиянии неточностей при изготовлении валопровода и различия лопастей гребного винта по шагу.

Прежде всего рассмотрим вопрос о влиянии взаимного смещения опорных подшипников, появляющегося при монтаже вала и неизбежно возникающего при общем изгибе корпуса.

Если ось вала первоначально была прямой, то при смещении опор (подшипников) появятся реакции, величина и направление которых при вращении круглого вала будет оставаться неизменной и, следовательно, не может вызвать вибрации. Переменные реакции могли бы появиться лишь при вращении некруглого вала.

Если же ось вала имела отступления от прямой линии либо вследствие непрямолинейности отдельных участков вала, либо вследствие неточностей монтажа—взаимного смещения центров валов или излома оси вала при соединении участков вала на фланцах, то при вращении даже круглого вала реакции подшип-

¹ Особое внимание надо обращать на уравнивание сил инерции в дизелях с поршневым продувочным насосом. Известен случай, когда на уравниваемый двигатель был навешен продувочный насос, нарушивший уравниваемость.

ников будут поворачиваться, т. е. через подшипники будут передаваться на корпус гармонически изменяющиеся вертикальные и горизонтальные усилия.

Рассмотрим простейший случай, когда искривленная ось вала является плоской кривой, все подшипники находятся в одной вертикальной плоскости, но не расположены на одной прямой.

При совпадении плоскости начального изгиба вала с плоскостью подшипников, для совмещения вала с подшипниками нужно приложить к нему вертикальные усилия, тогда все реакции опор будут находиться в вертикальной плоскости. Если же плоскость начального изгиба вала будет горизонтальной, то нужно сначала приложить к валу горизонтальные усилия, совместить опорные сечения вала с вертикалями, проходящими через опорные подшипники, а затем, прилагая вертикальные усилия, совместить опорные сечения вала с опорными подшипниками.

В этом случае реакции подшипников будут направлены наклонно, т. е. при повороте вала величина и направление реакций будут изменяться, очевидно, по гармоническому закону с частотой вращения вала и могут вызвать вибрацию корпуса.

Однако, как показывают расчеты, при существующих допусках, принимаемых при монтаже валопровода, величины этих переменных реакций незначительны и не могут вызвать заметной общей вибрации корпуса, если только в системе гребной винт—валопровод не возникает резонансных явлений, вызываемых приближением частоты оборотов гребного вала к так называемой критической частоте вращения вала.

Критическая частота вращения вала определяется исходя из следующих соображений.

Пусть вал, погонный вес которого равен γ , вращается с угловой скоростью ω и отклонен от прямолинейной формы на величину v . Тогда на единицу длины вала действует погонная нагрузка от центробежных сил инерции, равная $\frac{\gamma}{g} \omega^2 v$, так что дифференциальное уравнение изгиба должно быть записано в виде

$$EI v^{IV}(x) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 v + q, \quad (718)$$

где q —интенсивность поперечной нагрузки¹.

Дифференциальное уравнение (718) совпадает с дифференциальным уравнением (489), определяющим форму вынужденных колебаний балки при действии на нее гармонической возмущающей нагрузки $q \cos \omega t$; при приближении частоты ω к частоте свободных поперечных колебаний системы гребной винт—валопровод, т. е. к критической частоте вращения вала, опорные

¹ Мы не учитываем так называемого гироскопического эффекта.

реакций, а следовательно, и возмущающие силы, вызывающие вибрацию корпуса, могут существенно возрасти.

Валопроводы всегда проектируются так, чтобы критическая частота была существенно выше наибольшей эксплуатационной частоты вращения вала. Поэтому-то мы практически и не считаемся с возмущающими силами первого порядка, возникающими вследствие неточностей при монтаже валопровода.

Рассмотрим теперь возмущающие силы, возникающие вследствие неодинаковости лопастей гребного винта по шагу.

В этом случае упор, развиваемый каждой лопастью, будет различен, равнодействующая полного упора винта не будет проходить через его центр и к концу гребного вала будет приложена не только сила упора, но и создаваемый ею момент, плоскость действия которого будет вращаться с угловой скоростью вращения вала.

Кроме того, профильные сопротивления лопастей будут различны, многоугольник сил профильных сопротивлений лопастей не будет замкнут, и они приведутся к равнодействующей, вращающейся с угловой скоростью вращения вала.

Таким образом, различие лопастей по шагу порождает возмущающие момент и силу первого порядка, вызывающие изгибные вертикальные и связанные изгибно-крутильные колебания первого порядка. Поэтому в настоящее время ужесточены нормы допустимых отклонений винтов по шагу.

В реальных условиях момент и сила первого порядка будут иметь переменную амплитуду, так как упор каждой лопасти будет изменяться вследствие нахождения винта в неравномерном потоке, вызываемом близостью корпуса. В этом случае возмущающий момент будет периодической функцией времени, но в разложении его в ряд Фурье главным членом будет первый.

Следует заметить, что вибрация второго порядка с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала, практически не наблюдается.

Кроме вынужденной вибрации первого порядка, наблюдается еще так называемая винтовая (или лопастная) вибрация z -го порядка, где z —число лопастей гребного винта.

Эта вибрация вызывается преимущественно пульсирующими давлениями, передающимися корпусу судна через воду. Частота пульсации давления равна, очевидно, частоте прохождения лопастей около корпуса, которая равна $z\omega$.

Некоторая часть возмущающих усилий, возникающая вследствие пульсации упора с частотой $z\omega$, передается корпусу судна через упорные подшипники.

Действующее на корпус пульсирующее давление является периодической функцией времени и при разложении его в ряд Фурье появляются гармонические изменяющиеся давления с частотами $z\omega$, $2z\omega$ и т. д. Коэффициенты рядов быстро убывают,

особенно с удалением от места расположения гребных винтов, и, например, при вычислении обобщенной силы для расчета общей вибрации даже вторым членом разложения с частотой 2ω можно пренебречь.

Амплитуда гармонически изменяющегося давления с частотой 2ω может достигать заметной величины лишь в районе расположения гребных винтов. Это давление нужно учитывать при расчете на вибрацию наружной обшивки.

В случае одновинтового судна пульсирующие давления на корпус не будут симметричны относительно диаметральной плоскости (в связи с вращением винта) и приводятся как к вертикальной, так и к горизонтальной составляющей, равнодействующей этих давлений. Кроме вертикальной вибрации, возникает горизонтальная и крутильная.

У многовинтовых судов винты с разных бортов вращаются в противоположные стороны, но и в этом случае приходится считаться с наличием горизонтальной составляющей пульсирующих давлений, так как гребные винты находятся в различных фазах относительно корпуса, т. е. положение одного винта относительно другого, ему симметричного, не является зеркальным отображением.

Кроме того, у многовинтовых судов приходится наблюдать явление биений, связанное с небольшими различиями в угловых скоростях вращения гребных винтов.

Напомним, что при сложении двух гармонических нагрузок $P \cos \omega t$ и $P \cos \omega_1 t$ получается нагрузка $2P \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega + \omega_1}{2} t$ с медленно меняющейся (при малой разности $\omega - \omega_1$) амплитудой $2P \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t$.

Определение величин указанных выше возмущающих сил от работы винтов является достаточно сложной гидродинамической задачей, на рассмотрении которой мы не можем останавливаться¹. Поэтому мы укажем лишь возможные пути уменьшения возмущающих сил.

Величина пульсирующих гидродинамических давлений существенно зависит от величины зазора между винтом и корпусом и уменьшается с увеличением зазора. Кроме того, уменьшение пульсирующих давлений может быть достигнуто увеличением числа лопастей гребного винта и установкой специальных наделок в районе гребных винтов, выравнивающих поток воды, набегающий на винт.

Заканчивая настоящий параграф, нужно отметить, что вопрос о точном расчете вынужденной вибрации корпуса до настоящего

¹ Этот вопрос подробно рассмотрен в книге Н. Н. Бабаева и В. Г. Лентяева, «Некоторые вопросы общей вибрации судов», Судпромгиз. 1961.

времени не является еще достаточно изученным. Наряду со сложностью вопроса об определении величины возмущающих сил возникает вопрос и о величине и законе внутреннего рассеивания энергии при колебаниях корпуса, а от правильного учета сопротивления результат расчета ходовой вибрации в районе резонанса зависит не менее, чем от правильного определения возмущающих сил.

Вместе с тем избежать резонанса при помощи соответствующего разнесения частот, т. е. создания конструкции, наименьшая частота свободных колебаний которой была бы хотя бы на $15 \div 20\%$ больше наибольшей возможной частоты возмущающей силы, возможно лишь при применении тихоходных двигателей.

В настоящее время применяются настолько быстроходные двигатели, что обычно даже частота четвертого-пятого тона свободных колебаний корпуса лежит ниже частоты возмущающих сил третьего порядка и, следовательно, мы сталкиваемся с необходимостью расчета вынужденных колебаний, частота которых близка к частоте свободных колебаний достаточно высокого тона; эта задача будет нами рассмотрена в § 39.

§ 37. КОЛЕБАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ ВОДЫ

Колебание тела в жидкости нельзя описать дифференциальными уравнениями, которые были нами получены в предыдущей главе и относились, строго говоря, к колебанию тел в безвоздушном пространстве. Точно также нельзя воспользоваться и способами, изложенными во второй главе и основанными на принципе возможных перемещений, ибо при колебании тела в жидкости нам надо рассматривать единую механическую систему тело—жидкость.

При колебании тела в жидкости сама жидкость приходит в колебательное движение, в связи с чем кинетическая энергия системы тело—жидкость будет складываться из кинетической энергии колеблющегося тела и кинетической энергии колеблющейся жидкости. Влияние жидкости на колеблющееся тело реализуется в виде гидродинамических давлений, действующих на поверхность тела.

Для возможности непосредственного использования принципа возможных перемещений нужно уметь вычислять кинетическую энергию жидкости, окружающей колеблющееся тело, а для написания дифференциальных уравнений движения нужно написать дифференциальные уравнения совместных колебаний тела и жидкости.

Будем в дальнейшем предполагать, что жидкость идеальная и несжимаемая, а обтекание тела при его вибрации—потенциаль-

ное, т. е. проекции скорости жидкости в любой точке пространства вычисляются по формулам¹:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (719)$$

где потенциал скорости φ определяется уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (720)$$

При потенциальном обтекании тела давление p определяется интегралом Лагранжа-Коши

$$p = \rho \left\{ f(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \quad (721)$$

где $f(t)$ — некоторая функция, определяемая условиями задачи, ρ — массовая плотность. В случае движения тела в безграничной несжимаемой жидкости, находящейся на бесконечности в покое, $f(t) = p_\infty$ — давлению на бесконечности, а гидродинамическое давление в жидкости определится по формуле

$$p_d = -\rho \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \quad (722)$$

причем из условия покоя жидкости на бесконечности следует, что на бесконечности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (723)$$

В любой точке поверхности тела составляющая скорости тела v_n по нормали к поверхности n должна быть равна скорости жидкости по этому же направлению, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n. \quad (724)$$

Мы не будем останавливаться на рассмотрении решения конкретных задач и ограничимся лишь некоторыми замечаниями, которые помогут разобраться в существе вопроса.

Если в безграничной жидкости движется твердое тело, обладающее шестью степенями свободы и положение его в пространстве определяется шестью обобщенными координатами q_j , то потенциал скорости может быть найден в форме

$$\varphi = \sum_{j=1}^6 \dot{q}_j \varphi_j(x, y, z), \quad (725)$$

¹ См., например, Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа (2-е изд.), Физматгиз, 1959.

где каждый из потенциалов $\varphi_j(x, y, z)$ определяется решением соответствующей задачи о движении рассматриваемого тела с единичной скоростью, соответствующей j -й обобщенной координате.

После нахождения всех потенциалов $\varphi_j(x, y, z)$ дальнейшее решение задачи о движении твердого тела в безграничной жидкости можно вести двумя путями.

Можно, во-первых, определить по формуле (722) давление и найти главный вектор и главный момент гидродинамических давлений, действующих на движущееся тело, после чего не представляет труда составить дифференциальные уравнения движения тела.

При этом существенно отметить, что интеграл от квадратной скобки выражения (722), взятый по поверхности тела, в рассматриваемом случае движения тела в безграничной жидкости обращается в нуль и на основании выражений (722) и (725) можно утверждать, что главный вектор и главный момент гидродинамических давлений будут линейными функциями обобщенных ускорений.

Во-вторых, зная потенциалы $\varphi_j(x, y, z)$, можно найти кинетическую энергию всей жидкости

$$T = \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (726)$$

где интеграл вычисляется по всему объему, занятому жидкостью.

Если подставить в выражение (726) выражение (725), то нетрудно убедиться, что кинетическая энергия жидкости будет представлена однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей. Составляя уравнения движения по схеме Лагранжа, получим, очевидно, те же дифференциальные уравнения, что и по первому способу.

На основании приведенных рассуждений можно сделать вывод: при движении тела в неограниченной жидкости изменяются его инерционные характеристики — обобщенные массы, соответствующие различным обобщенным координатам.

Следует подчеркнуть, что инерция жидкости, как и инерция тела, проявляется лишь при неравномерном движении.

При движении в неограниченной жидкости перпендикулярно продольной оси и в направлении одной из осей сечения бесконечно длинного эллиптического цилиндра кинетическая энергия жидкости на единицу длины цилиндра равна

$$T = \frac{1}{2} \pi b_0^2 \rho v^2,$$

где v — скорость движения цилиндра, b_0 — размер полуоси, перпендикулярной направлению движения, ρ — массовая плотность

жидкости. Поэтому присоединенная масса воды в рассматриваемом случае определяется по формуле

$$\delta M = \pi b_0^3 \rho,$$

которую можно переписать в виде

$$\delta M = \rho F \frac{b_0}{a_0}, \quad (727)$$

где $F = \pi a_0 b_0$ — площадь поперечного сечения эллиптического цилиндра, a_0 — размер полуоси эллипса в направлении движения.

Для круглого цилиндра $b_0 = a_0 = r_0$ и присоединенная масса равна массе жидкости в объеме цилиндра.

При движении шара присоединенная масса определяется по формуле

$$\delta M = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho, \quad (728)$$

т. е. равна половине массы жидкости в объеме шара.

В случае кругового цилиндра мы имеем плоское обтекание (двухмерное), а в случае шара — трехмерное. Поэтому можно сделать вывод, что при трехмерном обтекании, т. е. при наличии перетекания жидкости из одного сечения в другое, присоединенные массы жидкости уменьшаются; в обоих случаях тела имеют одно и то же поперечное сечение — круг.

Присоединенная масса жидкости при движении эллипсоида определяется по формуле

$$\delta M = k \rho V, \quad (729)$$

где

$$V = \frac{4}{3} \pi a_0 b_0 c_0$$

есть объем эллипсоида, a_0 , b_0 , c_0 — его полуоси; коэффициент k зависит от соотношения осей и направления движения.

Значение этого коэффициента при движении вытянутого эллипсоида вращения $a_0 = b_0 = r_0$, $c_0 \geq r_0$ в направлении, перпендикулярном большой полуоси c_0 , приведены в табл. 14.

При $c_0 = r_0$, т. е. для шара, $k = 0,5$, а при $c_0 : r_0 = \infty$, т. е. для бесконечно длинного круглого цилиндра, $k = 1$, что соответствует ранее приведенным результатам.

Для удлиненных тел ($c_0 : r_0 > 5$) коэффициент k приближается к единице, т. е. при определении присоединенных масс можно не учитывать трехмерности обтекания и считать, что каждое поперечное сечение находится в условиях плоского обтекания.

Таблица 14

$c_0 : r_0$	1	1,5	2,0	4,99	∞
k	0,5	0,621	0,702	0,895	1

Значительно более сложен вопрос об определении присоединенных масс жидкости при вибрации упругого тела, так как в этой задаче существенно усложняется определение потенциала скорости.

Действительно, в случае движения твердого тела в жидкости нам была известна форма тела, а в случае вибрации—она непрерывно меняется в процессе движения. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь общей постановки задачи для случая вибрации стержня в неограниченной жидкости.

Как уже было отмечено выше, интеграл от квадратной скобки в выражении (722), взятый по поверхности твердого тела при движении его в неограниченной жидкости, равен нулю. Поэтому для приближенного вычисления интенсивности гидродинамических давлений, действующих на колеблющийся стержень, мы примем выражение

$$p_d = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (730)$$

Считая, что на стержень действует гармоническая возмущающая сила

$$F(x, t) = F(x) \cos \omega t,$$

напишем дифференциальное уравнение колебаний призматического стержня

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(x) \cos \omega t - \rho \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos(v, y) ds, \quad (731)$$

где интеграл берется по периметру поперечного сечения, v —направление нормали к поверхности стержня, колебание происходит в плоскости xoy .

Приравнявая на поверхности тела нормальную составляющую скорости движения поперечного сечения скорости жидкости, получим (для призматического стержня $\cos(v, x) = 0$)

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cos(v, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(v, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(v, z). \quad (732)$$

Полагая

$$v = v(x) \cos \omega t, \quad \varphi = -\omega \varphi(x, y, z) \sin \omega t \quad (733)$$

и подставляя эти выражения в уравнение (731) и условие (732), получим:

$$EI v^{IV}(x) - m \omega^2 v(x) = F(x) + \rho \omega^2 \int_s \varphi(x, y, z) \cos(v, y) ds, \quad (734)$$

$$v(x) \cos(v, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(v, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(v, z), \quad (735)$$

где коэффициент при ω^2 в правой части (734) и является присоединенной массой воды.

Совместное определение «формы» колебаний $v(x)$ и потенциала скорости представляет большие математические затруднения, и задача практически может быть решена только приближенно¹.

Поэтому, не останавливаясь на выписывании ряда условий, которым должны удовлетворять определяемые функции, мы лишь заметим, что величина присоединенных масс должна зависеть от характера колебаний упругого тела. В частности, при колебании тела в жидкости не существует в обычном понимании форм главных свободных колебаний, а следовательно, метод главных координат не применим при расчетах вынужденных колебаний.

Задача еще более усложняется при рассмотрении вибрации упругого тела, плавающего на поверхности раздела двух сред, и в этом случае в математическую формулировку приведенной выше задачи надо внести ряд изменений.

Присоединенную массу для плавающего тела обычно определяют как половину присоединенной массы для «сдвоенного» полностью погруженного тела. Под сдвоенным телом мы понимаем тело, состоящее из наложенных один на другой двух погруженных объемов плавающего тела, причем плоскость ватерлинии является плоскостью симметрии.

В практических расчетах общей вертикальной вибрации корпуса для определения присоединенных масс пользуются формулой Локквуд-Тейлора, полученной теоретико-экспериментальным путем

$$r = \gamma k F \frac{b}{2d} c, \quad (736)$$

где

r —погонный вес присоединенной воды, $тм^{-1}$,

γ —вес единицы объема воды, $тм^{-3}$,

F —площадь погруженной части шпангоута, $м^2$,

b —ширина судна в рассматриваемом сечении, $м$,

d —погружение судна в рассматриваемом сечении, $м$,

k —поправка на трехмерность потока, определяемая по табл. 15 в зависимости от отношения длины судна L к его ширине B ,

c —коэффициент, учитывающий форму шпангоута и принимаемый практически равным единице.

Формула (736) при $k=1$ и $c=1$ совпадает с формулой (727) для определения присоединенной погонной массы при движении эллиптического цилиндра, так как $\rho = \frac{\gamma}{g}$, $b_0 = \frac{1}{2} b$, $a_0 = d$.

¹ Рекомендуем читателю познакомиться со статьей: П. К. Ишков, Определение частот колебаний упругих стержней в жидкости, Прикладная математика и механика, новая серия, т. I, вып. 1, 1937.

Колебание	$L : B$				
	6	7	8	9	10
Двухузловое	0,674	0,724	0,764	0,797	0,825
Трехузловое	0,564	0,633	0,682	0,723	0,760
Четырехузловое	0,550	0,570	0,590	0,610	0,630
Пятиузловое	0,500	0,520	0,540	0,560	0,580

Полагая в формуле (736) $F = \beta b d$, где β — коэффициент полноты шпангоута, преобразуем ее к виду (при $c = 1$)

$$r = \frac{1}{2} \gamma k \beta b^2, \quad (737)$$

т. е. присоединенные массы распределяются по длине судна пропорционально квадратам ординат ватерлинии.

Значения коэффициента k для двухузловых и трехузловых колебаний заимствованы у Локквуд-Тейлора, а две последние строки таблицы получены путем экстраполяции на основании следующих соображений.

Рассматривая табл. 15, нетрудно убедиться, что значение коэффициента k для трехузлового колебания равно значению коэффициента k для двухузлового колебания, но для судна длиной

$$l_2 = 0,78L,$$

где L — длина судна.

Поэтому можно приближенно определить присоединенные массы для колебания высшего тона как для колебания первого тона, но для судна приведенной длины¹.

Для стержня без упругого основания из формулы (389) следует

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

и частоту λ_n можно определить как первую частоту балки с приведенной длиной

$$\lambda_n = \lambda_1^{(0)} = \left(\frac{\mu_1}{l_{\text{пр}}} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

где

$$l_{\text{пр}} = \frac{\mu_1}{\mu_n} l.$$

¹ Приводимые ниже соображения являются достаточно ориентировочными, но мы не располагаем более точными данными о присоединенных массах при высших формах колебаний.

Применив формулу (419) для безопорной балки, получим

$$l_{\text{пр}} = \frac{3}{2n+1} l, \quad (738)$$

причем эта формула справедлива уже при $n=3$.

Для определения приведенной длины судна мы воспользуемся приближенной формулой

$$l_n = \left[\frac{3}{2n+1} + \frac{2,9(n-1)}{n^4} \right] L, \quad (739)$$

дающей $l_2=0,78L$ и стремящейся к выражению (738) при увеличении n .

Замечая, что значение $k=0,564$ для трехузлового колебания при $L:B=6$ соответствует тому же значению k для двухузлового колебания при $L:B=6 \times 0,78=4,7$, построим по точкам кривую значений k в функции от отношения $L:B$ и экстраполируем ее до значения $L:B=1$, как это показано на рис. 36.

Приведенные в табл. 15 значения коэффициента k получены согласно графику рис. 36 при определении приведенной длины судна по формуле (739).

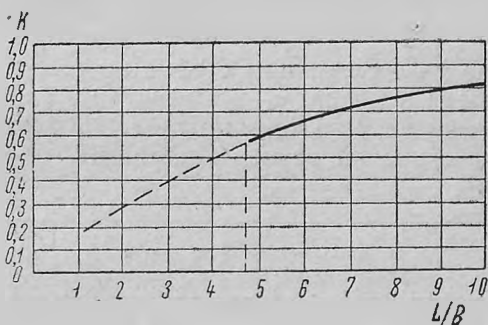


Рис. 36.

При расчете свободных колебаний значение коэффициента k берут из соответствующей строки таблицы (в случае определения частоты первого тона — для двухузлового колебания и т. д.). При расчете вынужденных колебаний значение коэффициента k берут в соответствии с формой вынужденных колебаний, близкой при резонансе к форме свободных колебаний того тона, частота которого равна частоте возмущающей силы; это, вообще, справедливо только для низших частот при малых сопротивлениях.

Указанный способ определения присоединенных масс воды не применим в случае плавания судна на мелководье и в каналах, а также при плавании на волнении. Однако, мы не можем привести каких-либо сведений о величине присоединенных масс в этих случаях.

При рассмотрении горизонтальных колебаний принимают, что в средней части судна $r=0,8d^2$, а в оконечностях $r=0,6d^2$, где d — в метрах, r — в $m \cdot m^{-1}$; вопрос этот исследован еще недостаточно.

Крутильные колебания корпуса также вызывают движение масс воды, и при расчете крутильных колебаний необходимо вводить в расчет присоединенные моменты инерции масс воды.

Заметим, что независимое определение присоединенных масс и присоединенных моментов инерции при совместных изгибно-крутильных колебаниях теоретически недопустимо.

Действительно, присоединенные массы получатся как коэффициент при обобщенном ускорении при определении проекции равнодействующей гидродинамических давлений на горизонтальную ось, а присоединенный момент—как коэффициент при вычислении момента от тех же давлений.

При расчете на вибрацию пластин интенсивность присоединенной массы на единицу площади пластины, соприкасающейся с жидкостью, находят по формуле

$$r_1 = \kappa \gamma b_0, \quad (740)$$

где γ —вес единицы объема жидкости, b_0 —меньший размер пластины в плане, κ —коэффициент, определяемый для формы колебаний первого тона по табл. 16 в функции от отношения $b_0 : a_0$, a_0 —большой размер пластины.

Таблица 16

κ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Свободно опертая	0,78	0,76	0,71	0,65	0,61	0,55	0,51	0,47	0,45	0,43	0,42
Жестко заделанная	0,70	0,68	0,61	0,50	0,45	0,43	0,41	0,39	0,37	0,35	0,33

Формула (740) может быть использована и для приближенного определения интенсивности веса присоединенной воды при расчете на вибрацию днищевого перекрытия.

При колебании пластины в жидкости, т. е. соприкасающейся с жидкостью с двух сторон, присоединенная масса должна быть увеличена в два раза.

Формула (740) и табл. 16 относятся к случаю, когда пластина опирается на неподвижный контур. Вопрос о том, как нужно определять присоединенную массу при колебаниях опорного контура и пластины, что, например, имеет место при ходовой вибрации днищевых пластин и перекрытий, до настоящего времени остается открытым¹. Поэтому нам при-

¹ Решение, опубликованное В. С. Чувиковским в журнале «Судо-строение» № 4 за 1959 г., является приближенным. Точное решение весьма сложно.

дятся ограничиться приводимыми ниже чисто умозрительными соображениями (имеется в виду случай ходовой вибрации).

Как уже указывалось выше, для определения присоединенной массы необходимо найти потенциал скорости при обтекании колеблющегося тела. Чтобы решить вопрос о том, нужно или не нужно учитывать местную вибрацию при определении присоединенных масс, следует оценить, может ли существенно измениться условие обтекания тела при наличии местной вибрации.

Вибрация днищевой обшивки не может сколько-нибудь существенно повлиять на условие обтекания корпуса при его общей вибрации. Косвенным подтверждением справедливости этого заключения является сравнение величин присоединенных масс на единицу площади днища при общей и местной вибрации.

Действительно, согласно формуле (737) среднее по ширине судна значение веса $r_{cp} = \frac{r}{b}$ присоединенной массы воды на единицу площади днища определится по формуле

$$r_{cp} = \frac{1}{2} \gamma k \beta b. \quad (741)$$

Сравнивая же формулы (741) и (740), принимая во внимание значения k и λ , а также $b \gg b_0$, можно заключить, что $r_{cp} \gg r_1$.

Поэтому при расчете ходовой вибрации днищевой обшивки присоединенные массы следует определять, как и при общей вибрации корпуса, т. е. по формуле (741); формулой (740) нужно пользоваться для определения присоединенных масс при расчете вибрации бортовой обшивки, плоскость которой близка к вертикальной. Однако при наличии горизонтальной вибрации присоединенную массу следует, по-видимому, определять, исходя из тех же соображений, что и при вертикальной вибрации.

Окончательный ответ на этот вопрос можно получить лишь на основании прямого эксперимента, но постановка такого эксперимента исключительно трудна.

При расчете ходовой вибрации днищевых перекрытий значения присоединенных масс по формулам (740) и (741) получаются достаточно близкими, так как $b_0 = b$. Поэтому, возможно, что и в этом случае нужно применять формулу (741). Формулой (740) следует пользоваться при расчете местной вибрации, если общая вибрация незначительна.

Как уже отмечалось, влияние присоединенной массы реализуется в виде гидродинамических давлений, действующих на поверхность движущегося в жидкости тела и линейным образом зависящих от обобщенных ускорений.

Это должно быть понятно и на основании законов Ньютона о том, что произведение массы на ускорение равно действующей силе и действие равно и прямо противоположно противодействию. Противодействием при движении тела является гидродинамическое давление.

Если r есть вес присоединенной массы на единицу площади, $a=g:n$ —ускорение рассматриваемой части корпуса при вибрации, то гидродинамическое давление определится по формуле

$$p_g = \frac{r}{g} a = \frac{r}{n}. \quad (742)$$

Величина n при вибрации довольно значительна, т. е. допустимая величина ускорения при вибрации является малой частью земного ускорения g . Если $n=6$, что может часто иметь место, то величина гидродинамического давления окажется равной всего 15% интенсивности веса присоединенных масс.

Порядок дополнительных гидродинамических давлений при вибрации можно оценить следующим образом.

Как видно из формулы (736), погонный вес присоединенной массы воды несколько меньше сил поддержания γF на единицу длины корпуса, так что вес присоединенной воды на единицу площади несколько меньше величины гидростатического давления на ту же площадь при плавании судна на тихой воде.

Поэтому величина гидродинамического давления на днище в случае общей вибрации корпуса меньше гидростатического давления на тихой воде.

§ 38. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ УДАРЕ НОСОВОЙ ОКОНЕЧНОСТЬЮ О ВСТРЕЧНУЮ ВОЛНУ

При качке судна на взволнованном море непрерывно изменяются форма погруженной части корпуса и величина присоединенных масс воды. Поэтому судно следовало бы рассматривать как тело переменной массы и соответственным образом писать дифференциальные уравнения движения. Однако в расчетах качки это обстоятельство не учитывают, так как величина всей присоединенной массы меняется незначительно и влиянием изменения присоединенной массы воды на качку можно пренебречь.

Вместе с тем изменяемость присоединенных масс при качке судна может в некоторых случаях вызвать появление быстро изменяющихся значительных местных гидродинамических давлений, воспринимаемых как удар и способных оказать не только значительное силовое воздействие на обшивку и набор в оконечности судна, но и вызвать общую вибрацию корпуса.

Явление удара носовой оконечности о встречную волну, известное под названием «слеминага», привлекло в последнее время значительное внимание, и ему посвящен ряд исследований¹.

¹ См. по этому вопросу статьи: Watanabe I. The Strength of Ship going among Waves. Memoirs of the Faculty of Engineering Kyushu University, vol. 16, No 4, 1957.

Чувиковский Г. С., Исследование величин внешних сил, действующих на корпус судна в условиях удара о встречную волну, Труды НТО судостроительной промышленности, вып. 35, Судпромгиз, 1960.

Не ставя перед собой цели дать расчетные формулы, так как ввиду сложности явления и ряда принимаемых допущений такие формулы могли бы быть рекомендованы только после тщательной экспериментальной проверки, мы рассмотрим ниже лишь существо рассматриваемого вопроса и сделаем некоторые выводы, носящие качественный характер.

Для переменной массы второй закон Ньютона должен быть записан в виде

$$\frac{d}{dt}(mv) = P, \quad (743)$$

где m — масса тела, v — абсолютная скорость, P — действующая сила.

Выполняя в выражении (743) дифференцирование по времени, получим

$$P = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}. \quad (744)$$

Как в расчетах качки, так и в расчетах вибрации мы учитываем присоединенные массы воды, но считаем их «постоянными», т. е. учитываем лишь первый член в правой части выражения (744) и принимаем для присоединенной массы m ее значение, соответствующее положению судна на тихой воде. Это справедливо лишь для вибрации судна на тихой воде.

Поскольку гидродинамические давления, соответствующие постоянным присоединенным массам, нами уже рассмотрены, рассмотрим теперь дополнительные гидродинамические давления, определенные формулой

$$P_d^{(1)} = \frac{v}{b} \frac{dm}{dt}, \quad (745)$$

где m — погонная присоединенная масса, b — ширина сечения, v — абсолютная скорость погружения поперечного сечения судна в воду.

Вес присоединенной массы воды при расчетах качки может быть приближенно определен по формуле (737), но значение коэффициента k , учитывающего неплоскопараллельность потока, должно несколько отличаться от значений, приведенных в первой строке табл. 15 (в сторону увеличения).

При рассмотрении явления «слеминага» в ряде работ задача об определении усилий в случае изменения присоединенных масс в процессе погружения шпангоута в воду решалась, как для клина, обладающего некоторой массой, при его свободном падении с некоторой начальной скоростью v_0 .

Такая постановка задачи была применена при рассмотрении удара во время посадки гидросамолета, но при рассмотрении качки судна подобный прием весьма условен.

Как уже было отмечено, удары при «слеминге» не вызывают существенных изменений параметров качки. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что скорость погружения поперечного сечения в воду нам известна и может быть получена на основании расчета качки.

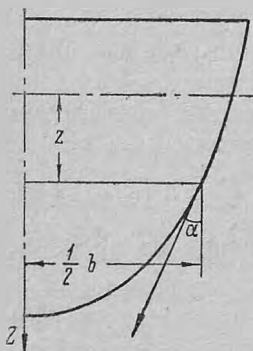


Рис. 37.

Рассмотрим поперечное сечение, изображенное на рис. 37, где z —ордината волны относительно ватерлинии на тихой воде; определим присоединенные массы согласно формуле (737)

$$m = \frac{r}{g} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} k \beta b^2 \quad (746)$$

и будем в дальнейшем для простоты считать, что $\beta = \text{const}$; это предположение соответствует случаю погружения клина.

Так как

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (747)$$

то займемся вычислением входящих в выражение (747) производных $\frac{dm}{dz}$ и $\frac{dz}{dt}$.

Согласно выражению (746) (при $\beta = \text{const}$)

$$\frac{dm}{dz} = \frac{\gamma}{g} k \beta b \frac{db}{dz},$$

но (см. рис. 37)

$$\frac{db}{dz} = 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

поэтому окончательно

$$\frac{dm}{dz} = 2 \frac{\gamma}{g} k \beta b \operatorname{tg} \alpha. \quad (748)$$

Ордината волны относительно плоскости ватерлинии определится по формуле¹

$$z = r_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right) - r_0 - x\psi, \quad (749)$$

где r_0 —полувысота волны, м,

λ —длина волны, м,

$$\tau_k = \frac{\tau}{1 - \frac{v_k}{c}}, \text{ сек.},$$

v_k —скорость корабля, положительная при ходе за волной, м·сек⁻¹,

$\tau = 0,8 \sqrt{\lambda}$ —период волны, сек.,

$c = 1,25 \sqrt{\lambda}$ —скорость волны, м·сек⁻¹.

¹ См. А. А. Курдюмов, Прочность корабля, Судпромгиз, 1956, стр. 62.

Таким образом,

$$\frac{dz}{dt} = r_0 \frac{2\pi}{\tau_k} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right) - \dot{\zeta}_0 - x\dot{\psi}. \quad (750)$$

Абсолютная скорость поперечного сечения корабля

$$v = \dot{\zeta}_0 + x\dot{\psi} \quad (751)$$

и гидродинамическое давление в соответствии с выражениями (745), (747), (748) и (750) определится по формуле

$$p_d^{(1)} = (\dot{\zeta}_0 + x\dot{\psi}) \left[r_0 \frac{2\pi}{\tau_k} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right) - \dot{\zeta}_0 - x\dot{\psi} \right] 2\gamma k\beta \operatorname{tg} \alpha, \quad (752)$$

где $\operatorname{tg} \alpha$ находится для значения z , определяемого по формуле (749). При $z > T$ — осадки судна — гидродинамическое давление равно нулю.

Из формулы (752) видно, что значительные гидродинамические давления могут возникнуть при больших значениях $\operatorname{tg} \alpha$, т. е. при входе в воду оконечностей и малой килеватости.

Выполнив расчет качки и определив:

$$\zeta_0 = A \cos \frac{2\pi t}{\tau_k} + B \sin \frac{2\pi t}{\tau_k},$$

$$\psi = a \cos \frac{2\pi t}{\tau_k} + b \sin \frac{2\pi t}{\tau_k},$$

нужно найти такое положение судна относительно волны, когда выйдет из воды наибольшая по длине часть килевой линии (конечно, если это для рассматриваемого судна может иметь место), и построить график изменений погонных давлений $p_d^{(1)}$ в различных сечениях судна в функции от времени.

Значительные давления будут существовать в течение такого отрезка времени, пока в воду не войдет скул, т. е. пока обвод шпангоута не приблизится к вертикали.

Зная закон изменения нарузки во времени, можно произвести расчет вибрации и найти дополнительный изгибающий момент. Однако, как это было уже показано в § 23, такой расчет должен оказаться весьма сложным (ряд для определения изгибающего момента будет сходиться достаточно медленно, а при очень малом времени существования больших гидродинамических давлений может оказаться и расходящимся).

Мы не останавливаемся на более детальном рассмотрении этого вопроса, так как простые расчетные формулы могут быть получены только ценой принятия ряда допущений, приемлемость которых едва ли может быть убедительно обоснована.

Определенные указанным выше способом гидродинамические давления могут быть использованы и для расчетов местной проч-

ности, но при этом применение статического метода расчета недопустимо и требуется выполнение динамического расчета¹.

В заключение следует заметить, что значительных ударов можно ожидать у судов с небольшой осадкой; у судов со значительной осадкой, превосходящей примерно $0,03L$, удары практически не наблюдаются. Так как удары появляются при резонансной килевой качке, то, изменяя скорость или курс судна, можно всегда выйти из резонанса и тем самым избежать ударов.

§ 39. РАСЧЕТ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРАБЛЯ

Схемы расчета частот свободных и вынужденных колебаний непризматических балок были достаточно подробно рассмотрены в предыдущих главах и теперь нам остается сделать лишь некоторые замечания общего характера.

Определение частот свободных колебаний может быть выполнено любым из указанных выше способов, но энергетический метод, как это было отмечено, практически приемлем лишь для определения первых двух-трех частот.

Замена судна многомассовой системой может быть использована для определения любой из частот свободных колебаний, особенно если воспользоваться указанным в § 9 способом подбора и отделения частот.

Способ этот особенно удобен в том отношении, что изменение присоединенных масс при определении различных частот требует лишь изменения элементов определителя, стоящих на главной диагонали, все же остальные элементы, зависящие от упругих свойств корпуса, остаются без изменения.

Значительно сложнее применение метода последовательных приближений, а также применение процесса последовательной ортогонализации при уточнении фундаментальных функций в энергетическом методе.

В этом случае возникает два вопроса: 1) каким из условий ортогональности — по кинетической или по потенциальной энергии — надо пользоваться, 2) какие присоединенные массы надо вводить в расчет при использовании условия ортогональности по кинетической энергии.

Однако ни на один из этих вопросов нельзя дать определенного ответа.

¹ Иной подход к определению гидродинамических давлений для расчета местной прочности предлагается в статье Я. Ф. Шарова «Об ударе судна днищем о встречную волну», Труды НТО судостроительной промышленности, вып. 35, Судпромгиз, 1960. Этот подход дает возможность определить наибольшие возможные местные давления на обшивку, но значительно преувеличивает их действительную величину.

В § 14 был приведен пример, когда фундаментальные функции удовлетворяли условиям ортогональности по потенциальной энергии, но не удовлетворяли условиям ортогональности по кинетической энергии. Построение путем последовательной ортогонализации новой системы фундаментальных функций, удовлетворяющих второму условию ортогональности, но не удовлетворяющих первому, позволило существенно повысить точность при определении частот. Этот пример говорит в пользу ортогонализации по кинетической энергии, но, возможно, существуют примеры, приводящие к другим выводам.

При применении метода последовательных приближений следует, по-видимому, пользоваться условиями ортогонализации по кинетической энергии. Это можно подтвердить на основании следующих соображений.

Во-первых, как видно из § 21, из интегрального уравнения колебаний непосредственно следует ортогональность по кинетической энергии; во-вторых, при учете сдвига эти условия ортогональности по потенциальной энергии, зависящей от изгиба и от сдвига, не могут быть выписаны в функции от суммарной стрелки прогиба.

Что касается выбора присоединенных масс при ортогонализации, то и на этот вопрос нельзя дать определенного ответа.

Как уже было отмечено в § 37, при колебании тела в жидкости не существует в обычном понимании главных координат, а следовательно, и свойств ортогональности, и задача решается приближенно.

Например, при определении путем последовательных приближений второй формы колебаний мы учитываем присоединенную массу, соответствующую второй форме колебаний, и удовлетворяем условиям уравновешенности сил и моментов сил инерции с учетом этой массы. При определении же первой формы колебаний мы производим все расчеты с учетом присоединенной массы, соответствующей первой форме колебаний.

Поскольку уже при определении второй формы колебаний методом последовательных приближений нужно пользоваться формулой типа (638), то возникает вопрос о том, какую присоединенную массу надо учитывать в условии ортогональности (630).

Для линейной комбинации (638) функций, каждая из которых удовлетворяет условиям уравновешенности при своей присоединенной массе, условия уравновешенности выполняться не будут. Эти условия будут выполняться лишь в том случае, когда при уравновешивании каждой из функций принимается одна и та же присоединенная масса.

Поэтому можно применять один из двух способов.

1. При определении методом последовательных приближений, например, формы колебаний пятого тона предварительно находят все низшие формы колебаний при присоединенных массах,

Соответствующих пятому тону, что приводит к значительному увеличению объема вычислений.

2. Записывают условие ортогональности в виде

$$\int_{(t)} \sqrt{m_n} v_n(x) \sqrt{m_p} v_p(x) dx = 0 \text{ при } n \neq p, \quad (753)$$

где m_n — погонная масса корпуса с присоединенной водой, соответствующей n -й форме колебаний, m_p — то же для p -й формы колебаний, которым и следует пользоваться при вычислении методом последовательных приближений.

К найденной форме колебаний, удовлетворяющей условиям (753), нужно прибавить линейный член и подобрать коэффициенты из условия уравниваемости сил и моментов сил инерции.

Любой из указанных способов является приближенным, но трудоемкость второго несравненно меньше. Что касается точности, то нет оснований ожидать существенной разницы в окончательных результатах.

Для расчета ходовой вибрации необходимо: 1) определить возмущающие силы; 2) учесть внутреннее рассеивание энергии в корпусе, так как ходовая вибрация представляет наибольший интерес в районе резонанса; 3) выбрать метод расчета для определения формы вынужденных колебаний.

Определение величин возмущающих сил (см. § 36) производится путем специального расчета, изложение которого выходит за рамки настоящего учебника.

Что касается учета внутреннего рассеивания энергии, то результаты натурных экспериментов с общей вибрацией более согласуются с гипотезой Фогта, чем с гипотезой Сорокина. При рассмотрении колебаний отдельных конструкций лучше подтверждается гипотеза Сорокина, вообще же следует принимать

$$\gamma_c = \gamma'_c + \gamma''_c \omega. \quad (754)$$

Коэффициенты γ'_c и γ''_c не могут быть установлены на основании опытов с малыми моделями и причины этого были достаточно объяснены в § 24. Поэтому при практических расчетах вибрации коэффициенты γ'_c и γ''_c следует определять на основании экспериментов со сходными конструкциями.

Опыты показывают, что при вибрации палубных перекрытий $\gamma''_c = 0$, $\gamma'_c = 0,05 \div 0,06$; днищевых $\gamma''_c = 0$, $\gamma'_c = 0,08 \div 0,11$, тогда как для образцов из судостроительных сталей $\gamma'_c = 0,002^1$. Последняя величина согласуется с приведенными в § 24 данными, относящимися к строительной стали.

При общей вибрации судна $\gamma'_c = 0$; величина же γ''_c зависит от типа судна.

¹ А. А. Арсюткин, Расчет вынужденных колебаний перекрытий судового корпуса, «Судостроение», № 3, 1957.

Не исключена возможность, что на общей вибрации вблизи резонанса сказывается гидродинамическая нелинейность, связанная с отброшенными в выражении (722) нелинейными членами, а также упругая нелинейность, появляющаяся при изгибе корпуса.

Расчет ходовой вибрации корпуса целесообразнее всего производить энергетическим методом (см. § 17), если частота возмущающей силы не превосходит третьей частоты свободных колебаний. При высоких частотах возмущающих сил использование энергетического метода становится затруднительным, так как нужно брать большое число членов ряда, если только резонансные члены не окажутся малыми вследствие малости обобщенных сил и соответствующих коэффициентов динамичности.

Не говоря уже о погрешностях при вычислении интегралов, следует ожидать появления малой разности и при вычислении суммы ряда.

С подобного рода затруднениями можно столкнуться и при расчете судна как многомассовой системы, но в этом случае затруднения могут быть гораздо легче преодолены, так как коэффициенты системы уравнений вычисляются достаточно просто, а при пользовании малыми вычислительными машинами можно сохранять достаточное число значащих цифр, обеспечивающих необходимую точность расчета.

В связи с указанными затруднениями при расчете вынужденных колебаний высокой частоты заслуживает внимания предложение Н. Н. Бабаева¹.

Согласно этому предложению судно заменяется приведенной призматической балкой, имеющей с судном равную длину и асимптотически совпадающие высшие частоты, после чего расчет вынужденных колебаний производится как для призматической балки, т. е. получается в замкнутом виде.

Однако в предложении Н. Н. Бабаева имеется неопределенность: условие равенства высших частот определяет лишь соотношение между погонной массой и жесткостью приведенной балки, что недостаточно для расчета вынужденных колебаний, так как нужно иметь отдельные значения погонной массы и жесткости.

При замене судна равночастотной призматической балкой следует учитывать влияние сдвига на высшие частоты, для чего можно воспользоваться формулой (657). На основании зависимости (389) при $k_0 = 0$

$$l \sqrt{\frac{m_0}{I_0}} = \int_0^l \sqrt{\frac{m}{I} \left[1 + 2(1 + \nu) \frac{I}{f l^2} \mu_n^2 \right]} dx. \quad (755)$$

¹ Н. Н. Бабаев, Современное состояние и развитие вопроса о вибрации судов, «Судостроение», № 3, 1956.

Правая часть выражения (755) зависит от n — номера частоты свободных колебаний, причем n следует принимать соответствующим той частоте λ_n , которая наиболее близка к частоте возмущающей силы.

Для установления второго соотношения между m_0 и I_0 целесообразно исходить из граничных условий, так как при расчетах ходовой вибрации от действия гидродинамических давлений равнодействующая последних приводится к сосредоточенной силе, приложенной на конце стержня.

Граничные условия должны быть записаны в виде:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = P(t),$$

где $P(t)$ — заданная возмущающая сила.

На основании первого граничного условия второе преобразуется

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = P(t),$$

где значение I вычисляется для концевое сечения стержня.

Чтобы правильно учесть силовое воздействие возмущающей силы на судно и добиться равенства перемещений судна и эквивалентной балки в месте приложения силы, момент инерции I_0 площади поперечного сечения эквивалентной балки должен быть равен моменту инерции I площади поперечного сечения судна в месте приложения возмущающей силы.

При замене корпуса эквивалентной призматической балкой мы не получим подобия форм вынужденных колебаний и, по-видимому, можно ожидать удовлетворительного результата лишь в случае определения амплитуды колебаний нагруженного конца балки. Окончательный ответ на вопрос может быть получен после сопоставления результатов точных и приближенных расчетов.

Сложность и громоздкость расчетов свободных и вынужденных колебаний судна заставляют искать пути, упрощающие эти расчеты. Одним из путей и является изложенный выше способ замены корпуса эквивалентной призматической балкой.

Другим путем упрощения расчетов является использование теории подобия, так как корпуса судов одних типов сравнительно мало отличаются один от другого по распределению нагрузки и по распределению жесткости.

Воспользовавшись общим выражением (470), получим для непризматического стержня вместо дифференциального уравнения (471) дифференциальное уравнение (при $k_0=0$ и $\beta=0$)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\gamma_c}{\omega} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x) \cos \omega t. \quad (756)$$

При расчетах общей вибрации, как это уже отмечалось внутреннее сопротивление учитываются по Фогту, т. е. используется зависимость (469), в которой μ является заданным.

Положим в дифференциальном уравнении:

$$I = I_0 i(\xi), \quad m = m_0 m(\xi), \quad x = \xi L, \quad q(x) = q_0 q(\xi),$$

где $i(\xi)$, $m(\xi)$ и $q(\xi)$ — безразмерные функции, I_0 , m_0 и q_0 — коэффициенты пропорциональности.

Вводя для удобства выводов комплексную возмущающую силу $q(x) e^{i\omega t}$ и полагая $v = v_0(\xi) e^{i\omega t}$, преобразуем дифференциальное уравнение (756) к виду

$$[(1 + i\gamma_c) i(\xi) v_0''(\xi)]'' - \frac{m_0 \omega^2 L^4}{EI_0} m(\xi) v_0(\xi) = \frac{q_0 L^4}{EI_0} q(\xi). \quad (756')$$

Нетрудно сообразить, что решение дифференциального уравнения (756') может быть представлено в виде

$$v_0(\xi) = \frac{q_0 L^4}{EI_0} f(\xi, \gamma_c, \nu), \quad (757)$$

где

$$\left(\frac{\nu}{L}\right)^4 = \frac{m_0 \omega^2}{EI_0}, \quad (757')$$

а функция $f(\xi, \gamma_c, \nu)$ может быть заранее вычислена или получена экспериментально для типовых функций $i(\xi)$, $m(\xi)$ и $q(\xi)$ в достаточно широких пределах изменения аргументов γ_c и ω .

Амплитуда колебаний определится по формуле

$$v_a(\xi) = |v_0(\xi)| = \frac{q_0 L^4}{EI_0} |f(\xi, \gamma_c, \nu)|. \quad (758)$$

Если для рассматриваемой балки приемлема гипотеза Сорокина—Бока, то γ_c есть величина постоянная и функция $f(\xi, \gamma_c, \nu)$ должна быть при заданном ξ определена в функции параметра ν , т. е. может быть представлена в виде кривой. Если γ_c определяется зависимостью (754), то функция $f(\xi, \gamma_c, \nu)$ будет зависеть от двух параметров — γ_c и ω , — т. е. может быть представлена в виде семейства кривых.

Для определения частот свободных колебаний нужно воспользоваться формулой

$$\omega_n = \left(\frac{\nu_n}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}, \quad (759)$$

где ν_n — абсциссы максимумов функции $|f(\xi, 0, \nu)|$

Мы ограничились рассмотрением простейшего случая, когда не учитывается деформация сдвига. Указанные преобразования могут быть выполнены и в более общем случае; после вычисления

указанных функций трудоемкость практических расчетов вибрации может быть сведена до минимума.

В заключение остановимся на вопросе о нормах допустимой вибрации.

Необходимость нормирования вибрации вызывается, во-первых, ее вредным влиянием на человеческий организм, во-вторых, вредным влиянием на работу отдельных судовых приборов и устройств, могущих при вибрации выйти из строя, и, наконец, в некоторых случаях значительными напряжениями, вызывающими появление трещин усталости.

Норм допустимой вибрации до настоящего времени не опубликовано, и поэтому мы вынуждены ограничиться некоторыми общими соображениями и приведением сугубо ориентировочных данных.

На основании имеющегося опытного материала можно сделать вывод, что критерием чувствительности человека к колебаниям с низкими частотами 1 — 10 гц является амплитуда ускорений, а при частотах выше 10 гц — амплитуда скорости.

При низких частотах сильно ощутимы ускорения с амплитудой порядка 400 мм/сек², а при высоких частотах — скорости с амплитудой около 6 мм/сек. Указанным величинам при частоте 10 гц соответствует амплитуда колебаний ~ 0,1 мм.

Вредное влияние в случае длительного воздействия при частотах 1 — 10 гц оказывают ускорения с амплитудой 1000 мм/сек², а при больших частотах — скорости с амплитудой 16 мм/сек. Указанным величинам при частоте 10 гц соответствует амплитуда колебаний ~ 0,25 мм.

У транспортных судов ходовая вибрация имеет обычно малую частоту и основным критерием является амплитуда ускорений. Указанные выше величины не должны быть превзойдены в тех помещениях судна, где постоянно находятся люди; вне этих помещений нормы допустимой вибрации могут быть несколько повышены.

В качестве сугубо ориентировочных норм можно принять для пассажирских судов амплитуду ускорения 1000 мм/сек², а для грузовых — 1500 мм/сек². При этом амплитуды колебаний не должны превосходить соответственно 1,0 и 1,5 мм.

Нормы допустимой вибрации для различных приборов и установок обычно указываются в технических характеристиках этих приборов; нормы же местной вибрации пластин зависят от норм допускаемых напряжений, размеров и материала пластин (их модуля нормальной упругости).

§ 40. ВИБРАЦИЯ ГИБКИХ СУДОВ НА ВОЛНЕНИИ

При вибрации судна на волнении ордината волнового профиля относительно ватерлинии определится выражением

$$z = r_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right) - v(x, t), \quad (760)$$

так что дифференциальное уравнение «волновой» вибрации запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \\ = \gamma b \left[r_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right) - v \right], \end{aligned} \quad (761)$$

где значения r_0 , λ и τ_k пояснены в § 38, b —ширина по ватерлинии, m —погонная масса судна вместе с присоединенной водой.

При написании уравнения (761) учтено лишь внутреннее сопротивление, так как влиянием внешнего сопротивления при малых частотах можно пренебречь.

Остановимся на вопросе об учете присоединенных масс при написании уравнения (761), которые пока нами учтены, как и для вибрации на тихой воде.

Вопрос этот является достаточно сложным и полностью не решен даже при исследовании килевой качки. В расчетах по определению изгибающего момента на волнении принято вводить присоединенные массы воды в качестве множителей при ускорении поперечного сечения судна относительно волны¹, в связи с чем в правой части дифференциального уравнения (761) должен был бы появиться член

$$-m_1 \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 r_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right), \quad (762)$$

где τ —истинный период волны, m_1 —погонная масса присоединенной воды.

Введение члена (762) в правую часть дифференциального уравнения (761) эквивалентно замене полувысоты волны r_0 величиной

$$r'_0 = r_0 \left[1 - \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \frac{m_1}{\gamma b} \right], \quad (763)$$

и это всегда может быть учтено при расчете. Однако мы не имеем оснований утверждать, что такой способ является достаточно надежным при расчете «волновой» вибрации, и вынуждены оставить вопрос открытым. Нужно иметь в виду, что в дифференциальном уравнении (761) возмущающие силы преувеличены.

Остановимся на вопросе об интегрировании дифференциального уравнения (761). Так как

$$\cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau_k} \right) = \cos \nu x \cos \omega_k t + \sin \nu x \sin \omega_k t, \quad (764)$$

¹ См. сноску на стр. 268,

где

$$\nu = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega_k = \frac{2\pi}{\tau_k},$$

то решение дифференциального уравнения (761) может быть найдено в виде

$$v(x, t) = v_1(x) \cos \omega t + v_2(x) \sin \omega t. \quad (765)$$

Подставляя выражение (765) в уравнение (761) и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях времени, можно получить систему дифференциальных уравнений для определения функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$. Мы не выписываем этой системы уравнений, так как в случае переменных коэффициентов решение ее затруднительно.

При наличии упругого основания и внутреннего сопротивления в общем случае не существует главных координат и решение уравнения (761) не может быть получено разложением в ряд по формам главных свободных колебаний $v_n(x)$, определяемых дифференциальным уравнением

$$(EI v_n'') + (\gamma b - m \lambda_n^2) v_n(x) = 0, \quad (766)$$

где λ_n — частота колебаний n -го тона при отсутствии сопротивления и учете упругого основания.

Полагая для получения приближенного решения

$$v(x, t) = (A_n \cos \omega_k t + B_n \sin \omega_k t) v_n(x), \quad (767)$$

где $v_n(x)$ — форма свободных колебаний, удовлетворяющая уравнению (766), подставим выражение (767) в дифференциальное уравнение (761). Тогда, используя уравнение (766), получим:

$$\begin{aligned} [A_n m (\lambda_n^2 - \omega_k^2) - B_n \omega_k^2 (\gamma b - m \lambda_n^2)] v_n(x) &= \gamma b r_0 \cos \nu x, \\ [A_n \omega_k^2 (\gamma b - m \lambda_n^2) + B_n m (\lambda_n^2 - \omega_k^2)] v_n(x) &= \gamma b r_0 \sin \nu x. \end{aligned}$$

Воспользуемся методом Бубнова — Галеркина, т. е. умножим полученные уравнения на $v_n(x)$ и проинтегрируем по всей длине, что даст:

$$\left. \begin{aligned} A_n (\lambda_n^2 - \omega_k^2) \alpha_n - B_n \omega_k^2 (\gamma \beta_n - \lambda_n^2 \alpha_n) &= \\ = \gamma \int_{(l)} b r_0' v_n(x) \cos \nu x dx, \\ A_n \omega_k^2 (\gamma \beta_n - \lambda_n^2 \alpha_n) + B_n (\lambda_n^2 - \omega_k^2) \alpha_n &= \\ = \gamma \int_{(l)} b r_0' v_n(x) \sin \nu x dx, \end{aligned} \right\} \quad (768)$$

где

$$\alpha_n = \int_{(l)} m v_n^2(x) dx, \quad \beta_n = \int_{(l)} b v_n^2(x) dx. \quad (769)$$

В резонансном случае $\omega_k = \lambda_n$ система (768) распадается на два отдельных уравнения. Подчеркнем еще раз, что под λ_n подразумевается частота свободных колебаний, вычисленная с учетом упругого основания.

Интегрируя уравнение (761) при $\mu=0$ два раза по x и подставляя в правую часть и в член $m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ найденное значение v , можно определить изгибающий момент.

Указанный расчет производится для речных судов, причем принимают $n=1$ или $n=2$ в зависимости от того, с какой частотой свободных колебаний попадает в резонанс волновая нагрузка.

§ 41. ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ОБЩЕЙ И МЕСТНОЙ ВИБРАЦИИ. ЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ГАСИТЕЛЬ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

До сих пор мы изолированно рассматривали общую вибрацию корабля, местную вибрацию перекрытий, пластин и т. д. При рассмотрении общей вибрации считалось, что местная вибрация отдельных конструкций не влияет на общую и эти конструкции учитывались лишь в нагрузке корпуса; при рассмотрении же местной вибрации считалось, что заданными (при расчете ходовой вибрации) являются перемещения опор, полученные из расчета общей вибрации.

Это допущение не всегда является приемлемым и в ряде случаев необходимо рассматривать совместно общую вибрацию корпуса и днищевых перекрытий. На простейшие случаи такого рода мы уже указывали в § 7 и 8.

Если заменить перекрытие приведенной массой на упругой связи, частота колебаний которой равна первой частоте колебаний перекрытия, то для решения вопроса о влиянии местной вибрации на общую можно воспользоваться формулами (72) или (75).

Так, если частота колебаний корпуса будет мала по сравнению с частотой первого тона перекрытия, то, как это видно из формул (73), (74) и (30), при $z \ll 1$ силовое воздействие перекрытия на корпус практически эквивалентно присоединению к нему массы перекрытия и введению малого сопротивления, ибо $B \ll \beta$.

Если частота вынужденных колебаний корпуса приближается к частоте свободных колебаний перекрытия, то величина присоединяемой к корпусу массы при $z=1$ и $\gamma \neq 0$ равна массе перекрытия, т. е. $M=m$, а коэффициент сопротивления

$$B = \frac{\sqrt{mc}}{2\gamma}, \quad (770)$$

При $\gamma=0$ вводимое сопротивление бесконечно велико и как бы создает жесткую опору в том сечении корпуса, к которому присоединена масса. Если сразу предположить отсутствие сопротивления, то при $z=1$ масса M обращается в бесконечность и мы приходим к тому же выводу.

Таким образом, влияние местной вибрации на вынужденные колебания корпуса может быть очень значительным, но для этого, как видно из формулы (770), масса и жесткость перекрытия должны быть значительны; коэффициент сопротивления γ определяется опытным путем и мы им практически варьировать не можем.

В рассматриваемом частном случае $z=1$ формула (770) преобразуется, так как по условию

$$\frac{c}{m} = \omega^2, \quad (771)$$

и приводится к виду

$$B = \frac{m\omega}{2\gamma}, \quad (772)$$

т. е. коэффициент сопротивления оказывается пропорциональным массе перекрытия.

В реальных судовых конструкциях первые частоты свободных колебаний пластин, перекрытий и т. п. соизмеримы с высшими частотами общей вибрации (начиная с пятого тона и выше).

Значительными массами (с учетом присоединенной воды и нагрузки) обладают только днищевые перекрытия. Поэтому лишь они могут оказать заметное влияние на общую вибрацию при действии возмущающей нагрузки достаточно высокой частоты.

Расчет совместной вынужденной вибрации корпуса и отдельных перекрытий является весьма громоздкой задачей, представляющей еще и принципиальные затруднения, связанные с учетом присоединенных масс воды (см. § 37).

Мы не останавливаемся на рассмотрении полной схемы расчета совместной вибрации, так как ввиду громоздкости вычислений и условности некоторых исходных положений расчет может не привести к достаточно достоверным результатам. Заметим лишь, что полная схема расчета может быть получена при рассмотрении судна как многомассовой системы с заменой днищевого перекрытия несколькими массами, находящимися на «невесомом» перекрытии; это позволит учесть непрерывность перекрытия по длине судна¹.

¹ Совместная вибрация корпуса и перекрытий рассмотрена в статьях: Бабаев Н. Н., О совместных колебаниях корпуса и перекрытий корабля, Инженерный сборник, т. XXVIII, изд. АН СССР, 1960.

Чувиковский В. С., О совместных колебаниях судового корпуса и его отдельных конструкций, Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1960.

Кроме того, при рассмотрении высокочастотных колебаний корпуса, когда только и может сказаться влияние местной вибрации на общую, необходимо принимать во внимание сдвиг и инерцию вращения, на что уже указывалось в § 30 и 39. Если этого не сделать, то можно получить неправильное представление о роли местной вибрации.

С вопросом о влиянии местной вибрации на общую теснейшим образом связан вопрос о динамических гасителях вынужденных колебаний. С теорией динамического гасителя мы уже познакомились в § 7 и 8.

Полная теория гасителя вынужденных колебаний для упругого тела с учетом сопротивления достаточно сложна и еще не разработана. Поэтому мы ограничимся изложением некоторых общих соображений, позволяющих приблизительно подобрать элементы гасителя для любой упругой системы.

Попутно заметим, что если бы общая теория гасителя и была разработана, то она была бы достаточно сложна и практически все равно приходилось бы пользоваться приближенными решениями.

Рассмотрим сначала вопрос об определении элементов гасителя без сопротивления, могущего, как это следует из изложенного выше, создать жесткую опору в сечении упругого тела, к которому он прикреплен. Элементы такого гасителя должны удовлетворять условию (771).

При подборе элементов гасителя приходится ограничивать амплитуду его колебаний относительно точки подвеса, которая для системы без сопротивления при $z=1$ определится согласно (79) по формуле

$$\delta_a = \frac{R_a}{c}, \quad (773)$$

где c — коэффициент жесткости пружины гасителя, R_a — амплитуда реакции жесткой опоры, установленной в месте прикрепления гасителя. Если установлено несколько гасителей, то элементы каждого из них должны удовлетворять условию (771); при определении амплитуд реакций нужно считать, что в местах прикрепления всех гасителей установлены жесткие опоры.

Если задаться амплитудами колебаний гасителей δ_a (в их движении относительно точки подвеса), то можно определить элементы всех гасителей.

В § 7 и 8 было указано, что гасители без сопротивления неустойчивы в работе и при небольшом изменении частоты возмущающей силы система с гасителями может попасть в резонанс. Поэтому в гасители нужно вводить сопротивление, но величина коэффициента сопротивления должна быть определена так, чтобы вводимое в систему сопротивление [см. формулу (74)] было наи-

большим: при увеличении коэффициента сопротивления уменьшаются коэффициенты динамичности.

Воспользовавшись зависимостью (30), преобразуем выражение (74) к виду

$$B = \sqrt{mc} \frac{2\gamma z^4}{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2}, \quad (774)$$

где согласно формулам (2) и (23) величина γ определяется выражением

$$2\gamma = \frac{\beta}{m\lambda} = \frac{\beta}{\sqrt{mc}}. \quad (775)$$

Из формулы (774) видно, что вводимый в систему гасителем коэффициент сопротивления $B=0$ при $\gamma=0$ и при $\gamma=\infty$. Обращение B в нуль при $\gamma=\infty$ физически понятно, так как при бесконечно большом сопротивлении мы, по существу, жестко присоединяем массу гасителя к системе. Кроме того, $B=0$ и при $z=0$, т. е. при бесконечно медленном перемещении основания, что эквивалентно статическому приложению нагрузки, когда сопротивление роли не играет.

При $z=\infty$ значение коэффициента B стремится к пределу $B_\infty = 2\gamma \sqrt{mc} = \beta$, что имеет определенный физический смысл, так как при $z=\infty$, т. е. при бесконечно большой частоте колебаний точки прикрепления гасителя, масса гасителя будет практически неподвижна.

Приведенные рассуждения показывают, что при заданной величине коэффициента β коэффициент сопротивления B может изменяться в достаточно широких пределах. Поэтому нам нужно определить, какое значение коэффициента сопротивления B мы считаем оптимальным.

В простейшем случае, рассмотренном в § 7, оптимальное значение коэффициента β было определено, но и там решение оказалось весьма сложным. Подобным же образом можно было поставить задачу и в общем случае, но это привело бы к практически непреодолимым вычислительным трудностям.

Для определения оптимального значения сопротивления мы воспользуемся следующим приближенным приемом.

Предположим, что масса m и жесткость c пружины гасителя определены (хотя бы указанным выше способом для случая отсутствия сопротивления) и найдем такое значение γ , при котором коэффициент B при заданном z был бы наибольшим. Мы исходим из того, что увеличение коэффициента сопротивления, вводимого в систему, уменьшает коэффициент динамичности.

Составляя уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial \gamma} = 0,$$

на основании выражения (774), получим

$$(1-z^2)^2 - 4\gamma^2 z^2 = 0,$$

откуда следует, что коэффициент В достигает наибольшего значения при $\gamma = \gamma_m$, где

$$4\gamma_m^2 = \frac{(1-z^2)^2}{z^2}. \quad (776)$$

Подставляя найденное значение γ_m в выражение (774), получим

$$B_m = \sqrt{mc} \frac{z^3}{2|1-z^2|}. \quad (777)$$

При $z=1$ величина $\gamma_m=0$, а $B_m=\infty$, что соответствует уже отмеченной возможности остановить точку закрепления гасителя без сопротивления.

Для определения оптимального коэффициента сопротивления гасителя потребуем, чтобы коэффициент B_m достигал максимума при новой резонансной частоте, соответствующей присоединению к основной системе гасителя без сопротивления. Как это следует из рассмотренного в § 7 примера, проведенного в § 8 исследования и как будет видно из дальнейшего, после присоединения к системе гасителя вместо резонансной частоты ω появляются две близкие резонансные частоты $\omega_1 = \omega(1 - \delta_1)$ и $\omega_2 = \omega(1 + \delta_2)$.

Если резонанс в системе с гасителем возникает при $\omega_1 = \omega(1 - \delta_1)$, т. е. при $z_1 = (1 - \delta_1)z$, то, подставляя значение $z = z_1$ в выражение (776), получим

$$2\gamma_m^{(1)} = \frac{\delta_1(2 - \delta_1)}{1 - \delta_1}, \quad (778)$$

чему соответствует значение B_m , равное

$$B_m^{(1)} = \sqrt{mc} \frac{(1 - \delta_1)^3}{\delta_1(2 - \delta_1)}. \quad (779)$$

При $z=1$ $\gamma = \gamma_m^1$ значение коэффициента В равно

$$B^{(0)} = \sqrt{mc} \frac{1 - \delta_1}{\delta_1(2 - \delta_1)} \quad (780)$$

и при $\delta_1 > 0$ оказывается, что $B^{(0)} > B_m^{(1)}$.

При $z = z_2 = (1 + \delta_2)\omega$ значение коэффициента В равно

$$B^{(2)} = \sqrt{mc} \frac{\delta_1(2 - \delta_1)(1 - \delta_1)(1 + \delta_2)^4}{\delta_2^2(2 + \delta_2)^2(1 - \delta_1)^2 + \delta_1^2(2 - \delta_1)^2(1 + \delta_2)} \quad (781)$$

и нетрудно проверить, что при $\delta_2 = 0,1 \div 0,2$ эта величина практически в два раза меньше, чем $B_m^{(2)}$, определяемое по формуле (779) при $\delta_1 = -\delta_2$.

В случае указанного выбора коэффициента сопротивления коэффициент динамичности при первом резонансе $z = z_1$ должен быть меньше, чем при втором $z = z_2$. Поэтому мы считаем целесообразным выбрать коэффициент сопротивления гасителя таким образом, чтобы коэффициенты сопротивления $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ были равны, т. е. воспользоваться уравнением

$$\frac{2\gamma_1 z_1^4}{(1 - z_1^2)^2 + 4\gamma_1^2 z_1^2} = \frac{2\gamma_2 z_2^4}{(1 - z_2^2)^2 + 4\gamma_2^2 z_2^2}. \quad (782)$$

Величина коэффициента сопротивления гасителя существенно зависит от величин δ_1 и δ_2 , а так как они малы по сравнению с единицей (когда массы гасителей малы по сравнению с массой исходной системы), то для определения δ_1 и δ_2 можно воспользоваться приближенным приемом.

Частота свободных колебаний системы практически не зависит от малого сопротивления, поэтому определение новых резонансных частот может быть произведено в предположении, что к системе присоединяется гаситель без сопротивления, а это сводится к формальному присоединению к системе в месте прикрепления гасителя дополнительной массы

$$m_d = \frac{m}{1 - z^2}, \quad (783)$$

как следует из формулы (73) при $\gamma = 0$.

Если резонансной частоте ω в исходной системе соответствуют обобщенная жесткость C_ω и обобщенная масса M_ω , т. е.

$$\omega^2 = \frac{C_\omega}{M_\omega}, \quad (784)$$

а m_ω есть обобщенная масса, соответствующая массам всех гасителей и той же форме колебаний, то новая резонансная частота определится выражением

$$\omega_1^2 = \frac{C_\omega}{M_\omega + \frac{m_\omega}{1 - z^2}}. \quad (785)$$

Разделив почленно выражение (785) на выражение (784) и замечая, что

$$z = \frac{\omega_1}{\omega},$$

получим

$$z^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1 - z^2}}, \quad (786)$$

где

$$\alpha = \frac{m_{\omega}}{M_{\omega}}. \quad (787)$$

Решая уравнение (786), получим:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \\ z_2 &= \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (788)$$

причем $z_1 z_2 = 1$.

После определения значений z_1 и z_2 коэффициенты сопротивления гасителей могут быть определены указанным выше образом.

Кроме рассмотренных нами линейных гасителей колебаний применяются гасители иных типов, в частности, гасители без сопротивления, но с настройкой частоты свободных колебаний на частоту возмущающей силы, и импульсные гасители.

§ 42. КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ ПО УСТРАНЕНИЮ ВИБРАЦИИ ГОТОВОГО СУДНА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Появление значительной общей вибрации корпуса может быть следствием либо значительных возмущающих сил, либо близости частоты возмущающих сил к одной из частот свободных колебаний корпуса.

Одним из способов уменьшения пульсирующих давлений, возникающих при работе винтов и передаваемых через воду корпусу, является увеличение зазора между винтом и корпусом. Существуют еще мероприятия гидродинамического характера по выравниванию потока в районе винтов, о чем уже упоминалось в § 36.

Если частота пульсирующих давлений оказывается близкой к одной из частот свободных колебаний, то, изменяя число лопастей винта, мы изменяем частоту возмущающей силы и удаляемся от резонанса. Кроме того, при увеличении числа лопастей поле давлений в районе гребных винтов должно выравниваться и амплитуда пульсирующих давлений должна уменьшаться.

Динамические гасители колебаний для успокоения общей вибрации корпуса обычно не применяются, так как размеры их получились бы слишком большими.

В настоящее время расчет общей вибрации может быть произведен достаточно точно и в процессе проектирования судна может быть обеспечена достаточно малая общая вибрация. Поэтому случаи возникновения значительной общей вибрации встречаются редко и обычно связаны с некоторыми упущениями в процессе проектирования.

Чаше может возникнуть значительная местная вибрация, так как практически невозможно произвести расчеты вибрации всех частей корпуса, не говоря даже о том, что подобные расчеты выполняются достаточно приближенно. Кроме того, значительная местная вибрация может возникнуть не только вследствие ходовой вибрации, но и вследствие работы вспомогательных механизмов.

Значительная местная вибрация обычно возникает при совпадении частоты возмущающей силы с первой частотой свободных колебаний конструкции, поэтому наиболее эффективным способом уменьшения местной вибрации следует считать повышение частоты свободных колебаний, т. е. увеличение жесткости конструкции.

В свою очередь, повышение жесткости конструкции целесообразнее всего осуществлять путем введения дополнительных опор, например, установкой пиллерсов для подкрепления перекрытий и т. п. При этом надо следить за тем, чтобы дополнительные опоры не попали на узловые линии или в узлы резонансных форм колебаний, ибо такие подкрепления не изменят частоты свободных колебаний соответствующего тона.

Наиболее эффективно устанавливать подкрепления там, где амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшей величины. Поэтому в случае необходимости уменьшения местной вибрации целесообразно экспериментально установить форму колебаний, если она не может быть установлена теоретическим путем.

В ряде случаев для уменьшения местной вибрации могут быть использованы гасители колебаний различного типа и такое решение является единственно приемлемым.

При установке ребра для подкрепления пластины его необходимо располагать параллельно длинной стороне опорного контура, так как при установке ребра посередине вытянутой стороны (вдоль короткой стороны опорного контура) мы практически не меняем частоты колебаний первого тона; на это уже было указано в § 20.

§ 43. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРАЦИИ

В настоящем параграфе мы не имеем возможности останавливаться на описании ряда выполненных экспериментов, техники их проведения, обработки результатов и применяемой аппаратуры,

так как это потребовало бы очень большого объема и заслуживает специальной книги¹. Поэтому остановимся лишь на основных принципиальных вопросах.

Экспериментальное исследование вибрации может производиться как на моделях малого и большого размера, так и в натуральных условиях, причем каждый из этих экспериментов должен преследовать свои, четко поставленные цели.

Модельные эксперименты необходимы в основном для проверки и уточнения основных допущений, установления величин некоторых исходных данных, входящих в расчет вибрации, исследования влияния отдельных факторов на вибрацию и т. п.

Целью натуральных исследований вибрации могут быть уточнение применяемых методов расчета вибрации, изучение влияния масштабного эффекта (например, рассеивания энергии в конструкции), определение величины внешних сил, вызывающих вибрацию, а также определение форм колебаний некоторых конструкций, что может потребоваться для правильного решения вопроса о необходимых подкреплениях для уменьшения вибрации.

Основными приборами, служащими для экспериментального исследования вибрации, являются различного типа вибрографы, позволяющие записывать в функции от времени перемещения точек конструкции. В отдельных случаях применяются виброметры, позволяющие определять лишь амплитуды колебаний.

Вибрографы бывают как механические, принцип действия которых был рассмотрен в § 3, так и электродинамические. Из механических вибрографов наиболее распространен виброграф Гейгера. Электродинамические вибрографы в настоящее время имеются нескольких типов и все время появляются новые.

Запись показаний электродинамического вибрографа производится обычно на ленту шлейфного осциллографа, что позволяет просто производить синхронную запись показаний нескольких приборов и экспериментально находить форму колебаний.

Принципиально можно определить форму колебаний расчетом, если имеется синхронная запись вибрационных деформаций в ряде точек. Для этого надо выразить деформации через производные от проекций перемещения и проинтегрировать полученные таким образом дифференциальные уравнения.

Однако этот способ практически может быть использован лишь тогда, когда вибрационные деформации достаточно велики, так как в противном случае могут возникнуть значительные погрешности.

При исследовании общей вибрации вибрографы следует располагать на жестких связях корпуса (продольные и поперечные

¹ Соответствующие вопросы подробно рассмотрены в книге Н. Н. Бабаева и В. Г. Лентякова, упомянутой на стр. 255.

переборки), чтобы запись общей вибрации не была искажена записью местной вибрации.

При исследовании местной вибрации в натурных условиях вибрографы нужно располагать как на исследуемой конструкции, так и на жестких связях корпуса, являющихся для нее опорами. Имея синхронную запись колебаний конструкции и ее опор,

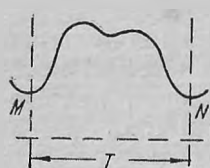


Рис. 38.

можно выделить местную вибрацию. При использовании электродинамических вибрографов возможно так собрать схему, чтобы на ленте осциллографа была записана местная вибрация.

Виброграмма установившейся вибрации представляет собой довольно сложную периодическую кривую, подобную изображенной на рис. 38, на которой легко выделить участок, соответствующий одному периоду.

Участок виброграммы, соответствующий одному периоду, может быть разложен в ряд Фурье

$v = A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \dots + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + \dots$,
где

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t,$$

T — период виброграммы, равный периоду возмущающей силы, а коэффициенты разложения определяются по методам гармонического анализа.

После этого нетрудно найти амплитуды всех гармонических колебаний и сдвиги фаз

$$v = A_0 + C_1 \cos(\varphi + \delta_1) + C_2 \cos(2\varphi + \delta_2) + \dots,$$

где

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \delta_n = \arctg \frac{A_n}{B_n}.$$

В некоторых случаях анализ виброграммы при действии произвольной периодической силы периода T позволяет определить частоты свободных колебаний, но способ этот не является достаточно надежным и мы на нем не останавливаемся.

Самым точным и наиболее широко используемым способом экспериментального определения частот свободных колебаний является применение специальных вибрационных машин, создающих гармоническую возмущающую силу.

Схема такой вибрационной машины, создающей вертикальную возмущающую силу, приведена на рис. 39; амплитуда возмущающей силы $2mr\omega^2$ зависит от частоты ω .

Изменяя угловую скорость вращения, можно последовательно попасть в резонанс с различными частотами свободных колебаний и определить их величины; масса вибрационной машины должна

быть мала по сравнению с массой исследуемой конструкции, так как только в этом случае можно пренебречь влиянием массы вибрационной машины на частоту свободных колебаний конструкции.

При использовании вибрационной машины виброграф запишет гармонические колебания, которые могут быть искажены лишь в результате некоторых случайных причин. Полученная запись может быть выравнена и использована для дальнейших исследований.

Если при изменении частоты вибрационной машины определять амплитуды колебаний, соответствующие единичной амплитуде возмущающей силы, а также сдвиги по фазе (в системе с рассеиванием энергии), то в результате эксперимента может быть получено выражение¹

$$v(x, t) = v_1(x, c, \omega) \cos \omega t + v_2(x, c, \omega) \sin \omega t,$$

где c — абсцисса приложения единичной гармонической силы.

Функции v_1 и v_2 не будут зависеть от частоты ω лишь при справедливости закона сопротивления

(468), как это следует из рассмотрения уравнений (613). В последнем случае функции v_1 и v_2 могут быть определены на основании эксперимента с одной частотой возмущающей силы. Если при определении функций v_1 и v_2 при разных частотах мы получим различные результаты, то это свидетельствует о неприменимости закона (468).

Следует обратить внимание на возможность теоретико-экспериментального способа расчета установившейся вибрации, в основе которого лежит предположение о линейной зависимости прогиба от амплитуды возмущающей нагрузки.

Если на основании эксперимента определены функции $v_1(x, c, \omega)$ и $v_2(x, c, \omega)$, то при действии на балку гармонической нагрузки $q(c) \cos \omega t$ ее стрелка прогиба может быть определена по выражению

$$v(x, t) = \cos \omega t \int_{(l)} q(c) v_1(x, c, \omega) dc + \sin \omega t \int_{(l)} q(c) v_2(x, c, \omega) dc.$$

Экспериментальное определение коэффициента внутреннего сопротивления может быть произведено путем сопоставления вычисленной и экспериментально замеренной амплитуды колебаний, но точность такого определения едва ли будет очень высока.

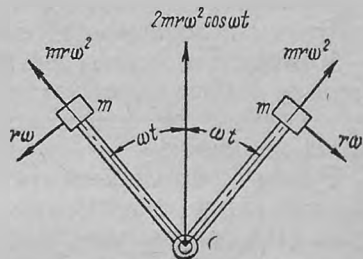


Рис. 39.

¹ Мы ограничимся рассмотрением колебаний стержня.

Расчет вынужденных колебаний для сложной конструкции оказывается достаточно громоздким и основывается на ряде допущений (например, на законе внутреннего рассеивания энергии), которые могут быть физически недостаточно оправданы. Поэтому при производстве серии экспериментов может иметь место разброс значений определяемых величин.

Особое внимание следует обратить на то, что иногда при расшифровке данных эксперимента можно получить неправильные результаты. Например, небольшая нелинейность в системе, не принимаемая нами во внимание, может существенно уменьшить амплитуду колебаний при резонансе, а при обработке результатов эксперимента это может быть ошибочно объяснено повышенным значением коэффициента сопротивления.

Коэффициент внутреннего сопротивления определяется и по анализу виброграммы свободных затухающих колебаний, но и в таком случае возникают затруднения, на которые необходимо обратить внимание.

Экспериментальное определение коэффициента сопротивления для системы с одной степенью свободы, как это видно из формулы (16), не вызывает затруднения. Достаточно найти по записи затухающих колебаний декремент затухания.

Что же касается записи затухающих колебаний какой-либо точки конструкции, то записываемое полное перемещение является результатом наложения различных гармоник, между которыми могут быть сдвиги по фазе и, кроме того, декременты затухания могут быть различны. Поэтому определение коэффициента сопротивления производится косвенным путем на основании тех или иных допущений.

В заключение следует подчеркнуть, что постановка эксперимента и способ обработки получаемых результатов должны в каждом отдельном случае тщательно продумываться, так как отсутствие подготовки может либо свести значение эксперимента к нулю, либо, что еще хуже, привести к ошибочным выводам.

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ

§ 44. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ВИБРАЦИИ

До сих пор мы рассматривали линейные задачи вибрации, которые основывались на ряде допущений, а именно: 1) существует линейная связь между деформациями и производными от проекций вектора перемещения (геометрическая линейная задача); 2) существует линейная связь между напряжениями и деформациями (упруго-линейная задача); 3) существует линейная связь между напряжениями и производными от деформаций по времени (при учете внутренних сопротивлений), или между силами сопротивления и производными по времени от проекций вектора перемещения (при учете внешних сопротивлений); 4) существует линейная связь между силами инерции и вторыми производными по времени от проекций вектора перемещения (инерционно-линейная задача).

Допущением об упругой линейности являются также и использование линейной зависимости между просадкой и реакцией упругой опоры, углом поворота и реактивным моментом в упругой заделке и т. п.

При нарушении любого из указанных выше допущений задача перестает быть линейной и будет описываться нелинейными дифференциальными уравнениями.

В нелинейных механических и электрических задачах система обыкновенных нелинейных уравнений, описывающих рассматриваемую нелинейную задачу и определяющая неизвестные функции времени, может быть получена непосредственно. Степень соответствия этой системы дифференциальных уравнений описываемой задаче будет зависеть лишь от соответствия основных допущений физике явления.

Поэтому в задачах нелинейной механики основное внимание уделялось вопросам нахождения и исследования решений такой системы. Эти вопросы представляют значительные математические трудности и им посвящено большое количество исследований¹.

¹ С вопросами теории нелинейных колебаний можно ознакомиться по сочинениям [2], [6] и [9].

В нелинейных задачах вибрации упругих тел возникают дополнительные затруднения, так как они описываются нелинейными уравнениями в частных производных, которые не могут быть проинтегрированы методом Фурье. Поэтому получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций времени, к исследованию которой могут быть применены разработанные методы нелинейной теории колебаний, возможно лишь приближенным путем. При этом в ряде случаев в решение задачи могут быть внесены значительные погрешности.

Рассмотрим геометрически нелинейную задачу о вибрации тонкой пластины при значительных прогибах. Дифференциальные уравнения этой задачи могут быть получены, если в дифференциальных уравнениях Кáрмана заменить интенсивность поперечной нагрузки q выражением

$$q = f(x, y, t) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где $f(x, y, t)$ — интенсивность возмущающей силы,
 m — масса пластины на единицу поверхности¹.

В рассмотренном случае вывод дифференциального уравнения нелинейных колебаний производится путем использования принципа Даламбера, так как нелинейность существует и при рассмотрении статической задачи. Будем называть такую нелинейность статической.

Если бы мы, например, ввели в рассмотрение нелинейные сопротивления, то столкнулись бы с динамической нелинейностью, т. е. с таким типом нелинейности, которая проявляется только при движении.

Мы не будем выписывать системы дифференциальных уравнений и граничных условий, описывающих нелинейные колебания тонких пластин с конечным отношением сторон, и ограничимся рассмотрением поперечных колебаний гибкого стержня (балки-полоски), опертого на несмещающиеся опоры.

Даже на примере этой простейшей задачи отчетливо выявятся дополнительные затруднения, появляющиеся при решении нелинейных задач вибрации упругих тел.

Так как нашей целью является использование методов нелинейной механики для получения решения, то упругая линия стержня должна быть представлена в виде (239), причем фундаментальные функции должны удовлетворять кинематическим условиям, если задача будет решаться энергетическим методом.

При решении нелинейных задач колебаний упругих тел энергетическим методом нужно взять соответствующие выражения

¹ Напомним, что в теории изгиба пластин Кáрмана нелинейность имеется и в граничных условиях плоской задачи.

для потенциальной энергии и функции рассеивания¹, после чего, используя уравнения Лагранжа второго рода (или непосредственно принцип возможных перемещений), можно сразу получить систему нелинейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций времени.

В рассматриваемом случае поперечных колебаний гибкого стержня на несмещающихся опорах необходимо к потенциальной энергии изгиба, определяемой выражением (243), прибавить потенциальную энергию растяжения стержня, которая может быть вычислена следующим образом.

Если v — стрелка прогиба первоначально прямого стержня, то расстояние между опорными сечениями стержня (при смещающихся опорах) уменьшится при изгибе на величину

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_{(l)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (789)$$

где интеграл вычисляется по всей длине стержня. При несмещающихся опорах длина стержня увеличится на величину Δ , чему соответствует равномерная линейная деформация оси стержня

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta}{l}$$

и потенциальная энергия растяжения

$$V_2 = \frac{EF}{2} \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx = \frac{EF}{2l} \Delta^2,$$

где Δ определяется формулой (789).

Очевидно, что потенциальная энергия растяжения стержня будет однородной функцией четвертой степени от обобщенных координат. Поэтому в системе дифференциальных уравнений, получающихся при использовании уравнений Лагранжа второго рода, появятся члены третьей степени относительно обобщенных координат, т. е. члены вида q_j^3 , $q_j q_i q_g$ и т. д. При учете нелинейных сопротивлений появятся нелинейные члены с обобщенными скоростями.

Если известны дифференциальные уравнения задачи, то интересующая нас система уравнений может быть получена методом Бубнова—Галеркина, причем фундаментальные функции должны удовлетворять всем граничным условиям. При одинаковом выборе фундаментальных функций в случае решения задачи методом Бубнова—Галеркина и энергетическим методом системы дифференциальных уравнений получатся тождественными².

¹ Предполагается инерционно-линейная задача.

² Это утверждение будет справедливо при учете сопротивления лишь в том случае, когда существует функция рассеивания.

В рассматриваемой задаче проще воспользоваться дифференциальным уравнением поперечных колебаний, которое может быть выведено следующим образом.

Если удлинение стержня определяется по формуле (789), то согласно закону Гука на стержень будет действовать растягивающая сила

$$T = \frac{EF}{2l} \int_{(l)}^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx,$$

так что дифференциальное уравнение поперечных колебаний при действии продольной силы преобразуется к виду

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{2} \frac{EF}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_{(l)}^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (790)$$

Для получения системы уравнений, определяющих обобщенные координаты $q_k(t)$ в выражении (239), надо выражение (239) подставить в уравнение (790), умножить результаты подстановки на $\varphi_s(x) dx$ при $s=1; 2; 3 \dots$ и проинтегрировать по всей длине стержня.

Примем для стрелки прогиба выражение (386), где под $v_n(x)$ будем понимать формы свободных колебаний, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (388), и представим нагрузку $q(x, t)$ в виде ряда (444) по формам свободных колебаний.

Тогда, подставляя ряд (386) и выражение (444) в уравнение (790) и используя уравнение (388), получим

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[m \ddot{p}_n(t) + EI \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^4 p_n(t) \right] v_n(x) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{EF}{l} \sum_r \sum_g a_{rg} p_r(t) p_g(t) \sum_n p_n(t) v_n''(x) = \\ & = \sum_n q_n(t) v_n(x), \end{aligned} \quad (791)$$

где

$$a_{rg} = \int_{(l)}^l v_r'(x) v_g'(x) dx. \quad (792)$$

Как видно из уравнения (791), в общем случае функции времени не отделяются от функции координат и для получения системы дифференциальных уравнений с целью определения неизвестных функций времени $p_n(t)$ нужно воспользоваться методом Бубнова—Галеркина.

Рассмотрим простейший случай свободно опертого стержня, когда $\mu_n = n\pi$ и

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В этом случае согласно формуле (792)

$$a_{rg} = \frac{r\pi}{l} \frac{g\pi}{l} \int_0^l \cos \frac{r\pi x}{l} \cos \frac{g\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } g \neq r, \\ \left(\frac{r\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} & \text{при } g=r, \end{cases}$$

а поскольку

$$v_n''(x) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l},$$

то, приравнявая в уравнении (791) коэффициенты при одинаковых функциях координат, получим систему дифференциальных уравнений

$$mp_n''(t) + EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 p_n(t) + \\ + \frac{EF}{4} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 p_n(t) \sum_r \left(\frac{r\pi}{l}\right)^2 p_r^2(t) = q_n(t). \quad (793)$$

Таким образом, даже в простейшем случае свободно опертого стержня, когда удалось точно разделить функции времени от функций координат, функции времени не разделяются и определяются системой нелинейных дифференциальных уравнений.

Решение нелинейных задач статики упругих тел и устойчивости, сводящееся к рассмотрению системы нелинейных алгебраических уравнений связано, как известно, с большими вычислительными затруднениями и решение задачи в первом приближении имеет в ряде случаев большую погрешность. Еще большие затруднения возникают при решении нелинейных задач вибрации, так как интегрирование нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений неизмеримо сложнее решения нелинейной системы алгебраических уравнений.

При решении же задачи в первом приближении, когда она сводится к интегрированию одного нелинейного дифференциального уравнения, нет уверенности в получении достаточно точных количественных результатов и такое решение следует рассматривать лишь как качественное описание явления.

Это замечание имеет особое значение при изучении высокочастотных вынужденных колебаний, когда частота возмущающей силы больше первой частоты свободных колебаний соответствующей линейной системы и близка к одной из высших частот колебаний. Даже в линейной системе с сопротивлением (см. § 26) решение в виде одного члена ряда (386) может давать значительную погрешность.

Приведенные выше соображения заставляют нас сделать вывод, что при рассмотрении вопроса о нелинейных колебаниях системы с одной степенью сво-

боды, к чему сводится решение нелинейных задач вибрации в первом приближении, нам достаточно ограничиться рассмотрением качественной стороны явления¹.

Нелинейные задачи вибрации изучены чрезвычайно мало, хотя изучение их представляет несомненный интерес и некоторые явления могут быть объяснены только с точки зрения теории нелинейных колебаний.

С влиянием нелинейности можно в ряде случаев столкнуться при рассмотрении колебаний в области резонанса, так как не всегда ограниченность амплитуды колебаний можно объяснить наличием сопротивлений. Поэтому при определении коэффициентов сопротивлений по результатам эксперимента с вынужденными колебаниями надо убедиться в том, что при резонансном режиме нелинейность не имела места.

Рассмотренная выше задача обладала геометрической и статической нелинейностью и для вывода дифференциального уравнения колебаний достаточно было воспользоваться принципом Даламбера.

Если задача обладает упругой нелинейностью, но совершенной упругостью, т. е. связь между напряжениями и деформациями одинакова при нагрузке и разгрузке, то такая нелинейность будет статической, и если известны уравнения, описывающие статическую задачу, то уравнения динамической задачи получаются при помощи принципа Даламбера.

Значительно сложнее обстоит вопрос при неоднозначной связи между напряжениями и деформациями, различной при нагрузке и разгрузке, что имеет место, например, при решении задач в упруго-пластической области. С подобного типа задач мы столкнулись в § 24, когда для учета внутренних сопротивлений была принята зависимость (466). Тогда мы воздержались от вывода дифференциального уравнения поперечных колебаний в общем виде и ограничились рассмотрением случая установившихся гармонических колебаний, для которого задача описывалась линейным дифференциальным уравнением.

Дифференциальные уравнения колебаний в случае неоднозначной связи между напряжениями и деформациями существенно усложняются и их приходится писать отдельно для нагрузки и разгрузки. При рассмотрении колебаний в упруго-пластической области различными будут еще и дифференциальные уравнения для различных частей тела, так как одни из них будут находиться в упругой области, а другие — в упруго-пластической.

В заключение приведем пример инерционно-нелинейной задачи,

¹ Разработанные в настоящее время общие методы нелинейной механики применимы к системам с малой нелинейностью. В задачах вибрации обычно приходится иметь дело с сильной нелинейностью.

хотя такие задачи для вибрации корабля не представляют практического интереса.

Представим себе, что один конец рассматриваемого выше гибкого стержня опирается на подвижную опору и к нему прикреплена масса M , горизонтальные перемещения которой Δ будут связаны со стрелкой прогиба зависимостью (789).

Тогда продольная сила T будет равна силе инерции массы, а так как по смыслу вывода положительное значение Δ соответствует уменьшению расстояния между опорами, то и ускорение $\ddot{\Delta}$ массы M будет положительным при сближении опор. Поэтому растягивающая сила T равна силе инерции массы M с обратным знаком, т. е. на основании выражения (789)

$$T = M\ddot{\Delta} = -\frac{M}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{(l)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (794)$$

и дифференциальное уравнение (790) поперечных колебаний при действии растягивающей силы преобразуется к виду

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{(l)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (795)$$

Нетрудно убедиться, что система дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций времени будет нелинейна и в ней появятся члены вида $\ddot{p}_r p_g p_n$ и $\dot{p}_r \dot{p}_g p_n$. Подобная задача встречается при рассмотрении колебаний стоек рамы.

В дальнейшем мы рассмотрим нелинейное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы, к которому в первом приближении сводится исследование линейно-инерционной упругой системы.

§ 45. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Дифференциальное уравнение колебаний линейно-инерционной системы с одной степенью свободы может быть записано в виде

$$\ddot{p}(t) + \lambda^2 p(t) + \varepsilon F(p, \dot{p}, t, \varepsilon) = f(t), \quad (796)$$

где $F(p, \dot{p}, t, \varepsilon)$ —в случае нелинейной системы нелинейная функция входящих в нее величин, $f(t)$ —заданная функция времени.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением установившихся колебаний и будем предполагать, что $f(t)$ и $F(p, \dot{p}, t, \varepsilon)$ являются периодическими функциями времени.

Если параметр ε мал, то уравнение (796) называется квазилинейным и при периодической функции $f(t)$ (или тождественно

равной нулю) к его решению применим метод разложения по степеням малого параметра¹.

Если в уравнение (796) время явно не входит, то оно имеет вид

$$\ddot{p}(t) + \lambda^2 p(t) + \varepsilon F(p, \dot{p}, \varepsilon) = 0 \quad (797)$$

и описывает колебание так называемой автономной системы; уравнение (796) описывает колебание неавтономной системы. В частном случае, когда в уравнении (796) функция $F(\dots)$ не зависит явно от времени, уравнение колебаний автономной системы может рассматриваться как уравнение свободных колебаний неавтономной системы.

Существующее название «автономная система» следует понимать в том смысле, что при некоторых определенных условиях, т. е. при некоторых специальных видах функции $F(\dots)$, определяемых, очевидно, свойствами рассматриваемой системы, в системе могут самовозбуждаться колебания (автоколебания), которые будут существовать без внешней возмущающей силы.

Установившиеся автоколебания в системе с одной степенью свободы возможны при определенных условиях лишь в нелинейной системе. В линейной системе с сопротивлением свободные колебания всегда затухают.

Примером автоколебаний в механической системе могут служить часто наблюдаемые колебания тормозных колодок при включении тормозов. Они вызываются сухим трением и могут быть объяснены лишь при условии, что будет принята во внимание зависимость силы трения от скорости; задача в этом случае оказывается нелинейной.

Примером возрастающих автоколебаний в линейной системе является изгибно-крутильный флаттер крыла самолета в потоке воздуха. Начавшиеся вследствие каких-либо причин поперечные колебания крыла вызывают увеличение угла атаки (вследствие его закручивания); увеличение угла атаки влечет за собой увеличение подъемной силы и возрастание поперечных колебаний крыла.

Автоколебания возникают в резцах токарных станков, в различных электрических схемах с электронными лампами, в органических трубах и т. д. Изучению различных автоколебаний посвящена большая литература, так как они играют значительную роль в современной технике².

Обратимся к изучению установившихся вынужденных колебаний в нелинейной системе и ограничимся рассмотрением частного вида уравнения (796), а именно:

$$\ddot{p}(t) + 2\nu\dot{p}(t) + \lambda^2 p(t) + \varepsilon p^3(t) = P \cos \omega t. \quad (798)$$

¹ Исследованию квазилинейных систем посвящена монография [6].

² См. работы: Харкевич А. А., Автоколебания, Гостехиздат, 1954; Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1952.

Уравнение (798) часто называется уравнением Дюффинга, который впервые исследовал ряд вопросов, связанных с этим уравнением. К уравнению (798) при $\nu=0$ сводится решение в первом приближении задачи об установившихся колебаниях гибкого стержня, рассмотренной в предыдущем параграфе.

На примере уравнения (798) можно выявить ряд особенностей установившихся колебаний нелинейной системы.

Начнем с рассмотрения частного случая $\nu=0$, т. е. системы без сопротивления, но с нелинейной упругой связью, и будем искать периодическое решение уравнения (798) в виде

$$p = A \cos \omega t. \quad (799)$$

Подставляя выражение (799) в уравнение (798), получим

$$A(\lambda^2 - \omega^2) \cos \omega t + \varepsilon A^3 \cos^3 \omega t = P \cos \omega t. \quad (800)$$

Умножая обе части полученного равенства на выражение $\cos \omega t dt$ и интегрируя по периоду $(0, \frac{2\pi}{\omega})$, т. е. воспользовавшись методом Бубнова—Галеркина, получим

$$A(\lambda^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \varepsilon A^3 = P, \quad (801)$$

так как

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega}, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^4 \omega t dt = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\omega}.$$

Уравнение (801) имеет либо один, либо три вещественных корня, т. е. при некоторых условиях может существовать три режима установившихся колебаний.

Чтобы не прибегать к использованию алгебраических условий вещественности корней уравнения (801), воспользуемся приводимыми ниже наглядными геометрическими соображениями.

Перепишем уравнение (801) в виде

$$\frac{3}{4} A^3 = \frac{P}{\varepsilon} - \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\varepsilon} A$$

и будем рассматривать его корни как абсциссы точки пересечения кубической параболы

$$y_0 = \frac{3}{4} A^3$$

и прямой

$$y_1 = \frac{P}{\varepsilon} - \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\varepsilon} A.$$

Из рис. 40 видно, что при $b = -\frac{\lambda^2 - \omega^2}{\varepsilon} < 0$ имеется лишь один действительный корень уравнения (801), т. е. существует только один режим установившихся колебаний.

Таким образом, для «жесткой» упругой связи ($\varepsilon > 0$) при $\omega < \lambda$, а для «мягкой» упругой связи ($\varepsilon < 0$) при $\omega > \lambda$ будет всегда существовать один режим установившихся колебаний, соответствующий заданной гармонической возмущающей силе.

Если указанные условия нарушены, то, как мы это сейчас покажем, может возникнуть неоднозначность решения, т. е. заданной гармонической силе будут соответствовать три режима установившихся колебаний.

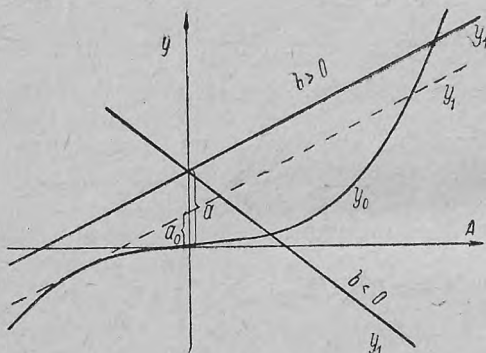


Рис. 40.

Абсциссы точек кривой y_0 , в которых касательная параллельна прямой y_1 , определяются из уравнения

$$\frac{9}{4} A^2 = b = -\frac{\lambda^2 - \omega^2}{\varepsilon},$$

откуда следует¹

$$A_0 = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\omega^2 - \lambda^2}{\varepsilon}}; \quad (802)$$

при $\varepsilon > 0$ A имеет вещественное значение при $\omega > \lambda$, а при $\varepsilon < 0$ — при $\omega < \lambda$, что соответствует отмеченным выше условиям появления различных режимов колебания.

Как это видно из рис. 40, при $b > 0$ неоднозначное решение возможно лишь при условии, что $a \leq a_0$, где a_0 есть начальная координата прямой y_1 при заданном b , касающейся кривой y_0 в точке с абсциссой A_0 . Значение a_0 определяется из уравнения

$$\frac{3}{4} A_0^2 = a_0 + b A_0,$$

откуда, принимая во внимание выражение (802) и значение b , следует

$$a_0 = \frac{4}{9} \left(\frac{\omega^2 - \lambda^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

¹ Из двух корней уравнения мы взяли тот, который соответствует $a_0 > 0$; это видно из рис. 40.

Учитывая соотношение $a = \frac{P}{\varepsilon}$, можно на основании произведенного исследования утверждать, что при

$$P \leq \left| \frac{4\varepsilon}{9} \left(\frac{\omega^2 - \lambda^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}} \right| \quad (803)$$

заданной гармонической возмущающей силе $P \cos \omega t$ соответствуют три режима установившихся колебаний; правая часть условия будет вещественной лишь при $\frac{\omega^2 - \lambda^2}{\varepsilon} > 0$, как это и должно быть на основании изложенного выше.

Из графика на рис. 40 очевидно: при $a > a_0$ амплитуда $A > 0$, т. е. колебания и возмущающая сила находятся в одной фазе. Два других решения при $a < a_0$ имеют отрицательную амплитуду, что соответствует сдвигу фаз на π . Таким образом, при $a < a_0$ могут существовать колебания, находящиеся как в одной фазе с возмущающей силой, так и в противофазе; последнее имеет место и в линейной системе при переходе через резонанс.

Интересно обратить внимание на то, что в нелинейной системе может существовать свободное колебание частоты ω и в случае отсутствия возмущающей силы.

Действительно, из уравнения (801) при $P=0$ следует

$$\omega^2 = \lambda^2 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2,$$

т. е. в системе с «жесткой» упругой силой ($\varepsilon > 0$) могут существовать свободные колебания с частотой $\omega > \lambda$, а в системе с «мягкой» упругой силой ($\varepsilon < 0$) — с частотой $\omega < \lambda$. Каждому значению частоты соответствует совершенно определенная амплитуда.

Напомним, что в линейной системе без сопротивления свободные колебания имеют единственную частоту, не зависящую от амплитуды.

Наглядное представление о поведении рассматриваемой нелинейной системы можно получить, если построить амплитудные кривые, представляющие графическую зависимость $|A|$ от частоты и амплитуды возмущающей силы; амплитудная кривая в линейной задаче при единичной амплитуде возмущающей силы соответствует кривой коэффициента динамичности.

Для построения амплитудной кривой целесообразно решить уравнение (801) относительно ω^2 , что дает

$$\omega^2 = -\frac{P}{A} + \lambda^2 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2, \quad (804)$$

и при заданном значении $|P|$ и ε построить график зависимости $\omega^2 = f(A)$. На рис. 41 приведен такой график для случая жест-

кой упругой силы ($\varepsilon > 0$), причем $P_2 > P_1$ и построение выполнено лишь для таких значений A , для которых $\omega^2 > 0$.

На рис. 42 приведены амплитудные кривые $|A| = f(\omega^2)$ для жесткой ($\varepsilon > 0$), линейной ($\varepsilon = 0$) и мягкой ($\varepsilon < 0$) упругой силы; случаю $P = 0$ соответствует амплитудная кривая свободных колебаний.

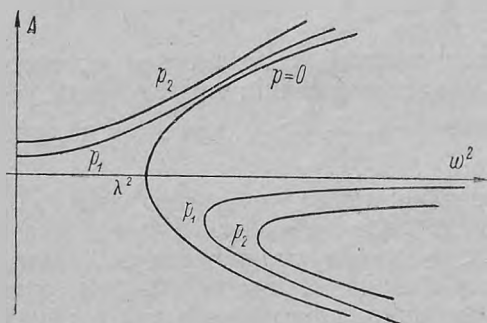


Рис. 41.

Рассматривая рис. 42, можно сделать вывод, что амплитудные кривые для жесткой упругой силы получают путем деформирования вправо амплитудных кривых для линейной задачи, а для мягкой упругой силы — путем деформирования их влево.

Обратимся теперь к рассмотрению смысла неоднозначных решений нелинейного уравнения колебаний.

Для данной амплитуды P_1 возмущающей силы однозначное решение уравнения колебаний при жесткой упругой силе¹ возможно при частоте возмущающей силы ω , удовлетворяющей

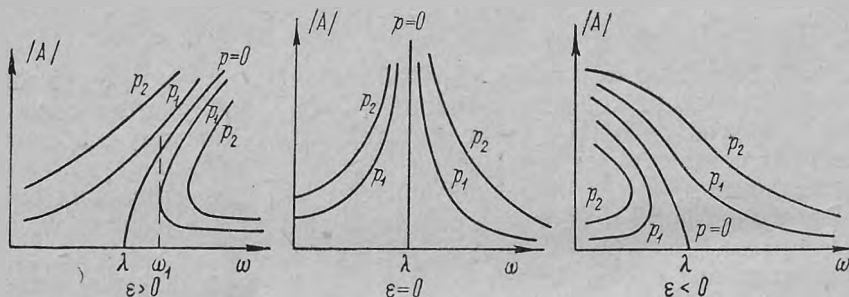


Рис. 42.

условию $\omega \leq \omega_1$, где ω_1 определяется согласно условию (803) при оставлении в нем знака равенства, уравнением

$$\omega_1^2 = \varepsilon \left(\frac{9P_1}{4\varepsilon} \right)^{\frac{2}{3}} + \lambda^2, \quad (805)$$

а при $\omega > \omega_1$ оказываются возможными три режима колебаний.

¹ Мы ограничимся рассмотрением этого случая, как представляющего для нас наибольший интерес.

Этим режимам движения будут соответствовать различные полные энергии системы (суммы потенциальной и кинетической энергий), и физически должно быть ясно, что при заданной возмущающей силе устойчивым должен быть тот режим движения, которому соответствует наименьшая полная энергия.

Полная энергия возрастает с возрастанием амплитуды, поэтому можно ожидать, что при $\omega > \omega_1$ связь между A и ω в устойчивом режиме движения будет определяться нижней ветвью кривой, соответствующей амплитуде возмущающей силы P . Таким образом, при действии на систему возмущающей силы с постоянной амплитудой P и переходе значения частоты возмущающей силы ω через значение ω_1 следует ожидать «скачка», т. е. внезапного изменения амплитуды возмущающей силы¹. Это явление наблюдается в действительности.

В явлении скачка нет ничего удивительного, так как он соответствует появлению разности фаз, равной π , что имеет место и в линейной системе при переходе через резонанс; при $\omega > \omega_1$ связь между A и ω должна устанавливаться нижней ветвью амплитудной кривой.

Частота ω_1 , определяемая зависимостью (805), является своеобразной «резонансной» частотой в нелинейной системе, так как этой частоте соответствует наибольшая амплитуда устойчивого движения.

Случай $\omega = \omega_1$ соответствует на графике рис. 40 касанию прямой y_1 и кривой y_0 , т. е. кратному корню уравнения (801), что дает возможность достаточно просто, не решая кубического уравнения, определить «резонансную» амплитуду при нелинейных колебаниях.

Подставим значение ω_1 согласно выражению (805) в уравнение (801) и приведем результат подстановки к виду

$$A^3 - \frac{4}{3} \left(\frac{9P}{4\varepsilon} \right)^{\frac{2}{3}} A - \frac{4}{3} \frac{P}{\varepsilon} = 0; \quad (806)$$

индекс «1» у амплитуды мы опустили.

Так как уравнение (806) имеет один двухкратный корень, то оно может быть представлено в виде

$$(A - A_1)(A - A_2)^2 = 0,$$

т. е.

$$A^3 - (A_1 + 2A_2)A^2 + (A_2^2 + 2A_1A_2)A - A_1A_2^2 = 0. \quad (807)$$

¹ При скачке возникают дополнительные затухающие колебания, которых мы не рассматриваем.

Сравнивая коэффициенты уравнений (806) и (807), найдем:

$$A_1 + 2A_2 = 0, \quad A_2^2 + 2A_1A_2 = \frac{4}{3} \left(\frac{9P}{4\varepsilon} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad A_1A_2^2 = \frac{4}{3} \frac{P}{\varepsilon},$$

откуда не трудно получить

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{3} \frac{P}{\varepsilon}}. \quad (808)$$

Формулой (808) и определяется «резонансная» амплитуда колебаний.

Выполненное исследование соответствует первому приближению, т. е. решению вида (799) для уравнения (798) при $\nu=0$. Подобные результаты получились бы и для уравнения более общего вида

$$\ddot{p} + \lambda^2 p + \varepsilon F(p) = P \cos \omega t, \quad (809)$$

если бы функция

$$f(A) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(A \cos \omega t) \cos \omega t dt$$

имела вид, подобный кубической параболы, т. е. кривой y_0 на рис. 40.

Мы не рассматривали уточненных решений уравнения (798) при $\nu=0$, так как они достаточно сложны и не изменят качественной картины колебаний.

Остановимся на вопросе о влиянии сопротивления, пропорционального первой степени скорости, на колебание нелинейной системы.

Известно, что в линейной системе имеется сдвиг по фазе между перемещением и возмущающей силой. Это же будет наблюдаться и в нелинейной системе, так как в частном случае при $\nu=0$ мы должны получить решение, соответствующее линейной задаче.

Решение уравнения (798) в первом приближении нужно было бы искать в виде

$$p = A^{(1)} \cos \omega t + A^{(2)} \sin \omega t,$$

но это неудобно (вводятся две неизвестные величины $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$).

Удобнее написать уравнение (798) в виде

$$\ddot{p}(t) + 2\nu\dot{p}(t) + \lambda^2 p(t) + \varepsilon p^3(t) = P \cos \omega t + R \sin \omega t. \quad (810)$$

где заданной считается амплитуда $P_0 = \sqrt{P^2 + R^2}$ возмущающей силы, а соотношение P и R пока остается неизвестным.

Подставляя выражение (799) в уравнение (810), получим соотношение (800) и равенство

$$A2\nu\omega = R. \quad (811)$$

Применяя к соотношению (800) метод Бубнова—Галеркина, получим уравнение (801).

Возводя выражения (801) и (811) в квадрат и складывая почленно, установим связь между амплитудой колебания и амплитудой возмущающей силы

$$S(A, \omega) + 4\nu^2 \omega^2 A^2 = P_0^2, \quad (812)$$

где

$$S(A, \omega) = A(\lambda^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \epsilon A^3. \quad (813)$$

Решая уравнение (812), можно при заданной амплитуде P_0 найти амплитуду A , после чего по выражениям (801) и (811) определить P , R и сдвиг фаз.

Мы не будем подробно рассматривать вопрос о построении амплитудных кривых при наличии сопротивления и ограничимся лишь замечаниями качественного характера.

Известно, что при наличии сопротивления амплитудные кривые в линейной задаче не уходят в бесконечность, а ветви их непрерывно переходят одна в другую.

Подобное же положение имеет место и в рассматриваемой нелинейной системе.

При наличии сопротивления в системе с жесткой упругой связью амплитудная кривая будет иметь вид, изображенный на рис. 43. Если при заданной амплитуде P_0 и некотором значении частоты ω возмущающей силы значение $|A|$ соответствует точке 1 амплитудной кривой, то при уменьшении частоты ω связь между A и ω определится кривой 1—2—3—4—5. Сначала амплитуда возрастает; при достижении частотой значения, соответствующего точке 3, в системе происходит быстрое скачкообразное возрастание амплитуды; при дальнейшем уменьшении частоты возмущающей силы она будет уменьшаться по кривой 4—5. Такой же характер изменения амплитуды будет и в системе без сопротивления. Если же значение $|A|$ соответствует точке 5 амплитудной кривой, то при возрастании частоты можно достигнуть точки 6, после чего амплитуда изменится скачком и при дальнейшем увеличении частоты связь между A и ω будет определяться по кривой 2—1.

Возможность перехода на амплитудной кривой за точку 4 подтверждается экспериментом, но не может быть объяснена, если не принять во внимание сопротивления.

На участке 4—6 амплитудной кривой система будет в некотором смысле неустойчива и при всяком, даже малом, возмущении будет переходить на участок 3—2. Вопрос об устойчивости

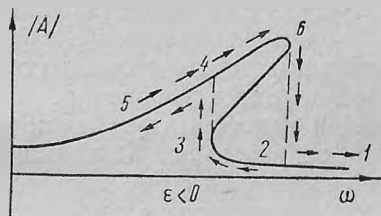


Рис. 43.

периодических колебаний нелинейной системы будет рассмотрен нами в следующем параграфе.

Остановимся на так называемых субгармонических колебаниях или резонансе n -го рода.

Если на систему действует возмущающая сила $P(t)$ с частотой ω (или периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$), то периодическое решение может быть найдено в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (814)$$

т. е. будет представлено в виде суммы гармонических колебаний с увеличивающимися частотами (или уменьшающимися периодами). Даже при действии гармонической возмущающей силы, в нелинейной системе вынужденные колебания получатся в результате наложения ряда гармоник с увеличивающимися частотами, причем коэффициенты a_k и b_k будут определяться нелинейной системой алгебраических уравнений.

При некоторых условиях в нелинейной системе могут возникнуть значительные колебания с периодом, кратным периоду возмущающей силы. Это соответствует тому, что дифференциальное уравнение решают в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\omega t}{n} + b_k \sin \frac{k\omega t}{n} \right), \quad (815)$$

где n — целое число. Если $k=n$, то соответствующий член ряда дает решение того же периода, что и период возмущающей силы, т. е. при подстановке (815) в дифференциальное уравнение нелинейных колебаний мы можем приравнять в левой и правой частях коэффициенты при одинаковых функциях времени и составить систему уравнений для определения коэффициентов a_k и b_k .

Случай, когда коэффициенты a_1 и b_1 значительно больше других, и соответствует резонансу n -го рода¹.

§ 46. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

При рассмотрении вопроса о наличии нескольких режимов периодических колебаний нелинейной системы мы отметили, что некоторые из этих режимов в некотором смысле неустойчивы, и

¹ М. А. Бельгова сообщила мне, что при испытании моделей гибких судов на волнении (см. § 40) наблюдался субгармонический резонанс второго рода, т. е. значительная вибрация при кажущемся периоде волны, превышающем в два раза период колебаний первого тона. Явление это еще не изучено, но, по-видимому, связано с нелинейностью равнодействующей гидродинамических давлений в функции от осадки. Его можно ожидать при соизмеримости высоты волны и осадки и большой ширине модели, что имело место в рассматриваемом случае.

указали физические соображения, на основании которых может быть выбран устойчивый режим колебаний. Все наши выводы основывались на приближенных решениях. Поэтому представляет определенный интерес общее исследование вопроса об устойчивости периодических решений нелинейных уравнений.

Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением устойчивости по первому приближению в случае наличия нелинейной упругости, будем считать периодическое решение нелинейного дифференциального уравнения устойчивым, если всякое малое отклонение системы от установившегося движения будет затухающим.

Пусть в дифференциальном уравнении (796) $f(t)$ есть периодическая функция периода T , т. е.

$$f(t+T)=f(t), \quad (816)$$

а $p(t)$ есть периодическое решение этого уравнения, т. е.

$$\ddot{p}(t) + \lambda^2 p(t) + \varepsilon F(p, \dot{p}, t, \varepsilon) = f(t). \quad (817)$$

Если $\delta(t)$ — неизвестное возмущение, то сумма $p(t) + \delta(t)$ должна удовлетворять тому же дифференциальному уравнению, т. е.

$$\ddot{p}(t) + \ddot{\delta}(t) + \lambda^2 [p(t) + \delta(t)] + \varepsilon F(p + \delta, \dot{p} + \dot{\delta}, t, \varepsilon) = f(t). \quad (818)$$

Так как по предположению $\delta(t)$ мало, то, разлагая в ряд Маклорена, получим

$$F(p + \delta, \dot{p} + \dot{\delta}, t, \varepsilon) = F(p, \dot{p}, t, \varepsilon) + \delta(t) F'_p(p, \dot{p}, t, \varepsilon) + \\ + \dot{\delta}(t) F'_{\dot{p}}(p, \dot{p}, t, \varepsilon) + \dots,$$

где нижними индексами указано, по каким переменным берутся производные.

Подставляя это разложение в уравнение (818) и вычитая почленно из результата подстановки уравнение (817), найдем, что $\delta(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\ddot{\delta}(t) + q(t) \dot{\delta}(t) + r(t) \delta(t) = 0, \quad (819)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= \varepsilon F'_p(p, \dot{p}, t, \varepsilon), \\ r(t) &= \lambda^2 + \varepsilon F'_{\dot{p}}(p, \dot{p}, t, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (820)$$

— периодические функции времени с периодом T^1 .

¹ Если, например, F есть нечетная функция p и не зависит от $\dot{p}$ и t то $r(t)$ будет периодической функцией с периодом $\frac{1}{2} T$ [см. уравнение (852)]

При $q(t) \equiv 0$ уравнение (819) превращается в так называемое уравнение Матье—Хилла.

Таким образом, исследование устойчивости движения по первому приближению свелось к исследованию характера решения уравнения (819).

Пусть $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ два частных решения дифференциального уравнения (819), образующие фундаментальную систему и удовлетворяющие начальным условиям;

$$\delta_1(0)=1, \dot{\delta}_1(0)=0, \delta_2(0)=0, \dot{\delta}_2(0)=1. \quad (821)$$

Выражения $\delta_1(t+T)$ и $\delta_2(t+T)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (819), так как при замене t на $t+T$ коэффициенты уравнения не меняют своей величины, но поскольку вообще $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ не будут периодическими функциями времени, то $\delta_1(t+T)$ и $\delta_2(t+T)$ должны выражаться через фундаментальные решения¹:

$$\begin{aligned} \delta_1(t+T) &= a_{11}\delta_1(t) + a_{12}\delta_2(t), \\ \delta_2(t+T) &= a_{21}\delta_1(t) + a_{22}\delta_2(t). \end{aligned}$$

Используя начальные условия (821), легко преобразовать написанные выражения к виду:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(t+T) &= \delta_1(T)\delta_1(t) + \dot{\delta}_1(T)\delta_2(t), \\ \delta_2(t+T) &= \delta_2(T)\delta_1(t) + \dot{\delta}_2(T)\delta_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (822)$$

Постараемся выяснить, не существует ли среди решений уравнения (819) такого, которое удовлетворяет условию

$$\delta^*(t+T) = \rho \delta^*(t). \quad (823)$$

Любое решение $\delta^*(t)$ может быть представлено в виде

$$\delta^*(t) = a\delta_1(t) + b\delta_2(t), \quad (824)$$

так что согласно выражениям (822)

$$\begin{aligned} \delta^*(t+T) &= [a\delta_1(T) + b\dot{\delta}_2(T)]\delta_1(t) + \\ &+ [a\dot{\delta}_1(T) + b\delta_2(T)]\delta_2(t). \end{aligned} \quad (825)$$

Подставляя выражения (824) и (825) в условие (823) и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях времени, получим систему двух однородных уравнений для определения неизвестных коэффициентов a и b :

$$\left. \begin{aligned} [\delta_1(T) - \rho]a + \delta_2(T)b &= 0, \\ \dot{\delta}_1(T)a + [\dot{\delta}_2(T) - \rho]b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (826)$$

¹ То же имеет место и в линейной системе с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

Система (826) имеет отличные от нуля решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю, т. е. ρ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \delta_1(T) - \rho & \delta_2(T) \\ \dot{\delta}_1(T) & \dot{\delta}_2(T) - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (827)$$

или в развернутом виде

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0, \quad (828)$$

где

$$A = \frac{1}{2} [\delta_1(T) + \dot{\delta}_2(T)], \quad (829)$$

$$B = \delta_1(T) \dot{\delta}_2(T) - \delta_2(T) \dot{\delta}_1(T) \quad (830)$$

и произведение корней ρ_1 и ρ_2 уравнения (828) равно B , т. е.

$$\rho_1 \rho_2 = B. \quad (831)$$

Таким образом, уравнение (819) имеет два частных решения $\delta_1^*(t)$ и $\delta_2^*(t)$ (мы рассматриваем случай разных корней), удовлетворяющих условиям:

$$\delta_1^*(t + T) = \rho_1 \delta_1^*(t),$$

$$\delta_2^*(t + T) = \rho_2 \delta_2^*(t),$$

откуда, в частности, следует:

$$\begin{cases} \delta_1^*(t + mT) = \rho_1^m \delta_1^*(t), \\ \delta_2^*(t + mT) = \rho_2^m \delta_2^*(t), \end{cases} \quad (832)$$

где m — целое число и любое решение уравнения (819) может быть представлено в виде

$$\delta(t) = \alpha \delta_1^*(t) + \beta \delta_2^*(t). \quad (833)$$

Решение вопроса об устойчивости периодического движения нелинейной системы свелось к исследованию поведения функций $\delta_1^*(t)$ и $\delta_2^*(t)$ при увеличении аргумента t . Если обе эти функции являются убывающими, то движение устойчиво; если хотя одна из них является возрастающей, то движение неустойчиво.

Поведение функций $\delta_1^*(t)$ и $\delta_2^*(t)$ зависит от значений ρ_1 и ρ_2 , и если $|\rho_1| < 1$ и $|\rho_2| < 1$, то функции $\delta_j^*(t)$ являются убывающими, а рассматриваемое периодическое движение устойчивым.

Прежде чем перейти к дальнейшим исследованиям, преобразуем выражение (830).

Так как функции $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (819), то можно написать:

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_1(t) + q(t)\dot{\delta}_1(t) + r(t)\delta_1(t) &= 0, \\ \ddot{\delta}_2(t) + q(t)\dot{\delta}_2(t) + r(t)\delta_2(t) &= 0.\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $\delta_2(t)$, а второе — на $\delta_1(t)$ и вычитая одно из другого, получим

$$\delta_1(t)\ddot{\delta}_2(t) - \delta_2(t)\ddot{\delta}_1(t) + q(t)[\delta_1(t)\dot{\delta}_2(t) - \delta_2(t)\dot{\delta}_1(t)] = 0.$$

Первые два члена написанного уравнения являются первой производной по времени от выражения в квадратной скобке. Поэтому, рассматривая выражения в квадратной скобке как неизвестную функцию и интегрируя это уравнение методом разделения переменных, получим

$$\delta_1(t)\dot{\delta}_2(t) - \delta_2(t)\dot{\delta}_1(t) = ce^{-\int_0^t q dt}.$$

Если же воспользоваться условиями (821), то оказывается, что $c=1$ и окончательно¹

$$\delta_1(t)\dot{\delta}_2(t) - \delta_2(t)\dot{\delta}_1(t) = e^{-\int_0^t q dt}. \quad (834)$$

Сравнивая выражение (834) с выражением (830), найдем, что

$$B = e^{-\int_0^T q dt}. \quad (835)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда в системе имеется линейное сопротивление и $q=2\nu$. В этом случае

$$B = e^{-2\nu T} < 1. \quad (836)$$

Коэффициенты A и B уравнения (828) зависят от периода и параметров, входящих в дифференциальное уравнение (819), и, как видно из формул (829) и (830), являются величинами вещественными. Если $A^2 - B < 0$, то уравнение (828) имеет комплексные сопряженные корни $\rho_1\rho_2 = \rho^2 = B$, где ρ — модуль комплексного числа и на основании неравенства (835) следует, что $\rho < 1$, т. е. решение дифференциального уравнения (819) при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, и периодическое движение будет устойчивым².

Решение уравнения (819) будет возрастающим, если корни

¹ Левая часть равенства (834) есть определитель Вронского, который может быть известен читателю из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

² Если ρ_1 и ρ_2 комплексны, то решение $\delta(t)$ будет вещественно, так как коэффициенты α и β в выражении (833) должны быть выбраны соответствующим образом.

уравнения (828) вещественны и хоть один из них по модулю больше единицы.

При непрерывном изменении параметров исходной нелинейной системы (периода возмущающей силы T , коэффициента сопротивления, упругих коэффициентов и т. п.) непрерывно будут изменяться и коэффициенты A и B уравнения (828). Если при этом корни уравнения (828) комплексны или по модулю меньше единицы, то периодическое движение устойчиво; если же корни вещественны и хоть один из них по модулю больше единицы, то периодическое движение неустойчиво.

Поэтому на границе области устойчивых и неустойчивых движений находится решение уравнения (828), соответствующее $|\rho|=1$. Под областью устойчивых движений понимается область изменения параметров исходного линейного уравнения, при которой уравнение (828) имеет корни по модулю меньшие единицы.

В вещественной области условию $|\rho|=1$ можно удовлетворить при $\rho=1$ и при $\rho=-1$, но из соотношений (832) видно, что случаю $\rho=1$ соответствует периодическое решение с периодом T [$\delta(t+T)=\delta(t)$], тогда как случаю $\rho=-1$ соответствует периодическое решение с периодом $2T$ [$\delta(t+2T)=\delta(t)$].

Поэтому для того, чтобы отделить области устойчивости от области неустойчивости, надо найти условия, при которых уравнение (819) может иметь указанные периодические решения.

Каждое из таких решений ограничивает область неустойчивости; области же устойчивости ограничиваются решениями с разными периодами. Пояснить это можно следующим образом.

Представим себе, что мы находимся в области неустойчивости и непрерывно изменяем параметры системы так, что находимся вблизи границы области. При этом ρ должно быть по модулю близко к единице и непрерывно изменяться при изменении параметров системы.

Возможны лишь два случая: либо ρ близко к $+1$ — область неустойчивости ограничивается периодическим решением с периодом T , либо ρ близко к -1 и область неустойчивости ограничивается периодическим решением с периодом $2T$.

Общий способ построения областей устойчивости и неустойчивости заключается в следующем.

Представляем периодическую функцию $r(t)$ периода T в виде ряда Фурье

$$r(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + s_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) \quad (837)$$

и ищем периодическое решение уравнения (819) при $q(t) \equiv 2v$ периода T в виде ряда

$$\delta(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right), \quad (838)$$

а периодическое решение периода $2T$ —в виде ряда

$$\delta(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{k\pi t}{T} \right). \quad (839)$$

Подставляя выражения (837) и (838) или (839) в дифференциальное уравнение (819) при $q(t) \equiv 2\nu$, производя тригонометрические преобразования и сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях времени, получим систему однородных линейных уравнений. Приравнявая определитель системы нулю, мы получим ту связь между параметрами системы, при которой возможно существование рассматриваемого периодического решения. Эта связь и дает уравнение границы области неустойчивости.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\delta}(t) + 2\nu\dot{\delta}(t) + \lambda^2 \left(1 - 2\mu \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \delta(t) = 0, \quad (840)$$

являющееся частным случаем уравнения (819); при $\nu=0$ уравнение (840) превращается в уравнение Матье.

Для определения условий, при которых возможно решение периода $2T$, подставим в уравнение (840) выражение (839). После выполнения преобразований придем к выводу, что при четных значениях k

$$a_k = b_k = 0,$$

а при нечетных значениях k получается система уравнений:

$$\begin{aligned} (1 - \mu - x^2) a_1 + x\Delta b_1 - \mu a_3 &= 0, \\ -x\Delta a_1 + (1 + \mu - x^2) b_1 - \mu b_3 &= 0, \\ -\mu a_{k-2} + (1 - k^2 x^2) a_k + kx\Delta b_k - \mu a_{k+2} &= 0, \\ -\mu b_{k-2} - kx\Delta a_k + (1 - k^2 x^2) b_k - \mu b_{k+2} &= 0 \end{aligned}$$

при $k=3; k=5; k=7 \dots$, где

$$x = \frac{\omega}{2\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta = \frac{2\nu}{\lambda}. \quad (841)$$

Записывая в развернутом виде полученную систему уравнений так, чтобы неизвестные расположились в порядке $a_1, b_1, a_3, b_3, a_5, b_5 \dots$ и приравнявая определитель нулю, получим

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu - x^2 & x\Delta & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -x\Delta & 1 + \mu - x^2 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ -\mu & 0 & 1 - 9x^2 & 3x\Delta & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\mu & -3x\Delta & 1 - 9x^2 & 0 & -\mu & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (842)$$

Уравнение (842) устанавливает связь между величинами $\frac{\omega}{2\lambda}$, Δ и μ на границе области неустойчивости, соответствующей периодическому решению с периодом $2T$.

Так как при малых значениях μ и Δ величина определителя близка к произведению

$$\prod_{k=1, 3 \dots} (1 - k^2 x^2)^2,$$

то следует ожидать, что уравнение (842) определит области неустойчивости вблизи частот, соответствующих величинам $x = \frac{1}{k}$, т. е. вблизи частот

$$\omega_k^* = \frac{2\lambda}{k}, \quad (843)$$

где k — нечетное число.

Если бы мы рассматривали решение периода T , т. е. подставили бы в уравнение (840) выражение (838), то подобным же образом можно было бы получить при нечетных значениях k

$$a_k = b_k = 0.$$

При четных значениях $k = 2n$ получается система уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 - \mu a_2 &= 0, \\ -2\mu a_0 + (1 - x_1^2) a_2 + x_1 \Delta b_2 - \mu a_4 &= 0, \\ -x_1 \Delta a_2 + (1 - x_1^2) b_2 - \mu b_4 &= 0, \\ -\mu a_{2n-2} + (1 - n^2 x_1^2) a_{2n} + n x_1 \Delta b_{2n} - \mu a_{2n+2} &= 0, \\ -\mu b_{2n-2} - n x_1 \Delta a_{2n} + (1 - n^2 x_1^2) b_{2n} - \mu b_{2n+2} &= 0 \end{aligned}$$

при $n=2, n=3 \dots$

$$x_1 = \frac{\omega}{\lambda}. \quad (844)$$

Располагая неизвестные в порядке $a_0, a_2, b_2, a_4, b_4 \dots$ и приравнявая определитель системы нулю, получим

$$\begin{vmatrix} 1, & -\mu, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \dots \\ -2\mu, & 1 - x_1^2, & x_1 \Delta, & -\mu, & 0, & 0, & 0 \dots \\ 0, & -x_1 \Delta, & 1 - x_1^2, & 0, & -\mu, & 0, & 0 \dots \\ 0, & -\mu, & 0, & 1 - 4x_1^2, & 2x_1 \Delta, & -\mu, & 0 \dots \\ 0, & 0, & -\mu, & -2x_1 \Delta, & 1 - 4x_1^2, & 0, & -\mu \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (845)$$

При малых значениях μ и Δ величина определителя близка к произведению

$$\prod_{n=1, n=2} (1 - n^2 x_1^2)$$

и следует ожидать, что уравнение (845) определит границы областей неустойчивости вблизи частот, соответствующих значениям $x = \frac{1}{n}$, т. е. вблизи частот

$$\omega_n^* = \frac{\lambda}{n}. \quad (846)$$

Формулу (846) можно записать в виде (843), но при этом под k нужно понимать четные числа.

Таким образом, попеременное использование уравнений (842) и (845) дает возможность определить границы всех областей неустойчивости.

Определение границы области неустойчивости может быть произведено только приближенно (полученные бесконечные определители приходится практически заменять определителями достаточно низкого порядка).

Определим приближенно границы области неустойчивости вблизи частоты $\omega_1 = 2\lambda$, для чего заменим определитель (842) обведенным пунктиром главным минором, т. е. рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu - x^2 & x\Delta \\ -x\Delta & 1 + \mu - x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно x и заменяя x по формуле (841), получим

$$\omega = 2\lambda \sqrt{1 - \frac{1}{2}\Delta^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \Delta^2 - \frac{1}{4}\Delta^4}}, \quad (847)$$

т. е. мы установили связь между ω , λ , μ и Δ на границе первой области неустойчивости.

Так как Δ мало по сравнению с единицей (для стальных образцов $\Delta = 0,003 \div 0,017$), то, отбрасывая малые величины, формулу (847) можно переписать

$$\omega = 2\lambda \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}. \quad (848)$$

Из выражения (848) видно, что действительные значения ω существуют лишь при

$$\mu^2 - \Delta^2 \geq 0, \quad (849)$$

т. е. только при соблюдении условий (849) возможно периодическое решение уравнения (840), а следовательно, и неустойчи-

вость периодического решения соответствующей нелинейной задачи.

Для получения границы второй области неустойчивости заменим определитель (845) обведенным пунктиром главным минором, т. е. рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1, & -\mu, & 0 \\ -2\mu, & 1-x_1^2, & x_1\Delta \\ 0, & -x_1\Delta, & 1-x_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно x_1 , заменяя x_1 по формуле (844), получим

$$\omega = \lambda \sqrt{1 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \Delta^2(1 - \mu^2)}}. \quad (850)$$

Вещественные значения ω существуют при

$$\mu^4 - \Delta^2(1 - \mu^2) \geq 0, \quad (851)$$

т. е. лишь при удовлетворении этого условия мы находимся в зоне неустойчивости.

Определение остальных зон неустойчивости связано с приближенным нахождением ω из определителей более высокого порядка, и мы на таких вычислениях не останавливаемся.

На рис. 44 заштрихованы зоны неустойчивости для уравнения (840) при наличии сопротивления; в случае отсутствия сопротивления ($\Delta=0$) все зоны неустойчивости начинаются от оси $\frac{\omega}{2\lambda}$, а при увеличении сопротивления удаляются от этой оси;

величина μ_1^* соответствует знаку равенства в выражении (849), а величина μ_2^* — знаку равенства в выражении (851).

Обратимся теперь к рассмотрению вопроса об устойчивости периодического решения (799) уравнения (798). В описываемом случае уравнение (819) приобретает вид

$$\ddot{\delta}(t) + 2\nu\dot{\delta}(t) + (\lambda^2 + 3\varepsilon p^2)\delta(t) = 0$$

и после подстановки приближенного значения (799) преобразуется:

$$\ddot{\delta}(t) + 2\nu\dot{\delta}(t) + \left(\lambda^2 + \frac{3}{2}\varepsilon A^2 + \frac{3}{2}\varepsilon A^2 \cos 2\omega t\right)\delta(t) = 0$$

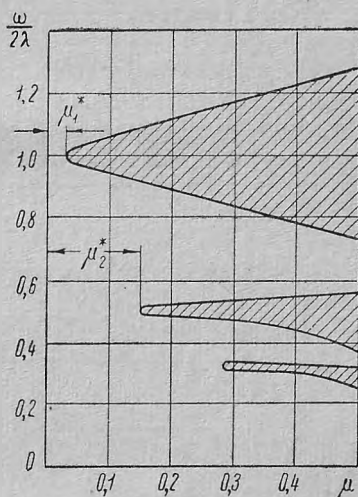


Рис. 44.

или

$$\ddot{\delta}(t) + 2\nu\dot{\delta}(t) + \lambda_0^2(1 - 2\mu_0 \cos 2\omega t)\delta(t) = 0, \quad (852)$$

где¹

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0^2 &= \lambda^2 + \frac{3}{2} \varepsilon A^2, \\ 2\mu_0 &= -\frac{3\varepsilon A^2}{2\lambda_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (853)$$

Уравнение (852) совпадает по виду с уравнением (840) при замене λ на λ_0 , μ на μ_0 и ω на 2ω . Поэтому мы можем сделать вывод, что неустойчивый режим периодических колебаний возможен в районе $\frac{\omega}{\lambda_0} = 1$, т. е. если $\omega > \lambda$, и будет смещаться вправо, т. е. в сторону увеличения частот ω , при возрастании ε и A ; это вполне соответствует результатам решения предыдущего параграфа.

Первая область неустойчивости называется главной, а остальные — побочными. При наличии сопротивления и малом «коэффициенте возбуждения» μ движение будет устойчивым, а при увеличении μ сначала становится возможным попадание в первую область, затем во вторую и т. д.

§ 47. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Дифференциальное уравнение (471) при $\beta = 0$ и $q(x) \equiv 0$ и действии на стержень периодической продольной силы

$$T = T_0 + T_1 \cos \omega_0 t \quad (854)$$

приобретает вид

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\gamma c}{\omega} EI \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial t} - (T_0 + T_1 \cos \omega_0 t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (855)$$

где ω — частота поперечных колебаний.

Переменные в уравнении (855) разделяются лишь в случае свободно опертого стержня, когда решение может быть найдено в виде

$$v(x, t) = p(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (856)$$

в случае же других граничных условий переменные могут быть разделены лишь приближенно при помощи метода Бубнова—Галеркина.

¹ Изменение знака μ не играет роли, так как равносильно изменению начала отсчета времени.

В общем случае нужно выражение

$$v(x, t) = p(x) X(x), \quad (857)$$

где за $X(x)$ целесообразно принять формы свободных колебаний, подставить в уравнение (855), умножить результат подстановки на $X(x) dx$ и проинтегрировать по длине стержня.

Ограничимся рассмотрением случая свободно опертого стержня, для чего подставим выражение (856) в уравнение (855), что после сокращения на неравный нулю множитель $\sin \frac{n\pi x}{l}$ приводит к дифференциальному уравнению

$$m \ddot{p}(t) + \frac{\gamma_c}{\omega} EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \dot{p}(t) + \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 EI + (T_0 + T_1 \cos \omega_0 t) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] p(t) = 0,$$

которое преобразуется к виду (840) при

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma &= \frac{\gamma_c EI}{m\omega} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4, \quad \lambda^2 = \frac{EI}{m} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \left(1 + \frac{T_0 l^2}{EI n^2 \pi^2} \right), \\ 2\mu &= -\frac{T_1 n^2 \pi^2}{l^2 \lambda^2}, \quad \frac{2\pi}{T} = \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (858)$$

Таким образом, при действии периодической продольной силы свободные колебания могут оказаться возрастающими и стержень будет динамически неустойчив. Для оценки динамической устойчивости или неустойчивости стержня достаточно воспользоваться выводами предыдущего параграфа.

Мы не останавливаемся на детальном рассмотрении подобных задач, так как динамическая неустойчивость в рассмотренном выше смысле возможна лишь при установившемся периодическом изменении продольной силы. Это в судовых условиях наблюдается только при вибрации, когда коэффициент возбуждения настолько мал ($|T_1| \ll |T_0|$), что всегда будет находиться в области устойчивости¹.

Коэффициент возбуждения μ может оказаться значительной величиной при малом λ , а это будет иметь место в том случае, когда $T_0 < 0$ и близко к своему эйлерову значению.

Первая область неустойчивости, как следует из исследований предыдущего параграфа, находится вблизи отношения частот $\frac{\omega_0}{2\lambda} = 1$, что при рассмотрении динамической устойчивости стержня может быть объяснено, исходя из физических соображений.

¹ Вопросы динамической устойчивости подробно рассмотрены в работе [2].

Величина λ , определяемая второй формулой (858), представляет частоту свободных поперечных колебаний стержня с учетом действия продольной силы T_0 . Стержень попал бы в резонанс, если бы поперечная гармоническая нагрузка имела частоту λ .

Рассмотрим перемещение опорного сечения стержня вдоль его оси. Он будет совершать периодическое колебание с частотой 2λ , так как при переходе стержня из одного крайнего положения в другое, т. е. полупериода, опорное сечение вернется в исходное положение. Поэтому при $\omega_0 = 2\lambda$ и возникает резонанс.

Для строительной механики корабля представляет интерес вопрос об устойчивости стержней в случае действия кратковременных продольных нагрузок, но постановка задачи будет отлична от рассмотренной выше. Не возникает вопроса об устойчивости собственных колебаний, так как нет установившегося режима действия нагрузки и оказывается необходимым рассматривать устанавливающиеся колебания.

Подобная задача будет зависеть от начальных условий (начальная погибь, эксцентрицитет приложения силы и т. п.) и будет родственна по постановке задаче о несущей способности. К сожалению, до сих пор эти вопросы не разработаны¹.

¹ См. по этому вопросу статью Н. Л. Мошенского «Динамическая несущая способность сжато-изогнутых стержней», Труды ЛКИ, вып. XII, Машгиз, 1953.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехтеоретиздат, 1958.
 2. Болотин В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехтеоретиздат, 1956.
 3. Гогенэмзер К. и Прагер В., Динамика сооружений, ОНТИ, 1936.
 4. Крылов А. Н., Вибрация судов, Судпромгиз, 1936.
 5. Курдюмов А. А., Вибрация корабля, Судпромгиз, 1953.
 6. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехтеоретиздат, 1956.
 7. Папкович П. Ф., Избранные труды по вибрации корабля, Судпромгиз, 1960.
 8. Сорокин Е. С., Динамический расчет несущих конструкций зданий, Госстройиздат, 1956.
 9. Тимошенко С. П., Колебания в инженерном деле, Физматгиз, 1959.
 10. Филиппов А. П., Методы расчета сооружений на колебания, Стройиздат Наркомстроя, 1941.
 11. Чудновский В. Г., Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем, Изд-во АН УССР, 1952.
 12. Шиманский Ю. А., Динамический расчет судовых конструкций, Судпромгиз, 1946.
 13. Справочник по строительной механике корабля, т. 2, раздел VIII, Судпромгиз, 1958.
 14. Справочник по строительной механике корабля, т. 3, раздел XIII, Судпромгиз, 1960.
-

АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ КУРДЮМОВ

ВИБРАЦИЯ КОРАБЛЯ

Рецензенты: проф., д-р техн. наук *Н. Н. Бабаев* и кафедра строительной механики корабля Николаевского кораблестроительного института

Научный редактор *М. Ф. Федосов*

Редактор *А. И. Кускова*

Технический редактор *А. И. Конторович*. Корректор *С. Л. Осмоловская*.

Сдано в набор 4/IV 1961 г. Подписано к печати 8/VIII 1961 г. Формат бумаги 60 × 90¹/₁₆.
Печ. л. 20. Уч.-изд. л. 18,8. Изд. № 909-60. М-38979. Тираж 4600 экз. Цена 86 коп.
Заказ № 3088.

Судпромгиз, Ленинград, ул. Дзержинского, 10

Типография № 4 УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Социалистическая, 14.