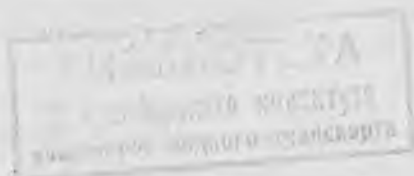


627.94
К 66

А. Е. КОРАБЛЕВ

00212660
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ
ИЗМЕРИТЕЛИ СКОРОСТИ
ХОДА КОРАБЛЯ

00212660
Утвержден Главнокомандующим ВМФ в качестве учебника
для слушателей Академии



ЛЕНИНГРАД
1 9 6 7

627.941
УДК 629.1.053

На основании систематизированного изложения основных теорем механики жидкости в учебнике дается теоретическое обоснование принципа действия гидродинамического лага и влияния на точность его показаний различных гидродинамических факторов.

Среди вопросов, связанных с проектированием отдельных узлов и лага в целом, выделены такие, как влияние на точность измерения давления лагом формы насадок приемных устройств и их размещения на корабле, сравнительная оценка различных компенсационно-измерительных систем лагов и др. Рассмотрены основные разновидности дифференциальных манометров, применяемых в лагах, и составлены дифференциальные уравнения колебаний жидкости в них, необходимые для теоретического исследования устойчивости компенсационных систем; даны некоторые рекомендации по расчету таких систем.

Существенное внимание уделено вопросам регулировки лагов в заводских и корабельных условиях. Дано теоретическое обоснование порядка действий при первичных и повторных регулировках и построения регулировочных номограмм. Приведен расчет таблиц для стендовых регулировок лагов.

Книга рассчитана на лиц, знающих устройство основных разновидностей лагов, и предназначена для слушателей ВМОЛА, изучающих гидродинамические навигационные приборы. Она может быть использована при обучении студентов и курсантов соответствующих специальностей в высших учебных заведениях, а также может быть полезна специалистам штурманской службы военно-морского и коммерческого флотов.

Редактор *С. С. МАТВЕЕВ*

Литературный редактор *Н. И. Гаврилова*

Технический редактор *Н. Ф. Семанова*

Корректор *Н. А. Шуклина*

Типография ВМОЛА

Поступило в производство

4.05.67 г.

Заказ № 229

Подписано к печати

30.11.67 г.

Печ. лист. 15,0

ГМ-267529

ВВЕДЕНИЕ

Решение основных задач кораблевождения и использования некоторых видов современного оружия невозможно без знания географических координат местоположения корабля. Эти координаты фиксируют положение объекта на земной поверхности в системе отсчета, неподвижной относительно Земли. Поэтому все исходные данные, необходимые для их вычисления, должны задаваться в этой же координатной системе. К таким исходным данным относится, в частности, и скорость хода корабля. Однако задача непрерывного измерения скорости объекта относительно грунта еще не решена из-за отсутствия измерителей скорости, способных выдавать этот важнейший параметр движения с необходимой точностью. В настоящее время измерение скорости хода корабля производится в системе отсчета, движущейся вместе с водою из-за наличия течения. Но элементы течения известны, как правило, со значительными погрешностями. Поэтому пересчет скорости, измеренной относительно воды, в скорость относительно Земли, сопровождается погрешностями, свойственными способам определения вектора течения, что приводит, в свою очередь, к неизбежным и существенным по величине ошибкам в счислимых координатах корабля. Следовательно, совершенствование аппаратуры, предназначенной для измерения скорости корабля и проходимого им расстояния, имеет большое значение в вопросе повышения точности счисления.

Исторически сложилось так, что все устройства, предназначенные для измерения скорости корабля и проходимого им расстояния, получили название лагов. В последнее время появились предложения понимать под термином «лаги» только приборы, служащие для измерения скорости корабля относительно воды. Приборы, назначением которых является измерение скорости по отношению к грунту, предлагается называть измерителями полной (истинной) скорости, вместо широко распространенного термина «абсолютные лаги». Однако предлагаемая замена в терминологии не может быть признана удачной, так как понятие «полная скорость» ассоциируется с полным ходом корабля, а под истинной величиной обычно понимается величина, не содержащая погрешностей. В этом плане истинной скоростью может быть скорость корабля как по отношению к воде, так и по отношению к грунту.

Движение корабля в водной среде подчинено законам механики. Поэтому, следуя терминологии применяемой в этой науке, скорость корабля относительно воды мы будем называть относительной скоростью, а скорость течения водных масс — переносной. Тогда перемещение корабля по отношению к грунту за единицу времени автоматически получает название абсолютной скорости.

Все возможные способы измерения абсолютной скорости базируются на выборе неподвижной («абсолютной») по отношению к Земле системы координат. Исключения составляют инерциальные навигационные системы (ИНС), использование которых связано с необходимостью выбора координатной системы, не участвующей в суточном вращении Земли. Скорость, полученная в ИНС путем непосредственного измерения инерционных сил, представляет собой величину перемещения объекта за единицу времени в инерциальном пространстве.

Для определения скорости относительно Земли в этом случае требуется принятие ряда специальных мер, связанных с учетом поворотных ускорений и с исключением их влияния на показания измерителя скорости. Но при этом скорость корабля по отношению к грунту будет уже относительной, а не абсолютной скоростью. Таким образом, один и тот же параметр получает различные наименования в зависимости от выбора системы координат, в которой изучается движение корабля.

Основным назначением ИНС является выработка текущих координат объекта. Поэтому такую систему, строго говоря, уже нельзя назвать лагом, хотя она попутно с решением основной задачи может вырабатывать скорость хода корабля и проходимое им расстояние относительно Земли.

Придерживаясь установившейся терминологии, мы будем называть лагами приборы, предназначенные только для измерения скорости корабля и проходимого им расстояния.

Если лаг измеряет скорость в системе координат, неподвижной относительно Земли, то такой прибор будем называть абсолютным лагом. Приборы, предназначенные для измерения скорости объекта в системе координат, неподвижной по отношению к воде, будут именоваться относительными лагами.

В тех случаях, когда потребуется подчеркнуть физический принцип, положенный в основу конструкции лага, будем пользоваться терминами «гидродинамический лаг», «гидроакустический лаг» и т. д. При необходимости указания системы координат название лага может быть дополнено названием соответствующей системы. Так, например, гидроакустический лаг может быть назван гидроакустическим относительным лагом или гидроакустическим абсолютным лагом и т. п.

Современный комплекс технических средств навигации (ТСН) включает в себя большое количество приборов, использующих в своей работе различные физические поля. При этом, используя

одно и то же поле, в принципе можно создать приборы, выдающие совершенно различные параметры движения корабля.

Так, например, зная законы распространения звука в воде, можно создать различные устройства, предназначенные для измерения глубины под килем корабля, скорости его движения и даже для определения координат местоположения корабля.

В целях получения скорости хода корабля может быть использовано не только гидроакустическое, но и гидродинамическое поле, а также магнитное и гравитационное поля Земли и др. Естественно, что между измерителями скорости, основанными на различных физических принципах, трудно ожидать конструктивных аналогий. Поэтому для изучения основ теории приборов, образующих комплекс технических средств навигации, их удобно разбить на группы, положив в основу группирования не целевое назначение, а физические принципы, на которых базируется их действие.

Лаги, использующие для индикации скорости скоростной напор воды, следует отнести к группе гидродинамических приборов и систем. Принцип действия этих лагов определяется законами гидромеханики. К указанным измерителям скорости относятся вертушечные и гидродинамические лаги. Обе категории этих приборов представляют собой относительные лаги и являются в настоящее время основными измерителями скорости на кораблях.

Что же касается других разновидностей лагов, в том числе и абсолютных, то они еще не получили широкого распространения из-за ряда специфических трудностей, связанных с их использованием на корабле.

В настоящей книге будут рассмотрены лишь гидродинамические лаги. Лаги с другими физическими основами рассматриваются в соответствующих курсах.

Вертушечные лаги, как механические, так и электромеханические, при относительной простоте своей конструкции обладают рядом серьезных недостатков по сравнению с гидродинамическими лагами. Главным из этих недостатков, как известно, является сильная зависимость поправки лага от скорости хода корабля и от времени. Это обстоятельство, а также ряд других причин привели к постепенному вытеснению вертушечных лагов гидродинамическими, которые заняли господствующее положение на всех флотах мира.

По этой причине в учебнике рассматриваются, в основном, лишь те вопросы, которые имеют непосредственное отношение прежде всего к гидродинамическим лагам.

В главах I и II книги изложены основные понятия определения и теоремы гидромеханики.

Глава III содержит материал, являющийся приложением общих законов гидромеханики к обоснованию принципа действия и точности измерения скорости корабля гидродинамическими лагами.

В главе IV рассматриваются вопросы, связанные с проектированием лагов. Ранее отмечалось, что существует много различных

конструктивных разновидностей схем лагов. Поэтому в одном кратком учебнике нет возможности дать их детальное описание. К тому же в этом нет и необходимости, так как по каждому конкретному образцу существуют, как правило, подробные технические описания, кроме того, эти вопросы достаточно детально изучаются в училищах. В учебнике излагаются лишь общие принципиальные положения, связанные с конструированием лагов. К таким вопросам относятся оценка влияния насадок приемных устройств на точность измерения динамического и статического давлений, дифференциальные манометры, компенсационно-измерительные системы и др.

В связи с тем, что элементы, из которых слагаются электромеханические схемы лагов, в подавляющем большинстве своем не являются специфическими для этих приборов и их можно обнаружить во многих системах автоматического управления, им в книге не уделяется особого внимания. Они рассматриваются лишь с точки зрения особенностей их использования в лаговых схемах. Так, например, методика расчета следящих систем, состоящих из классических электромеханических элементов, слушателям известна из курса «Системы автоматического управления». Поэтому в книге рассматриваются лишь те вопросы, которые позволяют свести специфические следящие системы лагов к типовым.

В главе V изложены теоретические основы регулировок лагов на мерных линиях и на стендах в мастерских. Необходимость изложения этого материала обусловлена тем, что во всех практических руководствах по этим вопросам изложен лишь порядок действий при выполнении названных операций, но нигде не приведено обоснование этих действий. Однако понимание физической сущности этих процессов имеет принципиальное значение для специалистов, призванных организовывать технически грамотную эксплуатацию ТСН на кораблях и ремонт их в условиях мастерских.

В основу учебника положен курс лекций, читаемых в Академии в соответствии с программой по гидродинамическим навигационным приборам. Вывод основных уравнений гидромеханики выполнен с применением векторного анализа, что дает возможность иметь запись аналитических выражений в компактном виде. В силу этого обстоятельства учебник рассчитан, прежде всего, на слушателей Академии, владеющих указанным математическим аппаратом, и преподавателей высших военно-морских училищ. В качестве дополнительной литературы книга может быть рекомендована курсантам военно-морских и мореходных училищ.

Глава I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГИДРОСТАТИКИ

§ 1. ПРЕДМЕТ ГИДРОМЕХАНИКИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Механика жидкости, или гидромеханика, — это раздел механики, изучающий движение и равновесие жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами, полностью или частично погруженными в жидкость.

Возникновение первых идей гидромеханики относится к древней истории человечества и связано со строительством ирригационных сооружений, водопроводов, развитием мореплавания, созданием метательных орудий. При этом основной проблемой гидромеханики тех времен было выяснение взаимодействия между твердым телом и средой, в которой оно перемещается при плавании или полете. Однако относительно малые скорости перемещения тел, использование в качестве движителей парусов и весел, а также незнание закона инерции не позволили решить эту проблему, и даже наоборот: основные выводы в этом вопросе были противоположны действительности. Так, например, по воззрениям Аристотеля (384—322 гг. до н. э.) воздух не только не создает сопротивления движению снаряда, а наоборот, смыкаясь за снарядом, толкает его вперед, т. е. является движущей силой подобно ветру, толкающему парус. Поэтому полет в пустоте считался невозможным.

В вопросах изучения жидкости в статическом состоянии успехи были более существенными, что подтверждается работами Архимеда (287—212 гг. до н. э.). Значительный вклад в развитие гидромеханики внесли и такие известные ученые прошлого, как Леонардо да Винчи (1452—1519), Галилей (1564—1642), Паскаль (1623—1662), Ньютон (1642—1727). Однако гидромеханика как наука с широким кругом задач и строгими методами их исследования была создана Леонардом Эйлером (1707—1783) и Даниилом Бернулли (1700—1783) — академиками Российской академии наук. Эйлер ввел понятие давления, указал, что внутренне трение в жидкостях влияет на создание сопротивления. Он вывел систему уравнений движения идеальной жидкости, являющуюся фундаментальной в гидромеханике. Бернулли дал закон сохранения механической энергии в движущейся жидкости, установив зависимость между давлением, высотой и скоростью движения жидкости.

В эти же годы параллельно с Эйлером и Бернулли работал в области гидромеханики Даламбер (1717—1783), который возглавил большие экспериментальные работы по исследованию сопротивления тел, явившиеся следствием необходимости изучения сопротивления кораблей при их движении в каналах. Великий французский математик Лагранж (1736—1813) дал дальнейшее развитие аналитическим методам изучения движения жидкости.

В XIX в. развитие гидромеханики шло нарастающим темпом. Над решением проблемных задач этой науки работали математики и механики, имена которых получили всемирную известность: Коши, Стокс, Пуассон, Навье, Кирхгоф, Максвелл, Пуазейль, Рейнольдс и др. В этом ряду имен достойное место занимают и русские ученые: И. С. Громека (1851—1889), Д. И. Менделеев (1834—1907), Н. Е. Жуковский (1847—1921), С. А. Чаплыгин (1869—1942).

Первая половина XX в. дала человечеству авиацию, развитие которой было бы невозможно без решения многих проблем, поставленных этим новым видом транспорта перед гидромеханикой. Хорошо известен тот большой вклад, который внесли в развитие авиации своими выдающимися исследованиями в области гидромеханики (аэродинамики) Н. Е. Жуковский и его ученик и последователь С. А. Чаплыгин.

Н. Е. Жуковский явился создателем Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ). Этот институт сыграл огромную роль в создании и развитии советской авиации. На его базе возникла обширная школа советских гидромехаников. Их имена хорошо известны: М. В. Келдыш, Л. И. Седов, Ф. И. Франкль, С. А. Христианович, И. А. Кибель, Л. Г. Лойцянский, Н. Е. Кочин, А. А. Дородницын и многие другие, которые своими капитальными исследованиями в огромной степени способствовали развитию гидромеханики, созданию ее новых разделов.

Запросы ракетной техники и современной авиации потребовали решения многих задач, связанных со сверхзвуковыми скоростями течения жидкости (газа). Наши успехи в космосе, наши великолепные воздушные гиганты лайнеры служат веским доказательством того, что проблемы современной гидромеханики решаются успешно.

В настоящее время на правах самостоятельных наук существуют такие разделы гидромеханики, как аэромеханика, газовая динамика, аэродинамика больших скоростей. Однако в классическом плане гидромеханику принято делить на гидростатику и гидродинамику.

Гидростатика — раздел гидромеханики, изучающий равновесие жидкости и равновесие твердых тел, полностью или частично погруженных в жидкость.

Гидродинамика — раздел гидромеханики, изучающий движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении.

Таким образом, из определения гидромеханики и ее разделов следует, что эта наука занимается изучением законов движения жидкости, т. е. такого физического тела, частицы которого обладают большой подвижностью относительно друг друга.

Жидкость, как и всякое физическое тело, состоит из молекул, находящихся в непрерывном тепловом движении под действием внутренних молекулярных сил притяжения и отталкивания. Это движение изучается в кинетической теории вещества. Гидромеханика изучает движение жидкости, обусловленное только внешними силами.

Если какой-либо сосуд до краев заполнить жидкостью, то это вовсе не будет означать, что жидкость занимает сплошь все пространство, охватываемое сосудом, так как между молекулами всегда имеются промежутки. Тем не менее гидромеханика рассматривает жидкость как сплошную среду. По этой причине гидромеханика, в свою очередь, является разделом механики сплошных сред, которая не учитывает дискретный характер строения вещества.

Такое допущение правомерно лишь в тех случаях, когда рассматриваются такие объемы жидкости, линейные размеры которых несоизмеримо велики по сравнению с расстояниями между молекулами. Известно, например, что в одном кубическом миллиметре воздуха при нормальных условиях содержится $2,7 \cdot 10^{16}$ молекул, т. е. размеры молекул и промежутки между ними ничтожно малы. И ни в одной области техники жидкость почти не применяется в количествах, соизмеримых с размерами молекул.

Естественно, что все законы гидромеханики справедливы до тех пор, пока размеры рассматриваемого объема жидкости несравненно больше размеров молекул, его образующих. Когда же эти размеры становятся соизмеримыми, то и законы гидромеханики теряют свою силу.

При использовании аппарата математического анализа для изучения движения и равновесия жидкости нам придется в дальнейшем пользоваться понятием элементарного объема dV , элементарно малой площадки dS и т. д. И хотя эти величины будут считаться элементарно малыми, они малы лишь постольку, поскольку гипотеза сплошности вещества при этом не нарушается.

Представление жидкости в виде сплошной среды дает возможность рассматривать ее основные механические характеристики как функции координат и времени.

В гидромеханике понятие «жидкость» включает в себя как жидкость, так и газы. Для уточнения иногда применяется термин «капельная жидкость», которым подчеркивается, что речь идет не о газе, а о жидкости в обычном понимании этого слова.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

Капельные жидкости, изучением которых мы будем заниматься, по своим физическим свойствам занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами: они обладают, как газы, текучестью и, как твердые тела, сопротивлением сдвигу одного слоя жидкости относительно другого.

Для изучения законов движения жидкости и ее равновесного состояния необходимо знать ее основные физические характеристики, к которым относятся плотность, удельный вес, вязкость и др.

Плотностью жидкости ρ называется отношение массы M жидкости к ее объему V

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (2.1)$$

т. е. это количество массы жидкости в единице объема.

Если плотность жидкости постоянна во всем рассматриваемом объеме, то такую жидкость принято называть однородной, или, иначе, жидкостью, плотность которой при одинаковых условиях во всех точках объема одна и та же, называется однородной жидкостью. Жидкость, не удовлетворяющая указанному условию, называется неоднородной жидкостью.

Для неоднородной жидкости определение плотности (2.1) не подходит, так как плотность ее в каждой точке объема различна и может быть определена с помощью предельного перехода

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (2.2)$$

Если плотность неоднородной жидкости подсчитана по формуле (2.1), то ее называют средней плотностью в данном объеме.

Величина плотности жидкости может изменяться в зависимости от внешних условий. Опыт показывает, что изменение давления и температуры влияет на величину плотности. При этом относительное изменение температуры вызывает значительно большее изменение плотности жидкости, чем аналогичное приращение давления. Так, плотность воды, находящейся под давлением 100 атм, отличается от ее плотности при атмосферном давлении всего лишь на 0,5%. Влияние же температуры на плотность дистиллированной воды хорошо иллюстрируется табл. 1, где ρ_0 — плотность воды при 4° С.

Таблица 1

Температура, °С	0	3	4	5	10	20	40	100
$\frac{\rho}{\rho_0}$	0,99987	0,99999	1,00000	0,99999	0,99975	0,99826	0,99235	0,95865

Из таблицы, в частности, следует, что дистиллированная вода имеет наибольшую плотность при 4°C . Если взять морскую воду, то она достигает наибольшей плотности при температуре около $+3^{\circ}\text{C}$. В практических расчетах плотность воды принимают равной $102 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{м}^{-4}$, что соответствует плотности дистиллированной воды при атмосферном давлении и температуре 15°C .

В технике наряду с плотностью жидкости очень часто пользуются понятием удельного веса.

Удельным весом γ называется отношение веса Q жидкости к ее объему V . Другими словами можно сказать, что это вес единицы объема жидкости:

$$\gamma = \frac{Q}{V}. \quad (2.3)$$

Удельный вес и плотность связаны между собой соотношением

$$\gamma = g\rho. \quad (2.4)$$

где g — ускорение свободного падения.

Удельный вес дистиллированной воды равен 1000 кг/м^3 , а морской — лежит в пределах 1000 — 1040 кг/м^3 . Среднее значение удельного веса воды в море принимается равным 1024 кг/м^3 .

В связи с принятием Международной системы единиц (СИ) все основные и производные физические величины должны даваться в этой системе. В системе СИ за единицу силы принимается ньютон:

$$1 \text{ н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-2} = \frac{1}{9,81} \text{ кг},$$

или $1 \text{ кг} = 9,81 \text{ н}$.

Тогда удельный вес дистиллированной воды в системе СИ будет $\gamma = 1000 \cdot 9,81 \text{ н/м}^3 = 9810 \text{ н/м}^3$.

Помимо плотности и удельного веса в гидромеханике применяются и такие понятия, как массовый удельный объем и весовой удельный объем.

Массовый удельный объем v_m представляет собой объем, занимаемый единицей массы жидкости, т. е. это величина, обратная плотности:

$$v_m = \frac{V}{M} = \frac{1}{\rho}. \quad (2.5)$$

Весовым удельным объемом v называется объем единицы веса жидкости, т. е. он представляет собой величину, обратную удельному весу:

$$v = \frac{V}{Q} = \frac{1}{\gamma}. \quad (2.6)$$

Изменение объема жидкости под действием приращения давления и температуры называется сжимаемостью и численно характеризуется коэффициентом S кубического сжатия или объемным модулем упругости K , причем

$$K = \frac{1}{S}. \quad (2.7)$$

Коэффициент кубического сжатия является коэффициентом пропорциональности между изменением единицы объема $\frac{dV}{V}$ и приращением давления dp :

$$\frac{dV}{V} = -S dp. \quad (2.8)$$

Знак минус в формуле (2.8) указывает на то обстоятельство, что при возрастании давления объем жидкости уменьшается.

Из уравнения (2.8) следует, что

$$S = - \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}. \quad (2.9)$$

Строго говоря, формула (2.9) не является точной, так как не отражает влияния температуры на сжимаемость жидкости. Однако в прикладных вопросах гидромеханики изменением температуры при сжатии жидкости можно пренебречь, и в этих случаях формула (2.9) дает вполне приемлемый результат.

На основании выражений (2.7) и (2.9) объемный модуль упругости

$$K = -V \frac{dp}{dV}. \quad (2.10)$$

Масса однородной жидкости в некотором замкнутом объеме определяется соотношением

$$M = \rho V. \quad (2.11)$$

Изменение величины объема, занимаемого жидкостью, не может вызывать изменение количества массы в этом объеме, т. е.

$$dM = \rho dV + V d\rho = 0,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dV}{V}. \quad (2.12)$$

Подставив соотношение (2.12) в формулу (2.10), получим объемный модуль упругости, выраженный через плотность жидкости:

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}, \quad (2.13)$$

а на основании (2.7)

$$S = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \quad (2.14)$$

В табл. 2 приведены величины коэффициента объемного сжатия и объемного модуля упругости для воды при различных температурах.

Таблица 2

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30
$S, \text{м}^2/\text{кг}$	$5,02 \cdot 10^{-10}$	$4,82 \cdot 10^{-10}$	$4,65 \cdot 10^{-10}$	$4,56 \cdot 10^{-10}$
$K, \text{кг}/\text{м}^2$	$1,99 \cdot 10^8$	$2,07 \cdot 10^8$	$2,15 \cdot 10^8$	$2,19 \cdot 10^8$

Из таблицы следует, что для диапазона температур воды, с которыми обычно приходится иметь дело при плавании в море, изменения K и S чрезвычайно малы.

Если, используя данные табл. 2, подсчитать по формуле (2.8) или (2.10) величину изменения объема воды при изменении давления на 1 атм, то получим, что это изменение составит примерно 0,005%. Отсюда можно сделать вывод, что при решении большинства технических задач жидкость можно считать несжимаемой. Однако в таких случаях, как расчет подводного взрыва, гидравлического удара в трубах и др., пренебрежение сжимаемостью жидкости приведет к грубым просчетам.

§ 3. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЖИДКОСТИ

Все силы, действующие на объем V жидкости, ограниченный поверхностью S , можно разделить на две категории: силы, действующие на каждую частицу объема, и силы, действующие только на поверхность, ограничивающую этот объем.

Силы, действующие на каждый элемент объема жидкости и пропорциональные массе этого объема, называются **объемными** или **массовыми** силами.

К объемным силам относятся прежде всего силы тяжести и инерции.

Если на каждую частицу элементарного объема действует ускорение $\vec{\omega}$, то элементарная объемная сила $d\vec{f}$ будет определяться соотношением:

$$d\vec{f} = \rho \vec{\omega} dV. \quad (3.1)$$

Для определения силы, действующей на объем V , необходимо проинтегрировать выражение (3.1) по всему объему, занимаемому жидкостью:

$$F_V = \int_V \rho \vec{w} dV. \quad (3.2)$$

Так как произведение ρdV есть не что иное, как масса dM элементарного объема, то частное

$$\vec{F} = \frac{d\vec{f}}{dM} \quad (3.3)$$

представляет собой объемную силу, отнесенную к единице массы, которая на основании (3.1) будет равна ускорению. Если проекции $\vec{F}$ на оси x, y, z прямоугольной системы координат обозначить соответственно X, Y, Z , а проекции ускорения на те же оси — w_x, w_y, w_z , то можно написать

$$\vec{F} \{X, Y, Z\} = \vec{w} \{w_x, w_y, w_z\}. \quad (3.4)$$

По аналогии с определением плотности жидкости можно ввести и понятие плотности объемной силы:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{f}}{dV} = \rho \vec{w}, \quad (3.5)$$

которая представляет собой объемную силу, отнесенную к единице объема.

Силы, приложенные к поверхности, которая ограничивает объем, занимаемый жидкостью, называются поверхностными силами.

Эти силы удобно использовать в виде величин, отнесенных к единице площади поверхности. Поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности, называется напряжением $\vec{\sigma}$.

В общем случае вектор напряжения $\vec{\sigma}$ может составлять с нормалью $\vec{n}$ к поверхности произвольный угол (рис. 1). Поэтому напряжение обычно рассматривается в виде двух его составляющих: по нормали к поверхности и в плоскости, касательной к ней.

Проекция напряжения на направление нормали называется нормальным напряжением или просто давлением p .

Проекция напряжения на плоскость, касательную к поверхности в данной точке, называется касательным или тангенциальным напряжением τ в этой точке.

Если нормальные и касательные силы, действующие на площадку ΔS , обозначить соответственно ΔF_n и ΔF_τ , то

$$\left. \begin{aligned} p &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}; \\ \tau &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta S}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Размерность давления в системе СИ будет $[p] = \text{н} \cdot \text{м}^{-2}$. Такую же размерность имеет и касательное напряжение.

Хотя касательное и нормальное напряжения являются компонентами одного и того же напряжения $\vec{\sigma}$, их роль в гидромеханике существенно различна. Так, при движении жидкости в трубе запас прочности стенок последней определяется только величиной нормального напряжения. Касательное же напряжение характеризует то сопротивление, которое создается в трубе при движении в ней жидкости.

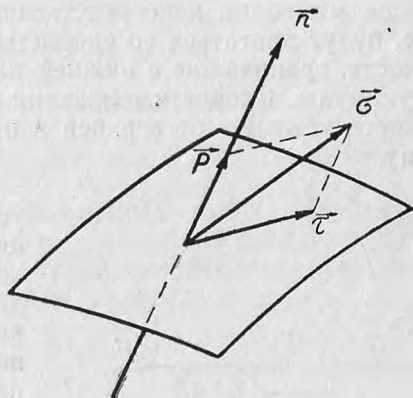


Рис. 1

Следует отметить, что касательное напряжение на границе раздела двух слоев жидкости может существовать только при их относительном перемещении. В состоянии относительного покоя на поверхности раздела действуют только нормальные напряжения. Жидкость считается идеальной, если в ней отсутствуют касательные напряжения, несмотря на перемещение одного слоя жидкости по отношению к другому. В идеальной жидкости существуют лишь нормальные напряжения.

После того как введено понятие касательного напряжения, можно рассмотреть еще одну очень важную характеристику жидкости — вязкость. Так как в реальных жидкостях при относительном перемещении двух смежных слоев на их поверхности раздела возникают касательные напряжения, то это неизбежно создает сопротивление перемещению одного слоя со стороны другого. Способность жидкости оказывать сопротивление сдвигающим и растягивающим усилиям называется вязкостью жидкости. Вязкость жидкости является следствием наличия молекулярных сил притяжения, величина которых зависит от природы жидкости и внешних условий.

Рассмотрим явление вязкости на следующем примере. Пусть между двумя параллельными пластинами (рис. 2), отстоящими друг от друга на расстояние h , находится жидкость. При этом нижняя пластина B закреплена, а верхняя A может перемещаться в плоскости, параллельной нижней пластине. Свяжем с неподвижной пластиной ось x , проведя ее в плоскости рисунка слева направо. Ось y направим перпендикулярно к пластине B вверх, как показано на рис. 2. Если к пластине A приложить некоторую силу F , действующую в направлении оси x , то мы отметим, что в этом же направлении будет перемещаться и верхняя пластина, сначала равноускоренно, а по истечении некоторого промежутка времени — с некоторой установившейся скоростью $\vec{v}$. Опыт показывает, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к верхней пластине, будут двигаться со скоростью пластины, тогда как частицы жидкости, граничащие с нижней пластиной, будут иметь скорость, равную нулю. Скорости движения частиц в промежуточных слоях жидкости убывают от верхней к нижней пластине по линейному закону.

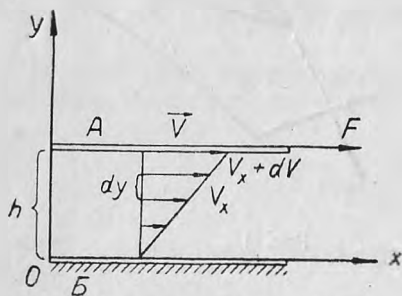


Рис. 2

Согласно закону Ньютона, установленному экспериментально, величина касательного напряжения, действующего на верхнюю пластину, пропорциональна скорости ее движения и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами:

$$\tau = \mu \frac{v}{h}, \quad (3.7)$$

где μ — коэффициент пропорциональности, называемый динамическим коэффициентом вязкости.

Распространяя этот закон на слои жидкости, отстоящие друг от друга на расстояние dy и движущиеся со скоростью $v_x + dv$ и v_x (см. рис. 2), можно написать

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}, \quad (3.8)$$

Производная $\frac{dv_x}{dy}$ представляет собой градиент скорости в направлении оси y , характеризующий величину изменения скорости течения жидкости при переходе от одного ее слоя к другому.

В системе единиц МКГСС динамический коэффициент вязкости выражается в $\text{кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2}$, а в системе СГС — в $\text{дин} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^{-2}$, причем

$$1 \text{ дин} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^{-2} = 1 \text{ пз (пуаз)};$$

$$1 \text{ пз} = \frac{10^4}{981 \cdot 10^8} \text{ кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2} = 0,01019 \text{ кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2};$$

$$1 \text{ кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2} = 98,1 \text{ пз}.$$

В системе единиц СИ динамический коэффициент вязкости имеет размерность $\text{н} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2}$. Помня, что $1 \text{ кг} = 9,81 \text{ н}$, полученные величины легко перевести в систему СИ:

$$1 \text{ кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2} = 9,81 \text{ н} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2};$$

$$1 \text{ н} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2} = 10 \text{ пз};$$

$$1 \text{ пз} = 0,1 \text{ н} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Очень часто при решении различных задач гидромеханики пользуются кинематическим коэффициентом вязкости, который представляет собой отношение динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости, т. е.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.9)$$

Размерность коэффициента ν есть $L^2 T^{-1}$, т. е. в системе единиц СГС он измеряется в $\text{см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, а в системе СИ, как и в МКГСС, — в $\text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$.

Коэффициенты μ и ν не зависят от градиента скорости, что было проверено экспериментально для значений градиентов от $5 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^3 \text{ м/сек/м}$. Величина этих коэффициентов зависит главным образом от физических свойств жидкости и от температуры. Давление практически не влияет на их величину. Зависимость от температуры коэффициентов μ и ν для воды представлена табл. 3.

Таблица 3

$t, ^\circ\text{C}$	0	5	10	20	30	50	100
$\mu, \text{кг} \cdot \text{сек} / \text{м}^2 \cdot 10^{-6}$	182,7	154,7	133,3	102,4	81,6	55,9	28,9
$\nu \text{ м}^2 / \text{сек} \cdot 10^{-6}$	1,792	1,519	1,308	1,007	0,804	0,549	0,284

Иногда ошибочно предполагают, что жидкости с большей плотностью обладают и большей вязкостью. Ошибочность такого предположения наглядно видна из сопоставления вязкости воды и ртути, сделанного в табл. 4.

Таблица 4

$t, ^\circ\text{C}$	0	20
μ ртути $\text{кг}\cdot\text{сек}/\text{м}^2$	$173\cdot 10^{-6}$	$160\cdot 10^{-6}$
μ воды $\text{кг}\cdot\text{сек}/\text{м}^2$	$182,7\cdot 10^{-6}$	$102,4\cdot 10^{-6}$

Таким образом, ртуть, которая имеет плотность, в 13,6 раза превосходящую плотность воды, по своей вязкости почти не отличается от воды. Этот пример еще раз подтверждает высказанное выше положение, что вязкость жидкости определяется прежде всего ее внутренней структурой.

Физические свойства жидкости не исчерпываются, естественно, теми характеристиками, которые были рассмотрены выше. Не менее важное значение при изучении жидкостей имеют и такие ее свойства, как поверхностное натяжение, цвет, прозрачность, теплоемкость, зависимость вязкости от напряженности магнитного поля и др. Однако учет их при рассмотрении работы лагов либо совсем не сказывается на окончательном результате, либо их влияние пренебрежимо мало. По этой причине они здесь и не рассматриваются.

§ 4. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Гидростатика, как уже указывалось, занимается изучением равновесного состояния жидкости, т. е. изучает жидкость в состоянии относительного покоя, которое характеризуется прежде всего тем, что в этом случае в жидкости отсутствуют касательные напряжения. Наличие касательных напряжений неизбежно привело бы к нарушению относительного покоя. Что же касается нормального напряжения, то оно всегда должно быть направлено внутрь рассматриваемого объема (по внутренней нормали). Если нормальное напряжение направлено по внешней нормали, то жидкость не может находиться в равновесном состоянии. Нормальное напряжение в жидкости, находящейся в состоянии относительного покоя, называется гидростатическим давлением. Поверхностный интеграл от нормального напряжения определяет силу давления, действующую на данную поверхность.

Из сказанного можно сформулировать первое свойство гидростатического давления: *направление силы гидростатического давления всегда совпадает с направлением внутренней нормали.*

Через каждую произвольно выбранную точку в жидкости можно провести бесчисленное множество площадок, различно ориентированных в пространстве. Зависит ли величина гидростатического давления от ориентации площадки?

Для ответа на этот вопрос выделим в жидкости элементарный тетраэдр с ребрами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (рис. 3), объемом ΔV . Всю массу жидкости, окружающую тетраэдр, мысленно отбросим. При этом, для того чтобы сохранить равновесие тетраэдра, необходимо к каждой его грани приложить соответствующие силы давления P_x, P_y, P_z и P_n , где P_n — сила давления на грань BCD , нормаль к которой есть n . Эти силы должны быть в точности равны тем силам,

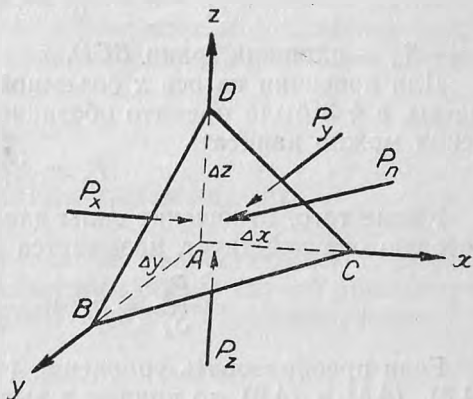


Рис. 3

с которыми действовала на грани тетраэдра отброшенная жидкость. Помимо сил давления на жидкость, охватываемую тетраэдром, могут действовать объемные силы, равнодействующая $\vec{F}_v$, которых может не совпадать по направлению ни с одним из ребер тетраэдра. Обозначим проекции силы $\vec{F}_v$ на оси x, y, z символами F_x, F_y, F_z соответственно.

Для того чтобы тетраэдр находился в равновесии, необходимо, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей x, y, z была равна нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_x - P_n \cos(n, x) + F_x &= 0; \\ P_y - P_n \cos(n, y) + F_y &= 0; \\ P_z - P_n \cos(n, z) + F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Разделим все члены первого уравнения системы (4.1) на площадь S_x грани, перпендикулярной к оси x :

$$\frac{P_x}{S_x} - \frac{P_n \cos(x, n)}{S_x} + \frac{F_x}{S_x} = 0. \quad (4.2)$$

Из рис. 3 следует, что

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} \Delta y \Delta z; \\ S_x &= S_n \cos(\widehat{n, x}); \\ \Delta V &= \frac{1}{6} \Delta x \Delta y \Delta z, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где S_n — площадь грани BCD .

Для проекции на ось x объемной силы, отнесенной к единице массы, в § 3 было принято обозначение X . С учетом этого обозначения можно написать

$$F_x = X \rho \Delta V. \quad (4.4)$$

Кроме того, отношение силы давления к величине площади, на которую она действует, называется давлением p . Поэтому

$$\frac{P_x}{S_x} = p_x \quad \text{и} \quad \frac{P_n}{S_n} = p_n. \quad (4.5)$$

Если преобразовать уравнение (4.2) с помощью зависимостей (4.3), (4.4) и (4.5), то придем к выражению

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} \rho X \Delta x = 0.$$

Проделав аналогичные преобразования над остальными уравнениями системы (4.1), получим новую систему:

$$\left. \begin{aligned} p_x - p_n + \frac{1}{3} \rho X \Delta x &= 0; \\ p_y - p_n + \frac{1}{3} \rho Y \Delta y &= 0; \\ p_z - p_n + \frac{1}{3} \rho Z \Delta z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Размеры тетраэдра были выбраны произвольно. Поэтому уравнения (4.6) справедливы для любого малого тетраэдра, в том числе и для такого, у которого длины ребер близки к нулю. Если тетраэдр стягивать к точке A , то все его ребра будут стремиться к нулю и в пределе для точки A система уравнений превратится в следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} p_x - p_n &= 0; \\ p_y - p_n &= 0; \\ p_z - p_n &= 0, \end{aligned}$$

или

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (4.7)$$

Так как равенство (4.7) справедливо для точки A , выбранной произвольно, то оно справедливо и для любой точки объема, занимаемого жидкостью. Отсюда можно сформулировать второе свойство гидростатического давления: *гидростатическое давление в точке не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.*

Гидростатическое давление в каждой точке жидкости является величиной вполне определенной, и так как эта величина не зависит от ориентации площадки, то гидростатическое давление представляет собой скалярную функцию координат и, в общем случае, времени, т. е.

$$p=p(x, y, z, t). \quad (4.8)$$

§ 5. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Для выяснения закона распределения гидростатического давления в покоящейся жидкости рассмотрим общий случай равновесия жидкого тела, находящегося в состоянии относительного покоя.

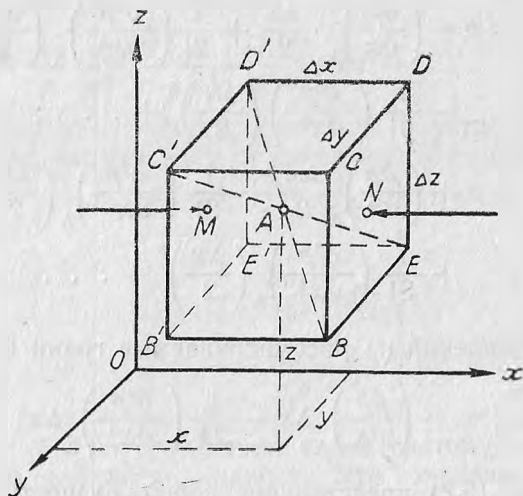


Рис. 4

Выделим в жидкости, находящейся в равновесном состоянии, элементарный параллелепипед с ребрами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, параллельными осям координатной системы $x y z$ (рис. 4). Так как жидкость находится в состоянии относительного покоя, то из всех возможных поверхностных сил на параллелепипед действуют только силы гидростатического давления. Равнодействующая объемных сил пусть будет ориентирована в пространстве произвольно, а ее проекции на оси координат, отнесенные к единице массы, будут X, Y, Z .

Предположим, что в точке $A(x, y, z)$, являющейся точкой пересечения диагоналей параллелепипеда, задано гидростатическое давление p . Найдем величины давлений в точках M и N центров граней $BCDE$ и $B'C'D'E'$. Из рисунка видно, что координаты y и z этих точек будут теми же самыми, что и у точки A .

Так как нами выбран элементарно малый параллелепипед, то допустимо предположить с точностью до членов высшего порядка малости, что давление в любой точке грани $BCDE$ будет равно давлению в точке N . Это допущение, естественно, относится и к грани $B'C'D'E'$. Поскольку гидростатическое давление представляет собой непрерывную скалярную функцию координат, то давление в точках M и N , отстоящих от точки A на расстояниях $-\frac{\Delta x}{2}$ и $+\frac{\Delta x}{2}$ соответственно, может быть вычислено через давление в точке A , если последнее разложить в ряд Тейлора по переменной x в окрестности A :

$$\left. \begin{aligned} p_M &= p - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_A \cdot \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_A \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right)_A \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \dots; \\ p_N &= p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_A \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_A \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right)_A \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Разность давлений на рассматриваемые грани будет

$$p_M - p_N = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_A \Delta x - \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right)_A \Delta x^3 - \dots \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) представляет собой разность сил давления, отнесенных к единице площади. Разность сил давления, действующих на всю поверхность граней $BCDE$ и $B'C'D'E'$, получится из соотношения (5.2), если обе части его умножить на величину площади соответствующей грани:

$$(p_M - p_N) \Delta y \Delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{1}{24} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Delta x^3 \Delta y \Delta z - \dots \quad (5.3)$$

Для упрощения записи в равенстве (5.3) и в дальнейшем индекс «А» опускается,

Параллелепипед будет находиться в равновесии по направлению оси x , если сумма проекций объемных сил и сил давления на эту ось будет равна нулю, т. е.

$$X\rho\Delta x\Delta y\Delta z - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z - \frac{1}{24} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\Delta x^3\Delta y\Delta z - \dots = 0. \quad (5.4)$$

Разделив все члены уравнения (5.4) на массу параллелепипеда $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$, получим

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Delta x^2 - \dots = 0. \quad (5.5)$$

Если выполнить аналогичные рассуждения по отношению к двум другим парам противоположных граней, то условия равновесия параллелепипеда по осям y и z будут иметь вид, подобный (5.5):

$$\left. \begin{aligned} Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{24\rho} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} \Delta y^2 - \dots &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{24\rho} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} \Delta z^2 - \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Стягивая параллелепипед к точке A , т. е. устремляя к нулю его ребра Δx , Δy , Δz , мы перейдем от уравнений (5.5) и (5.6) к системе:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Уравнения (5.7) представляют собой систему дифференциальных уравнений равновесия жидкости. Эти уравнения были впервые выведены Леонардом Эйлером в 1755 г.

Полученная система уравнений может быть записана в более компактном виде, если перейти к векторной форме записи. Для этого достаточно каждое из уравнений (5.7) умножить на орт соответствующей оси и почленно сложить:

$$X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right)$$

или

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (5.8)$$

Применив оператор Гамильтона, последнюю запись можно сократить еще:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (5.9)$$

Таким образом, жидкость будет находиться в равновесии в данной точке, если выполняются условия (5.7) или эквивалентные им (5.8) и (5.9).

Из этих уравнений в частности, следует, что если массовые силы отсутствуют ($\vec{F}=0$), то давление во всех точках объема, занимаемого жидкостью, будет одно и то же, так как $\text{grad } p=0$.

Располагая дифференциальными уравнениями (5.7), можно получить и интегральное условие равновесия жидкости. Действительно, умножим каждое из уравнений системы (5.7) на dx, dy, dz соответственно, и сложим:

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \quad (5.10)$$

В правой части равенства (5.10) находится полный дифференциал давления. Но это равенство возможно лишь в том случае, если и в левой части находится тоже полный дифференциал некоторой функции $U=U(x, y, z)$. Тогда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.11)$$

Из теоретической механики известно, что в каждой точке поля функция U , которую принято называть силовой функцией, равна с обратным знаком потенциальной энергии Π в этой же точке:

$$U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z) \quad (5.12)$$

и

$$dU(x, y, z) = -d\Pi(x, y, z). \quad (5.13)$$

Учитывая сказанное, уравнение (5.10) можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho} dp = -d\Pi. \quad (5.14)$$

Интегрируя уравнение (5.14), получим

$$p + \rho \Pi = C, \quad (5.15)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования, зависящая от выбора начала отсчета координат.

Так как уравнение (5.15) было получено для произвольно выбранной точки, то константа C имеет одно и то же значение для любой точки объема, занимаемого жидкостью. При этом давление и потенциальная энергия должны относиться к одной и той же точке, находящейся в состоянии относительного покоя.

§ 6. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Если жидкость находится под воздействием внешних сил, являющихся только силами притяжения к Земле, то единственной массовой силой, действующей на частицу жидкости, будет сила тяжести. Поскольку при выводе уравнений (5.7) считалось, что ось z координатной системы $x y z$ совпадает с отвесной линией, проекции массовой силы, отнесенные к единице массы, будут иметь вид:

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z=-g, \quad (6.1)$$

где g — ускорение свободного падения.

При условии (6.1) уравнения (5.7) преобразуются в более простые уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Два первых уравнения системы (6.2) указывают на то, что при выбранной ориентации координатных осей давление в жидкости, находящейся в поле земного тяготения в состоянии относительного покоя, не зависит от координат x и y . Следовательно, гидростатическое давление является функцией только одной координаты z . Учитывая это обстоятельство, третье уравнение системы (6.2), записанное в частных производных, можно теперь представить в виде дифференциального уравнения функции от одной независимой переменной, т. е.

$$dp = -\rho g dz. \quad (6.3)$$

Интеграл уравнения (6.3) имеет вид

$$p = -\rho g z + C, \quad (6.4)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Замечая, что $\rho g = \gamma$, произведем в интеграле (6.4) соответствующую замену:

$$\frac{p}{\gamma} + z = C = \text{const.} \quad (6.5)$$

Интеграл (6.5) называют основным уравнением гидростатики. Это уравнение справедливо для любой точки объема, занимаемого жидкостью, поэтому

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2, \quad (6.6)$$

В левой части уравнения (6.6) давление и координата записаны для некоторой произвольной частицы жидкости, а правая часть относится к какой-то другой частице этой же жидкости. И хотя левая и правая части (6.6) относятся к разным точкам, однако это равенство справедливо, так как в соответствии с (6.5) каждая из этих частей в отдельности равна одной и той же константе C .

Предположим, что в жидкости, находящейся в поле тяжести Земли, нами выбрана некоторая поверхность, во всех точках которой давление постоянно. Тогда из уравнения (6.5) следует, что

$$z = \text{const.} \quad (6.7)$$

Отсюда можно сделать вывод: если на однородную, находящуюся в состоянии относительного покоя жидкость из всех возможных массовых сил действуют только силы тяжести, то поверхности равного давления в такой жидкости представляют собой горизонтальные плоскости.

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

Выберем в жидкости (рис. 5) точку A , находящуюся на расстоянии z от плоскости отсчета OO , и точку B с отметкой z_0 .

Нужно определить давление p в точке A , если известно давление p_0 в точке B .

На основании (6.6) можно написать

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0,$$

откуда

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z). \quad (7.1)$$

Из формулы (7.1) следует, что чем ниже расположена точка A по сравнению с точкой B , тем давление в ней больше. Если точку B взять на свободной поверхности жидкости, то $z_0 - z = h$ есть глубина погружения точки A и тогда

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (7.2)$$

Таким образом, гидростатическое давление в данной точке покоящейся жидкости, на которую действуют только силы тяжести, складывается из внешнего давления p_0 на свободную поверхность жидкости и давления, зависящего только от глубины погружения h и удельного веса γ .

Давление, выраженное зависимостью (7.1) или (7.2) называется абсолютным или полным гидростатическим давлением.

В отличие от абсолютного давления существует понятие манометрического давления p_m , под которым понимается разность полного и атмосферного давлений: $p_m = p_{\text{полн}} - p_{\text{атм}}$.

На основании рис. 5 манометрическое давление

$$p_m = \gamma h. \quad (7.3)$$

В уравнении (6.5) второе слагаемое z имеет размерность длины. Такую же размерность должно иметь и первое слагаемое. Действительно,

$$\left[\frac{p}{\gamma} \right] = [p] : [\gamma] = \left[\frac{F}{L^2} \right] : \left[\frac{F}{L^3} \right] = L,$$

где F — сила, L — длина.

Если под p понимать полное давление, то на основании формулы (6.5) и рис. 5 нетрудно установить, что слагаемое $\frac{p}{\gamma}$ характеризует высоту подъема жидкости в трубке, один конец которой запаян, а открытый конец погружен в жидкость. При этом, разумеется, из трубки должен быть откачен воздух и пары жидкости.

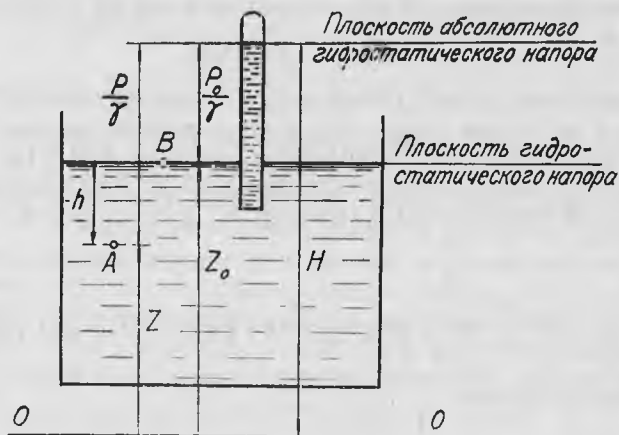


Рис. 5

В том случае, когда запаянный конец трубки помещен в жидкость на глубину h , а открытый конец расположен над свободной поверхностью, разрушив пайку, обнаружим, что уровень воды в трубке поднимется до свободной поверхности жидкости, т. е. на высоту

$$\frac{p_{\text{полн}} - p_{\text{атм}}}{\gamma} = \frac{p_m}{\gamma}.$$

Высота $\frac{p_m}{\gamma}$ называется пьезометрической высотой или пьезометрическим напором.

Величина $\frac{P}{\gamma} = \frac{P_{\text{полн}}}{\gamma}$ также называется пьезометрической высотой, но отнесенной к абсолютному давлению.

Координату z , отсчитываемую от некоторой условной плоскости, принято называть геометрической высотой или геометрическим напором.

Сумма H геометрического и пьезометрического напоров называется гидростатическим напором или абсолютным гидростатическим напором, если пьезометрический напор отнесен к полному давлению.

С физической точки зрения гидростатический напор представляет собой удельную, т. е. отнесенную к единице веса, потенциальную энергию жидкости, находящейся в поле тяжести Земли.

Так как

$$H = \frac{P}{\gamma} + z,$$

то z можно рассматривать как удельную энергию положения жидкости, а $\frac{P}{\gamma}$ — удельная энергия давления.

Действительно, если 1 кг жидкости поднять с плоскости отсчета на высоту z м, то тем самым его потенциальная энергия возрастет на z кгм, или на $9,81 \text{ н} \cdot \text{м} = 9,81 \text{ дж}$ в единицах СИ. Предположим, далее, что 1 кг жидкости, находящийся на ее свободной поверхности, мы хотим подвергнуть давлению p . Для этого его необходимо опустить на глубину $\frac{P}{\gamma}$, для чего потребуется произвести работу в $\frac{P}{\gamma}$ кгм $\left(9,81 \frac{P}{\gamma} \text{ дж} \right)$. Затраченная работа и будет равна удельной энергии давления $\frac{P}{\gamma}$.

Глава II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 8. ДВА МЕТОДА ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Для того чтобы достаточно полно охарактеризовать движение и состояние жидкости в каждой точке занимаемого ею объема, необходимо знать плотность ρ , давление p и скорость $\vec{v}$ движения жидкой частицы. Так как названные величины в общем случае в различных точках объема будут различными и могут изменяться с течением времени, то, связав изучаемый объем жидкости с прямоугольной системой координат, можно написать, что

$$\rho = \rho(x, y, z, t); \quad p = p(x, y, z, t); \quad \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t). \quad (8.1)$$

Задание вектора скорости равносильно заданию трех его независимых друг от друга составляющих. Тогда из системы функций (8.1) с учетом сделанного замечания следует, что для характеристики состояния жидкости в любой точке и на любой момент времени необходимо знать пять независимых величин ρ, p, v_x, v_y, v_z , а для их определения необходимо иметь систему пяти уравнений, связывающих указанные величины.

Положение частицы в пространстве иногда удобно задавать не тремя ортогональными координатами, а одним радиусом-вектором $\vec{r}$. В этом случае функции (8.1) принимают вид

$$\rho = \rho(\vec{r}, t); \quad p = p(\vec{r}, t); \quad \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (8.2)$$

Эти функции позволяют производить над ними все операции векторного анализа: дифференцирование по $\vec{r}$, интегрирование по пути, поверхности и объему.

Существуют два метода изучения течения жидкости, ведущие к отысканию указанных выше величин, и прежде всего скорости: это локальный метод Эйлера и субстациональный метод Лагранжа. Строго говоря, оба эти метода были предложены Эйлером, но сам Эйлер предпочитал пользоваться локальным методом, а Лагранж воспользовался субстациональным и дал ему аналитическое развитие. По этой причине второй метод в литературе по гидромеханике связан с именем Лагранжа.

Метод Эйлера состоит в том, что скорость течения жидкости определяется в некоторой точке (x, y, z) пространства, заполненного движущейся жидкостью, т. е. здесь фиксируется не частица жидкости, а точка пространства, через которую проходят частицы жидкости. В этой точке и ведется «наблюдение» за изменением скорости жидких частиц с течением времени.

Таким образом, скорости частиц задаются как функции координат и времени:

$$v_x = f_1(x, y, z, t); \quad v_y = f_2(x, y, z, t); \quad v_z = f_3(x, y, z, t), \quad (8.3)$$

при этом предполагается, что функции (8.3) однозначны, непрерывны и дифференцируемы. Переменные x, y, z, t носят название переменных Эйлера.

Переменные x, y, z, t носят название переменных Эйлера.

Для отыскания траекторий движения жидких частиц необходимо найти интегралы уравнений (8.3), имея в виду, что

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8.4)$$

После интегрирования получим

$$x = f_1(a, b, c, t); \quad y = f_2(a, b, c, t); \quad z = f_3(a, b, c, t), \quad (8.5)$$

где a, b, c — постоянные интегрирования определяемые из начальных условий.

Исключив из уравнений (8.5) время, получим искомое уравнение траектории частицы жидкости.

Если проследить характер изменения скорости движущейся частицы, то можно установить следующие два обстоятельства:

— скорость жидкой частицы в данной точке пространства изменяется с течением времени;

— изменение скорости жидкости происходит при перемещении жидких частиц из данной точки пространства в другую, где скорость течения отличается от скорости в предыдущей точке.

Второе из указанных обстоятельств говорит о том, что координаты жидкой частицы также являются функциями времени. Из сказанного следует сделать вывод, что скорость движения частиц жидкости является сложной функцией времени. Поэтому, когда потребуется по скорости найти ускорение жидких частиц в заданной точке, скорость их движения следует дифференцировать по времени как сложную функцию:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (8.6)$$

Поскольку

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad (8.7)$$

то уравнение (8.6) принимает вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Если найти ускорения, действующие на частицу жидкости в направлениях двух других осей, то в конечном итоге получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

или, в векторной форме записи,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}. \quad (8.9)$$

Частная производная $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ носит название локальной производной. Она характеризует изменение скорости жидкости в данной точке с течением времени. Поэтому при ее отыскании дифференцирование вектора скорости производится в предположении постоянства координат x, y и z во времени. Производная $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ берется по координатам и характеризует то ускорение, которое сообщается частице при переходе от одной точки к другой за счет изменения условий течения, независимо от времени. По этой причине эта производная носит название конвективной

производной. Таким образом, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ представляет собой сумму локальной и конвективной производных и называется субстанциональной или индивидуальной производной. Субстанциональная производная — это суммарное ускорение, которое получает частица в каждой точке пространства с течением времени и при переносе из одной точки в другую.

Итак, метод Эйлера по наблюдаемой скорости частиц жидкости позволяет найти закон их движения, траектории, ускорения и т. д.

Отличие метода Лагранжа заключается в том, что при изучении течения жидкости фиксируется не точка пространства, а частица жидкости и прослеживается ее движение вдоль траектории. Однако движущихся частиц жидкости существует бесконечное множество, и им соответствует бесконечное множество траекторий.

Для того чтобы из этого множества выделить интересующую нас жидкую частицу с ее траекторией, достаточно задать для некоторого начального момента времени, например $t=0$, координаты рассматриваемой частицы $x=a$, $y=b$, $z=c$. Тогда из всей совокупности траекторий будет рассматриваться только одна из них, проходящая через точку с координатами a, b, c .

При движении частицы по траектории ее координаты x, y, z будут функциями величин a, b, c и времени t :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t); \\ y &= y(a, b, c, t); \\ z &= z(a, b, c, t). \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Варьируя величины a, b, c , можно изучать движение жидких частиц по различным траекториям. Величины a, b, c и t принято называть переменными Лагранжа.

Таким образом, если в методе Эйлера задается поле скоростей, то в методе Лагранжа задается совокупность траекторий. Для получения траекторий из уравнений Эйлера последние необходимо интегрировать, тогда как в методе Лагранжа они являются заданными. Но зато для получения скоростей в методе Лагранжа необходимо дифференцировать уравнения (8.10), а в методе Эйлера скорости заданы. Мы будем пользоваться методом Эйлера, как более простым.

§ 9. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ

В предыдущем параграфе было показано, что для характеристики движения жидкости необходимо иметь пять уравнений, связывающих между собой плотность, давление и скорость. При этом предполагалось, что указанные величины являются функциями прямоугольных координат и времени. В случае задания ρ, p и $\vec{v}$ в виде функций радиуса-вектора потребуются только три векторных уравнения.

В этом и следующем параграфах мы получим интересующие нас уравнения.

Одним из таких уравнений является уравнение неразрывности жидкости, которое с физической точки зрения представляет собой закон сохранения массы жидкости. В классической механике закон сохранения массы, впервые установленный Ломоносовым, формулируется так: масса изолированной системы тел не изменяется при любых происходящих в ней процессах. Это положение в дифференциальной форме может быть записано следующим образом:

$$\frac{d}{dt} (dM) = 0, \quad (9.1)$$

где dM — элементарная масса изолированной системы.

Выделим в неподвижном пространстве некоторый объем V , заполненный жидкостью и ограниченный замкнутой поверхностью S . Будем считать, что жидкость неоднородна. Тогда ее масса в рассматриваемом объеме будет

$$M = \int_{(V)} \rho dV. \quad (9.2)$$

На основании (9.1) и (9.2) можно написать:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV = 0. \quad (9.3)$$

Так как интегрирование по объему и дифференцирование по времени — операции независимые, то порядок их выполнения в (9.3) можно изменить:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV = \int_{(V)} \frac{d}{dt} (\rho dV). \quad (9.4)$$

Продифференцируем подынтегральную функцию (9.4):

$$\frac{d}{dt} (\rho dV) = \frac{d\rho}{dt} dV + \rho \frac{d}{dt} (dV). \quad (9.5)$$

Пользуясь представлением о дивергенции вектора скорости как о скорости относительного расширения объема, можно написать

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (dV) &= \frac{d}{dt} (dx dy dz) = \frac{d(dx)}{dt} dy dz + \frac{d(dy)}{dt} dx dz + \\ &+ \frac{d(dz)}{dt} dx dy = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \operatorname{div} \vec{v} dV. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Кроме того, воспользуемся зависимостью (8.9), которую можно рассматривать как применение оператора субстанциональной производной

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla \quad (9.7)$$

к вектору скорости $\vec{v}$. Если применить оператор (9.7) к плотности ρ , то получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla \right) \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho. \quad (9.8)$$

После подстановки (9.8) и (9.6) в выражение (9.5) интеграл (9.3) принимает вид

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = 0. \quad (9.9)$$

Так как интегрирование выполняется по произвольному объему, то интеграл (9.9) может быть равен нулю только в том случае, если равна нулю подынтегральная функция:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (9.10)$$

Таким образом, от самой общей формы записи закона сохранения массы мы пришли к дифференциальному закону сохранения массы движущейся жидкости. Уравнение (9.10) носит название уравнения неразрывности (сплошности) жидкости.

Пользуясь формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho, \quad (9.11)$$

уравнение (9.10) можно представить в более удобном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (9.12)$$

В связи с последней формой записи уравнения неразрывности уместно ввести понятие плотности потока жидкости.

Плотностью $\vec{j}$ потока жидкости называется количество массы жидкости, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, т. е.

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (9.13)$$

В правой части равенства (9.13) векторной величиной является только скорость жидкости, поэтому и вектор плотности потока имеет направление вектора скорости. Для оценки знака $\vec{j}$ заметим, что элемент поверхности принято характеризовать вектором $d\vec{S}$, т. е. таким вектором, направление которого совпадает с внешней нормалью к поверхности в данной точке, а величина его равна площади dS элементарной площадки, к которой принадлежит эта точка. Вектор плотности потока считается положительным, если он совпадает по направлению с $d\vec{S}$, и отрицательным — в противоположном случае. Обращаясь к уравнению (9.12), можно сказать, что масса жидкости в рассматриваемом объеме может изменяться только в том случае, если в этот объем втекает жидкость ($\vec{j} < 0$) или вытекает из него ($\vec{j} > 0$).

При выводе закона (9.12) скорость и плотность жидкости подвергались нами неоднократному дифференцированию по координатам и времени, интегрированию по объему, и, следовательно, полученный результат справедлив только в том случае, если эти функции непрерывны и однозначны. Выполнение этого условия означает, что всякие две точки жидкости, бесконечно близкие друг к другу в начальный момент времени, должны оставаться бесконечно близкими и во всякий другой момент времени, т. е. движение жидкости будет происходить без разрывов. Этим обстоятельством и объясняется название уравнения (9.12).

Если жидкость однородна и несжимаема, то на основании (9.10) получаем

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (9.14)$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (9.15)$$

Уравнение (9.14) или эквивалентное ему (9.15) носит название уравнения (условия) несжимаемости жидкости. Это уравнение указывает на то, что для несжимаемой жидкости возможно не всякое движение, а только такое, при котором скорости частиц удовлетворяют условию (9.14).

§ 10. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ФОРМЕ ЭЙЛЕРА

Выделим в идеальной жидкости произвольный объем V , ограниченный поверхностью S . Массу жидкости в этом объеме обозначим символом M . Будем считать, что поверхность S всеми своими точками лежит в той же жидкости. В отличие от задачи § 9 здесь рассматривается объем жидкости, который движется вместе с нею и, следовательно, содержит все время одни и те же частицы. Из теоретической механики известно, что движение тела массы M определяется законом

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i, \quad (10.1)$$

где $\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$ — сумма всех сил, действующих на жидкость.

Так как масса жидкости, заключенная в объеме V , может быть определена по формуле

$$M = \int_{(V)} \rho dV, \quad (10.2)$$

то левая часть уравнения (10.1) может быть представлена в виде

$$\int_{(V)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV. \quad (10.3)$$

Производная $\frac{d\vec{v}}{dt}$ внесена под знак интеграла по той причине, что в общем случае движения жидкости скорость ее частиц может быть различной в разных точках объема.

Рассмотрим правую часть уравнения (10.1). Поскольку все силы, действующие на жидкость, заключенную в объеме V , мы делим на объемные и поверхностные, то и правую часть (10.1) можно представить в виде суммы

$$\int_{(V)} \vec{f} dV - \oint_{(S)} p d\vec{S}, \quad (10.4)$$

где $\vec{f}$ — плотность объемной силы, определяемая соотношением (3.5);

p — давление в данной точке поверхности S .

Первое слагаемое в (10.4) представляет собой массовые силы, а второе — поверхностные. Знак минус перед вторым слагаемым объясняется тем, что силы давления всегда направлены внутрь объема, а элемент поверхности $d\vec{S}$, как уже отмечалось, совпадает с направлением внешней нормали к поверхности. Кроме сил давления никаких других поверхностных сил нет, так как жидкость идеальная.

Можно показать, что интеграл по замкнутой поверхности от давления может быть заменен интегралом по объему от градиента давления:

$$\oint_{(S)} p d\vec{S} = \int_{(V)} \text{grad } p dV. \quad (10.5)$$

Действительно, умножим интеграл по поверхности на орт $\vec{n}^0$ нормали к поверхности:

$$\vec{n}^0 \oint_{(S)} p d\vec{S} = \oint_{(S)} (\vec{n}^0 p) d\vec{S}. \quad (10.6)$$

Пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса, можно написать

$$\oint_{(S)} (\vec{n}^0 p) d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div } (\vec{n}^0 p) dV, \quad (10.7)$$

но

$$\text{div } (\vec{n}^0 p) = \vec{n}^0 \text{grad } p + p \text{div } \vec{n}^0 = \vec{n}^0 \text{grad } p,$$

так как $\text{div } \vec{n}^0 = 0$.

Тогда

$$\oint_{(S)} (\vec{n} p) d\vec{S} = \vec{n}^{\circ} \int_{(V)} \text{grad } p dV.$$

Подставим последний результат в (10.6):

$$\vec{n}^{\circ} \oint_{(S)} p d\vec{s} = \vec{n}^{\circ} \int_{(V)} \text{grad } p dV. \quad (10.8)$$

Если обе части равенства (10.8) умножить скалярно на $\vec{n}^{\circ}$, то мы придем к выражению (10.5).

Подставим в (10.1) выражения (10.3) и (10.4) с учетом равенства (10.5):

$$\int_{(V)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_{(V)} \vec{f} dV - \int_{(V)} \text{grad } p dV$$

или

$$\int_{(V)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_{(V)} (\vec{f} - \text{grad } p) dV. \quad (10.9)$$

Выбранный нами объем имеет произвольную величину, поэтому интегральное равенство (10.9) возможно только в том случае, если равны подынтегральные функции

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \text{grad } p. \quad (10.10)$$

В уравнении (10.10) правая часть является характеристикой некоторой точки с координатами x, y, z в неподвижном объеме, а в левой части находится скорость частиц, проходящих через данную точку в данный момент времени. Для удобства пользования полученным уравнением следует и скорость движения точки выразить через координаты x, y, z , относящиеся к неподвижному пространству. Указанная цель будет достигнута, если субстанциональную производную от скорости по времени в (10.10) мы заменим в соответствии с формулой (8.9):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{\vec{f}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (10.11)$$

Заметим, что на основании сопоставления равенств (3.4) и (3.5)

$$\frac{\vec{f}}{\rho} = \vec{F} = \vec{w}. \quad (10.12)$$

С учетом замены (10.12) уравнение (10.11) принимает окончательный вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) и представляет собой уравнение Эйлера, записанное в векторной форме. Оно является основным уравнением в гидромеханике.

В проекциях на оси ортогональной системы координат уравнение Эйлера записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + Y; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + Z. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

В случае, когда объемными силами являются только силы тяжести, $\vec{F} = \vec{g}$, тогда уравнение Эйлера (10.13) записывается так:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g}. \quad (10.15)$$

Уравнение (10.13) не всегда бывает удобным для интегрирования. В этом смысле его удобнее применять в преобразовании И. С. Громеки, которое сводится к следующему.

Рассмотрим векторное произведение

$$\vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \text{rot}_x \vec{v} & \text{rot}_y \vec{v} & \text{rot}_z \vec{v} \end{vmatrix}. \quad (10.16)$$

Проекция этого произведения на ось x есть

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_x &= v_y \text{rot}_z \vec{v} - v_z \text{rot}_y \vec{v} = \\ &= v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Добавим и вычтем из правой части последнего равенства произведение $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и, сгруппировав соответствующим образом все члены правой части, получим

$$(\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \\ - \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

или

$$(\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (v^2) - (\vec{v} \nabla) v_x.$$

Аналогичные выражения можно получить и для проекций на другие оси. Тогда векторное произведение (10.16), записанное в проекциях на оси координатной системы x, y, z , будет

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (v^2) - (\vec{v} \nabla) v_x; \\ (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (v^2) - (\vec{v} \nabla) v_y; \\ (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v})_z &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (v^2) - (\vec{v} \nabla) v_z. \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

Если уравнения (10.17) умножить на орты соответствующих осей и почленно сложить, то окончательно получаем

$$\vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - (\vec{v} \nabla) \vec{v}. \quad (10.18)$$

Из (10.18) можно получить

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}. \quad (10.19)$$

После замены в (10.13) слагаемого $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ в соответствии с его значением (10.19) мы получим уравнение Эйлера в преобразовании Громеки:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}. \quad (10.20)$$

Аналогичное преобразование независимо от Громеки было выполнено и Г. Лэмбом, поэтому уравнение (10.20) известно в гидромеханике под названием уравнения Громеки—Лэмба.

Уравнение Эйлера связывает между собой пять независимых переменных: p, ρ, v_x, v_y, v_z .

Если жидкость однородна и несжимаема, то $\rho = \text{const}$ и считается заданным. Тогда остаются четыре неизвестных. Для их отыскания теперь имеется необходимая система уравнений — это уравнение Эйлера и условие несжимаемости жидкости $\text{div } \vec{v} = 0$.

В тех случаях, когда нельзя положить $\rho = \text{const}$, к уравнению Эйлера и уравнению неразрывности жидкости необходимо добавить еще одно, и только тогда искомые величины могут быть определены однозначно.

В качестве такого дополнительного уравнения может быть принято уравнение состояния вещества, которое в самом общем виде может быть записано так:

$$\rho = \rho(p, T), \quad (10.21)$$

где T — абсолютная температура.

При рассмотрении работы приемных устройств лагов, омываемых набегающим потоком воды, вполне допустимо принять, что перемещение слоев жидкости происходит без теплового обмена с соседними слоями, т. е. имеет место адиабатический процесс. Характеристикой адиабатического процесса может служить равенство

$$s = \text{const}, \quad (10.22)$$

где s — энтропия рассматриваемого слоя жидкости, отнесенная к единице массы. Энтропия представляет собой функцию состояния вещества и, как показано в курсах термодинамики, может быть определена из зависимости

$$ds = \frac{dU_1 + p dV}{T}, \quad (10.23)$$

где U_1 — внутренняя энергия вещества, а остальные обозначения прежние.

В термодинамике существует несколько функций, характеризующих состояние вещества, в частности тепловая функция W , или теплосодержание, связанная с энтропией соотношением

$$dW = T ds + v_m dp, \quad (10.24)$$

где v_m — массовый удельный объем, который в соответствии с определением (2.5) есть величина, обратная плотности.

Для адиабатического процесса уравнение (10.24) на основании (10.22) и (2.5) принимает вид

$$dW = v_m dp = \frac{1}{\rho} dp. \quad (10.25)$$

Следовательно, для неоднородной сжимаемой жидкости система уравнений (9.14) и (10.13) может быть дополнена одним из уравнений состояния вещества. В качестве такого дополнительного

уравнения будем использовать впоследствии уравнение (10.25), так как мы приняли ограничительное условие, что тепловые процессы в рассматриваемых нами случаях течения жидкости носят адиабатический характер.

Таким образом, нами получены все необходимые уравнения, с помощью которых можно приступить к изучению различных случаев течения идеальной жидкости.

§ 11. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Установившимся, или стационарным, течением жидкости, называется течение, при котором скорость жидкости в каждой точке занятого ею пространства остается неизменной во времени.

Применительно к этому случаю течения уравнение Громеки-Лэмба принимает вид

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}. \quad (11.1)$$

Если принять, что изучаемая нами жидкость однородна, но сжимаема, то ее плотность будет функцией давления и температуры и для адиабатического процесса может быть определена на основании зависимости (10.25).

Наложим еще одно ограничение: будем изучать течение жидкости в потенциальном поле. В этом случае функции, описывающие состояния вещества, должны быть полными дифференциалами, т. е. dW и dp в (10.25) тоже должны быть полными дифференциалами:

$$\left. \begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \text{grad } p \vec{dr}; \\ dW &= \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \text{grad } W \vec{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Подставив (11.2) в (10.25), получаем

$$\text{grad } W = \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (11.3)$$

Если предположить, что потенциальный характер поля создается только силами земного тяготения, то можно написать

$$\vec{F} = \vec{g}. \quad (11.4)$$

Найдем чему будет равен $\text{grad}(gz)$, где gz — потенциальная энергия в поле тяжести Земли:

$$\text{grad}(gz) = g \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + g \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + g \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k} = g\vec{k} = -\vec{g}. \quad (11.5)$$

Знак минус в (11.5) объясняется тем, что векторы силы (11.4) и градиента в потенциальном поле имеют противоположные направления.

Уравнение (11.1) с учетом соотношений (11.3), (11.4) и (11.5) можно привести к следующему виду:

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + W + gz \right) = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}. \quad (11.6)$$

Теперь введем понятие линии тока. Линией тока называется линия, в каждой точке которой вектор скорости касателен к этой линии.

Спроектируем векторы, входящие в уравнение (11.6), на направление линии тока, обозначив элемент ее длины через $d\vec{l}$. Проекция градиента на некоторое направление есть производная по этому направлению. Векторное произведение $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ представляет собой вектор, перпендикулярный к скорости $\vec{v}$. Поэтому проекция векторного произведения $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ на линию тока будет равна нулю.

С учетом сказанного проекция векторного уравнения (11.6) на линию тока будет

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + W + gz \right) = 0. \quad (11.7)$$

Интеграл уравнения (11.7), взятый по линии тока, равен

$$\frac{v^2}{2} + W + gz = \text{const}. \quad (11.8)$$

Коль скоро интегрирование выполняется вдоль какой-то определенной линии тока, естественно, что для каждой линии тока константа будет иметь свое значение.

Интеграл (11.8) носит имя автора, впервые получившего его, и в литературе известен под названием уравнения Бернулли. Если

учесть, что $\frac{v^2}{2}$ представляет собой кинетическую энергию, отнесенную к единице массы жидкости, то уравнение Бернулли приобретает вполне определенный энергетический смысл: *при установившемся течении однородной сжимаемой жидкости алгебраическая сумма теплосодержания, кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная вдоль данной линии тока.*

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и тогда уравнение (10.25) можно легко проинтегрировать:

$$\frac{1}{\rho} p = W + \text{const.} \quad (11.9)$$

С учетом последнего равенства уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости принимает хорошо известную форму записи:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (11.10)$$

или

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const.} \quad (11.11)$$

Таким образом, интеграл Бернулли представляет собой закон сохранения механической энергии вдоль данной линии тока.



Рис. 6

Нетрудно убедиться, что все слагаемые уравнения (11.11) имеют размерность длины. При этом координата z характеризует высоты точек линии тока над отсчетной плоскостью (рис. 6) и носит название геометрической высоты или геометрического напора H_g .

Из гидростатики известно, что отношение $\frac{p}{\gamma}$ носит название пьезометрической высоты. Это же название сохраняется и в данном случае, но под p следует понимать не гидростатическое, а гидродинамическое давление, т. е. давление в движущейся жидкости.

По физическому смыслу пьезометрическая высота H_n , или пьезометрический напор, представляет собой высоту такого столба жидкости, с помощью которого можно создать давление у его основания, равное гидродинамическому давлению p .

Слагаемое $\frac{v^2}{2g}$ называется скоростной высотой или скоростным напором H_c . Скоростная высота соответствует такой высоте подъема тела над поверхностью Земли (в вакууме), на которую оно может подняться, имея вертикальную составляющую начальной скорости, равную v .

С учетом введенных понятий закон (11.11) можно сформулировать таким образом: *при установившемся течении жидкости сумма скоростной, пьезометрической и геометрической высот есть величина постоянная вдоль данной линии тока.*

Эту постоянную величину принято называть гидродинамическим напором.

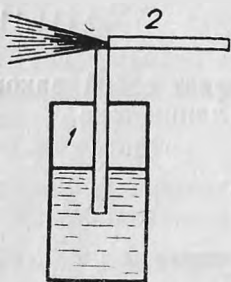


Рис. 7

Уравнение (11.10) или (11.11) приводит к заключению, что давление в каждой точке линии тока зависит от скорости движения частиц жидкости через эту точку. Чем больше скорость, тем меньше давление на рассматриваемом участке линии тока, и наоборот. Это явление хорошо иллюстрируется пульверизатором, принципиальное устройство которого показано на рис. 7. Если воздух не вдувается в горизонтальное колено 2, то уровень жидкости в вертикальном колене 1 совпадает с уровнем жидкости в сосуде, так как и та и другая уровенные поверхности находятся под одним и тем же атмосферным давлением. Скорость воздуха у верхнего среза канала 1 равна нулю. При истечении воздуха из горизонтального колена со скоростью $v > 0$ давление на верхнем срезе вертикального колена понизится и станет меньше атмосферного. В то же время давление на свободную поверхность жидкости в сосуде останется прежним, что приведет к неизбежному подъему жидкости в трубке 1. При некоторой скорости перепад давления будет таким, что жидкость поднимется выше верхнего среза колена 1 и попадет в поток воздуха, в котором и произойдет ее распыление.

§ 12. ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Из механики известно, что в общем случае движения абсолютно твердого тела линейная скорость $\vec{v}$ каждой его точки определяется из соотношения

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R}_i, \quad (12.1)$$

т. е. движение любой точки такого тела можно рассматривать как сложное, состоящее из поступательного движения вместе с одной из точек, принятой за полюс, со скоростью $\vec{v}_0$ и вращательного

движения относительно этого полюса с угловой скоростью $\vec{\omega}$. При этом положение точек относительно полюса определяется радиусом-вектором $\vec{R}_i$.

В принципе таким же образом может изучаться и распределение скоростей частиц жидкости в занимаемом ими объеме. Однако можно заранее сказать, что закон движения частиц жидкого тела будет более сложным, чем (12.1), так как само понятие жидкого объема допускает, в отличие от твердого тела, его деформацию с течением времени. Поэтому скорость точки жидкой частицы может быть представлена в виде суммы

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}_d + \vec{v}_v, \quad (12.2)$$

где $\vec{v}_0$ — скорость поступательного движения вместе с полюсом;
 $\vec{v}_d$ — скорость деформации;
 $\vec{v}_v$ — линейная скорость вращательного движения относительно полюса.

Независимо от того, имеет место установившееся течение или неустановившееся, скорость жидкости в данной точке определяется соотношением (12.2), отображающим наиболее общий закон распределения скорости частиц жидкости.

Течение жидкости, сопровождающееся вращением ее частиц, называется вихревым течением. Если вращение частиц отсутствует, то течение называется безвихревым или потенциальным.

Повседневная жизнь дает достаточно много примеров вихревого течения жидкости. Так, например, при движении корабля вдоль его бортов и за кормой всегда существуют завихрения. На образование вихревой области затрачивается какая-то доля мощности двигателей. Можно считать, что затрачиваемая энергия расходуется на преодоление дополнительного сопротивления движению корабля, которое носит название вихревого сопротивления. Изучение вихревого течения жидкости с целью отыскания наиболее рациональных форм обтекаемого тела является очень важной задачей гидромеханики. Однако при проектировании приемных устройств у нас, как правило, имеется возможность расположить их вне завихренного слоя жидкости и тем самым избежать существенных погрешностей в показаниях приборов. Поэтому в настоящем параграфе мы рассмотрим лишь самые общие положения, связанные с изучением вихревого движения жидкости.

Аналитическим условием существования вихревого течения жидкости является

$$\text{rot } \vec{v} \neq 0. \quad (12.3)$$

Рассмотрим этот вид течения при следующих условиях:

- жидкость идеальна;
- объемные силы, действующие на жидкость, имеют потенциал;
- плотность жидкости зависит только от давления, т. е. жидкость баротропна.

Если указанные условия выполняются, то справедлива следующая теорема Томсона: *производная по времени от циркуляции скорости по произвольному жидкому контуру равна нулю.*

Известно, что интеграл Γ от скорости, взятый по замкнутому контуру, называется циркуляцией скорости вдоль этого контура:

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (12.4)$$

Под термином «жидкий контур» понимается проведенный в жидкости контур, состоящий из одних и тех же частиц. При движении жидкости вместе с ее частицами движется и жидкий контур. Перемещаясь из одних точек пространства в другие, жидкий контур может деформироваться. Поэтому в формуле (12.4) переменной следует считать не только $\vec{v}$, но и $d\vec{l}$. При этом условие производная по времени от циркуляции (12.4) будет иметь вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{l}). \quad (12.5)$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$ есть скорость вдоль контура l , второй интеграл правой части (12.5) можно написать так:

$$\oint \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{l}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{v} = \oint d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \quad (12.6)$$

так как интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю.

Под знаком первого интеграла правой части (12.5) находится субстанциональная производная от скорости по времени, которая в соответствии с уравнениями (8.9) и (10.13) может быть выражена через давление, плотность и объемную силу:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}. \quad (12.7)$$

При наложенных нами ограничениях на объемные силы можно написать, что $\vec{F} = -\text{grad } U$, где U есть потенциал силы $\vec{F}$.

Кроме того, так как жидкость баротропна, то в соответствии с (11.3)

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } W.$$

Тогда уравнение (12.7) приводится к виду

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } (W + U). \quad (12.8)$$

Подставим в первый интеграл правой части (12.5) вместо субстанциональной производной ее значение в соответствии с (12.8) и преобразуем полученный результат с помощью теоремы Стокса:

$$\oint \text{grad } (U + W) d\vec{l} = \int_S \text{rot grad } (W + U) d\vec{S} = 0,$$

так как ротор градиента любой функции равен нулю.

Итак, оба интеграла в правой части (12.5) оказались равными нулю, следовательно, и

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (12.9)$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат приводит к заключению, что

$$\Gamma = \text{const}. \quad (12.10)$$

Но, с другой стороны, на основании формулы Стокса

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{v} dS. \quad (12.11)$$

Отсюда следует, что если $\Gamma = \text{const} \neq 0$, то $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ и не изменяется с течением времени.

На основании сказанного можно сформулировать важное следствие из теоремы Томсона: *если в некоторый момент времени имело место вихревое движение жидкости, то оно будет существовать и все последующее время.*

Таким образом, теорема Томсона свидетельствует об устойчивости вихревого движения в идеальной жидкости.

Введем понятия вихревой линии, вихревой поверхности и вихревой трубки.

Вихревой линией называется такая линия в потоке жидкости, касательная к которой в любой ее точке совпадает по направлению с вектором $\text{rot } \vec{v}$.

Нетрудно получить уравнение такой линии. Если обозначить элемент касательной к вихревой линии через $\vec{dl}$, то условие совпадения по направлению касательной с $\text{rot } \vec{v}$ можно написать так:

$$\text{rot } \vec{v} \times \vec{dl} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{rot}_x \vec{v} & \text{rot}_y \vec{v} & \text{rot}_z \vec{v} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0. \quad (12.12)$$

Раскрывая определитель (12.12) по элементам первой строки, имеем

$$-\vec{i} \begin{vmatrix} \text{rot}_y \vec{v} & \text{rot}_z \vec{v} \\ dy & dz \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} \text{rot}_z \vec{v} & \text{rot}_x \vec{v} \\ dz & dx \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \text{rot}_x \vec{v} & \text{rot}_y \vec{v} \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, если каждый из миноров равен нулю. Тогда

$$\text{rot}_y \vec{v} dz - \text{rot}_z \vec{v} dy = 0;$$

$$\text{rot}_z \vec{v} dx - \text{rot}_x \vec{v} dz = 0;$$

$$\text{rot}_x \vec{v} dy - \text{rot}_y \vec{v} dx = 0,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение вихревой линии

$$\frac{dx}{\text{rot}_x \vec{v}} = \frac{dy}{\text{rot}_y \vec{v}} = \frac{dz}{\text{rot}_z \vec{v}} \quad (12.13)$$

или

$$\frac{dx}{\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}} = \frac{dz}{\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}}. \quad (12.14)$$

Вихревую линию можно представить себе как ось, вокруг которой вращаются частицы жидкости. Но если ось вращения твердого тела представляет собой прямую линию, то для жидкости эта ось может быть изогнутой и даже замкнутой линией.

Совокупность вихревых линий может образовывать вихревую поверхность, т. е. такую поверхность, в каждой точке которой можно построить касательную, параллельную вектору $\text{rot } \vec{v}$.

Если в пространстве, заполненном вихревыми линиями, взять замкнутый малый контур, не являющийся вихревой линией, и через каждую его точку провести вихревую линию, то совокупность этих линий образует вихревую трубку.

Объем жидкости, заключенный в трубке, представляет собой элемент вихря и носит название вихревого шнура.

Для характеристики мощности вихревого движения применяется понятие интенсивности, или напряжения, вихревой трубки.

Интенсивность вихревой трубки J равна циркуляции вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему вихревую трубку:

$$J = \Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l}. \quad (12.15)$$

Последний интеграл может быть с помощью формулы Стокса преобразован к интегралу, взятому по поверхности, натянутой на контур l , т. е.

$$J = \Gamma = \int_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S}, \quad (12.16)$$

откуда следует, что интенсивность вихревой трубки можно рассматривать как поток вихря $\text{rot } \vec{v}$ сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур, охватывающий вихревую трубку.

Пользуясь формулой (12.16), можно показать, что интенсивность вихревой трубки остается постоянной по всей ее длине. Для этого рассмотрим часть вихревой трубки, заключенную между произвольными сечениями I и II (рис. 8). Обозначим площади сечений I и II через S_1 и S_2 соответственно. Тогда площадь поверхности рассматриваемого отрезка вихревой трубки может быть представлена в виде суммы

$$S = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}, \quad (12.17)$$

где $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности трубки. При этом боковая поверхность трубки является вихревой поверхностью.

Найдем поток вектора $\text{rot } \vec{v}$ через всю поверхность отрезка трубки

$$\oint_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{v} d\vec{S} - \int_{S_2} \text{rot } \vec{v} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \text{rot } \vec{v} d\vec{S}. \quad (12.18)$$

Третий интеграл в правой части (12.18) равен нулю, так как в каждой точке боковой поверхности вектор $\text{rot } \vec{v}$ касателен к ней, а $d\vec{S}$ совпадает с направлением внешней нормали и, следовательно, скалярное произведение этих векторов на всей боковой поверхности будет равно нулю.



Рис. 8

Если предположить, что вектор $\text{rot } \vec{v}$ на выбранной нами вихревой трубке направлен от сечения II к сечению I , то он совпадает по направлению с $\vec{dS}$ на площадке S_1 и противоположен по направлению $\vec{dS}$ на площадке S_2 . Поэтому скалярное произведение $\text{rot } \vec{v} d\vec{S}$ в сечении S_2 будет иметь знак минус, что и учтено в (12.18).

На основании теоремы Остроградского—Гаусса

$$\oint_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \int_V \text{div rot } \vec{v} dV = 0,$$

так как $\text{div rot } \vec{a}$ всегда равна нулю.

Следовательно, интеграл (12.18) равен нулю, и тогда

$$\int_{S_1} \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{v} d\vec{S},$$

т. е. интенсивность трубки в обоих сечениях одинакова. И так как сечения I и II были выбраны произвольно, то полученный результат справедлив для любого сечения вихревой трубки.

Рассмотренный нами вывод представляет собой доказательство первой теоремы Гельмгольца о вихрях, которая формулируется так: *поток вектора вихря скорости через произвольно проведенное сечение вихревой трубки одинаков в данный момент времени вдоль всей трубки.*

Из этой теоремы следует важный вывод: раз интенсивность вихревой трубки не изменяется по ее длине, то вихревая трубка должна либо быть замкнутой, либо иметь начало и конец на свободной поверхности жидкости или на стенках сосуда, занятого этой жидкостью (рис. 9). Вихревой шнур не может прерваться в жидкости. В противном случае в месте обрыва площадь поперечного сечения трубки будет стремиться к нулю. При этом, чтобы интенсивность трубки осталась неизменной, скорость вращения частиц жидкости должна стремиться к бесконечности, что невозможно.

Рассмотренная теорема была сформулирована и доказана Гельмгольцем в его известной работе «О вихревом движении» (1858 г.). Там же были доказаны еще две теоремы, свидетельствующие об устойчивости вихревого движения.

Вторая теорема Гельмгольца формулируется следующим образом: *если частицы жидкости принадлежат в данный момент некоторой вихревой линии, то они будут принадлежать ей и все последующее время.*

Для доказательства выберем на вихревой трубке (рис. 10) замкнутый контур L , не охватывающий трубку, и определим циркуляцию вектора скорости по этому контуру. На основании преобразования Стокса сразу получаем

$$\oint_L \vec{v} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = 0,$$

так как $\text{rot } \vec{v}$ перпендикулярен к нормали поверхности S , натянутой на контур L . На основании теоремы Томсона циркуляция вектора скорости есть величина постоянная, и если она равна нулю в какой-то момент времени, то она будет равна нулю и в последующем. Так как нормальная составляющая $\text{rot}_n \vec{v}$ на рассматриваемой жидкой поверхности, состоящей из одних и тех же частиц, остается равной нулю, то, следовательно, жидкие частицы все время образуют одну и ту же вихревую поверхность.

Вихревую линию можно рассматривать как результат пересечения двух вихревых поверхностей. Поэтому частицы жидкости, образующие вихревую линию, принадлежат одновременно двум поверхностям. Но выше было показано, что они и впредь будут принадлежать этим поверхностям, следовательно, они будут принадлежать и этой линии.

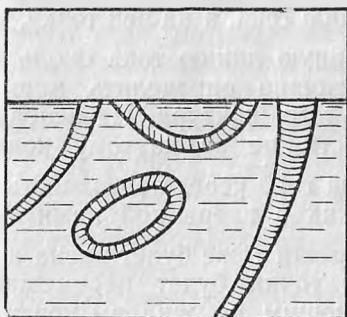


Рис. 9

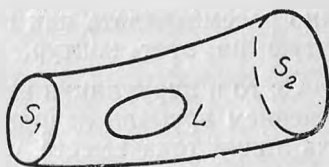


Рис. 10

Третья теорема Гельмгольца читается так: *интенсивность вихревой трубки не изменяется с течением времени.*

Для доказательства представим себе трубку, на поверхности которой проведен охватывающий ее контур. Согласно теореме Томсона производная по времени от циркуляции скорости по этому контуру будет равна нулю. С другой стороны, из второй теоремы Гельмгольца следует, что раз этот контур принадлежит вихревой поверхности, то он будет принадлежать ей и впредь, а поэтому и производная от циркуляции с течением времени будет оставаться равной нулю. А так как циркуляция скорости является мерой интенсивности вихревой трубки, то можно утверждать, что интенсивность трубки не меняется с течением времени.

Эта теорема представляет собой закон сохранения вихрей. В идеальной баротропной жидкости раз возникший вихрь должен существовать бесконечно долго. И необходимо помнить, что рассмотренные нами теоремы справедливы лишь для условий, сформулированных в начале этого параграфа.

В реальной жидкости вихревой шнур может обрываться в жидкости. При этом механическая энергия вихря преобразуется в тепловую энергию за счет сил вязкого трения. Вязкость жидкости приводит к рассеянию энергии вихря, и поэтому в реальной жидкости он не может существовать бесконечно долго, если его не поддерживать в энергетическом отношении.

§ 13. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Другой разновидностью общего случая течения жидкости является безвихревое, или потенциальное, течение. Аналитическим признаком такого течения служит равенство

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0. \quad (13.1)$$

Если выполняются условия, при котором выведены теоремы Томсона и Гельмгольца, то можно доказать, что потенциальное течение жидкости будет также устойчивым. Действительно, выберем в потоке жидкости некоторую линию тока, а на ней точку, в которой $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$. Затем охватим выбранную линию тока около этой точки замкнутым контуром. Теперь можно определить циркуляцию вектора скорости вдоль замкнутого контура. На основании теоремы Стокса циркуляцию скорости по замкнутому контуру можно рассматривать как поток вихря $\operatorname{rot} \vec{v}$ через поверхность, натянутую на этот контур. Но так как в избранной нами точке $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, то и циркуляция вектора скорости тоже будет равна нулю. С течением времени избранная нами точка будет перемещаться вдоль линии тока вместе с охватывающим ее жидким контуром. При этом циркуляция скорости на основании теоремы Томсона не будет изменяться во времени, т. е. будет оставаться равной нулю, а значит, и $\operatorname{rot} \vec{v}$ вдоль линии тока сохранит нулевое значение. Это обстоятельство и свидетельствует об устойчивости потенциального течения.

В реальных жидкостях из-за наличия вязкости и ряда других факторов постоянно образуются вихри. Несмотря на это, схема безвихревого течения дает близкую к действительности картину во многих случаях, важных для решения практических задач.

Из векторного анализа известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0, \quad (13.2)$$

где ψ — какая-то функция координат.

Так как для потенциального течения выполняется условие (13.1), то на основании (13.1) скорость течения жидкости можно представить в виде

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad (13.3)$$

причем функцию $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ принято называть потенциалом скорости.

Представление скорости в виде функции некоторого потенциала имеет большое удобство в том отношении, что для однозначного задания вектора $\vec{v}$ достаточно знать лишь одну скалярную функцию φ . Если потенциал скорости задан, то легко найти и проекции $\vec{v}$ на оси ортогональной системы координат:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (13.4)$$

Воспользуемся выражением (13.3) и подставим его в первое слагаемое уравнения Громеки—Лэмба (10.20):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi_1) + \text{grad } \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}. \quad (13.5)$$

В уравнении (13.5) потенциал скорости снабжен индексом 1. Введение такого обозначения не меняет смысла функции φ , а необходимость его будет понятна несколько позже.

Если жидкость баротропна, а массовыми силами являются только силы тяжести, то на основании зависимостей (11.3), (11.4), (11.5) и определения (13.1) уравнение (13.5) приводится к виду

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{grad } W + \text{grad } gz = 0, \quad (13.6)$$

причем в первом слагаемом изменен порядок не зависящих друг от друга операций.

Так как градиент функции представляет собой производную по нормали к поверхности равного потенциала, то, если проинтегрировать выражение (13.6) по направлению этой нормали, получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W + gz = f(t), \quad (13.7)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

Этот интеграл носит название уравнения Коши-Лагранжа. Он справедлив для неустановившегося потенциального течения жидкости, и не только для какой-то одной линии тока, а для всего объема жидкости.

Введем новую переменную

$$\varphi = \varphi_1 - \int f(t) dt. \quad (13.8)$$

Здесь φ есть новый потенциал скорости, представленный в виде двух членов: φ_1 , зависящего от координат и времени, и $\int f(t) dt$, являющегося только функцией времени.

Градиент функций φ и φ_1 будет один и тот же:

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } \varphi_1, \quad (13.9)$$

так как $\text{grad} \int f(t) dt = 0$, вследствие того что $f(t)$ не зависит от координат.

Если заменить в интеграле (13.7) переменную φ_1 в соответствии с обозначением (13.8), то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W + gz = 0. \quad (13.10)$$

В случае установившегося течения скорость $\vec{v}$, давление p и плотность ρ , а значит, и W не должны зависеть от времени. Тогда и интеграл (13.10) может быть справедлив для стационарного течения лишь при условии, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const},$$

причем это постоянство должно выполняться как в пространстве, так и во времени. В самом деле, если $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ зависит от координат, то тогда $\text{grad } \varphi$ будет зависеть от времени, если $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ зависит только от времени, то тогда на основании (13.10) либо $\vec{v}$, либо W должны тоже зависеть от времени. Ни то, ни другое положение не соответствует условию стационарности.

Таким образом, интеграл Коши-Лагранжа для потенциального стационарного течения превращается в интеграл Бернулли—Лагранжа

$$\frac{v^2}{2} + W + gz = \text{const}. \quad (13.11)$$

Для несжимаемой идеальной жидкости в соответствии с (11.9), получаем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (13.12)$$

или

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \quad (13.13)$$

Представляя скорость при потенциальном течении выражением (13.3), уравнению несжимаемости (9.14) можно придать другой вид:

$$\text{div } \vec{v} = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi, \quad (13.14)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, а само уравнение (13.14) носит название уравнения Лапласа.

Если известна функция φ и заданы граничные условия, то уравнение (13.14) дает возможность определить скорость жидкости в любой точке занимаемого ею пространства, а по уравнению Бернулли-Лагранжа, имея скорость $\vec{v}$, можно найти и давление в этой точке.

§ 14. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ранее указывалось, что жидкость называется вязкой, если при перемещении одного ее слоя относительно другого возникают касательные напряжения. Все существующие в природе жидкости являются вязкими. Поэтому такие жидкости часто называют реальными. Опытным путем были установлены следующие законы движения вязких жидкостей:

1. Жидкость обладает способностью прилипать к стенкам твердого тела, вследствие чего слои жидкости, непосредственно прилегающие к поверхности тела, двигаются со скоростью твердого тела.

2. Скорость частиц жидкости между двумя перемещающимися друг относительно друга пластинами распределяется по линейному закону.

3. Касательные напряжения, возникающие в жидкости, пропорциональны первым производным от скорости по координатам.

Частный случай этой зависимости представлен формулой (3.8).

Опираясь на эти законы, выведем общее уравнение течения вязкой несжимаемой жидкости. При этом вывод искомого уравнения будет отличаться от вывода уравнения Эйлера лишь тем, что вместе с массовыми силами и силами давления необходимо дополнительно учесть силы вязкого трения. В соответствии с этим можно утверждать, что в правой части уравнения (10.11) появится какое-то дополнительное слагаемое, учитывающее наличие вязкости, т. е.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{f} + \vec{G}, \quad (14.1)$$

где $\vec{G}$ — сила сопротивления, обусловленная трением в жидкости и действующая на единицу объема.

Найдем аналитическое выражение, устанавливающее зависимость этой силы от динамического коэффициента вязкости и скорости движения жидкости.

Напряжение поверхностных сил будем по-прежнему обозначать буквой σ . В общем случае вектор $\vec{\sigma}$ не будет совпадать с направлением нормали $\vec{n}$ к данной поверхности. Тот факт, что $\vec{\sigma}$ принадлежит поверхности, нормаль которой есть $\vec{n}$, будем отмечать индексом «n» — $\vec{\sigma}_n$. Проекция вектора $\vec{\sigma}_n$ на оси ортогональной системы координат xyz получают обозначения σ_{nx} , σ_{ny} , σ_{nz} .

Если с нормалью к поверхности совпадает одна из осей, например x , то проекции $\vec{\sigma}_n$ будут записаны так:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}.$$

В общем виде проекция $\vec{\sigma}_n$ на какую-либо ось k может быть обозначена как σ_{nk} . Это означает, что вектор напряжения поверхностных сил, принадлежащий поверхности, нормаль которой $\vec{n}$, спроектирован на ось k , где $k=x, y, z$.

Выделим в объеме вязкой жидкости параллелепипед с ребрами dx, dy, dz , параллельными соответствующим осям (рис. 11). Пусть на все грани этого параллелепипеда действуют вязкие силы.

Найдем величину вязкой силы $d\vec{G}$, действующей на рассматриваемый элементарный объем.

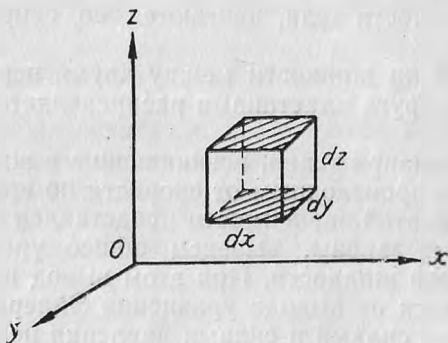


Рис. 11

Для этого вычислим сначала силы, которые приложены к граням, параллельным плоскости Oxy , и действуют в направлении оси x . Так как нормалью к этим граням является ось z , то проекции векторов напряжения, действующих на эти грани, будут:

$\sigma'_{zx}, \sigma'_{zy}, \sigma'_{zz}$ — на верхнюю грань;

$\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$ — на нижнюю грань.

Тогда, полагая, что $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, касательные напряжения, действующие вдоль оси x , на основании зависимости (3.8) можно записать в виде:

— для верхней грани

$$\sigma'_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{z+dz}; \quad (14.2)$$

— для нижней грани

$$\sigma_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_z. \quad (14.3)$$

Индексы «z» и «z+dz» указывают, при какой аппликате берется производная по z. Кроме того, если считать, что под действием напряжения σ'_{zx} жидкость перемещается в положительном направлении оси x, то силы вязкого трения на нижней грани будут препятствовать этому перемещению, т. е. напряжение σ''_{zx} должно быть направлено в сторону, противоположную направлению оси x. По этой причине в выражении (14.3) и поставлен знак минус. Результирующая сила вязкого трения dG_{zx} , действующая в направлении оси x на грань площадью $dx dy$, обусловлена наличием напряжений σ'_{zx} и σ''_{zx} и ее величина может быть найдена из соотношения

$$dG_{zx} = (\sigma'_{zx} + \sigma''_{zx}) dx dy. \quad (14.4)$$

Выразим напряжение на верхней грани через координату z, определяющую положение нижней грани. Для этого разложим σ'_{zx} в ряд Тейлора, удержав в нем члены не выше первой степени dz, т. е.

$$\sigma'_{zx} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_z + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)_z + \dots \right]. \quad (14.5)$$

Произведя подстановку выражений (14.3) и (14.5) в уравнение (14.4), получим

$$dG_{zx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dx dy dz = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dV, \quad (14.6)$$

где $dV = dx dy dz$ — элементарный объем.

От векторов напряжения, приложенных к другим граням, в направлении оси x будут действовать их проекции σ'_{yx} , σ'_{xx} и σ''_{yx} , σ''_{xx} . Очевидно, что силы, обусловленные этими проекциями и действующие в направлении оси x на площади $dy dz$ и $dx dz$, будут иметь вид, аналогичный (14.6), только частные производные от v_x будут взяты по x и y. Тогда результирующая сила, действующая на объем dV в направлении оси x, будет равна

$$dG_x = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dV = \mu \nabla^2 v_x dV. \quad (14.7)$$

По аналогии с (14.7) можно написать теперь и выражения для сил dG_y , dG_z , действующих в направлении осей y и z соответственно:

$$dG_y = \mu \nabla^2 v_y dV; \quad dG_z = \mu \nabla^2 v_z dV, \quad (14.8)$$

Сила вязкости, действующая на элементарный объем dV , вместо выражений (14.7) и (14.8) может быть представлена одним векторным равенством

$$\vec{dG} = \mu \nabla^2 \vec{v} dV, \quad (14.9)$$

а сила, действующая на единицу объема, есть

$$\vec{G} = \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (14.10)$$

Если теперь найденное значение силы $\vec{G}$ подставить в (14.1), то получим

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (14.11)$$

Это и есть искомое уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости, носящее название уравнения Навье-Стокса.

Если учесть, что $\frac{\mu}{\rho}$ представляет собой кинематический коэффициент вязкости ν , то, разделив все члены уравнения (14.11) на ρ , получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F} + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (14.12)$$

Отсюда нетрудно получить и уравнение Навье-Стокса, записанное в проекциях на оси ортогональной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

Уравнение Навье-Стокса справедливо для любого вида движения вязкой несжимаемой жидкости, однако в общем виде оно не интегрируется. В некоторых частных случаях течения жидкости интеграл этого уравнения может быть получен сравнительно просто. Примером таких течений может служить пуазейлево течение и течение жидкости в трубах.

Представим уравнение (14.12) в виде, аналогичном уравнению Громеки—Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{F} + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (14.14)$$

Для случая стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в потенциальном поле сил земного тяготения уравнение (14.14) преобразуется к виду

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (14.15)$$

Проектируя векторы (14.15) на линию тока, получаем

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = (\nu \nabla^2 \vec{v})_l. \quad (14.16)$$

В правой части уравнения (14.16) находится проекция вектора сил вязкого трения на линию тока. Если проинтегрировать обе части равенства (14.16) вдоль линии тока, то получим

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz + A_\tau = \text{const}, \quad (14.17)$$

где A_τ есть интеграл от проекции вектора сил вязкого трения на линию тока, взятый по этой линии. По физическому смыслу этот интеграл представляет собой работу, затрачиваемую на преодоление вязкого трения при движении частиц жидкости вдоль линии тока.

Интеграл (14.17) принято называть уравнением Бернулли для стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости. Это уравнение справедливо для любой линии тока, но константа для каждой линии будет своя.

Разделим все члены интеграла (14.17) на g :

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \frac{A_\tau}{g} = \text{const} \quad (14.18)$$

и запишем это уравнение для двух точек, лежащих на одной и той же линии тока:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{A_{\tau 1}}{g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{A_{\tau 2}}{g}. \quad (14.19)$$

Приняв обозначение

$$\frac{A_{\tau 2} - A_{\tau 1}}{g} = h_n,$$

можно написать

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_n. \quad (14.20)$$

Ранее показывалось, что все члены уравнения Бернулли имеют размерность длины. Точно так же и h_n имеет размерность длины. С энергетической точки зрения h_n есть потеря механической энергии единицей веса жидкости при движении ее по линии тока из одной точки в другую. Эта «потеря» представляет собой необратимый переход механической энергии жидкости в ее тепловую энергию. Величину h_n иногда называют потерянной удельной энергией.



Рис. 12

Графически уравнение (14.20) может быть иллюстрировано рис. 12. Из этого рисунка, как и из уравнения (14.20), следует, в частности, что гидродинамический напор не остается постоянным вдоль линии тока, как это имело место в случае течения идеальной жидкости. По этой причине, например, при транспортировке жидкостей на значительные расстояния по трубопроводам на трассе создаются промежуточные насосные станции, восполняющие затраты механической энергии на преодоление сопротивления трубопроводов, обусловленного силами вязкого трения.

§ 15. ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Одной из важнейших задач гидромеханики является изучение распределения давления и скорости в жидкости при обтекании ею твердых тел различной геометрической конфигурации. При этом очень часто бывает удобно воспользоваться понятиями источника и стока жидкости.

Источником называется точка, из которой в каждый момент времени как бы непрерывно и равномерно выделяется жидкость и растекается по радиусам во все стороны.

Точка, в которой в каждый момент времени как бы непрерывно и равномерно поглощается одинаково по всем направлениям жидкость, называется стоком или отрицательным источником.

Иногда источники и стоки в гидромеханике называют гидродинамическими особенностями.

Исходя из приведенных определений движущийся корабль, например, можно рассматривать как твердое тело, имеющее в носовой части источник, а в кормовой—сток. К такому заключению приводит картина течения воды вокруг корабля, наблюдаемая с его палубы. Само определение гидродинамической особенности позволяет сделать вывод, что точечный источник, как и сток, обладает пространственной симметрией. Скорость течения жидкости в каждой точке пространства будет функцией трех координат x, y, z . С другой стороны, если точечные источники разместить вплотную один к другому вдоль некоторой бесконечной прямой, параллельной, например, оси z , то очевидно, что течение жидкости от такого линейного источника будет обладать симметрией только в плоскости, перпендикулярной к оси z . Скорости частиц жидкости в таком потоке будут функциями только двух координат x и y . Течение жидкости, в котором все функции, определяющие движение жидкости, зависят только от двух координат и времени, называется плоским течением.

Примерами плоского течения, с некоторыми приближениями, могут быть: обтекание потоком жидкости трубок гидравлических лагов, свай и быков мостов на реках и т. д. Изучение течения жидкости в системе трех измерений представляет значительно большие трудности по сравнению с плоским течением, которое, в свою очередь, является достаточно хорошим приближением течения жидкости при рассмотрении принципа действия гидравлических лагов. По указанной причине ниже будут рассмотрены основные свойства плоского течения.

Пересечем прямую линию, вдоль которой расположены точечные источники, плоскостью, перпендикулярной к линии источников. Тогда в точке пересечения линии с указанной плоскостью будет находиться один точечный источник, течение жидкости из которого будет обладать симметрией в этой плоскости. Такой источник (сток) принято называть плоским источником.

Будем считать, что жидкость идеальна и несжимаема, а ее течение из источника имеет потенциальный характер, причем последнее условие следует из сущности самого определения источника.

Для отыскания скоростей движения частиц жидкости можно воспользоваться уравнением несжимаемости (9.15), которое для случая плоского течения жидкости будет содержать только два слагаемых:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (15.1)$$

так как в этом случае $v_z = 0$.

Поскольку рассматривается потенциальное течение жидкости, т. е.

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad (15.2)$$

то уравнение (15.1) превращается в уравнение Лапласа для плоской системы прямоугольных координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (15.3)$$

Решение, удовлетворяющее этому уравнению, имеет вид

$$\varphi = Q \ln r, \quad (15.4)$$

где Q — произвольная постоянная;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В справедливости высказанного утверждения можно убедиться, если подставить решение (15.1) в уравнение (15.3). Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= Q \frac{x}{r^2}; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{Q}{r^2} - \frac{2Qx^2}{r^4}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= Q \frac{y}{r^2}; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{Q}{r^2} - \frac{2Qy^2}{r^4}. \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Подстановка вторых производных (15.5) в (15.3) дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2Q}{r^4} [r^2 - (x^2 + y^2)] = 0.$$

Таким образом, выражение (15.4) действительно является решением уравнения (15.3). Проекции вектора скорости $\vec{v}$ на оси координат x и y на основании равенств (15.2) и (15.5) имеют вид:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \frac{x}{r^2}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \frac{y}{r^2}, \quad (15.6)$$

откуда модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{Q}{r}. \quad (15.7)$$

Уравнение линии тока, как известно, имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \quad (15.8)$$

После подстановки в (15.8) проекций скорости (15.6) получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}. \quad (15.9)$$

Интегрирование уравнения (15.9) дает следующий результат: $\ln x = \ln y + \ln C$, откуда потенцированием получаем

$$x = Cy. \quad (15.10)$$

Таким образом, линии тока плоского источника представляют собой прямые, проходящие через начало координат (через источник). Величина скорости частиц жидкости, движущихся по этим линиям тока, находится в обратной пропорциональной зависимости от их расстояния до источника.

Если в выражении потенциала скорости (15.4) зафиксировать модуль радиуса $\vec{r}$ и при условии $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}$ построить поверхность относительно оси, на которой расположены точечные источники, то получим поверхность равного потенциала, или эквипотенциальную поверхность. Эти поверхности в случае плоского течения являются круговыми цилиндрами, которые в пересечении с картинной плоскостью дают окружности.

Определим произвольную постоянную Q , для чего введем понятие мощности (производительности) источника.

Мощностью источника называется количество жидкости, вытекающей из источника в единицу времени.

Пусть мощность линейного источника, приходящаяся на единицу длины, есть q . Тогда поток жидкости через поверхность цилиндра радиуса r , высота которого также равна единице длины, будет

$$q = \int_S v dS = \frac{Q}{r} 2\pi r = 2\pi Q,$$

откуда

$$Q = \frac{q}{2\pi}. \quad (15.11)$$

Рассмотрим картину течения жидкости в поле двух плоских источников. Пусть эти источники O_1 и O_2 имеют одинаковую производительность и лежат в одной плоскости. Расстояние между источниками (рис. 13) примем равным $2a$. При этом будем считать, что в точке O_1 расположен источник с постоянной $Q_1 = Q$, а в точке O_2 может находиться как источник, так и сток с постоянной $Q_2 = \pm Q$. Знак плюс будет относиться к источнику, а минус — к стоку (отрицательному источнику). Рассмотрим течение жидкости в точке $A(x, y)$, отстоящей от O_1 на расстояние r_1 и от O_2 — на расстояние r_2 . Проведем через точки O_1 и O_2 ось x , а начало координат O выберем посередине отрезка O_1O_2 . Ось y направим на рисунке вверх.

В том случае, когда имеется несколько источников, потенциал скорости в некоторой точке поля, обусловленный этими источниками, равен алгебраической сумме потенциалов от каждого источ-

ника. Применительно к случаю двух плоских источников потенциал в точке A есть

$$\varphi_A = Q \ln r_1 - Q \ln r_2, \quad (15.12)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Компоненты скорости жидкости в точке A по осям x и y найдутся дифференцированием потенциала (15.12) по x и y соответственно:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi_A}{\partial x} = Q \left(\frac{x+a}{r_1^2} \pm \frac{x-a}{r_2^2} \right); \\ v_y &= \frac{\partial \varphi_A}{\partial y} = Q \left(\frac{y}{r_1^2} \pm \frac{y}{r_2^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

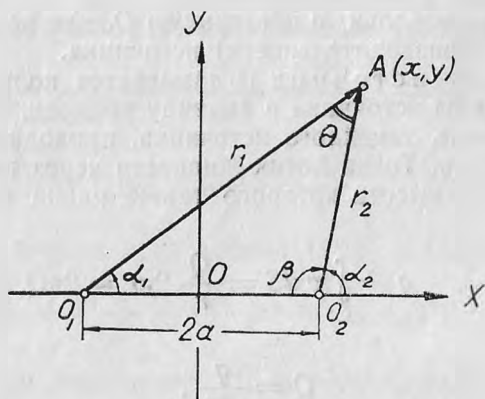


Рис. 13

Поле скоростей будет наглядным, если представить его в виде линий тока, дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или

$$v_y dx - v_x dy = 0. \quad (15.14)$$

Предположим, что уравнение (15.14) является полным дифференциалом функции $\psi(x, y)$. Полный дифференциал, как известно, в общем виде записывается так:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (15.15)$$

Сравнение формул (15.14) и (15.15) позволяет сделать заключение, что если уравнение (15.14) является полным дифференциалом функции $\psi(x, y)$, то должны иметь место равенства:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x;$$

$$\frac{\partial (v_y)}{\partial y} = \frac{\partial (-v_x)}{\partial x}. \quad (15.16)$$

Подстановка проекций скорости (15.13) во вторую строчку (15.16) дает:

$$\frac{\partial (v_y)}{\partial y} = \frac{(x+a)^2 - y^2}{r_1^4} \pm \frac{(x-a)^2 - y^2}{r_2^4};$$

$$\frac{\partial (-v_x)}{\partial x} = \frac{(x+a)^2 - y^2}{r_1^4} \pm \frac{(x-a)^2 - y^2}{r_2^4}.$$

Таким образом, уравнение (15.14) действительно является полным дифференциалом функции $\psi(x, y)$:

$$v_y dx - v_x dy = d\psi = 0. \quad (15.17)$$

Функция $\psi(x, y)$ носит название функции тока. Из последнего равенства видно, что функция тока вдоль линии тока остается постоянной величиной:

$$\psi(x, y) = \text{const}, \quad (15.18)$$

но для каждой линии тока эта константа имеет свое определенное значение. Сопоставив выражения (15.16) и (15.13), можно написать:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = Q \left(\frac{y}{r_1^2} \pm \frac{y}{r_2^2} \right); \quad (15.19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = Q \left(\frac{x+a}{r_1^2} \pm \frac{x-a}{r_2^2} \right). \quad (15.20)$$

Пронтегрируем по x уравнение (15.19), приняв во внимание, что

$$\int \frac{y}{r_1^2} dx = \int \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} dx = \int \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x+a}{y} \right)^2 + 1} dx =$$

$$= \text{arctg} \frac{x+a}{y}.$$

Тогда

$$\psi(x, y) = Q \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} \pm \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right) + f(y) + C, \quad (15.21)$$

где $f(y) + C$ — произвольная постоянная интегрирования.

Для определения $f(y)$ найдем производную по y от интеграла (15.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= Q \left[\frac{-\frac{x+a}{y^2}}{\left(\frac{x+a}{y}\right)^2 + 1} \pm \frac{-\frac{x-a}{y^2}}{\left(\frac{x-a}{y}\right)^2 + 1} \right] + f'(y) = \\ &= -Q \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \pm \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] + f'(y). \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с (15.20), приходим к заключению, что $f'(y) = 0$, т. е. $f(y) = \text{const.}$

Таким образом,

$$\psi(x, y) = Q \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} \pm \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right) = \text{const.} \quad (15.22)$$

Если воспользоваться углами, которые образуют радиусы-векторы r_1 и r_2 с осью x , то на основании рис. 13 можно установить, что

$$\begin{aligned} \frac{x+a}{y} &= \operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right); \\ \frac{x-a}{y} &= \operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right). \end{aligned}$$

Подстановка полученных соотношений в (15.22) позволяет получить уравнение функции тока в виде, удобном для графического построения:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) = C. \quad (15.23)$$

Для случая двух положительных источников уравнение (15.23) принимает вид

$$\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta - \alpha_1 = C. \quad (15.24)$$

Если в точке O_1 находится источник, а в точке O_2 — сток, то

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi - (\alpha_1 + \beta) = \theta = C. \quad (15.25)$$

В уравнениях (15.24) и (15.25) углы β и θ являются внутренними углами треугольника O_1AO_2 .

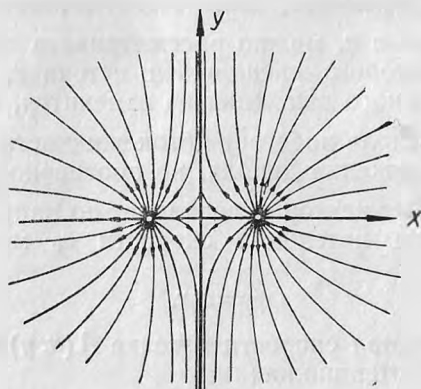


Рис. 14

По уравнению (15.24) построено семейство линий тока на рис. 14, а по уравнению (15.25) — на рис. 15. При этом в первом случае линии тока являются гиперболами, а во втором — дугами окружностей.

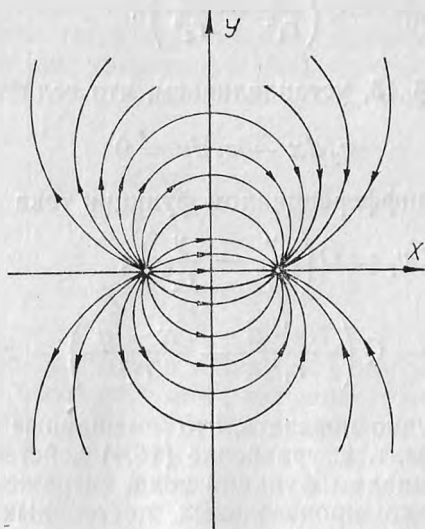


Рис. 15

Совокупность двух источников, одинаковых по производительности, но противоположных по знаку, принято называть диполем.

§ 16. УДОБООБТЕКАЕМАЯ ФОРМА ТЕЛА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Тело конечных размеров, движущееся в жидкости с некоторой постоянной скоростью $\vec{v}$, можно рассматривать как перемещение диполя, впереди которого расположен источник, а сзади — сток. Картина относительного движения не изменится, если считать, что на неподвижный диполь набегают поток жидкости со скоростью $\vec{v}_0$, равной скорости движения диполя, но противоположной по знаку.

Будем считать, что вектор $\vec{v}_0$ совпадает по направлению с осью x (см. рис. 13). Тогда потенциал скорости v_0 можно представить в виде

$$\varphi_0 = v_0 x. \quad (16.1)$$

При этом потенциал скорости в точке $A(x, y)$ будет представлять собой сумму потенциалов:

$$\varphi = Q(\ln r_1 - \ln r_2) + v_0 x. \quad (16.2)$$

Располагая потенциалом (16.2), находим проекции скорости в точке A на оси x и y :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q \left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right) + v_0; \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Так же как в § 15, устанавливаем, что если уравнение линий тока

$$v_y dx - v_x dy = 0 \quad (16.4)$$

является полным дифференциалом функции тока $\psi(x, y)$, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_y = Q \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right); \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -v_x = -Q \left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right) - v_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

При этом нетрудно показать, что смешанные производные от $\psi(x, y)$ будут равны, т. е. уравнение (16.4) действительно является полным дифференциалом функции тока. Выражение для функции тока с точностью до произвольных постоянных интегрирования можем получить, проинтегрировав, например, уравнение (16.5) по переменной x :

$$\psi(x, y) = Q \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right) + f(y) + C. \quad (16.6)$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования $f(y) + C$ подставим интеграл (16.6) в левую часть второго уравнения (16.5):

$$Q \left[\frac{\frac{x+a}{y^2}}{\left(\frac{x+a}{y}\right)^2 + 1} - \frac{\frac{x-a}{y^2}}{\left(\frac{x-a}{y}\right)^2 + 1} \right] + f'(y) = \\ = -Q \left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right) - v_0,$$

откуда устанавливаем, что

$$f'(y) = -v_0$$

или

$$f(y) = -v_0 y + C. \quad (16.7)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\psi(x, y) = Q \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right) - v_0 y = \text{const.} \quad (16.8)$$

Тот факт, что функция тока постоянна вдоль данной линии тока, является следствием того, что полный дифференциал функции $\psi(x, y)$ равен нулю [см. уравнение (16.4)]. Если воспользоваться зависимостью (15.25), то функции тока (16.8) можно придать другую форму записи:

$$y = \frac{Q}{v_0} (\alpha_2 - \alpha_1) + C \quad (16.9)$$

или

$$y = \frac{Q}{v_0} \theta + C. \quad (16.10)$$

Задаваясь координатами или углами по формулам (16.8), (16.9) или (16.10), можно вычислить для различных точек плоскости xu постоянные C в долях Q . Затем, соединив согласными кривыми постоянные одинаковой величины, получим картину распределения линий тока, примерный вид которой показан на рис. 16. Этот рисунок позволяет установить, что замкнутая овальная линия делит поле скоростей на две области: внутреннюю и внешнюю. Во внутренней области как бы сосредоточена та часть жидкости, которая перетекает из источника в сток. Во внешней области сосредоточен поток жидкости, плавно огибающий рассматриваемый овал. Поскольку вектор скорости касателен в каждой точке к линии тока, в том числе и к овальной, то, следовательно, эти потоки жидкости

не перемешиваются между собой. Отсюда можно сделать вывод, что если внести в плоский поток идеально гладкий цилиндр, поперечное сечение которого в точности совпадает с указанным выше овалом, то картина течения жидкости во внешней области не должна измениться. По этой причине форму такого тела можно называть удобообтекаемой, так как она не вносит в поток никаких дополнительных возмущений.

Габаритные размеры удобообтекаемого овала можно установить, исходя из следующих соображений. Отрезок M_1M_2 оси x представляет собой искомую длину овала. При этом точки M_1 и M_2 называются мертвыми точками, так как скорость течения жидкости в этих точках равна нулю. Поскольку эти точки принадлежат оси x , то для них $y=0$. Тогда уравнения (16.3) принимают вид:

$$v_y = 0; \quad v_x = v_0 - \frac{2aQ}{x^2 - a^2}. \quad (16.11)$$

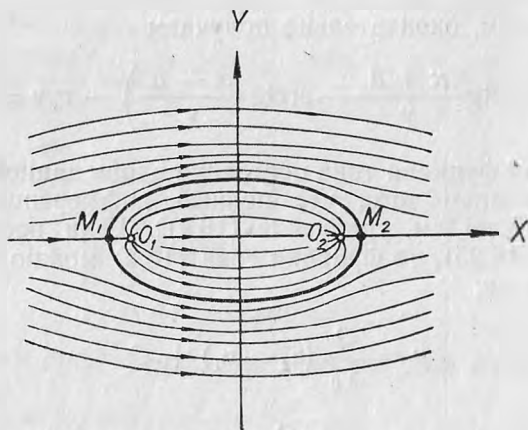


Рис. 16

Очевидно, что существует такое значение $x > a$, при котором $v_x = 0$ и

$$v_0 = \frac{2aQ}{x^2 - a^2},$$

откуда координаты мертвых точек M_1 и M_2 суть

$$x_{M_1} = -\sqrt{a^2 + \frac{2aQ}{v_0}}; \quad (16.12)$$

$$x_{M_2} = \sqrt{a^2 + \frac{2aQ}{v_0}}. \quad (16.13)$$

Таким образом, длина овала

$$M_1 M_2 = 2 |x_{M_1}| = 2 \sqrt{a^2 + \frac{2aQ}{v_0}}. \quad (16.14)$$

Из уравнения (16.10) следует, что для линии тока, проходящей через мертвые точки, $C=0$, так как в этих точках θ и y равны нулю. Наибольшую ширину овал имеет при $x=0$ (см. рис. 16). Подставив $x=0$ и $C=0$ в функцию тока (16.8), получаем трансцендентное уравнение

$$v_0 y_{\max} - 2Q \operatorname{arctg} \frac{a}{y_{\max}} = 0, \quad (16.15)$$

решив которое, можно найти ширину овала, равную $2y_{\max}$.

Ранее указывалось, что если в плоский поток жидкости внести цилиндр обтекаемой формы, то это не вызовет никаких дополнительных возмущений во внешнем потоке жидкости по сравнению с возмущениями, вносимыми самим диполем. Однако это не означает, что такой цилиндр вообще не вносит никаких возмущений в поток жидкости. Просто вносимые им возмущения адекватны возмущениям замещаемого диполя. При обтекании тела вязкими жидкостями на поверхности соприкосновения жидкости с телом возникают силы давления и трения, которые вызывают изменение распределения давлений и скоростей частиц жидкости в набегающем потенциальном потоке. Частицам жидкости сообщаются дополнительные скорости, которые принято называть вызванными скоростями. По мере удаления от тела его возмущающее воздействие ослабевает, и на достаточно больших удалениях оно практически отсутствует. Движение жидкости вблизи обтекаемого тела будем называть возмущенным движением.

Рассматривая обтекание тела жидкостью в случае плоского течения, мы ограничились лишь кинематической стороной процесса, не учитывая силы, действующие в жидкости. Так, при движении вдоль криволинейной поверхности каждая жидкая частица будет обладать центростремительным ускорением, что обусловит возникновение центробежных сил инерции. В результате может сложиться такая ситуация, при которой давление в некоторых точках поверхности тела окажется меньше по величине, чем давление, создаваемое центробежными силами. Следствием такого неравенства будет отрыв частиц жидкости от поверхности тела в его кормовой части и образование вихрей (рис. 17,а). Образование вихревой области приводит к резкому увеличению сопротивления движению тела в жидкости. Для уменьшения лобового сопротивления необходимо уменьшить по величине центробежные силы, что может быть достигнуто увеличением радиуса кривизны поверхности в кор-

мовой части обтекаемого тела, которое приобретает вид, показанный на рис. 17,б. Примерно такую форму имеет в разрезе и капля жидкости, падающая в воздухе.

Если тело движется в жидкости по свободной поверхности или вблизи нее со скоростью, близкой к скорости распространения волн в этой среде, то возникает так называемое волновое сопротивление, для уменьшения которого телам придают профиль, показанный на рис. 17,в. По этой причине, в частности, корабли имеют заостренные носовые образования.

Приемные трубки лагов, выстреливаемые под днище корабля, выполняются в виде цилиндрических стержней. При этом в поперечном сечении они имеют профиль, близкий к изображенному на рис. 17,в. Однако изготовление такого профиля технологически более сложно, чем круглого. Поэтому в целях удешевления производства лагов применяются и трубки круглого сечения.

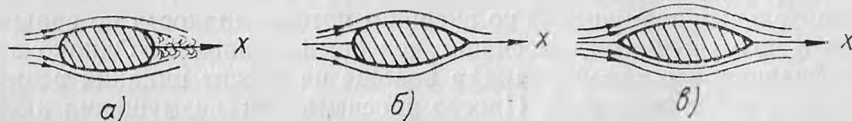


Рис. 17

Если бы мы рассмотрели картину пространственного течения жидкости от единичного точечного источника, то получили бы, что решение, удовлетворяющее уравнению Лапласа, есть

$$\varphi = \frac{Q}{r},$$

а функция тока для случая диполя, образованного двумя точечными пространственными источниками, имеет вид

$$\psi(x, y, z) = Q \left(\frac{x+a}{r_1} - \frac{x-a}{r_2} \right) = \text{const}, \quad (16.16)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}.$$

При этом все основные выводы в отношении характера течения жидкости около обтекаемых тел были бы справедливы и в этом случае. Различие заключалось бы лишь в том, что течение жидкости от точечных источников обладало бы пространственной симметрией.

В заключение настоящего параграфа остановимся на понятии кавитации, связанном с нарушением прочности жидкости, образованием в ней разрывов. Кавитацией называется образование в потоке жидкости полостей, заполненных паром или газом. Эти полости принято называть кавитационными пузырями или кавитационными кавернами.

Явление кавитации наблюдается в тех случаях, когда в каких-либо местах потока возникают настолько большие местные скорости движения жидких частиц, что абсолютное давление p становится меньше давления p_n насыщения* паров жидкости. В тех местах потока, где установилось соотношение давлений $p < p_n$, начинается бурное испарение жидкости и образование полостей, заполненных паром. Давление внутри такой каверны будет равно давлению насыщения, величины которого для водяных паров приведены в табл. 5.

Таблица 5

Температура воды, °С	5	10	15	20	30	40	50
Давление насыщенного пара, кг/м ²	89	125	174	238	433	752	1260

Если набегающий на тело поток жидкости содержит пузырьки воздуха и растворенные газы, то возникновение кавитации значительно облегчается. Если жидкость практически свободна от примесей воздуха, то возникновение кавитации затрудняется не только при давлениях ниже давления насыщения, но даже при значительных растягивающих напряжениях. Возникновению кавитации препятствует и глубина погружения тела под свободную поверхность жидкости, так как с увеличением глубины погружения возрастает гидростатическое давление.

Образующиеся кавитационные пузырьки в какой-либо области поверхности тела уносятся потоком жидкости, но вместо них тотчас образуются новые. Поэтому в зоне, благоприятной для образования кавитации, устойчиво удерживается кавитационная каверна. Оторвавшиеся от этой зоны парогазовые пузырьки при попадании в область давлений $p > p_n$ исчезают, так как пар конденсируется и пузырь смыкается. Это смыкание происходит быстро и поэтому сопровождается сильным гидравлическим ударом. Давление в месте смыкания пузырька может достигать сотен и тысяч атмосфер. Если смыкание происходит на поверхности тела или вблизи него, то такие быстро следующие один за другим удары приводят к сильному разрушению обтекаемой поверхности.

* Давлением насыщения, как известно, называется давление, при котором начинает кипеть жидкость при данной температуре.

Кавитация возникает не только при обтекании жидкостью какого-либо тела. Это явление может иметь место и на поверхности гидроакустических излучателей, при работе гребных винтов, турбин, течении жидкости в трубах.

§ 17. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ

При конструировании различных гидротехнических сооружений и устройств, в том числе и корабельных корпусов, необходимо знать картину распределения давления и скорости в потоке жидкости, обтекающей такие сооружения. Если такие сведения отсутствуют, то невозможно решить вопросы прочности сооружения, выбора его рациональной формы и т. д.

Аналитическое решение такой задачи представляет пока что непреодолимые трудности из-за отсутствия многих данных, необходимых для достижения указанной цели. Поэтому на помощь привлекается эксперимент. Однако экспериментальное изучение течений жидкости около сооружений, выполненных в натуральную величину, представляет собой весьма трудоемкую, громоздкую и, главное, дорогостоящую работу. По этой причине экспериментальное исследование гидродинамических задач ведется на моделях, и полученные при этом закономерности распространяются на реальные объекты. При этом оказывается, что геометрическое подобие модели и оригинала еще не является достаточным условием для того, чтобы потоки, омывающие геометрически подобные тела, были подобны в гидродинамическом отношении. Опыт показывает, что если необходимо исследовать движение моделируемого объекта при скорости v , то для воспроизведения аналогичного потока около геометрически подобной модели ей необходимо сообщить скорость v_1 , отличную от v . Но для того чтобы назначить модели скорость v_1 , необходимо знать, как ее выбрать, каково должно быть соотношение между скоростями v_1 и v . Ответ на этот вопрос может дать теория гидродинамического подобия потоков жидкости. Прежде чем перейти к краткому знакомству с теорией подобия, нужно дать определение, какие потоки жидкости следует считать гидродинамически подобными.

Два физических явления называются подобными, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на одинаковые во всех точках множители, называемые коэффициентами подобия. Конкретизируя это определение для случая потоков жидкости, будем считать потоки жидкости гидродинамически подобными, если в них выполняются следующие условия:

— на частицы жидкости в сходственных точках потоков действуют одинаковые по своей природе силы;

— отношения между всеми одноименными силами, отнесенными к единице объема и действующими в сходственных точках, одинаковы;

— начальные и граничные условия в этих точках отличаются только масштабом задаваемых величин.

При этом под сходственными точками понимаются точки, одинаково расположенные по отношению к границам потоков. Для иллюстрации этого определения можно назвать, например, точки, лежащие в плоскости ватерлинии корабля перед его форштевнем на расстоянии, равном половине длины модели и оригинала соответственно, и т. п.

Исходя из первых двух условий подобия потоков, можно сделать вывод, что течение жидкости в сходственных точках описывается одними и теми же дифференциальными уравнениями.

Пусть течение жидкости около оригинала будет представлено уравнением Навье-Стокса

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t_0} + \rho_0 (\vec{v}_0 \nabla_0) \vec{v}_0 = \vec{f}_0 - \nabla_0 p_0 + \mu_0 \Delta_0^2 \vec{v}_0. \quad (17.1)$$

Тогда течение в сходственной точке моделируемого потока будет определяться таким же по виду уравнением

$$\rho_m \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t_m} + \rho_m (\vec{v}_m \nabla_m) \vec{v}_m = \vec{f}_m - \nabla_m p_m + \mu_m \nabla_m^2 \vec{v}_m. \quad (17.2)$$

Для общности рассуждений следует считать, что плотности жидкости в модельном и натурном потоках различаются, различны также величины промежутков времени, объемные силы, вязкости и т. п. Это различие и учтено в уравнениях (17.1) и (17.2) индексами «О» и «М». При этом связь между всеми этими величинами в моделируемом и натурном потоках должна определяться, исходя из определения подобия, с помощью коэффициентов подобия, т. е.

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= C_v v_m; & \rho_0 &= C_\rho \rho_m; \\ r_0 &= C_r r_m; & t_0 &= C_t t_m; & p_0 &= C_p p_m, \\ \mu_0 &= C_\mu \mu_m; & f_0 &= C_f f_m; \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

где C_v , C_r , C_ρ и т. д. — соответствующие коэффициенты пропорциональности, или коэффициенты подобия.

Располагая соотношениями (17.3), можем выразить течение в интересующей нас точке натурального потока через характеристики модельного потока, взятые в сходственной точке. При этом уравнению (17.1) можно придать следующий вид, если подставить в него характеристики (17.3):

$$\begin{aligned} \frac{C_\rho C_v}{C_t} \rho_m \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t_m} + \frac{C_\rho C_v^2}{C_r} (\vec{v}_m \nabla_m) \vec{v}_m &= C_f \vec{f}_m - \frac{C_p}{C_r} \nabla_m p_m + \\ &+ \frac{C_\mu C_v}{C_r^2} \mu_m \nabla_m^2 \vec{v}_m. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Положим, что уравнения (17.2) и (17.4) записаны для единицы объема жидкости, тогда на основании второго условия подобия потоков должно иметь место следующее равенство:

$$\frac{\frac{C_p C_v}{C_t} \rho_M \frac{d\vec{v}_M}{dt_M}}{\rho_M \frac{d\vec{v}_M}{dt_M}} = \frac{\frac{C_p C_v^2}{C_r} \rho_M (\vec{v}_M \nabla_M) \vec{v}_M}{\rho_M (\vec{v}_M \nabla_M) \vec{v}_M} = \frac{G_i \vec{f}_M}{\vec{f}_M} = \frac{\frac{C_p}{C_r} \nabla_M p_M}{\nabla_M p_M} = \frac{\frac{C_p C_v}{C_r^2} \mu_M \nabla_M^2 \vec{v}_M}{\mu_M \nabla_M^2 \vec{v}_M}$$

или

$$\frac{C_p C_v}{C_t} = \frac{C_p C_v^2}{C_r} = G_i = \frac{C_p}{C_r} = \frac{C_p C_v}{C_r^2}. \quad (17.5)$$

Если уравнение (17.5) выполняется, то при наличии тождественных начальных и граничных условий рассматриваемые потоки будут гидродинамически подобны. И тогда решение уравнения (17.1), выраженного через характеристики модельного потока, будет функцией коэффициентов (17.5). Однако такое решение получить в общем виде не представляется возможным, как невозможно и создать модельный поток, в котором бы выполнялось условие (17.5). Причем последнее обстоятельство легко проверяется путем подстановки численных значений коэффициентов в условие (17.5). Поэтому при практическом изучении потоков в каждом конкретном случае выявляются те факторы, которые являются определяющими для данного вида течения, а второстепенными либо пренебрегают совсем, либо в окончательный результат вносятся соответствующие поправки. Это позволяет упростить исходные уравнения движения жидкости и тем самым облегчить выбор необходимых коэффициентов подобия.

§ 18. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ ПОТОКОВ

В соответствии с замечанием, сделанным в конце предыдущего параграфа, рассмотрим три частных случая моделирования потоков жидкости.

С л у ч а й 1. Стационарное течение вязкой жидкости без учета силы тяжести

Предположим, что экспериментальному исследованию подлежит установившееся течение несжимаемой вязкой жидкости, причем сила тяжести либо настолько мала по сравнению с конвективными силами инерции, что ею можно пренебречь, либо может быть учтена вместе с силами давления. При этих условиях уравнение Навье-Стокса принимает вид

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}. \quad (18.1)$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду, для чего сделаем следующее. Введем в рассмотрение характеристическую скорость u , под которой будем понимать скорость модели или оригинала. При течении жидкости в открытых (река, канал) или закрытых (труба) руслах в качестве характеристической скорости может быть принята средняя скорость потока, скорость на оси трубы, канала и т. д.

Кроме того, выберем какой-либо характеристический размер l обтекаемого тела. Так как модель и оригинал геометрически подобны, то в качестве такого размера может быть принят любой: длина, ширина и т. п. Тогда отношение

$$\frac{\vec{v}}{u} = \vec{w} \quad (18.2)$$

будет представлять собой безразмерную скорость.

Точно так же

$$\frac{\vec{r}}{l} = \vec{q} \quad (18.3)$$

есть безразмерный радиус-вектор. При этом оператор дифференцирования по безразмерному радиусу-вектору будет связан с оператором ∇ следующим соотношением:

$$\nabla_q = \frac{\partial}{\partial \vec{q}} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\vec{r}}{l} \right)} = l \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = l \nabla. \quad (18.4)$$

Исходя из соотношений (18.2) и (18.4), можно написать, что

$$\vec{v} = u \vec{w}; \quad \nabla = \frac{1}{l} \nabla_q. \quad (18.5)$$

Подставим величины (18.5) в уравнение (18.1):

$$\left(u \vec{w} \frac{1}{l} \nabla_q \right) u \vec{w} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{l} \nabla_q p + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{u}{l^2} \nabla_q^2 \vec{w}$$

или

$$\frac{u^2}{l} (\vec{w} \nabla_q) \vec{w} = - \frac{1}{\rho l} \nabla_q p + \frac{\mu u}{\rho l^2} \nabla_q^2 \vec{w}. \quad (18.6)$$

Разделим все члены уравнения (18.6) на коэффициент, стоящий в левой части:

$$(\vec{w} \Delta_q) \vec{w}_q = - \nabla_q \left(\frac{p}{\rho u^2} \right) + \frac{\mu}{\rho l u} \nabla_q^2 \vec{w}. \quad (18.7)$$

Нетрудно убедиться, что члены уравнения (18.7) не имеют размерности, т. е. уравнение (18.1) приведено к безразмерному виду.

Безразмерное отношение $\frac{p}{\rho u^2}$ носит название безразмерного давления.

Введем обозначение

$$Re = \frac{\rho u l}{\mu} = \frac{ul}{\nu}, \quad (18.8)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости.

Безразмерная величина Re называется числом или критерием Рейнольдса.

С учетом принятого обозначения (18.8) можно окончательно написать

$$(\vec{w} \nabla_q) \vec{w} = - \nabla_q \left(\frac{p}{\rho u^2} \right) + \frac{1}{Re} \nabla_r^2 \vec{w}. \quad (18.9)$$

Известно, что решение всякого уравнения является функцией аргумента и коэффициентов, входящих в это уравнение. Так как в нашем случае коэффициент всего один, а аргументом является $\vec{q}$, то решение для давления и скорости в общем виде может быть записано так:

$$\vec{w} = f_1(\vec{q}, Re); \quad \frac{p}{\rho u^2} = f_2(\vec{q}, Re)$$

или

$$\vec{v} = u f_1(\vec{q}, Re); \quad p = \rho u^2 f_2(\vec{q}, Re).$$

Итак, если при изучении стационарного течения вязкой жидкости можно пренебречь силами тяжести, то характер потока как около оригинала, так и около модели полностью определяется числом Рейнольдса. Отсюда можно сформулировать закон гидродинамического подобия для стационарного потока вязкой жидкости: *если два стационарных потока вязкой жидкости, обтекающие геометрически подобные тела, имеют одинаковые числа Рейнольдса, то такие потоки гидродинамически подобны.*

Обозначим характеристические величины, принадлежащие оригиналу, индексом «о», а модели — индексом «м». Тогда на основании закона подобия имеем

$$(Re)_o = (Re)_m$$

или

$$\frac{u_o l_o}{\nu_o} = \frac{u_m l_m}{\nu_m}.$$

Полагая, что натурный и модельный потоки образованы одной и той же жидкостью, получаем

$$u_m = u_o \frac{l_o}{l_m}. \quad (18.10)$$

Предположим, что коэффициент масштаба модели $\frac{l_o}{l_m} = 100$. Тогда для создания гидродинамически подобного модельного потока необходимо заставить двигаться модель со скоростью в 100 раз большей, чем оригинал, т. е. скорости модели и оригинала должны быть обратно пропорциональны их длинам.

В зависимости от величины числа Рейнольдса существуют два принципиально различных вида течения вязкой жидкости: ламинарное и турбулентное.

Ламинарное течение жидкости имеет место при малых числах Рейнольдса и представляет собой спокойное перемещение, при котором отдельные слои жидкости скользят относительно друг друга, не перемешиваясь.

Турбулентное течение возникает при относительно больших числах Рейнольдса ($Re > Re_{кр}$). Число $Re_{кр}$, при котором поток превращается из ламинарного в турбулентный, называется критическим числом Рейнольдса. Турбулентное течение характерно интенсивным перемешиванием слоев жидкости.

Механизм турбулентного потока очень сложен и в настоящее время еще полностью не изучен. В турбулентном течении частицы жидкости, участвуя в общем движении жидкости, имеют дополнительные перемещения, как возвратные, так и в поперечном направлении. Их линии тока беспорядочно переплетены и быстро изменяются во времени. По своей внутренней структуре турбулентное течение является явно выраженным неустановившимся течением. Переход от ламинарного течения к турбулентному и обратно происходит скачком. При этом если переход к турбулентному течению произошел при $Re_{кр1}$, то обратный переход происходит при $Re_{кр2}$, причем всегда существует неравенство $Re_{кр1} > Re_{кр2}$.

Возникновение турбулентного течения сопровождается резким увеличением сопротивления движению тела в жидкости: оно пропорционально квадрату скорости, тогда как при ламинарном течении сопротивление пропорционально первой степени скорости.

Величина критического числа Рейнольдса зависит от плавности обводов тела и шероховатости его поверхности. Кроме того, из (18.8) следует, что чем больше вязкость жидкости, тем меньше число Рейнольдса, поэтому для одного и того же тела турбулентное течение в более вязких жидкостях наступит при больших скоростях движения, чем в менее вязких.

С л у ч а й 2. Стационарное течение жидкости в поле силы тяжести

Хорошо известен факт, что при движении корабля по поверхности воды образуются волны, причем на это тратится, как уже упоминалось, какая-то доля мощности двигателей. Поэтому выявление энергетических затрат на преодоление так называемого волнового сопротивления представляет собой весьма важную задачу.

Формирование волнового профиля происходит под воздействием силы тяжести. Поэтому, изучая течение жидкости, сопровождающееся волнообразованием, нельзя пренебрегать объемной силой тяжести. Она не может быть включена и в гидростатическое давление, так как распределение давления по глубине при наличии волны будет отличаться от закона изменения гидростатического давления.

Если основной задачей эксперимента является изучение волнового сопротивления в стационарном потоке жидкости, то силами вязкости пренебрегают, рассматривая жидкость как среду маловязкую. В этом случае уравнение движения жидкости принимает вид

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}. \quad (18.11)$$

Не повторяя промежуточных преобразований, запишем это уравнение в безразмерном виде

$$(\vec{w} \nabla_q) \vec{w} = -\nabla_q \left(\frac{p}{\rho u^2} \right) + \frac{\vec{g} l}{u^2}. \quad (18.12)$$

Введем обозначение

$$Fr = \frac{u^2}{gl}. \quad (18.13)$$

Безразмерная величина (18.13) называется числом или критерием Фруда.

Заметим, что в кораблестроительной практике часто под числом Фруда понимается квадратный корень из числа (18.13).

Таким образом, уравнение (18.12) содержит единственный коэффициент — свободный член $\frac{gl}{u^2}$, которым и определяется решение уравнения и, следовательно, характер течения жидкости. Отсюда следует закон подобия для случая стационарного течения жидкости в поле сил тяжести: *два стационарных потока жидкости, обтекающих геометрически подобные тела в поле сил тяжести, будут гидродинамически подобны, если одинаковы числа Фруда.*

На основании закона подобия для натурального и модельного потоков можно написать

$$(Fr)_м = (Fr)_о$$

или

$$\frac{u_0^2}{l_0 g} = \frac{u_m^2}{l_m g},$$

откуда, скорость модели

$$u_m = u_0 \sqrt{\frac{l_m}{l_0}}. \quad (18.14)$$

Если воспользоваться тем же масштабом модели, что и в первом случае, то получается, что при изучении волнового сопротивления модель должна двигаться в 10 раз медленнее, чем оригинал.

С л у ч а й 3. Нестационарное течение жидкости

Предположим, что исследуется резко выраженное неустановившееся течение жидкости, такое, что можно пренебречь силами вязкости по сравнению с перепадом давления ∇p и силами инерции, а внешние объемные силы либо малы по сравнению с указанными силами и поэтому отброшены, либо учтены в давлении. В этом случае движение жидкости будет описываться уравнением

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (18.15)$$

Для того чтобы уравнение (18.15) привести к безразмерному виду, необходимо в дополнение к введенным ранее характеристическим величинам добавить еще одну — характеристическое время τ , под которым можно понимать, например, период колебания жидкости. Тогда безразмерное время t' будет

$$\frac{t}{\tau} = t' \quad \text{или} \quad t = \tau t'. \quad (18.16)$$

Произведя подстановку (18.5) и (18.16) в уравнение (18.15), получаем

$$\frac{u}{\tau} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t'} + \frac{u^2}{l} (\vec{w} \nabla_q) \vec{w} = -\frac{1}{\rho l} \nabla_q p,$$

откуда путем деления всех членов уравнения на коэффициент при конвективной производной приходим к безразмерной форме записи исходного уравнения

$$\frac{l}{u\tau} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t'} + (\vec{w} \nabla_q) \vec{w} = -\nabla_q \left(\frac{p}{\rho u^2} \right). \quad (18.17)$$

Таким образом, решение уравнения (18.17) будет функцией радиуса-вектора $\vec{q}$ и безразмерного коэффициента $\frac{l}{u\tau}$, обратную величину которого принято обозначать

$$\frac{u\tau}{l} = Sh. \quad (18.18)$$

Безразмерное число Sh принято называть числом Струхала или числом гомохронности. По аналогии с первыми двумя случаями можно сформулировать закон подобия и для рассматриваемого случая: *два нестационарных потока, обтекающих геометрически подобные тела, будут гидродинамически подобны, если числа Струхала одинаковы.*

Найдем, как и прежде, соотношение между скоростями модели u_m и оригинала u_0 . На основании только что сформулированного закона можно написать

$$\frac{u_0 \tau_0}{l_0} = \frac{u_m \tau_m}{l_m},$$

откуда

$$u_m = u_0 \frac{l_m}{l_0} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_m}$$

или

$$u_m = u_0 \frac{l_m}{l_0} \quad \text{при} \quad \tau_m = \tau_0, \quad (18.19)$$

т. е. скорости модели и оригинала пропорциональны их характеристическим длинам. Поэтому если масштаб модели $\frac{1}{100}$, то скорость ее движения должна быть в сто раз меньше скорости оригинала. Только в этом случае потоки будут гидродинамически подобны при одном и том же характеристическом времени.

Рассмотренные частные случаи течения жидкости еще раз подтверждают высказанное в § 17 положение о том, что моделировать течение в общем виде, т. е. с учетом всех сил, действующих на жидкость, не представляется возможным. Действительно, для создания модельного потока в случае нестационарного течения вязкой жидкости в поле сил тяжести требуется, чтобы числа Рейнольдса, Фруда и Струхала для модельного потока были одновременно равны соответствующим числам натурного потока. Но в этом случае скорость движения модели должна быть подчинена требованиям (18.10), (18.14) и (18.19), которые взаимно исключают друг друга.

Глава III. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ХОДА КОРАБЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ЛАГАМИ

§ 19. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ЛАГА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПРУЖИННЫМ МАНОМЕТРОМ

Все современные гидродинамические лаги определяют скорость хода корабля относительно воды косвенным методом, который заключается в том, что с помощью приемных устройств лага и дифференциального манометра в них измеряется сила давления скоростного напора жидкости, по величине которого в специальных счетно-решающих устройствах происходит вычисление скорости корабля и проходимого им расстояния.

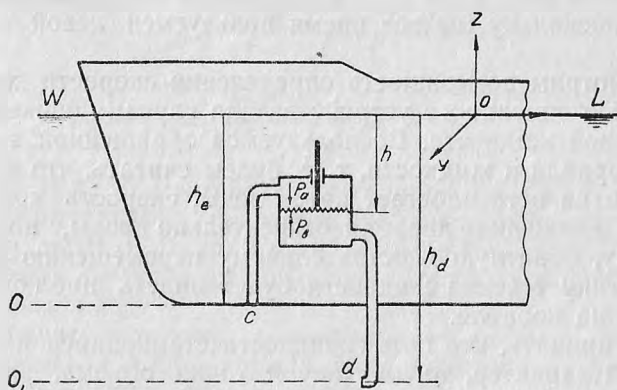


Рис. 18

Дифференциальный манометр — прибор, предназначенный для измерения разности давлений. Его можно представить в виде сосуда, разделенного пластинчатой пружиной — мембраной — на две изолированные друг от друга полости (рис. 18). В каждую из этих полостей, заполненных жидкостью, передаются сравниваемые между собой давления. Прогиб мембраны будет осуществляться под действием результирующего давления, равного разности давлений.

По величине деформации мембраны можно судить и о величине измеряемого результирующего давления. Пусть дифференциальный манометр установлен на корабле ниже ватерлинии (рис. 18). Верхняя полость манометра соединяется с забортной водой с помощью трубки, которая своим нижним концом заделана заподлицо с днищем корабля. Вторая полость манометра тоже соединена трубкой с забортной водой, но ее нижний конец выстреливается на некоторое расстояние под днище и имеет раструб, направленный в сторону движения корабля. Первую из указанных трубок принято называть трубкой приема статического давления, а вторую — трубкой приема полного давления.

Обозначим срезы этих трубок буквами c и d , как это показано на рисунке, а их углубление под ватерлинией — h_c и h_d соответственно. Превышение плоскости ватерлинии над плоскостью мембраны обозначено буквой h .

Начало O координатной системы xuz расположено в диаметральной плоскости корабля на высоте ватерлинии. Так как при выводе всех основных уравнений гидромеханики использовалась система координат, у которой ось z была направлена вверх, то и здесь сохраним это же направление вертикальной оси. Тогда мы сможем воспользоваться выведенными ранее уравнениями без какой-либо замены знаков в них. Ось x направим в диаметральной плоскости от носа к корме, а направление оси y определяется однозначно, поскольку мы все время пользуемся левой системой отсчета.

Рассмотрим возможность определения скорости хода корабля с помощью описанного устройства для случая движения корабля в идеальной жидкости. Воспользуемся обращенной картиной движения корабля и жидкости, т. е. будем считать, что корабль неподвижен и на него набегают поток воды, скорость которого равна скорости движения корабля относительно воды, но направлена в сторону, обратную действительному перемещению корабля. Такую картину течения жидкости будет видеть наблюдатель, находящийся на корабле.

Если принять, что поток жидкости стационарен и имеет потенциальный характер, то для любой точки объема, занятого жидкостью, будет справедливо уравнение Бернулли—Лагранжа

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \gamma z = C,$$

причем величина константы C одна и та же во всем объеме, занятом жидкостью.

Поскольку корабль вносит своим корпусом возмущения в набегающий поток жидкости, то мы вправе считать, что характеристики течения жидкости в точках c и d будут различными. Поэтому уравнения течения жидкости в точках c и d следует записать в виде:

$$- \text{ для точки } c \quad \frac{\rho v_c^2}{2} + p_c - \gamma h_c = C; \quad (19.1)$$

$$- \text{ для точки } d \quad \frac{\rho v_d^2}{2} + p_d - \gamma h_d = C. \quad (19.2)$$

Знак минус при последних членах уравнений (19.1), (19.2) объясняется тем, что в избранной системе координат, аппликаты точек c и d отрицательны.

Поскольку верхний конец трубопровода полного давления закрыт манометром и система заполнена водой, то частицы жидкости, набегаящие на приемное устройство в точке d , тормозятся и теряют свою скорость до нуля, т. е. $v_d = 0$. Таким образом, точка d является мертвой точкой, в которой кинетическая энергия частиц жидкости превращается в потенциальную энергию давления скоростного напора. Поэтому уравнение (19.2) принимает вид

$$p_d - \gamma h_d = C. \quad (19.3)$$

Принимая во внимание, что константа C в уравнениях (19.1) и (19.3) имеет одну и ту же величину, далее можно написать

$$\frac{\rho v_c^2}{2} + p_c - \gamma h_c = p_d - \gamma h_d$$

или

$$p_d - p_c = \frac{\rho v_c^2}{2} + \gamma (h_d - h_c). \quad (19.4)$$

Уравнение (19.4) дает разность давлений в точках c и d . Мембрана дифференциального манометра деформируется под действием разности давлений сверху и снизу. Поэтому здесь уместно поставить вопрос: чему же равно результирующее давление, действующее на мембрану?

Если обозначить давление на мембрану снизу вверх p_b , а давление со стороны полости статического давления, т. е. сверху вниз, — p_a , то результирующее давление

$$p_x = p_b - p_a. \quad (19.5)$$

Но давление p_b отличается, очевидно, от давления в точке d лишь на величину веса столба жидкости, высота которого равна $h_d - h$, т. е.

$$p_b = p_d - \gamma (h_d - h). \quad (19.6)$$

Аналогично давление на мембрану сверху вниз можно связать с давлением в точке c равенством

$$p_a = p_c - \gamma (h_c - h). \quad (19.7)$$

Тогда результирующее давление

$$p_d = p_v - p_a = p_d - p_c - \gamma (h_d - h_c),$$

откуда

$$p_d - p_c = p_d + \gamma (h_d - h_c). \quad (19.8)$$

Подставив полученный результат (19.8) в равенство (19.4), окончательно получаем

$$p_d = \frac{\rho v_c^2}{2}. \quad (19.9)$$

Отсюда следует вывод, что дифференциальный манометр измеряет динамическое давление, соответствующее скорости течения жидкости в точке приема статического давления. При этом величина p_d не зависит ни от глубины погружения отверстия приема полного давления, ни от величины превышения уровня свободной поверхности жидкости над дифференциальным манометром.

По измеренному давлению (19.9) счетно-решающее устройство лага вычисляет скорость хода корабля на основании зависимости

$$v_c = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}. \quad (19.10)$$

Если предположить, что при неизменной скорости движения корабля относительно воды по каким-то причинам изменилась величина скорости течения жидкости в районе точки c и стала $v_c' < v_c$, то на основании уравнения (19.1) приходим к заключению, что давление p_c' стало больше p_c . Тогда давление на мембрану сверху (19.7) возрастет, а результирующее давление (19.5) уменьшится. Меньшую скорость выдаст и счетно-решающее устройство лага. Сказанное уже позволяет сделать предварительный вывод о том, что точность измерения скорости хода корабля гидродинамическим лагом будет зависеть от тех гидродинамических условий, в которых находится отверстие приема статического давления.

Итак, выше был рассмотрен принцип измерения скорости с помощью пружинного дифференциального манометра, снабженного двухканальным приемным устройством. Однако эта же задача в принципе может быть решена и с помощью одноканального устройства.

Обращаясь к рис. 18, предположим, что трубопровод статического давления отсутствует и верхняя полость дифференциального манометра просто сообщается с атмосферой. Рассмотрим две точки, лежащие на глубине h_d . Одной из этих точек будет точка приема полного давления, а вторую выберем впереди по носу корабля и на таком расстоянии, чтобы в ней отсутствовали вызванные кораблем искажения скорости. Назовем эту точку точкой O_1 . При нало-

женных в начале этого параграфа ограничениях течение жидкости в указанной точке будет описываться уравнением

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 - \gamma h_d = C, \quad (19.11)$$

причем скорость v_0 равна истинной скорости движения корабля относительно воды.

При отсутствии возмущений давление в движущейся жидкости, как и в покоящейся, равно гидростатическому давлению. Поэтому два последних слагаемых в левой части уравнения (19.11) следует рассматривать как сумму атмосферного и гидростатического давлений, т. е. как абсолютное гидростатическое давление.

Ранее указывалось, что точка d является мертвой точкой и поэтому для нее справедливо уравнение (19.3). Однако в этом уравнении учитывается только сверхбарометрическое давление. Для того чтобы в точке d , как и в точке O_1 , учитывалось абсолютное гидростатическое давление, уравнение (19.3) необходимо дополнить атмосферным давлением p_0 , и тогда

$$p_d + p_0 - \gamma h_d = C. \quad (19.12)$$

Поскольку в потенциальном потоке константа C имеет одно и то же значение для всего объема, занятого жидкостью, то

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 - \gamma h_d = p_d + p_0 - \gamma h_d$$

или

$$p_d = \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (19.13)$$

Давление на мембрану снизу вверх p_b будет отличаться от давления в точке d на величину веса столба жидкости высотой h . С учетом атмосферного давления имеем

$$p_b = p_d + \gamma h + p_0. \quad (19.14)$$

Давление на мембрану сверху p_a равно атмосферному, т. е.
 $p_a = p_0.$

Тогда результирующее давление

$$p_d = p_b - p_a = p_d + \gamma h, \quad (19.15)$$

откуда

$$p_d = p_d - \gamma h. \quad (19.16)$$

Сопоставляя уравнения (19.13) и (19.16) получаем

$$p_d = \frac{\rho v_0^2}{2} + \gamma h. \quad (19.17)$$

Счетно-решающее устройство лага вырабатывает скорость в соответствии с зависимостью (19.10). Заменив в ней p_g на соответствующее ему значение (19.17), придем к следующему результату:

$$v_c = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \quad (19.18)$$

Разумеется, что под v_c здесь понимается не скорость течения жидкости в точке приема статического давления, а просто вычисленная прибором скорость.

На основании зависимости (19.18) следует сделать вполне очевидный вывод, что скорость, вычисляемая лагом с одноканальным приемным устройством, зависит от величины погружения дифференциального манометра под ватерлинию корабля.

Если $h=0$, то вычисленная скорость соответствует истинной скорости корабля относительно воды. В принципе можно построить счетно-решающее устройство, которое автоматически вносило бы поправку в вычисляемую скорость. Однако такое устройство будет очень сложным, так как если даже принять $h=\text{const}$, то на разных кораблях это значение h может быть различным, поэтому нужно иметь возможность регулировать счетно-решающую схему в зависимости от места установки манометра. Но кроме того, величина h будет изменяться вместе с изменением осадки корабля, которая, в свою очередь, зависит как от степени загрузки корабля (боезапас, топливо, вода и др.), так и от режима его движения. Поэтому, безусловно, более предпочтительной следует считать двухканальную схему лага, так как в этом случае показания лага не будут зависеть от превышения уровня свободной поверхности жидкости над дифференциальным манометром.

Несмотря на отмеченный недостаток лагов с одноканальным приемным устройством, они все же находят себе применение на быстроходных кораблях с малой осадкой. Такие корабли могут двигаться в режиме глиссирования, а при наличии подводных крыльев — над поверхностью воды. В последнем случае отверстия приема статического давления на корпусе корабля становятся вообще ненужными, а в режиме глиссирования они могут оголяться и, кроме того, даже воспринимать часть скоростного напора, что недопустимо.

Напишем выражение (19.18) в другом виде:

$$v_c = v_0 \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}. \quad (19.19)$$

Из (19.19) видно, что при малых величинах h и больших скоростях v_0 величина члена $\frac{2gh}{v_0^2}$ оказывается значительно меньше единицы. Вследствие этого погрешность в вычисленной скорости, обусловленная неравенством нулю величины h , будет малой. Так, например, при $v_0=40$ узл. и $h=0,1$ м вычисленная скорость v_c будет отличаться от v_0 всего лишь на 0,2%.

Для кораблей с относительно малыми скоростями погрешность, естественно, будет больше, и при длительном плавании по счислению неизбежно накопятся существенные по величине погрешности в счислимых координатах.

Что же касается подводных лодок, то там одноканальное устройство вообще неприменимо, поскольку на них величина h может быть от нескольких единиц до сотен метров. При этом вычисленная скорость может значительно отличаться от действительной. Таким образом, поскольку одноканальное устройство имеет ограниченное применение, в дальнейшем все вопросы, связанные с точностью, конструкцией и регулировкой лагов, будут рассматриваться только применительно к двухканальным приемным устройствам.

§ 20. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ЛАГА

При рассмотрении картины обращенного движения корабля следует иметь в виду, что скорость v_0 , равную истинной скорости движения корабля относительно воды, будут иметь лишь те частицы жидкости, которые расположены на достаточно больших удалениях от корабля, где возмущения, вносимые в поток его корпусом, практически отсутствуют. По мере приближения частиц к кораблю они получают дополнительные скорости, сообщенные корпусом корабля. Поэтому при движении вблизи корабля скорости частиц жидкости будут отличны от v_0 , в том числе и в точке приема статического давления. Поскольку $v_c \neq v_0$, то величина относительной погрешности в измерении скорости будет представлять собой

$$\Delta_r = \frac{v_c - v_0}{v_0}. \quad (20.1)$$

Погрешность Δ_r принято называть гидродинамической погрешностью лага.

Формула (20.1) позволяет вычислить гидродинамическую погрешность по известным скоростям v_c и v_0 . Но так как о величине v_c мы судим по величине измеренного дифференциальным манометром давления p_d , то удобнее в некоторых случаях иметь зависимость, устанавливающую связь между Δ_r и давлением. Для установления такой зависимости рассмотрим течение жидкости в двух точках: в точке c и в точке O (см. рис. 18), расположенной впереди по курсу корабля на том же углублении под поверхностью моря h_c , что и точка c . Расстояние от корабля до точки O принимается таким, на котором влияние корпуса корабля отсутствует. Тогда уравнение Бернулли—Лагранжа для первой точки имеет вид

$$\frac{\rho v_c^2}{2} + p_c - \gamma h_c = C, \quad (20.2)$$

а для второй точки

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 - \gamma h_c = C. \quad (20.3)$$

На основании равенства констант в уравнениях (20.2) и (20.3) имеем

$$\frac{\rho v_c^2}{2} + p_c = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0,$$

откуда

$$\frac{\rho v_0^2}{2} \left(1 - \frac{v_c^2}{v_0^2} \right) = p_c - p_0, \quad (20.4)$$

Разделим обе части уравнения (20.4) на $\frac{\rho v_0^2}{2}$:

$$\frac{p_c - p_0}{\frac{\rho v_0^2}{2}} = 1 - \frac{v_c^2}{v_0^2}. \quad (20.5)$$

Отношение

$$\overline{\Delta p} = \frac{p_c - p_0}{\frac{\rho v_0^2}{2}} \quad (20.6)$$

представляет собой безразмерную величину относительного приращения давления в точке c и называется коэффициентом гидродинамического давления. В дальнейшем для краткости будем пользоваться термином «гидродинамический коэффициент», подразумевая под этим коэффициент гидродинамического давления.

Сопоставляя выражения (20.5) и (20.6), найдем

$$\overline{\Delta p} = 1 - \frac{v_c^2}{v_0^2}. \quad (20.7)$$

Из (20.7) следует, что

$$\frac{v_c}{v_0} = \sqrt{1 - \overline{\Delta p}}. \quad (20.8)$$

Но это же отношение скоростей можно выразить и через гидродинамическую погрешность.

Из определения (20.1) находим

$$\frac{v_c}{v_0} = 1 + \Delta_\Gamma. \quad (20.9)$$

Соотношения (20.8) и (20.9) позволяют установить очевидную связь гидродинамической погрешности с коэффициентом гидродинамического давления:

$$\Delta_\Gamma = \sqrt{1 - \overline{\Delta p}} - 1. \quad (20.10)$$

Обычно в местах установки устройства приема статического давления коэффициент $\overline{\Delta p} \ll 1$, поэтому $\sqrt{1 - \overline{\Delta p}}$ можно представить в виде разложения в сходящийся ряд по формуле бинома Ньютона

$$\sqrt{1 - \overline{\Delta p}} = 1 - \frac{1}{2} \overline{\Delta p} + \frac{1}{8} \overline{\Delta p}^2 - \dots \quad (20.11)$$

Если в строке (20.11) ограничиться только двумя первыми членами разложения, то ошибка от замены радикала разностью

$$1 - \frac{1}{2} \overline{\Delta p} \quad (20.12)$$

в реальных условиях не превысит сотых долей процента.

Заменив радикал в выражении (20.10) соответствующим ему значением (20.12), окончательно получаем

$$\Delta_r = -0,5 \overline{\Delta p}. \quad (20.13)$$

Отсюда можно сделать заключение, что гидродинамическая погрешность лага может быть определена заранее, при его установке на корабле. Но для этого нужно знать распределение давления по корпусу корабля, т. е. поле давления.

При введении понятия гидродинамической погрешности и установлении ее связи с гидродинамическим коэффициентом мы исходим из скорости v_c течения жидкости в районе отверстия приема статического давления и истинной скорости v_0 движения корабля относительно воды. Однако в реальных условиях плавания в распоряжении штурмана есть только скорость, показываемая лагом, которую впредь будем называть лаговой скоростью и обозначать v_Δ . Лаговая скорость не тождественна скорости v_c , так как помимо гидродинамической погрешности в нее входит инструментальная погрешность прибора. Поэтому если в формулу (20.1) подставить вместо v_c скорость v_Δ , то получим не гидродинамическую, а новую погрешность Δ_v , которую принято называть погрешностью лага:

$$\Delta_v = \frac{v_\Delta - v_0}{v_0}. \quad (20.14)$$

Накопленный экспериментальный материал показывает, что погрешность Δ_v представляет собой плавно изменяющуюся функцию истинной скорости v_0 и в большинстве случаев может быть аппроксимирована линейной зависимостью вида

$$\Delta_v = a_v + b_v v_0, \quad (20.15)$$

где a_v и b_v — некоторые постоянные величины.

При такой аппроксимации отклонение действительной величины погрешности (20.14) от ее линеаризованного значения не превышает, как правило, одного процента. В тех случаях, когда указанное отклонение считается недопустимым, нужно искать другой способ аппроксимации или принять дополнительные меры для уменьшения этого отклонения до заданных пределов. Формуле (20.14) можно придать вид выражения (20.9):

$$\frac{v_l}{v_0} = 1 + \Delta_v = K_v. \quad (20.16)$$

Функцию

$$K_v = 1 + \Delta_v \quad (20.17)$$

принято называть коэффициентом Пито. Если учесть аппроксимацию (20.15), то коэффициент Пито принимает вид

$$K_v = 1 + a_v + b_v v_0. \quad (20.18)$$

Ранее было показано, что динамическое давление p_d , воспринимаемое дифференциальным манометром, определяется зависимостью (19.9). Динамическое давление p_{d0} , соответствующее истинной скорости корабля относительно воды, и давление, соответствующее v_l , можно записать в виде, аналогичном (19.9):

$$p_{d0} = \frac{\rho v_0^2}{2}; \quad (20.19)$$

$$p_{d,l} = \frac{\rho v_l^2}{2}. \quad (20.20)$$

Отношение

$$\frac{p_{d,l}}{p_{d0}} = \frac{v_l^2}{v_0^2} = K_d \quad (20.21)$$

в литературе очень часто тоже называют коэффициентом Пито. При этом аналогия идет и дальше: приближенному значению коэффициента Пито, определенному по отношению давлений, придают тот же вид, что и коэффициенту (20.18), т. е.

$$K_d = \frac{v_l^2}{v_0^2} = 1 + a_d + b_d v_0. \quad (20.22)$$

Между отношениями (20.16) и (20.21), безусловно, существует различие, хотя их называют, а иногда и обозначают одинаково. Однако этот вопрос будет подробно рассмотрен в главе, посвященной регулировке лага.

В заключение настоящего параграфа заметим, что в повседневном плавании штурман имеет дело с погрешностью лага Δ_v и в его распоряжении нет средств выделения Δ_d из общей погрешности Δ_v .

С помощью специально поставленных экспериментов было установлено, что характер изменения погрешности лага Δ_v определяется в основном характером изменения Δ_r . Отсюда следует вывод: если удастся установить, какие факторы влияют на величину гидродинамической погрешности лага, то тем самым будут определены и факторы, оказывающие влияние на погрешность лага. На вопрос влияния внешних факторов проще проследить на гидродинамическом коэффициенте, который связан с Δ_r соотношением (20.13).

§ 21. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ВЕЛИЧИНУ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Установить аналитическим путем зависимость гидродинамического коэффициента от факторов, определяющих его величину, не представляется возможным из-за сложности задачи как в общем, так и в частных случаях. Изучение этого вопроса возможно лишь эмпирическим путем, т. е. путем модельных испытаний. Однако организовать модельные испытания для общего случая движения корабля тоже, как показано в § 18, невозможно из-за противоречивых ограничений, накладываемых критериями подобия потоков. Поэтому в настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые частные случаи обтекания твердого тела (корабля) потоком жидкости. Даже при таком упрощении задачи нам не удастся установить аналитическим путем количественную связь между коэффициентом Δ_r и параметрами, его определяющими, поэтому мы ограничимся лишь качественной стороной явления. Таким образом, наша задача сведется к выявлению самих факторов, а не к количественной связи между ними и гидродинамическим коэффициентом.

Для решения задачи в указанной ее постановке воспользуемся основными положениями теории размерностей.

Выявляя какие-либо физические закономерности, мы тем самым устанавливаем связь между определенными физическими величинами. Определяя, например, закон, по которому изменяется путь, проходимый телом при его равномерном поступательном движении, мы приходим к заключению, что этот путь равен произведению скорости тела на время перемещения. Таким образом, физическая величина путь тела оказывается связанной со скоростью и временем. Понятие физической величины неразрывно связано с представлением о единице ее измерения; без этого невозможно установление каких-либо количественных связей.

Среди большого разнообразия физических величин можно выделить основные, из которых образуются все другие, производные, физические величины. Основным физическим величинам соответствуют и основные единицы измерения, а производным величинам — производные, или вторичные, единицы измерения.

В зависимости от выбора величин основных единиц измерения существуют различные физические системы единиц измерения. Для описания механических явлений оказывается достаточным применение всего лишь трех основных физических величин: массы M , длины L и времени T . В международной системе единиц измерения (СИ), как указывалось ранее, за единицу измерения массы принят килограмм ($кг$), за единицу длины — метр ($м$), а единицей времени является секунда ($сек$), что, вообще говоря, совпадает с выбором основных единиц измерения, применяемых в абсолютной практической системе единиц измерения (МКС).

Размерностью какой-либо физической величины A называется соотношение, определяющее связь между единицей измерений этой величины и основными единицами данной системы.

Размерности, или формулы размерности, представляют собой условные равенства; в их левой части ставится заключенная в квадратные скобки физическая величина, размерность которой определяется, а в правой части в некоторых степенях стоят основные величины избранной системы единиц измерения. Так, если в качестве основных величин приняты M, L, T , то в общем случае

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, \quad (21.1)$$

где α, β, γ могут быть как целыми, так и дробными положительными и отрицательными числами.

В общем случае величина A может представлять собой степенной одночлен как основных, так и производных физических величин:

$$A = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} \dots \quad (21.2)$$

Тогда размерность A может быть записана через размерности $A_1, A_2, A_3 \dots$:

$$[A] = [A_1]^{\alpha_1} [A_2]^{\alpha_2} [A_3]^{\alpha_3} \dots \quad (21.3)$$

Для сокращения записи ограничимся в одночлене (21.3) первыми тремя сомножителями и будем считать, что они являются производными физическими величинами с размерностями:

$$\left. \begin{aligned} [A_1] &= L^{k_1} M^{m_1} T^{l_1}; \\ [A_2] &= L^{k_2} M^{m_2} T^{l_2}; \\ [A_3] &= L^{k_3} M^{m_3} T^{l_3}. \end{aligned} \right\} \quad (21.4)$$

Тогда

$$[A] = (L^{k_1} M^{m_1} T^{l_1})^{\alpha_1} (L^{k_2} M^{m_2} T^{l_2})^{\alpha_2} (L^{k_3} M^{m_3} T^{l_3})^{\alpha_3}$$

или

$$[A] = L^{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3} M^{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3} T^{l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3}. \quad (21.5)$$

Предположим, что размерность (21.1) величины A нам известна, т. е. известны значения α, β, γ . Но, с другой стороны, нам предположительно известно, что величина A является функцией величин A_1, A_2, A_3 , т. е.

$$A = f(A_1, A_2, A_3), \quad (21.6)$$

причем вид этой функциональной зависимости не задан, а известны лишь размерности A_1, A_2, A_3 .

Теория размерностей дает возможность, в некоторых случаях, установить, действительно ли величина A является функцией всех названных величин или только части из них. Если A является функцией вида (21.6), то ее размерность может быть представлена выражением (21.3) по третий член включительно. И так как размерности величин A_1, A_2, A_3 в общем виде могут быть представлены соотношениями (21.4), то в итоге мы приходим к уравнению (21.5). Но поскольку нам достоверно известно значение показателей α, β, γ , то сравнение формул размерностей (21.1) и (21.5) дает возможность установить, что

$$L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = L^{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3} M^{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3} T^{l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 &= \alpha; \\ m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 &= \beta; \\ l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 &= \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

Решив полученную систему уравнений, получим однозначно искомые величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Если, например, окажется, что $\alpha_3 = 0$, то это означает, что физическая величина (21.6) не зависит в действительности от A_3 . Опираясь на это положение рассмотрим следующие частные случаи движения твердого тела в жидкости.

С л у ч а й 1. Движение обтекаемого тела в безграничном потоке идеальной жидкости

Принимая обращенную картину течения, предположим, что тело обтекаемой формы погружено в безграничный поток идеальной жидкости, движущийся с постоянной скоростью v_0 . Свяжем с этим телом систему координат $x y z$ (рис. 19). Считаем, что форма тела задана, и тогда все основные размеры этого тела можно выразить, например, через его длину L . Выберем на поверхности указанного тела некоторую произвольную точку C с координатами x_c, y_c, z_c . Следует предположить, что в рассматриваемом случае течения жидкости разность давлений в точке $C(p_c)$ и точке $O_1(p_0)$, находящейся на большом удалении от обтекаемого тела, будет зависеть от размеров тела, координат точки C , скорости потока и плотности жидкости, т. е.

$$p_c - p_0 = F(x_c, y_c, z_c, L, v_0, \rho). \quad (21.8)$$

Разделив обе части равенства на величину скоростного напора $\frac{\rho v_0^2}{2}$ в левой части зависимости (21.8) получим коэффициент гидродинамического давления в функции тех же параметров

$$\overline{\Delta p} = f(x_c, y_c, z_c, L, v_0, \rho). \quad (21.9)$$

Так как коэффициент $\overline{\Delta p}$ есть величина безразмерная:

$$[\overline{\Delta p}] = L^{\alpha=0} M^{\beta=0} T^{\gamma=0}, \quad (21.10)$$

то и функция $f(x_c, y_c, z_c, L, v_0, \rho)$ также должна быть функцией безразмерных комбинаций размерных величин $x_c, y_c, z_c, L, v_0, \rho$. На основании (21.3) можно написать, что

$$[A] = [\overline{\Delta p}] = [x_c]^{\alpha_1} [y_c]^{\alpha_2} [z_c]^{\alpha_3} [L]^{\alpha_4} [v_0]^{\alpha_5} [\rho]^{\alpha_6}. \quad (21.11)$$

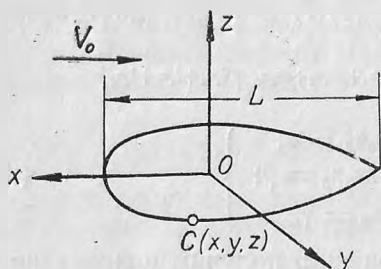


Рис. 19

При этом размерности физических величин, входящих в правую часть формулы (21.11), в системе единиц СИ будут:

$$\left. \begin{aligned} [x_c] &= [y_c] = [z_c] = [L] = м; \\ [v_0] &= м \cdot сек^{-1}; \\ [\rho] &= кг \cdot м^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

Тогда на основании зависимостей (21.7) и (21.8) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 3\alpha_6 &= 0; \\ -\alpha_5 &= 0; \\ \alpha_6 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$, то $\alpha_4 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

В результате формула размерности (21.11) получает следующий вид:

$$[A] = [x_c]^{\alpha_1} [y_c]^{\alpha_2} [z_c]^{\alpha_3} [L]^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$$

или

$$[A] = \left[\frac{x_c}{L} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{y_c}{L} \right]^{\alpha_2} \left[\frac{z_c}{L} \right]^{\alpha_3}. \quad (21.13)$$

На основании размерностей (21.12) приходим к заключению, что

$$\frac{x_c}{L} = \overline{x_c}; \quad \frac{y_c}{L} = \overline{y_c}; \quad \frac{z_c}{L} = \overline{z_c}.$$

являются безразмерными относительными координатами. При этом, какую бы величину ни имели показатели $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, комбинация A остается безразмерной. Таким образом, коэффициент гидродинамического давления является функцией только безразмерных относительных координат:

$$\overline{\Delta p} = f(\overline{x_c}, \overline{y_c}, \overline{z_c}), \quad (21.14)$$

т. е. величина этого коэффициента зависит лишь от места расположения точки C на поверхности тела, но совершенно не зависит ни от скорости, ни от плотности идеальной жидкости.

Отсюда следует заключение, что гидродинамическая погрешность лага будет зависеть от координат отверстия приема статического давления. Для неизменного места установки устройства приема статического давления погрешность должна оставаться постоянной.

Формула (21.14) позволяет сделать еще один вывод: для геометрически подобных тел эпюры давления на поверхности тела будут одинаковыми в сходственных точках. Этот вывод имеет практическую ценность в том смысле, что позволяет по испытаниям модели в аэродинамической трубке установить наиболее рациональные с точки зрения обеспечения минимума $\overline{\Delta p}$ места установки устройства приема статического давления.

Поскольку нами рассмотрен случай движения тела в безграничной среде, то сделанные выводы в наибольшей степени применимы к подводной лодке, совершающей плавание в подводном положении без образования волн на свободной поверхности жидкости.

С л у ч а й 2. Движение обтекаемого тела по свободной поверхности жидкости

Движение корабля по свободной поверхности моря, как уже отмечалось, сопровождается процессом волнообразования, причем формирование волны происходит под действием силы тяжести. При этом давление в жидкости будет отличаться от гидростатического. Устанавливая в данном случае функциональную зависимость гидродинамического коэффициента, следует учесть возможное влияние на его величину и силы тяжести, т. е.

$$\overline{\Delta p} = f(x_c, y_c, z_c, L, v_0, \rho, g). \quad (21.15)$$

Тогда

$$[A] = [x_c]^{\alpha_1} [y_c]^{\alpha_2} [z_c]^{\alpha_3} [L]^{\alpha_4} [v_0]^{\alpha_5} [\rho]^{\alpha_6} [g]^{\alpha_7}. \quad (21.16)$$

Так как ускорение силы тяжести имеет размерность $[g] = \text{м} \cdot \text{сек}^{-2}$, а размерности остальных величин указаны формулами (21.12), то система уравнений, устанавливающая связь между показателями $\alpha_1 - \alpha_7$, принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 3\alpha_6 + \alpha_7 &= 0; \\ -\alpha_1 - 2\alpha_7 &= 0; \\ \alpha_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.17)$$

Из системы (21.17) находим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_7 &= -\frac{1}{2} \alpha_6; \\ \alpha_6 &= 0; \\ \alpha_4 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{2} \alpha_5. \end{aligned} \right\} \quad (21.18)$$

Подстановка найденных значений показателей (21.18) позволяет написать, что

$$[A] = [x_c]^{\alpha_1} [y_c]^{\alpha_2} [z_c]^{\alpha_3} [L]^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} [L]^{-\frac{1}{2}\alpha_5} [v_0]^{\alpha_5} [g]^{-\frac{1}{2}\alpha_5}. \quad (21.19)$$

Последние три сомножителя в (21.19) можно подвести под один показатель:

$$[L]^{-\frac{1}{2}\alpha_5} [v_0]^{\alpha_5} [g]^{-\frac{1}{2}\alpha_5} = \left[\frac{v_0^2}{gL} \right]^{\frac{1}{2}\alpha_5}.$$

Но $\frac{v_0^2}{gL}$ в соответствии с определением (18.13) есть число Фруда. В кораблестроительной практике часто под числом Фруда понимается величина

$$\frac{v_0}{\sqrt{gL}} = Fr. \quad (21.20)$$

С учетом замечания (20.20) одночлен (21.19) приводится к следующему виду:

$$[A] = \left[\frac{x_c}{L} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{y_c}{L} \right]^{\alpha_2} \left[\frac{z_c}{L} \right]^{\alpha_3} \left[\frac{v_0}{\sqrt{gL}} \right]^{\alpha_5}.$$

причем каждый из сомножителей правой части является величиной безразмерной. Таким образом, функциональная зависимость (21.15) принимает окончательный вид

$$\overline{\Delta p} = f(\overline{x_c}, \overline{y_c}, \overline{z_c}, Fr). \quad (21.21)$$

Таким образом, при движении корабля по свободной поверхности жидкости гидродинамическая погрешность будет зависеть не только от места расположения отверстия приема статического давления, но и от скорости хода корабля.

Установление аналитической зависимости (21.21) в явном виде представляет неразрешимую математическую задачу. Поэтому зависимость от числа Фруда устанавливается опытным путем. Из экспериментальных исследований, посвященных этому вопросу, могут быть названы работы С. И. Итенберга, выполненные в ЦНИИ им. А. Н. Крылова, И. С. Римана — в ЦАГИ и др. Анализ этих работ и опыт, накопленный испытательными бассейнами, позволяют сделать вывод, что зависимость коэффициента гидродинамического давления от скорости движения корабля становится существенной лишь при числах Фруда, вычисленных по формуле (21.20), более 0,2—0,25, т. е. когда имеет место значительное волнообразование. При числах $Fr < 0,2$ коэффициент гидродинамического давления практически не зависит от скорости хода корабля.

Полученный результат справедлив не только для надводного корабля, но и для подводной лодки, находящейся в надводном положении.

Для подводной лодки возможен и другой случай движения — вблизи свободной поверхности воды, например на перископной глубине. Этот режим характерен тем, что коэффициент Δp оказывается зависимым не только от x_c , y_c , z_c и скорости хода лодки, но и от величины $\bar{H}$ относительной глубины погружения, под которой понимается отношение

$$\frac{H}{L} = \bar{H},$$

где H — глубина погружения, а L имеет то же самое значение, что и выше.

По мере увеличения глубины погружения влияние этого параметра ослабевает.

Величина коэффициента гидродинамического давления оказывается зависимой и от глубины под килем корабля, что проявляется заметным образом при плавании в мелководных районах моря. Накопленный опыт показывает, что гидродинамическая погрешность практически не зависит от глубины h , если последняя удовлетворяет условию

$$h \geq 6,25 \frac{v_0^2}{g}, \quad (21.22)$$

причем это условие справедливо для кораблей с относительно острыми обводами, т. е. когда отношение длины корабля к его ширине больше девяти.

С л у ч а й 3. Движение обтекаемого тела в безграничном потоке вязкой жидкости

Рассматриваемый случай будет отличаться от первого лишь тем, что ряд параметров (21.9) необходимо пополнить еще одним — коэффициентом μ вязкости жидкости, и тогда

$$\overline{\Delta p} = f(x_c, y_c, z_c, L, v_0, \rho, \mu). \quad (21.23)$$

При этом безразмерная комбинация размерных величин

$$[A] = [x_c]^{a_1} [y_c]^{a_2} [z_c]^{a_3} [L]^{a_4} [v_0]^{a_5} [\rho]^{a_6} [\mu]^{a_7}. \quad (21.24)$$

Так как размерность динамического коэффициента вязкости в системе СИ есть $[\mu] = 1 \text{ н} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$, то, следуя указанному выше методу, с учетом размерностей (21.12) приходим к системе:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 3a_6 - a_7 &= 0; \\ a_6 + a_7 &= 0; \\ a_5 + a_7 &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$a_7 = -a_5; \quad a_6 = a_5; \quad a_4 = a_5 - (a_1 + a_2 + a_3). \quad (21.25)$$

Подстановка показателей (21.25) в (21.24) позволяет написать

$$[A] = [x_c]^{a_1} [y_c]^{a_2} [z_c]^{a_3} [L]^{-(a_1+a_2+a_3)} [L]^{a_5} [v_0]^{a_5} [\rho]^{a_5} [\mu]^{-a_5}$$

или

$$[A] = \left[\frac{x_c}{L} \right]^{a_1} \left[\frac{y_c}{L} \right]^{a_2} \left[\frac{z_c}{L} \right]^{a_3} \left[\frac{\rho L v_0}{\mu} \right]^{a_5}. \quad (21.26)$$

Все сомножители в одночлене (21.26) являются безмерными параметрами, так как

$$\frac{\rho L v_0}{\mu} = Re,$$

а остальные сомножители, как было показано ранее, представляют собой безразмерные относительные координаты. Таким образом, окончательно можно написать, что

$$\overline{\Delta p} = f(\overline{x_c}, \overline{y_c}, \overline{z_c}, Re). \quad (21.27)$$

Полученный результат позволяет сделать заключение, что при движении тела в безграничной вязкой жидкости коэффициент гидродинамического давления зависит не только от координат точки приема статического давления, но и от числа Рейнольдса. Однако величина Re определяется скоростью движения тела, его размерами и вязкостью жидкости. Если при заданных размерах и скорости движения тела уменьшать вязкость жидкости, то число Рейнольдса будет возрастать и в пределе, для идеальной жидкости,

будет стремиться к бесконечности. Таким образом, движение тела в идеальной жидкости можно рассматривать как движение в реальной жидкости при бесконечно больших числах Re . Но в этом случае коэффициент Δp не зависит от числа Рейнольдса.

При заданной вязкости жидкости рост числа Рейнольдса возможен только за счет увеличения размеров корабля и скорости его движения. Поэтому можно предположить, что при движении кораблей с большими скоростями, т. е. с большими числами Re , коэффициент гидродинамического давления либо совсем не зависит от скорости, либо эта зависимость весьма слабая. Сделанное предположение хорошо подтверждается экспериментом.

В § 18 указывалось, что в зависимости от величины числа Рейнольдса около обтекаемого тела может существовать либо ламинарный, либо турбулентный поток жидкости. Если около корабля существует турбулентный поток, то вполне естественным является вопрос, что же показывает в этом случае гидродинамический лаг, коль скоро принцип его действия основан на уравнении Бернулли—Лагранжа, справедливом только для потенциального течения жидкости. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо познакомиться с понятием пограничного слоя и его свойствами.

§ 22. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

При обтекании тела потенциальным потоком вязкой жидкости ее частицы, непосредственно прилегающие к телу, прилипают к нему и их скорость относительно тела равна нулю. Слои жидкости, расположенные дальше от тела, скользят с некоторой скоростью, отличной от нуля, и эта скорость тем больше, чем дальше находится рассматриваемый слой от поверхности обтекаемого тела. Теоретически скорость движения частиц жидкости достигает скорости набегающего потока на бесконечном удалении от тела. Однако практика показывает, что нарастание скорости от нуля до величины порядка скорости потенциального потока происходит весьма резко.

Таким образом, при движении тела в вязкой жидкости оно оказывается окруженным слоем жидкости, в котором скорость частиц вследствие наличия сил внутреннего трения оказывается отличной от скорости набегающего на тело потока. Этот слой жидкости носит название пограничного слоя.

Естественно, что резкой внешней границы пограничного слоя не существует, и тем не менее для количественной оценки размеров этого слоя пользуются понятием толщины пограничного слоя. Обычно под толщиной δ пограничного слоя понимается такое расстояние от поверхности тела, на котором скорость движения частиц жидкости отличается от скорости потенциального потока на 1%.

Внутри пограничного слоя течение жидкости может быть как ламинарным, так и турбулентным. При этом изучение течения жидкости внутри пограничного слоя должно осуществляться с учетом касательных напряжений, которые даже в маловязких жидкостях могут достигать больших величин, так как градиенты скоростей в пограничном слое весьма велики.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что вне пограничного слоя, где градиенты скорости малы, вязкостью жидкости можно пренебречь, т. е. считать жидкость идеальной, а поток жидкости потенциальным (безвихревым). Предположим, что в потенциальный поток вязкой жидкости, движущийся со скоростью v_0 , помещена плоская пластина длиной L , с которой связана система координат Oxy . При этом ось x (рис. 20) лежит в плоскости пластины и имеет направление, совпадающее с $\vec{v}_0$.

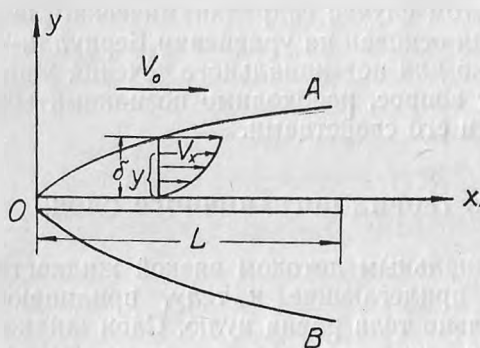


Рис. 20

Ось y направлена вверх. Будем считать, что ребро пластины, перпендикулярное к плоскости рисунка, имеет очень большую длину. Тогда поток, омывающий пластину, можно рассматривать как двумерный, т. е. плоский.

Пограничный слой жидкости будет симметричен относительно оси x , а его толщина δ будет нарастать по мере удаления от передней кромки пластины. Границу верхнего слоя обозначим кривой OA , а нижней — кривой OB , симметричной OA .

Так как жидкость внутри пограничного слоя вязкая, то для изучения характера ее движения следует воспользоваться уравнением Навье-Стокса (14.13), которое в проекциях на оси двумерной системы прямоугольных координат принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

Если пренебречь массовыми силами, как несущественными при изучении свойств пограничного слоя, и считать жидкость несжимаемой, то, присоединив к уравнениям (22.1) уравнение несжимаемости жидкости, получаем следующую систему дифференциальных уравнений, определяющих закон течения жидкости в пограничном слое:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (22.2)$$

Система уравнений (22.2) слишком сложна для интегрирования. Поэтому упростим ее путем пренебрежения малыми членами. Для этого нам необходимо прежде всего установить относительный порядок членов, входящих в указанную систему. Из рис. 20 видно, что независимая переменная y может изменяться внутри пограничного слоя в пределах

$$0 \leq y \leq \delta. \quad (22.3)$$

Опыт показывает, что толщина пограничного слоя представляет собой величину малую по сравнению, например, с длиной обтекаемого тела, т. е. отношение $\frac{\delta}{L}$ мало. Из сказанного следует вывод,

что ордината y есть величина малая, порядка δ , т. е. $y \sim \delta$.

Так как на поверхности пластины составляющая скорости в направлении оси x равна нулю ($v_x = 0$), а на границе пограничного слоя она достигает порядка скорости потенциального потока v_0 , то можно считать, что при изменении y от нуля до δ приращение скорости вдоль оси x $\Delta v_x \sim v_0$, а само приращение y , как уже указывалось выше, имеет порядок δ , т. е. $\Delta y \sim \delta$.

Отсюда появляется возможность оценить, например, порядок производной от v_x по y :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \sim \frac{v_0}{\delta}. \quad (22.4)$$

Тогда порядок второй производной

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_0}{\delta^2}. \quad (22.5)$$

При перемещении жидкости вдоль поверхности обтекаемой пластины приращение координаты x может быть от нуля до L , т. е. $\Delta x \sim L$, а приращение скорости Δv_x на этом же участке может лежать в пределах от 0 до v_0 . Поэтому $\Delta v_x \sim v_0$. Тогда

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_0}{L}, \quad (22.6)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_0}{L^2}. \quad (22.7)$$

Из третьего уравнения системы (22.2) следует, что

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial v_y}{\partial y},$$

поэтому

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_0}{L}. \quad (22.8)$$

Располагая производной $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ можно найти

$$v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy, \quad (22.9)$$

откуда устанавливаем

$$v_y \sim \int_0^y \frac{v_0}{L} dy \sim \frac{v_0 \delta}{L}. \quad (22.9)$$

Из восьми частных производных от скорости по координатам в системе (22.2) установлен порядок пяти из них. Что же касается остальных трех производных

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2},$$

то их порядок легко установить на основании (22.9) и сделанных ранее замечаний, а именно:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{v_0 \delta}{L^2}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{v_0 \delta}{L^3}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{v_0}{L \delta}. \quad (22.10)$$

Теперь, когда определен порядок производных, можно установить и порядок отдельных членов системы уравнений (22.2). Возьмем первое уравнение системы. Порядок второго и третьего слагаемых в левой части этого уравнения будет:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &\sim v_0 \frac{v_0}{L} = \frac{v_0^2}{L}; \\ v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &\sim \frac{v_0 \delta}{L} \cdot \frac{v_0}{\delta} = \frac{v_0^2}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (22.11)$$

Таким образом, эти члены имеют один и тот же порядок.

Порядок слагаемых, стоящих в скобках в правой части уравнения, известен, поэтому найдем их относительный порядок, т. е.

$$\frac{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \sim \frac{\frac{v_0}{L}}{\frac{v_0}{\delta^2}} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2.$$

Но ранее указывалось, что $\frac{\delta}{L}$ — величина малая, следовательно, $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ имеет второй порядок малости по сравнению с $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, а поэтому второй производной от v_x по x можно пренебречь по сравнению с $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$.

Тогда первое уравнение системы (22.2) несколько упрощается:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (22.12)$$

Левая часть уравнения (22.12) содержит проекции сил инерции на ось x , а последний член правой части представляет собой проекцию силы вязкости на ту же ось. Допустимо предположить, что внутри пограничного слоя эти силы имеют один и тот же порядок. Тогда отношение их порядков

$$\frac{v_0^2}{L} : \nu \frac{v_0}{\delta^2} = \frac{v_0 \delta^2}{\nu L} = \frac{v_0 L}{\nu} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 = Re \left(\frac{\delta}{L} \right)^2,$$

где Re — число Рейнольдса, должно быть равно единице, т. е.

$$Re \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 = 1$$

или

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{L \nu}{v_0}}. \quad (22.13)$$

Отсюда можно сформулировать первое свойство пограничного слоя: *толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением скорости хода корабля.*

Если предположить, что изменение скорости течения жидкости во времени происходит достаточно плавно, то порядок $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ можно принять равным порядку других инерционных членов:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \sim \frac{v_0^2}{L}. \quad (22.14)$$

Итак, четыре члена из пяти в уравнении (22.12) имеют один и тот же порядок. Поэтому и производная от давления по x имеет если не меньший, то по крайней мере тот же порядок, что и остальные слагаемые, т. е.

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{v_0^2}{L}. \quad (22.15)$$

Выпишем теперь второе уравнение системы (22.2) и под каждым из слагаемых подпишем его порядок:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right).$$

$$\frac{v_0^2 \delta}{L^2} \quad \frac{v_0^2 \delta}{L^2} \quad \frac{v_0 \delta}{L^3} \quad \frac{v_0}{L \delta} \quad (22.16)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{v_0 \delta}{L^3} : \frac{v_0}{L \delta} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2,$$

то первым слагаемым в скобках по сравнению со вторым можно пренебречь.

По аналогии с предыдущими рассуждениями следует принять, что $\frac{\partial v_y}{\partial t}$ имеет порядок других инерционных членов этого уравнения, т. е.

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} \sim \frac{v_0^2 \delta}{L^2}.$$

Если теперь найти отношение инерционных членов уравнения (22.16) к соответствующим членам уравнения (22.12), то окажется, что это отношение равно $\frac{\delta}{L}$. Следовательно, инерционные члены уравнения (22.16) имеют более высокий порядок малости по сравнению с аналогичными членами уравнения (22.12). Точно

к такому же выводу приходим, сравнивая в этих уравнениях члены, учитывающие вязкость жидкости. Отсюда можно сделать заключение, что силами инерции, как и силами вязкости, в уравнении (22.16) можно пренебречь по сравнению с такими же силами в уравнении (22.12). Тогда с достаточной степенью точности уравнение (22.16) может быть заменено уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (22.17)$$

Уравнение (22.17) позволяет сформулировать второе важное свойство пограничного слоя: *давление внутри пограничного слоя не меняется вдоль нормали к поверхности тела и равно давлению на внешней границе пограничного слоя.*

Этот вывод хорошо подтверждается и экспериментом. Испытания моделей показали, что давление, измеренное в данной точке на поверхности тела, совпадает с величиной давления, рассчитанного для точки, лежащей на границе пограничного слоя, исходя из потенциального характера течения жидкости вне пограничного слоя. При этом естественно, что обе точки выбирались на одной и той же нормали к поверхности модели.

После сделанной оценки порядка членов уравнений системы (22.2) приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

Систему уравнений (22.18) принято называть уравнениями пограничного слоя Прандтля.

Если течение жидкости в пограничном слое стационарно, то система (22.18) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.19)$$

Ранее указывалось, что движение частиц жидкости в турбулентном течении носит хаотичный характер и поэтому не может быть представлено аналитическими функциями. Следовательно, интегрирование уравнений (22.18) и (22.19) возможно в принципе только в том случае, если течение в пограничном слое имеет ламинарный характер. Если пограничный слой имеет турбулентный характер,

то указанные уравнения могут быть применены, но только для получения осредненных характеристик течения. Наиболее важным выводом, подтверждаемым экспериментально, является то, что независимо от характера течения жидкости в пограничном слое отмеченные выше два свойства этого слоя остаются в силе как в том, так и в другом случае.

Несмотря на то что система (22.18) и особенно (22.19) значительно проще исходной системы уравнений (22.2), их интегрирование остается достаточно сложной задачей, даже для случая ламинарного течения в слое. Поэтому для приближенного расчета закона распределения скорости в ламинарном слое и определения его толщины пользуются так называемым интегральным соотношением пограничного слоя. Это соотношение является математическим выражением теоремы об изменении количества движения жидкости. В результате применения этого соотношения для ламинарного пограничного слоя установлено, что распределение скорости частиц в слое может быть представлено зависимостью

$$v_x = \frac{v_0}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right), \quad (22.20)$$

а толщина пограничного слоя

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}. \quad (22.21)$$

Введем понятие местного числа Рейнольдса, под которым понимается безразмерная величина

$$\frac{v_0 x}{\nu} = Re_x, \quad (22.22)$$

где x — расстояние от передней кромки обтекаемого тела до рассматриваемого сечения.

Тогда формула (22.21) может быть преобразована с учетом обозначения (22.22):

$$\delta = 5,83 x Re_x^{-0,5}. \quad (22.23)$$

Расчеты, выполненные в соответствии с зависимостью (22.23) и подтвержденные экспериментом, показывают, что при движении корабля даже с такой малой скоростью, как 2—3 узл., ламинарный слой очень тонок и распространяется по длине корабля на расстояние не более одного метра от его носа к корме. При более высоких скоростях движение протяженность ламинарного слоя еще больше сокращается. Таким образом, пограничный слой корабля имеет турбулентный характер практически по всей его длине.

Турбулентный пограничный слой изучен в наибольшей степени для случая течения жидкости в трубах. В результате обработки многочисленных экспериментальных материалов установлено что при турбулентном режиме течения жидкости в круглой цилиндрической трубе распределение скорости частиц жидкости по радиусу трубы подчиняется степенному закону

$$v = v_{\max} \left(\frac{y}{r} \right)^n, \quad (22.24)$$

где $v_{\max}$ — скорость по оси трубы;

r — радиус трубы;

y — текущее значение расстояния от стенки трубы до рассматриваемой точки;

n — показатель, определяемый экспериментально.

Расчеты толщины турбулентного пограничного слоя и распределения скорости в нем при обтекании жидкостью твердых тел производятся на основании гипотезы о тождественности законов движения жидкости в пограничном слое и внутри круглой цилиндрической трубы. При этом в формулу (22.24) вместо $v_{\max}$ подставляется скорость потенциального потока v_0 , а радиус трубы заменяется толщиной пограничного слоя, т. е.

$$v = v_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^n. \quad (22.25)$$

Выбор величины показателя и толщины пограничного слоя в зависимости от величины местного числа Рейнольдса подчинен следующим экспериментально установленным закономерностям [5]:

$$\left. \begin{aligned} Re_x &= 10^6 \div 2 \cdot 10^7; & n &= \frac{1}{7}; & \delta &= 0,37x Re_x^{-\frac{1}{5}}; \\ Re_x &= 3 \cdot 10^7 \div 3 \cdot 10^8; & n &= \frac{1}{8}; & \delta &= 0,34x Re_x^{-\frac{2}{11}}; \\ Re_x &= 3 \cdot 10^8 \div 10^{10}; & n &= \frac{1}{9}; & \delta &= 0,30x Re_x^{-\frac{1}{6}}; \\ Re_x &> 10^{10}; & n &= \frac{1}{10}; & \delta &= 0,25x Re_x^{-\frac{2}{13}}; \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

Формулы (22.26) для подсчета толщины пограничного слоя корабля имеют ориентировочный характер. Опытные данные по наблюдениям за толщиной корабельного пограничного слоя в большинстве случаев существенно отличаются от аналогичных величин, рассчитанных по формулам (22.26). Это объясняется главным образом тем, что указанные формулы получены для случая обте-

кания жидкостью технически гладких поверхностей. Но поверхность корабельного корпуса имеет шероховатость как местную (заклепки, швы, кингстоны и т. д.), так и общую. Поэтому для определения действительной толщины пограничного слоя на данном корабле необходимо провести на нем экспериментальные наблюдения. Данные эксперимента могут быть распространены и на другие однотипные корабли.

§ 23. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ НА ВЕЛИЧИНУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ЛАГА

В § 21 было показано, что коэффициент гидродинамического давления в случае обтекания тела вязкой жидкостью зависит от числа Рейнольдса. Теперь, когда сообщены основные положения о пограничном слое, можно попытаться дать количественную оценку влияния вязкости на Δ_r . Для этого воспользуемся основными положениями плоского течения жидкости. Предположим, что рассматривается тело, имеющее удобообтекаемую форму. Это тело помещено в потенциальный поток, движущийся со скоростью v_0 .

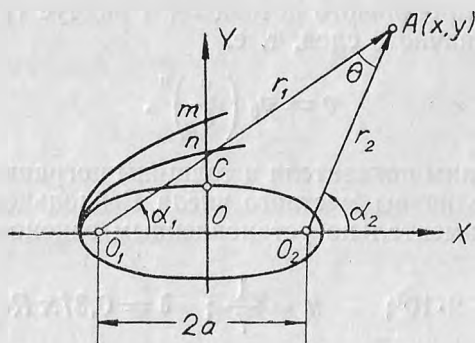


Рис. 21

Тогда, как это было показано в § 16, потенциал скорости в точке A (рис. 21) будет $\varphi = v_0 x + Q(\ln r_1 - \ln r_2)$, а функция тока на основании зависимости (16.8) есть

$$\psi(x, y) = Q \left(\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right) - v_0 y.$$

Поскольку мы приняли, что тело является удобообтекаемым, то для его поверхности должно выполняться условие $\psi(x, y) = 0$. И так как

$$\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} = \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2},$$

то функцию тока для поверхности тела можно представить в виде

$$Q \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} - v_0 y = 0. \quad (23.1)$$

Предположим, что максимальная длина тела $2a$ связана с его максимальной шириной $2b$ отношением

$$\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = 10. \quad (23.2)$$

Примерно такое же отношение главных размерений имеют многие корабли. Располагая отношением $\frac{a}{b}$, можно определить величину Q .

Пусть точка приема статического давления расположена на корпусе тела и имеет координаты:

$$x=0; \quad y=b. \quad (23.3)$$

Поскольку уравнение (23.1) справедливо для всего контура, то оно справедливо и для выбранной нами точки. Тогда, подставив в (23.1) соотношения (23.2) и (23.3), найдем

$$Q = 0,034av_0. \quad (23.4)$$

Подстановка полученного значения Q в формулу потенциала скорости дает

$$\varphi = v_0 \left(x + 0,34a \ln \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (23.5)$$

Дифференцируя потенциал φ по x и y , находим:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 \left[1 + 0,34a \left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right) \right]; \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,34a \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23.6)$$

Но так как точка C лежит на оси y , то

$$r_1 = r_2 = r = \sqrt{a^2 + y^2}.$$

Тогда

$$v_y = 0;$$

$$v_x = v_c = v_0 \left(1 + 0,068 \frac{a^2}{r^2} \right),$$

откуда имеем

$$\frac{v_c}{v_0} = 1 + 0,068 \frac{a^2}{r^2}. \quad (23.7)$$

В соответствии с формулой (20.7) можно написать

$$\overline{\Delta p} = 1 - \left(1 + 0,068 \frac{a^2}{r^2} \right)^2.$$

Если в последнем выражении, раскрыв скобки, пренебречь членом высшего порядка малости $\left(0,068 \frac{a^2}{r^2} \right)^2$, то

$$\overline{\Delta p} = -0,136 \frac{a^2}{r^2}. \quad (23.8)$$

Формула (23.8) устанавливает связь коэффициента гидродинамического давления с размерами обтекаемого тела. Коэффициент вязкости сюда не входит, поэтому полученная зависимость справедлива только для идеальной жидкости.

Наличие вязкости приводит к образованию пограничного слоя. Но давление на границе пограничного слоя, как уже известно, передается по нормали к поверхности тела без всякого изменения. Поэтому рассмотрим на числовом примере, как сказывается на величине коэффициента наличие пограничного слоя.

Пусть корабль длиной $2a=100$ м идет со скоростью 5 узл., а затем со скоростью 40 узл. Местное число Рейнольдса в условиях нашей задачи имеет порядок 10^8 , поэтому для подсчета толщины пограничного слоя на основании (22.26) воспользуемся формулой

$$\delta = 0,30x Re_x^{-\frac{1}{6}}.$$

Элементарный подсчет приводит к результату:

$$\begin{aligned} \delta_{v=5} &= 0,702 \text{ м}; \\ \delta_{v=40} &= 0,490 \text{ м}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $v=5$ узл. давление в точку C передается с границы пограничного слоя из точки m , находящейся на расстоянии $(b + 0,702)$ м от диаметральной плоскости тела, а при $v=40$ узл. — из точки n , для которой это расстояние равно $(b + 0,490)$ м, т. е.

$$\left. \begin{aligned} y_m &= (b + 0,702) \text{ м}; \\ y_n &= (b + 0,490) \text{ м}. \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

Подставив (23.9) с учетом (23.2) в формулу (23.8), получаем:

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta p})_m &= -0,1342; \\ (\overline{\Delta p})_n &= -0,1345. \end{aligned}$$

Но так как $\Delta_r = -0,5\overline{\Delta p}$, то гидродинамическая погрешность лага в том и в другом случае равна:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{rv=5} &= 6,71\%; \\ \Delta_{rv=40} &= 6,73\%. \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

Если вычислить Δ_r без учета влияния пограничного слоя, т. е. без учета вязкости, то полученный результат отличался бы от (23.10) всего на 0,01%.

Выполненный расчет позволяет сделать вывод, что наличие вязкости не оказывает существенного влияния на величину гидродинамической погрешности. Однако это заключение справедливо лишь в том случае, если прием полного давления осуществляется вне пограничного слоя или в крайнем случае на границе его. Если же отверстие приема полного давления попадает внутрь пограничного слоя, то изменение величины погрешности делается более значительным, а ее характер неустойчивым.

В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим следующий пример. Предположим, что приемное отверстие трубки находится на границе пограничного слоя, толщина которого δ . По истечении некоторого времени пограничный слой в силу каких-то обстоятельств, например обрастания корпуса, увеличился на 10% и его толщина в месте приема полного давления стала $\delta' = 1,1\delta$. Если использовать те же исходные данные, что и в предыдущем примере, то это увеличение толщины пограничного слоя для скорости 5 узл. соответствует погружению трубки внутрь слоя на 7 см. На основании формулы (22.25) можно найти отношение осредненной скорости v турбулентного потока в точке приема полного давления к скорости потенциального потока. Так как для выбранных нами исходных данных $n = \frac{1}{9}$, то

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{\delta}{\delta'} \right)^{\frac{1}{9}} = \left(\frac{\delta}{1,1\delta} \right)^{\frac{1}{9}} = 0,99.$$

На основании формулы (20.9) получаем $\Delta_r = -1\%$.

Таким образом, если приемное отверстие полного давления находится вне пограничного слоя, то пограничный слой и его изменение практически не сказываются на величине гидродинамической погрешности. Но если это отверстие утоплено в пограничный слой даже на небольшую глубину, то изменение погрешности становится весьма ощутимым.

В § 21—23 рассмотрены различные факторы, которые оказывают влияние на величину гидродинамической погрешности лага. К этому следует добавить, что если при движении тела (корабля) в жидкости возникнет кавитация в местах размещения приемных устройств лагов, то такой лаг вообще перестанет работать. Если

кавитационная каверна накрыла отверстие приема давления, то лаг будет измерять давление в каверне, которое не зависит от скорости хода корабля. Поэтому форма приемных устройств, обтекаемых жидкостью, должна быть такой, чтобы в заданном диапазоне скоростей движения корабля условия для возникновения кавитации отсутствовали.

На основании материала, изложенного в настоящей главе, можно сделать заключение, что, какой бы совершенной ни была конструкция гидродинамического лага, вырабатываемая им скорость движения корабля будет содержать погрешность, обусловленную гидродинамическим полем корабля.

Глава IV. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЛАГОВ

§ 24. ПРИЕМНЫЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО И ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЙ

При рассмотрении принципа действия лага было установлено, что для определения скорости хода корабля следует измерять помимо полного и статическое давление. По разности указанных давлений можно получить искомую скорость.

Для того чтобы измерить давление в некоторой точке движущейся жидкости, необходимо в эту точку внести какое-то измерительное устройство. Первое описание приемного устройства, предназначенного для измерения полного давления, было дано Анри Пито в 1732 г. Поэтому, в частности, приемники полного давления иногда называют трубками Пито.

Внесение измерительной трубки, как обтекаемого тела, в поток жидкости искажает картину распределения давления в данной области потока. Следовательно, измерение давления будет неизбежно сопровождаться появлением погрешностей. Так как величина погрешности зависит от формы обтекаемого тела и места расположения на нем приемных отверстий, то необходимо для приемного устройства подобрать такую форму тела, которая вносила бы в поток минимальные возмущения.

Измерение полного и статического давлений имеет свои особенности. Так, измерение полного давления связано с необходимостью торможения движущихся частиц жидкости. При этом измерение будет правильным, если оно произведено в мертвой точке, где скорость жидких частиц равна нулю. При измерении статического давления такое торможение недопустимо, так как по своей сущности это есть давление, которое испытывало бы достаточно малое тело, движущееся в направлении потока со скоростью жидкости. Поэтому устройства для измерения того и другого давлений должны быть различными.

Рассмотрим сначала устройства для измерения статических давлений.

Если статическое давление измеряется на поверхности обтекаемого тела, то простейшим устройством, предназначенным для этой

цели, может быть устройство, схематически представленное на рис. 22. Здесь давление воспринимается через небольшое отверстие в стенке тела. Для того чтобы искажения в измеряемом давлении были наименьшими, необходимо ось отверстия располагать по нормали к поверхности тела, края отверстия должны быть хорошо зачищены, а его диаметр, как показывает эксперимент, не должен превышать одной трети толщины стенки. По этому принципу осуществляется прием статического давления в лагах типа ЛГ-25. Недостатком такого устройства является отсос жидкости, который возрастает с увеличением диаметра отверстия. В корабельных условиях, когда корпус корабля подвержен обрастанию, этот отсос может существенно увеличиться. Кроме того, образующиеся на корпусе наросты могут служить причиной образования кавитационной каверны в месте приема давления.

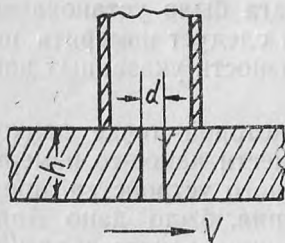


Рис. 22

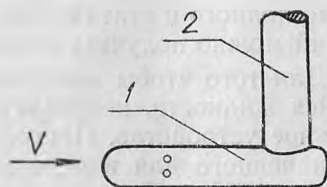


Рис. 23

В § 23 указывалось, что измерение полного давления следует производить за пределами пограничного слоя. Поэтому вполне естественным является предложение определять статическое давление там же, где измеряется и полное давление, что дает возможность измерять оба давления в одних и тех же условиях и освободиться, в частности, от вредного влияния обрастания корпуса. Но для этого необходимо иметь выстреливаемые за борт приемники статического давления. При этом требование обеспечения минимума возмущений, вносимых в набегающий поток, остается в силе.

В практике работ, выполняемых в опытовых бассейнах и аэродинамических трубах, нашли применение приемники статического давления, выполненные в виде крючков, шайб, трубок типа Вентури и др. В настоящее время наибольшее применение имеют приемники статического давления, выполненные в виде крючков. Принципиально такой крючок представляет собой два цилиндрических колена, сопрягаемых друг с другом под прямым углом (рис. 23). Горизонтальное колено 1 служит для измерения давления, а вертикальное колено 2 (державка) предназначено для удержания горизонтального колена и передачи измеренного давления к манометру. По боковой поверхности горизонтального колена, ко-

торое называют статическим зондом или нифером, просверливается ряд отверстий, через которые давление передается во внутреннюю полость зонда и через державку к манометру. Передняя часть зонда, называемая насадкой, имеет обтекаемую форму. Наибольшее распространение получили насадки полусферической и конической форм.

Многочисленные экспериментальные исследования позволили установить характер распределения давления вдоль поверхности зонда. На рис. 24 представлена эпюра величины давления Δp вдоль поверхности цилиндрического зонда с полусферической насадкой по отношению к давлению в бесконечно удаленной точке потенциального потока. По оси абсцисс отложены расстояния от носика насадки до интересующего нас сечения в диаметрах зонда, т. е. в калибрах.

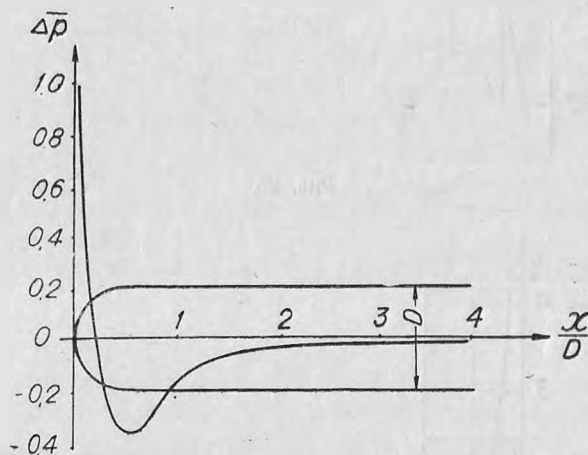


Рис. 24

Из рисунка следует, что наибольшее возмущение давления в потоке имеет место на расстоянии одного диаметра зонда от носика насадки, а на расстоянии 3—4 калибров давление на поверхности выравнивается и очень мало отличается от давления в бесконечно удаленной точке.

Зависимость коэффициента гидродинамического давления, выраженного в процентах, от расстояния в калибрах от носика насадки для того же зонда представлена на рис. 25.

Анализ последних двух рисунков позволяет сделать заключение, что приемные отверстия следует располагать на поверхности зонда на расстоянии не менее трех диаметров от оконечности насадки. Это обеспечит ошибку в измерении давления не более одного про-

цента от величины скоростного напора. Если такой зонд используется в качестве приемника статического давления, то для обеспечения гидродинамической погрешности $\Delta_r \leq 1\%$ можно ограничиться расстоянием $\frac{x}{D} = 2$ (см. рис. 25), помня, что $\Delta_r = -0,5\Delta p$.

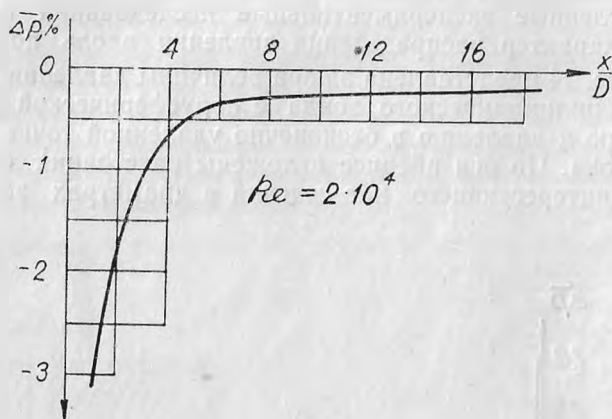


Рис. 25

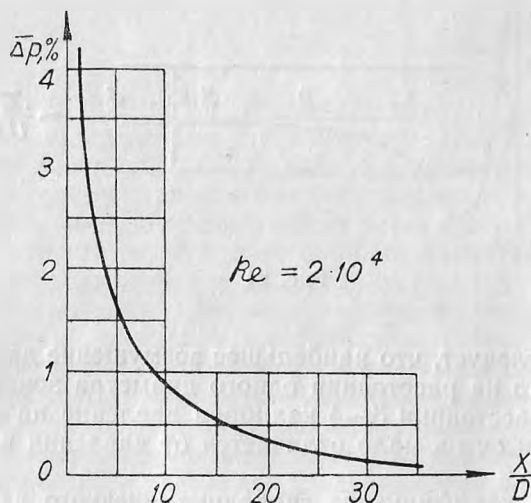


Рис. 26

Искажение давления в набегающем потоке вызывается не только зондом, но и его державкой, причем ее влияние весьма существенно, что хорошо видно из рис. 26, на котором под x следует

понимать расстояние, выраженное в диаметрах нифера, от державки до рассматриваемого сечения зонда. Из рисунка, в частности, следует, что даже на расстоянии десяти калибров от державки коэффициент Δp равен одному проценту, а в соответствии с рис. 25 коэффициент гидродинамического давления достигал этой величины уже на расстоянии четырех калибров от оконечности насадки. Таким образом, влияние державки на точность измерения давления более сильное, чем насадки. Поэтому для обеспечения необходимой точности измерения приемные отверстия принято располагать на расстоянии трех-четырех диаметров от носика насадки и восьми-десяти диаметров от державки.

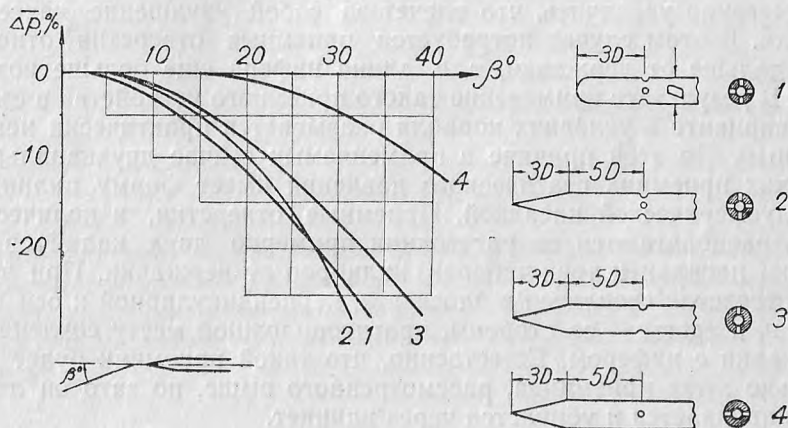


Рис. 27

На точность измерения статического давления влияет и угол скоса β набегающего потока, причем под углом скоса понимается угол, образованный вектором скорости потока с осью симметрии зонда. На рис. 27 представлен график этой зависимости для разного типа приемников при различном расположении приемных отверстий. Из этого рисунка следует, что приемник с конической насадкой имеет несколько лучшую характеристику, а среди приемников с коническими насадками лучшим является приемник с двумя приемными отверстиями, расположенными в плоскости скоса потока, под которой понимается плоскость, проведенная через ось симметрии зонда и вектор скорости потока.

Таким образом, из всех рассмотренных зондов лучшим приемником статического давления является нифер с конической насадкой, приемные отверстия которого располагаются в плоскости скоса потока. Однако обеспечение требований по размещению приемных отверстий на его поверхности создает конструктивные неудобства

в применении такого зонда на корабле. Если предположить, что диаметр зонда равен 1 см, то желание расположить приемные отверстия в трех—четыре диаметрах от насадки и в восьми—десяти от державки уже дает длину зонда 10—15 см. При этом следует иметь в виду, что приведенные выше количественные характеристики справедливы для трубок, у которых диаметр державки равен диаметру нифера. Принятый нами диаметр 1 см для подсчета длины горизонтального колена является, по соображениям прочности, непригодным для использования на корабле. Для того чтобы державка была достаточно прочной и не деформировалась под действием возможного скоростного напора, ее диаметр необходимо существенно увеличить, что влечет за собой ухудшение качества трубки. В этом случае потребуются приемные отверстия отнести еще дальше от державки, т. е. длина нифера еще больше возрастет. В результате применение такого приемного устройства в съемном варианте в условиях корабля оказывается практически невозможным. По этой причине в применяемых сейчас двухканальных трубках приемник статического давления имеет форму цилиндра с полусферической насадкой. Приемные отверстия, в количестве трех, располагаются на расстоянии примерно двух калибров от носика насадки и трех—четыре калибров от державки. При этом два отверстия сверлятся в плоскости, перпендикулярной к оси державки, а третье — со стороны, противоположной месту сочленения державки с нифером. Естественно, что такой приемник будет несколько хуже приемника, рассмотренного выше, но зато он легко устанавливается и убирается через клинкет.

Обратимся теперь к приемникам полного давления. Полное давление в потоке жидкости можно измерять любым препятствием, помещенным в поток и имеющим отверстие в критической точке. Простейшим приемником полного давления является Г-образная трубка с тупым срезом, помещенная в поток так, чтобы ось приемной части насадки совпадала с направлением потока.

Основной характеристикой приемников полного давления является их чувствительность к скосу набегающего потока.

На рис. 28 показана зависимость коэффициента гидродинамического давления от величины скоса потока для наиболее характерных профилей приемников полного давления.

Нетрудно заметить, что приемник с полусферической насадкой и малым диаметром приемного отверстия обладает наиболее высокой чувствительностью по отношению к направлению потока. Раззенковка прямого среза под углом 60° на всю величину диаметра приемника 4 повышает его нечувствительность до $15\text{--}17^\circ$. Сравнительный анализ кривых, представленных на рис. 28, позволяет сделать заключение, что создание приемников полного давления, нечувствительных к скосу потока до углов порядка 10° , не представляет затруднений. Использование указанных на рисунке приемников требует их сочленения с державками, аналогично тому, как

это делается в приемниках статического давления. Но так как длина приемника полного давления не имеет принципиального значения, то отверстие приема давления может быть просверлено прямо в державке, что и делается в приемных устройствах лагов.

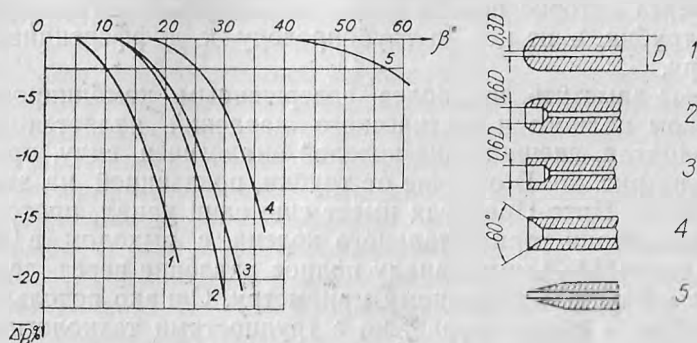


Рис. 28

Применяемые в настоящее время двухканальные приемные трубки лагов являются совмещенным вариантом приемника статического давления и приемника полного давления. В отечественных лагах применяются так называемые трубки сапожкового типа.

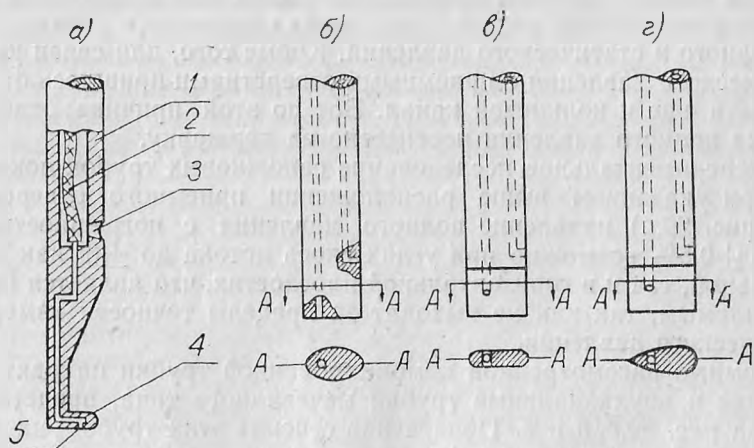


Рис. 29

На рис. 29,а схематично представлена нижняя часть такой трубки, выстреливаемая под днище корабля. Державка 1, имеющая в поперечном сечении форму овала, сужается книзу и заканчи-

вается цилиндрической стойкой того же диаметра, что и приемник 4 статического давления. О форме нифера и расположении на нем приемных отверстий было сказано выше. Приемные отверстия 5 одним общим каналом соединяются с трубопроводом 2 статического давления. На утолщенной части державки сделано отверстие 3, через которое полное давление поступает во внутреннюю полость трубки, а из нее по трубопроводу к дифференциальному манометру.

Следует заметить, что более совершенным комбинированным приемником полного и статического давлений является трубка Пито-Прандтля, внешний вид которой аналогичен виду, представленному на рис. 23. В отличие от трубки, показанной на этом рисунке, трубка Пито-Прандтля имеет еще один канал, проточенный по оси симметрии горизонтального колена, с выходом в оконечность насадки. По этому каналу полное давление через державку подается к дифференциальному манометру. Однако использование такой трубки в лагах сопряжено с трудностями технологического порядка. Действительно, сообразуясь с необходимостью постановки и уборки трубки через клинкет, мы тем самым не можем длину приемника статического давления сделать больше, чем диаметр клинкета. Поэтому длина нифера в сапожковых трубках равна длине большей из осей поперечного сечения державки в ее утолщенной части, которое в пределах допуска равно поперечному сечению клинкета. Поскольку длина нифера ограничена, то для обеспечения требуемой точности измерения статического давления приходится диаметр нифера брать малым. При малом диаметре сечения горизонтального колена очень трудно изготовить каналы приема полного и статического давлений. Кроме того, для связи канала статического давления с приемными отверстиями пришлось бы протачивать еще и кольцевой канал. Вот по этой причине отверстие приема полного давления перенесено на державку.

Экспериментальное исследование сапожковых трубок показало, что при указанном выше расположении приемного отверстия 3 (см. рис. 29,а) измерение полного давления с погрешностью не выше $\pm 0,5\%$ возможно при углах скоса потока до $\pm 8^\circ$ как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях, что является вполне приемлемым, так как не выходит за пределы точности измерения статического давления.

Помимо рассмотренной комбинированной трубки находят применение и двухканальные трубки мечевидного типа, представленные на рис. 29,б, в и г. Поперечное сечение этих трубок на большей части их длины имеет форму овала, а нижние части (насадки) различны по форме и размещению на них отверстий приема статического давления. Так, например, трубка, изображенная на рис. 29,б, имеет овальное сечение по всей длине, а канал приема статического давления выведен в нижнюю, торцовую часть трубки. Трубка на рис. 29,в имеет насадку в виде плоской пластины. Отверстия прие-

ма статического давления расположены на противоположных плоскостях насадки и общим каналом соединяются с дифференциальным манометром. Насадка трубки на рис. 29,г имеет профиль симметричного крыла Жуковского.

Места сверления в насадках отверстий приема статического давления устанавливаются экспериментально по результатам обдувки трубок в аэродинамических трубах. Так, например, для насадки трубки, представленной на рис. 29,в, на основании указанного эксперимента было установлено, что коэффициент гидродинамического давления имеет наименьшую величину в случае расположения приемных отверстий на расстоянии 0,75 длины хорды от носика насадки. При таком размещении отверстий гидродинамическая погрешность, обусловленная влиянием самой трубки, остается практически постоянной и не превышает 5% при угле скоса потока до 4° на всем диапазоне скоростей движения корабля.

Помимо двухканальных применяются и одноканальные трубки, называемые трубками Пито. Они служат для измерения только полного давления. Выстреливаемые под днище части двух таких характерных трубок схематично изображены со стороны приемного отверстия на рис. 30. Выбор толщины державки трубки определяется не только гидродинамическими характеристиками трубки, но и необходимой механической прочностью. Набегающий поток жидкости стремится изогнуть трубку в направлении движения частиц жидкости. При этом сила давления встречного потока может быть подсчитана по формуле

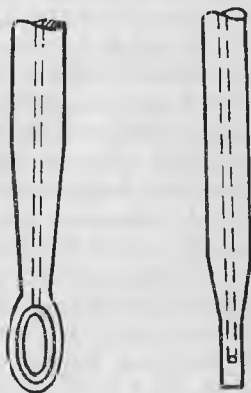


Рис. 30

$$P = C_s \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (24.1)$$

где ρ — плотность жидкости;

v — скорость потока;

S — площадь проекции забортной части трубки на плоскость, перпендикулярную к направлению движения жидкости;

C_s — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом лобового сопротивления.

Коэффициент лобового сопротивления зависит от формы тела и от числа Рейнольдса. При этом строгая аналитическая зависимость C_s от указанных величин отсутствует, и он определяется экспериментальным путем.

Если считать, что силы лобового сопротивления распределены по длине L забортной части трубки равномерно, то изгибающий момент относительно опасного сечения можно определить по формуле

$$M_{\text{изг}} = \frac{PL}{2}. \quad (24.2)$$

Под опасным сечением понимается поперечное сечение державки в месте ее выхода за днище корабля.

У трубок, находящихся на вооружении, величина изгибающего момента на больших скоростях хода корабля может достигать нескольких сотен килограмм-метров.

На основании формулы (24.1) можно сказать, что если взять круглую и овальную трубки, причем большая ось овала равна диаметру круглой трубки, то изгибающий момент у овальной трубки будет меньше, чем у круглой. Это следует из того, что у круглой трубки площадь проекции на плоскость, перпендикулярную к потоку, больше, чем у овальной. Поэтому чем меньше малая ось овала, тем меньше лобовое сопротивление трубки. Однако это уменьшение возможно лишь до определенного предела. Дело в том, что при движении корабля на циркуляции, при бортовой качке, рыскании изгиб трубки возникает не только в продольной, но и в поперечной плоскости корабля. И если не будет обеспечена надлежащая жесткость трубки в обоих направлениях, то такая трубка окажется неработоспособной.

Приемные трубки полного и статического давлений являются основными элементами приемных устройств лагов, в которые помимо названных трубок входят клинкеты с подъемными механизмами трубок, а также соединительные устройства, под которыми понимается система трубопроводов и арматуры, предназначенная для соединения приемников и выполнения вспомогательных операций при эксплуатации лага.

Приемные устройства лагов делятся на одноканальные и двухканальные. Одноканальные приемные устройства служат для измерения только полного давления и имеют ограниченное применение по указанным в § 19 причинам. Двухканальные приемные устройства делятся на три вида:

- приемные устройства с одноканальной трубкой;
- штевневые приемные устройства;
- приемные устройства с двухканальной трубкой.

Не вдаваясь в детальное описание этих устройств, что можно найти в технических описаниях по каждому конкретному образцу лага, отметим лишь некоторые их особенности.

В двухканальном приемном устройстве с одноканальной трубкой, иногда называемом штатным приемным устройством (рис. 31,а), выстреливаемая под днище корабля через клинкет 1 трубка 2 служит только для приема полного давления. Статическое давление

принимается специальной трубкой, врезанной в днище корабля и перекрываемой клинкетом 3.

Штевневое приемное устройство (рис. 31,б) не имеет выстреливаемых за борт трубок. Прием полного давления осуществляется через отверстие в форштевне, а статическое давление воспринимается через симметрично расположенные отверстия в противоположных бортах корабля. Эти отверстия сверлятся в той части борта, где обшивка параллельна продольной оси корабля.

Приемное устройство с двухканальной трубкой (рис. 31,в) пояснений не требует.

Относительные преимущества и недостатки названных двухканальных приемных устройств могут быть сведены к следующим основным моментам.

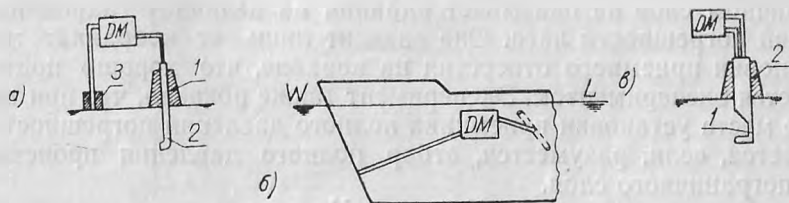


Рис. 31

Штевневое устройство является удобным при плавании во льдах, в районах моря, засоренных плавающими предметами, так как нет опасности в том отношении, что выступающие за борт корабля трубки могут быть срезаны или погнуты. Это устройство дает возможность подводной лодке ложиться на грунт без опасения погнуть приемные устройства. Однако при размещении приемного отверстия на форштевне необходимо обеспечить такое его углубление, чтобы при качке корабля оно не оголялось, что не всегда удастся. К отрицательным свойствам этого устройства следует отнести и такое обстоятельство, как наличие длинного трубопровода приема полного давления. Присутствие больших инерционных масс жидкости в этом трубопроводе приводит к тому, что при маневрировании корабля и особенно при килевой качке на малых ходах возникают большие погрешности в показании скорости. Это особенно сильно сказывается на работе ртутных лагов, гидравлическая схема которых не имеет «дыхательных» клапанов.

При рассмотрении принципа действия лага с двухканальным приемным устройством в § 19 было установлено, что измеряемое лагом динамическое давление соответствует скорости течения жидкости в районе отверстия приема статического давления. Этот результат получен в предположении, что лаг работает в идеальной

жидкости, т. е. без учета влияния пограничного слоя. Обсуждение свойств этого слоя в § 22 позволило установить, что давление на границе пограничного слоя передается без искажения во все точки потока, лежащие на нормали к поверхности тела, проходящей через рассматриваемую точку на границе слоя. Таким образом, давление, воспринимаемое приемным отверстием статического давления, расположенным на корпусе корабля, равно давлению в точке C' пересечения границы пограничного слоя с нормалью к поверхности в точке C (рис. 32). Если теперь повторить те рассуждения, которые были проведены в § 19 при определении результирующего давления p_r , но с учетом равенства $p_c = p_{c'}$, то мы придем к заключению, что измеряемое дифференциальным манометром давление соответствует скорости течения жидкости в точке C' . Таким образом, беспорядочный характер движения жидких частиц в пограничном слое не оказывает влияния на величину гидродинамической погрешности лага. Она зависит лишь от координат места установки приемного отверстия на корабле, что хорошо подтверждается экспериментом. Эксперимент также показал, что при перемещении места установки приемника полного давления погрешность не меняется, если, разумеется, отбор полного давления происходит вне пограничного слоя.

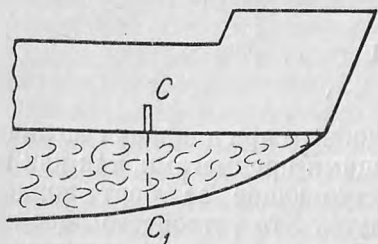


Рис. 32

Из сказанного можно заключить, что приемные устройства с двухканальной приемной трубкой не будут иметь существенных преимуществ в гидродинамическом отношении по сравнению со штевневым и двухканальным приемным устройством с одноканальной трубкой. Приемник статического давления двухканальной трубки измеряет давление вблизи границы пограничного слоя, но

это же давление измеряют и приемники статического давления, размещенные на корпусе корабля. Кроме того, если при использовании приемников статического давления, размещенных на корпусе корабля, гидродинамическая погрешность является следствием гидродинамического поля корабля, то при использовании двухканальной трубки эта погрешность будет обусловлена взаимодействием гидродинамических полей корабля и самой трубки. Доля, вносимая трубкой в суммарную гидродинамическую погрешность, может быть заранее определена по результатам обдувки в аэродинамической трубе.

На рис. 33 представлены результаты определения величины погрешности лага, полученные на одном из кораблей со штатным приемным устройством и двухканальной трубкой, причем одноканальная и двухканальная трубки устанавливались поочередно

в одном и том же клинке. Кривая 1 воспроизводит зависимость гидродинамической погрешности от скорости хода корабля, полученную с одноканальной трубкой, а кривая 2 дает ту же зависимость, определенную с помощью двухканальной трубки. Как видно из рисунка, эти кривые совершенно одинаково воспроизводят закон изменения погрешности лага, но смещены относительно друг друга на постоянную величину около 5%.

В качестве двухканальной трубки использовалась трубка, показанная на рис. 29,г. Выше указывалось, что эта трубка при обдувке в трубе дала погрешность также примерно 5%. Таким образом, смещение рассмотренных кривых относительно друг друга обусловлено лишь гидродинамическими свойствами двухканальной трубки.

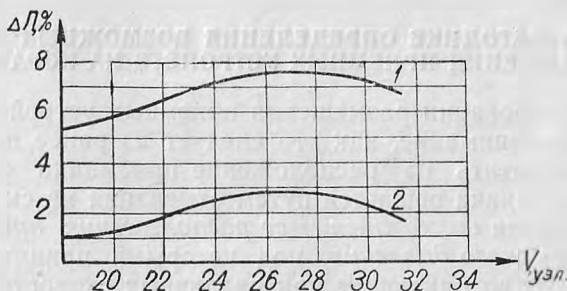


Рис. 33

Сравнительная оценка двухканальных приемных устройств позволяет сделать заключение, что ни одно из них не имеет каких-либо особых гидродинамических преимуществ. Поэтому о их преимуществах и недостатках можно говорить лишь с точки зрения конструктивных и эксплуатационных особенностей. Так, например, приемные устройства с двухканальными трубками имеют то конструктивное преимущество перед приемным устройством с одноканальной трубкой, что для их установки на корабле требуется всего лишь один клинкет.

Возможность более тщательной обработки поверхности насадок двухканальных трубок по сравнению с днищем или бортами корабля обеспечивает лучшие условия приема статического давления и тем самым стабильность гидродинамической погрешности. В качестве примера, подтверждающего это положение, можно сослаться на тот же эксперимент, иллюстрированный рис. 33. После получения зависимостей, указанных на этом рисунке, эксперимент с двухканальной трубкой был повторен на этом же корабле через восемь месяцев, при этом все контрольные точки легли точно на кривую 2. Естественно, что стабильность погрешности — это важное эксплуатационное преимущество. Сохранению стабильности

способствует и то обстоятельство, что у двухканальных трубок приемники статического и полного давлений не подвержены обрастанию, так как трубка выстреливается только на ходу корабля. В штатных приемных устройствах одноканальная трубка тоже убирается на стоянках, но приемник статического давления нельзя защитить от влияния обрастания, так как обрастает вся подводная часть корпуса корабля, в том числе и в районе приема статического давления.

Таким образом, приемные устройства с двухканальными трубками по своим эксплуатационным и конструктивным качествам являются более предпочтительными, хотя при плавании во льдах и в засоренных районах моря они имеют пониженную живучесть по сравнению со штевневым устройством.

§ 25. О МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМОЖНЫХ МЕСТ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРИЕМНЫХ УСТРОЙСТВ НА КОРАБЛЕ

При проектировании размещения приемных устройств лага на корабле особое внимание, как это следует из ранее изложенного, необходимо обратить на расположение приемника статического давления. Эта задача решается путем отыскания на смоченной поверхности корабля *возможных мест расположения приемного устройства статического давления*, под которыми принято понимать такие места, где возникающие при различных скоростях хода гидродинамические погрешности не выходят за пределы компенсации их корректором лага. Очевидно, что отыскание таких мест связано с изучением распределения давления по корпусу корабля и поэтому является чисто гидродинамической задачей, для которой отсутствует, по крайней мере в настоящее время, аналитическое решение. Поэтому выявление закона распределения давления по смоченной поверхности корабля осуществляется с помощью модельных испытаний в опытовых бассейнах и аэродинамических трубках.

Модели подводных лодок для выявления указанного закона в подводном положении целесообразно испытывать в аэродинамических трубах, а модели надводных кораблей — в опытовых бассейнах. В первом случае подобие потоков осуществляется по критерию Рейнольдса, а во втором — по критерию Фруда.

Модели кораблей, предназначенные для испытания в бассейне, готовятся из парафина. Этот материал легко обрабатывается, не намокает в воде и хорошо сохраняет качество отделки поверхности. Масштаб модели выбирается исходя из размеров бассейна таким образом, чтобы влияние стенок и дна канала не сказывалось на результатах опыта.

Для измерения давления в различных точках поверхности корабля его модель подвергается дренированию. Эта операция заключается в том, что на подводной части модели высверливаются отверстия, в которые заподлицо с поверхностью вставляются дре-

нажные металлические трубки с внутренним диаметром 2—3 мм. Трубки заканчиваются штуцерами, на которые надеваются дюритовые шланги, соединяющие каждое отверстие с батарейным манометром. Дренажные отверстия располагаются по теоретическим шпангоутам и ватерлиниями не по всей поверхности корабля, а только в его носовой части, т. е. в той части, где обычно устанавливаются приемные устройства.

Подготовленная таким образом модель крепится под буксировочной тележкой, движущейся по рельсам, проложенным вдоль стенок бассейна. На тележке устанавливается водяной батарейный манометр закрытого типа. Он состоит из ряда стеклянных трубок, расположенных вертикально на одном щите. Каждая из трубок своей нижней частью соединяется с соответствующим дренажным отверстием. Верхние концы трубок соединяются одним общим коллектором 1 (рис. 34), в котором с помощью специального насоса создается пониженное по отношению к атмосферному давление.

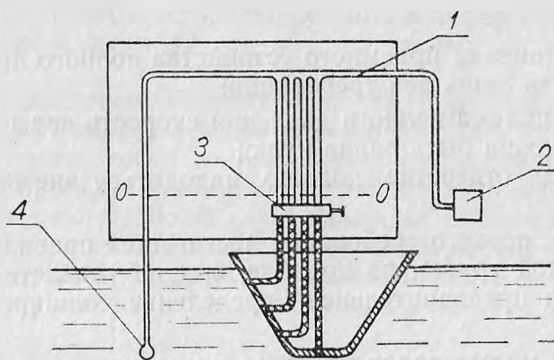


Рис. 34

В результате жидкость по каждой из трубок поднимается на одну и ту же высоту от поверхности воды при неподвижной модели. Этим создается начальный отсчетный уровень жидкости в манометре, который можно регулировать величиной вакуума в коллекторе. Манометр снабжается также запорным краном 3, с помощью которого можно фиксировать уровни воды в трубках манометра в любой момент времени. Это облегчает процесс снятия отсчетов и позволяет производить измерения на больших скоростях движения тележки. Для исключения из результатов наблюдения статического давления к коллектору подсоединяется статический зонд 4, который крепится к тележке и располагается в стороне от модели и несколько впереди.

При движении тележки вместе с моделью с различными скоростями, соответствующими определенным числам Фруда, для каж-

дого отверстия получают ряд замеров гидродинамического давления. На основании полученных данных строят графики зависимости величины коэффициента гидродинамического давления от числа Фруда для различных сечений корабля. По этим графикам можно выбрать возможные места размещения приемного устройства статического давления. Если возможных мест установки оказалось несколько, то на корабле выбирается такое из них, которое наилучшим образом соответствует условиям размещения и эксплуатации лага.

Результаты модельных испытаний, как правило, хорошо совпадают с результатами натурных испытаний. Величина расхождения в величинах гидродинамической погрешности, полученных в том и другом случае, не превышает 2—3%.

Нормальная работа лага, как указывалось ранее, существенным образом зависит и от правильного расположения на корабле приемника полного давления. Однако решение этого вопроса не требует модельных испытаний и выполняется непосредственно на корабле.

К месту установки приемного устройства полного давления следует предъявить лишь два требования:

- в точке приема полного давления скорость воды относительно корабля должна быть равна нулю;
- приемное отверстие должно находиться вне пограничного слоя.

Выполнение первого требования достигается правильной ориентацией приемной трубки на корабле, а для удовлетворения второго требуется предварительное определение толщины пограничного слоя.

Так как на малых ходах толщина пограничного слоя больше, чем на больших, то ее определение и следует производить на таких малых скоростях движения корабля, при которых он еще хорошо слушается руля. Эта работа выполняется с помощью приемника полного давления следующим образом. На малом ходу при обеспечении постоянства курса и числа оборотов движителей через клинкет выстреливается на небольшую глубину трубка приема полного давления с последующим увеличением этой глубины на 50—100 мм. При каждой новой длине выстреленной под днище корабля части трубки производится запись показаний скорости по лагу. Длина забортной части трубки увеличивается до тех пор, пока показания скорости по лагу не перестанут возрастать. Длина забортной части трубки, при которой скорость достигнет некоторого максимума, принимается за минимальную величину необходимой длины забортной части трубки. Эта же величина дает и толщину пограничного слоя в данном месте корабля. На головных кораблях новой серии такие испытания целесообразно проводить на трех-четырёх скоростях.

В заключение настоящего параграфа следует заметить, что на точности показаний лага может сказаться наличие устройств, выступающих под днище корабля (обтекатели вибраторов эхолотов, гидролокаторов и т. д.). Каждое из этих устройств вносит дополнительные возмущения в набегающий поток, что не может не сказаться на результатах определения скорости корабля. Определить степень этого влияния на модельных испытаниях не представляется возможным, так как названные выше устройства, выполненные в масштабе модели, имеют ничтожно малые размеры и поэтому при изготовлении модели их наличие не принимается во внимание.

Расчеты, выполненные с определенными допущениями, показывают, что если выступающие под днище корабля устройства имеют форму, близкую к телу вращения, то их влияние на величину гидродинамической погрешности практически становится незаметным при расстоянии между ними и приемным устройством лага, равном 3—4 длинам обтекаемого тела. Если обтекаемое тело имеет цилиндрическую поверхность, образующая которой совпадает с нормалью к днищу корабля, то это расстояние увеличивается до 7—8 длин.

Влияние постоянно выступающих за борт корабля устройств автоматически учитывается при регулировке лага на мерной линии. Если на корабле имеются устройства, опускаемые эпизодически в забортное пространство лишь на сравнительно небольшое время, то остаточные погрешности лага должны определяться дважды: с убраным и с приведенным в рабочее положение устройством.

Более подробные сведения по изложенному в настоящем параграфе вопросу можно найти, например, в «Курсе кораблевождения»*.

§ 26. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАНОМЕТРЫ

Гидродинамический лаг представляет собой по существу прибор, измеряющий давление скоростного напора, по величине которого в его счетно-решающей схеме вырабатывается скорость и пройденное кораблем расстояние. Поэтому одним из важнейших узлов лага является измеритель давления — манометр. Для того чтобы исключить влияние гидростатического давления на величину вырабатываемой скорости, в этих приборах применяются, как уже указывалось ранее, дифференциальные манометры.

В измерительной технике существует очень большое количество разновидностей манометров, однако все они, в том числе и дифференциальные, по принципу действия могут быть разделены на пять групп: жидкостные, пружинные, поршневые, электрические, комбинированные.

* С. И. Итенберг, А. П. Дворников, И. В. Балашков. Лаги и автосчислители. «Курс кораблевождения», т. V, кн. 3. Изд. УГС ВМФ, 1964.

Жидкостные манометры основаны на гидростатическом принципе измерения давления, который заключается в том, что измеряемое давление уравнивается столбом жидкости, находящейся в манометре. Эту жидкость принято называть рабочей жидкостью. Величина давления определяется по высоте столба жидкости непосредственно или с помощью несложных подсчетов. Исторически жидкостные манометры возникли раньше всех других разновидностей приборов этого типа. Простота и высокая степень точности измерений являются причинами их широкого применения.

Наиболее характерными представителями этой группы манометров являются U-образный (рис. 35,а) и чашечный (рис. 35,б) манометры.

В U-образном манометре давление p получают измерением разности H высот уровней жидкости в одном и другом коленах манометра. Зная объемный вес рабочей жидкости, нетрудно по величине H рассчитать измеряемое давление. Иногда для увеличения точности отсчета применяют U-образные манометры с наклонным коленом (рис. 35,в).

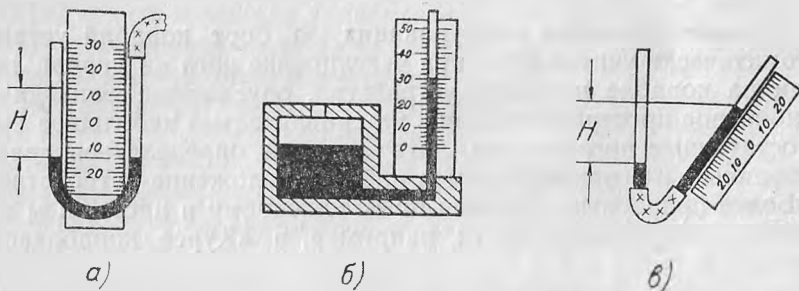


Рис. 35

В чашечном манометре, который также представляет собой сообщающиеся сосуды, площадь поверхности уровня жидкости в одном сосуде во много раз превосходит эту площадь в другом. Измеряемое давление подается в сосуд с большей площадью. Рабочая жидкость, поднимаясь по тонкой трубке на высоту H , уравнивает измеряемое давление. При этом соотношение площадей подбирается таким, чтобы можно было пренебречь величиной опускания жидкости в широком сосуде во всем диапазоне измеряемых давлений. Тогда отпадает надобность отмечать разность высот уровней, а достаточно лишь определить высоту уровня в узком колене по шкале, начало которой совпадает с уровнем рабочей жидкости в широком сосуде.

Нетрудно заметить, что обе эти разновидности манометров могут быть использованы и в качестве дифференциальных.

Принцип действия пружинных манометров основан на использовании деформаций различных упругих элементов под действием давления. Эти деформации с помощью множительных или передаточных механизмов преобразуются во вращательное движение указателей давления. Пружинные манометры имеют широкое распространение и используются в основном для технических целей. В качестве упругих элементов применяются плоские и гофрированные мембраны, коробки мембран, трубчатые пружины и сильфоны.

В поршневых манометрах измеряемое давление, действующее на одну сторону поршня, помещенного в цилиндр, уравнивается внешней силой, приложенной к поршню с другой стороны. Для этой цели на штоке поршня имеется тарелка, на которой размещаются грузы. Так как вес штока и грузов известен, то несложно получить и величину скомпенсированного давления.

С помощью поршневых манометров могут измеряться давления в очень большом интервале — от 1 до 10 000 кг/см². Они являются эталонами давления, образцовыми приборами высших классов точности. Поэтому они широко используются для градуировки шкал пружинных и других манометров.

Электрические манометры основаны на использовании изменения электрических свойств некоторых материалов под действием давления. Так, например, под действием давления на поверхностях кристаллов кварца, турмалина, сегнетовой соли возникают электрические заряды, а такие материалы, как угольные пластины, манганин и др., изменяют свое электрическое сопротивление. По величине изменения электрических параметров можно судить о величине действующего давления. Манометры этой группы находят применение в лабораторной и исследовательской практике.

К комбинированным манометрам относятся все приборы измерения давления, основанные на смешанном принципе действия. Можно представить себе, например, манометр, состоящий из двух пластин, заряженных до определенного потенциала. Если на одну из пластин (мембрану) действует давление, то она будет прогибаться и приближаться к другой пластине. Емкость такого манометра-конденсатора будет увеличиваться. Величина изменения емкости может, следовательно, служить мерой давления.

Каждый из рассмотренных манометров один или в паре с другим может быть использован для измерения разности давлений. Однако в лагах нашли применение только жидкостные и пружинные дифференциальные манометры, которые ниже будут рассмотрены более подробно. Естественно, что приведенная классификация манометров не является исчерпывающей и единственной. Более подробные сведения по этим вопросам можно получить в специальной литературе.

§ 27. ЖИДКОСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАНОМЕТРЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЛАГАХ

Жидкостные дифференциальные манометры, применяемые в лагах, следует отнести к категории чашечных манометров, так как сосуд, служащий для приема полного давления, имеет значительно большую площадь поперечного сечения, чем сосуд статического давления.

Принципиальная схема такого манометра представлена на рис. 36. Полость, заключенная между поверхностями соосных цилиндров, предназначена для приема полного давления, а внутренняя полость цилиндра меньшего радиуса — для приема статического давления. Нижняя часть манометра заполнена рабочей жидкостью, в качестве которой применяется ртуть. Если давление в обоих сосудах одинаково, то ртуть располагается на одном и том же уровне как во внешнем, так и во внутреннем сосудах. Этот уровень принимается за начальный.

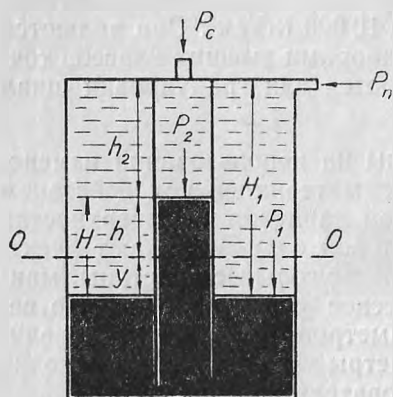


Рис. 36

На рисунке он обозначен буквами $O-O$. Такое положение ртути будет в том случае, если корабль неподвижен. При движении корабля давление во внешнем сосуде будет больше, чем во внутреннем, и некоторое количество ртути перетечет из первого сосуда во второй. При этом уровень ртути во внешнем сосуде понизится на какую-то величину y , а во внутреннем поднимется на высоту h относительно начального уровня. Разность высот уровней будет

$$h + y = H. \quad (27.1)$$

Установим связь между разностью высот уровней H и скоростью хода корабля. Так как полости сосудов полного и статического давлений трубопроводами соединяются с забортной водой, то этой водой будет заполнено все пространство манометра, свободное от ртути. Обозначим расстояние от верхней крышки манометра до поверхности ртути в сосуде полного давления h_1 , а соответствующее расстояние в сосуде статического давления — h_2 . Тогда давление p_1 на поверхность ртути в сосуде полного давления и аналогичное давление p_2 в сосуде статического давления могут быть представлены соотношениями:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_n + \gamma_b h_1; \\ p_2 &= p_c + \gamma_b h_2, \end{aligned}$$

где γ_v — удельный вес воды;
 p_n — полное давление;
 p_c — статическое давление.
 Тогда

$$p_1 - p_2 = p_n - p_c + \gamma_v (h_1 - h_2). \quad (27.2)$$

С другой стороны, давление p_1 уравнивается давлением p_2 и весом столба ртути высотой H , т. е.

$$p_1 = p_2 + \gamma_p H. \quad (27.3)$$

Подставим (27.3) в (27.2), заметив, что

$$h_1 - h_2 = H.$$

Указанная подстановка дает

$$p_n - p_c = (\gamma_p - \gamma_v) H. \quad (27.4)$$

Обозначим

$$\gamma_{p.v} = \gamma_p - \gamma_v. \quad (27.5)$$

По физическому смыслу выражение (27.5) представляет собой удельный вес ртути в воде.

Известно также, что

$$p_n - p_c = \frac{\rho v_c^2}{2} = \frac{\gamma_v}{2g} v_c^2, \quad (27.6)$$

где v_c — скорость течения жидкости в районе отверстия приема статического давления.

Подстановка (27.6) и (27.5) в (27.4) дает

$$\frac{\gamma_v}{2g} v_c^2 = \gamma_{p.v} H$$

или

$$H = \frac{\gamma_v}{2g\gamma_{p.v}} v_c^2. \quad (27.7)$$

Таким образом, разность высот уровней прямо пропорциональна квадрату скорости хода корабля. Исследуя эту формулу, предположим, что скорость хода корабля (полагаем ее равной v_c) изменилась от нуля до 0,5 узл. Подсчет, выполненный по формуле (27.7), показывает, что разность уровней H будет равна 0,269 мм, т. е. величина очень маленькая для визуальных наблюдений. Если же скорость возрастет на те же 0,5 узл. от начальной скорости 40 узл., то приращение разности уровней ΔH будет 43 мм при $H=1,765$ м.

Таким образом, чувствительность жидкостного манометра низка при малых скоростях и велика при больших. Чувствительность может быть увеличена за счет замены рабочей жидкости.

Так, например, если вместо ртути применить бромформ ($\gamma = 3 \text{ Г/см}^3$), то при $v_c = 0,5$ узл. $H = 1,3 \text{ мм}$, но тогда при скорости 40 узл. разность уровней жидкости будет около 8,5 м, что является неприемлемым по конструктивным и эксплуатационным соображениям. Поэтому получить высокую чувствительность манометра и одновременно обеспечить большой диапазон измерения скоростей при одной и той же рабочей жидкости не представляется возможным.

Для обеспечения по возможности малых габаритов жидкостного дифференциального манометра при измерении скоростей в значительных диапазонах в лагах в качестве рабочей жидкости применяют ртуть. Повышение точности отсчета положения уровня ртути, особенно при малых скоростях, достигается применением поплавковых дифференциальных манометров, в которых отсчет производится не непосредственно по высоте подъема поплавок, а по величине перемещения некоторого индикатора, связанного с поплавком механическим или электромеханическим устройством с большим передаточным отношением. Кроме того, это устройство позволяет создать дистанционную передачу показаний лага потребителям скорости. Скорость хода корабля определяется по разности уровней ртути в соответствии с формулой

$$v_c = \sqrt{2g \frac{\gamma_{p.b}}{\gamma_b} H}, \quad (27.8)$$

которая получается из зависимости (27.7).

Однако при использовании поплавкового манометра формула (27.8) не пригодна для расчета скорости, так как в этом манометре измеряется не разность высот уровней H , а лишь высота h подъема поплавок над начальным уровнем в сосуде статического давления. Поэтому найдем зависимость, связывающую скорость с высотой h .

На основании формул (27.1) и (27.7) можно написать

$$H = h + y = av_c^2, \quad (27.9)$$

где

$$a = \frac{\gamma_b}{2g\gamma_{p.b}}. \quad (27.10)$$

Из (27.9) следует, что

$$h = av_c^2 - y. \quad (27.11)$$

Очевидно, что при работе дифференциального манометра величина, на которую уменьшился объем ртути в одном из сосудов, равна величине приращения ее объема в другом сосуде, т. е.

$$Fh = fy, \quad (27.12)$$

где F — площадь поперечного сечения сосуда статического давления;

f — площадь поперечного сечения сосуда полного давления.

На основании соотношения (27.12) имеем

$$y = \frac{F}{f} h. \quad (27.13)$$

После подстановки значения y в (27.11) получаем

$$h = \frac{a}{1 + \frac{F}{f}} v_c^2, \quad (27.14)$$

откуда

$$v_c = \sqrt{\frac{F+f}{af}} h. \quad (27.15)$$

Таким образом, с помощью формулы (27.15) скорость может быть определена только по величине подъема уровня в сосуде статического давления.

На основании формулы (27.14) можно сделать заключение, что высота подъема уровня жидкости в сосуде статического давления при данной скорости хода является функцией отношения площадей F и f . Чем больше $\frac{F}{f}$, тем меньше h , и наоборот. Однако, какое бы

мы ни взяли отношение площадей сосудов, разность высот уровней рабочей жидкости будет определяться зависимостью (27.9). Изменение величины отношения площадей ведет только к относительно-му изменению величин h и y , но их сумма всегда будет равна H . Поэтому формулу $H = av_c^2$ можно назвать габаритной формулой манометра, так как она определяет минимально возможную высоту манометра при заданном максимальном значении скорости, подлежащей измерению.

Из уравнения (27.14) следует и тот вывод, что если шкалу высот подъема поплавка проградуировать в узлах, то эта шкала скорости будет иметь квадратичный характер, т. е. цена ее деления будет расти пропорционально квадрату скорости. Следовательно, и точность отсчета по такой шкале будет различной, в зависимости от величины считываемой скорости. Поэтому вполне естественным является вопрос: нельзя ли принять какие-либо меры, чтобы получить линейную шкалу скорости?

Для ответа на этот вопрос обратимся к рис. 37, на котором парабола 1, представляющая зависимость H от скорости, построена на основании соотношения (27.9), а парабола 2 — по формуле (27.14). Если на оси абсцисс отметить какую-то скорость v_c и из нее восстановить линию ординат, то ордината ed в масштабе рисунка будет представлять разность уровней H , а высоте h будет соответствовать отрезок bd . Разность

$$ed = bd = eb \quad (27.16)$$

представляет в том же масштабе величину y опускания уровня ртути в сосуде полного давления.

Выше отмечалось, что величина h при фиксированном значении скорости зависит от соотношения площадей F и f . Предположим, что нам удалось найти такое соотношение этих площадей, что высота подъема уровня ртути в сосуде статического давления стала находиться в линейной зависимости (прямая 3) от скорости, т. е.

$$h = qv_c, \quad (27.17)$$

где q — коэффициент пропорциональности, определяемый из следующих соображений. Предположим, что пределом измеряемой данным манометром скорости является скорость $v_{\max}$ и ей соответствует величина подъема поплавка $h_{\max}$, которая выбирается конструктором. Тогда высота h подъема поплавка для некоторой промежуточной скорости $0 < v_c < v_{\max}$ на основании рис. 37 будет

$$h = \frac{h_{\max}}{v_{\max}} v_c = qv_c.$$

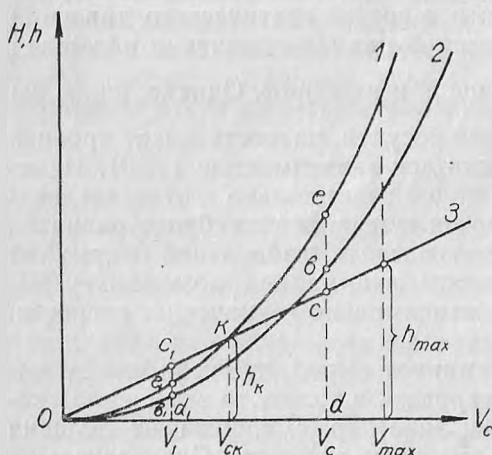


Рис. 37

Таким образом

$$q = \frac{h_{\max}}{v_{\max}} \quad (27.18)$$

представляет собой конструктивную постоянную дифференциального манометра.

Итак, если исходить из гипотезы, что нам удалось подобрать такое соотношение F и f , при котором парабола 2, определяемая зависимостью (27.14), превратилась в прямую 3, которой соответствует уравнение (27.17), то величина y снижения уровня ртути в сосуде полного давления для

промежуточной скорости v_c на основании рис. 37 будет

$$y = ec = ed - cd = H - h$$

или, на основании формул (27.9) и (27.17),

$$y = av_c^2 - qv_c. \quad (27.19)$$

Следует заметить, что, несмотря на линеаризацию h , переменная y по-прежнему остается квадратичной функцией скорости.

Уравнение (27.19) получено в предположении, что линейность шкалы дифференциального манометра обеспечена подбором соответствующих площадей, но оно устанавливает зависимость y толь-

ко от скорости, но не от соотношения площадей F и f . Поэтому нам необходимо установить связь y с площадями поперечных сечений сосудов полного и статического давлений. Из (27.9) можно получить

$$y = av_c^2 - h. \quad (27.20)$$

Для исключения из выражения (27.20) величины h можно было бы воспользоваться законом (27.12), но он справедлив только для постоянных значений F и f . В нашем же случае следует положить, что площади сечений сосудов будут зависеть каким-то образом от величин y и h , т. е. $f=f(y)$ и $F=F(h)$.

Тогда уравнением (27.12) можно воспользоваться только для элементарно малых изменений объема ртути, т. е. закону (27.12) следует придать дифференциальную форму записи:

$$f dy = F dh. \quad (27.21)$$

Дифференциал уравнения (27.20) имеет вид

$$dy = 2av_c dv_c - dh. \quad (27.22)$$

Подстановка значения dh , найденного из (27.21), в формулу (27.22) дает

$$dy = \frac{2av_c}{1 + \frac{f}{F}} dv_c. \quad (27.23)$$

Таким образом, уравнение (27.23) устанавливает искомую связь переменной y с отношением площадей поперечных сечений сосудов.

С другой стороны, зависимость дифференциала dy от скорости для линеаризованного манометра находится из уравнения (27.19):

$$dy = (2av_c - q) dv_c. \quad (27.24)$$

Располагая уравнениями (27.23) и (27.24), можно установить, каким же должно быть отношение $\frac{f}{F}$ для обеспечения линейной зависимости хода поплавка от скорости хода корабля. Для этого достаточно приравнять правые части указанных уравнений:

$$\frac{2av_c}{1 + \frac{f}{F}} dv_c = (2av_c - q) dv_c,$$

откуда

$$\frac{f}{F} = \frac{1}{\frac{2a}{q} v_c - 1}. \quad (27.25)$$

Итак, для обеспечения линейности хода поплавка на всем диапазоне измеряемых скоростей отношение площадей f и F должно подчиняться закону (27.25). Выполнение этого условия может осуществляться за счет изменения как площади внешнего сосуда, так и площади сосуда статического давления или при одновременном изменении указанных площадей в зависимости от скорости корабля.

Однако менять площадь сечения сосуда статического давления нецелесообразно по следующим соображениям. В сосуде статического давления размещается поплавок, несущий на себе шток с плунжером. Плунжер движется по направляющей трубке, обеспечивающей постоянство толщины промежутка между ним и сердечником следящего трансформатора. Так как плунжер при своем движении вдоль трубки трется о ее стенки, то силы трения являются дополнительной нагрузкой поплавок, для преодоления которой он будет несколько утапливаться в рабочую жидкость по отношению к своей нормальной «ватерлинии». Это неизбежно приведет к появлению погрешности в измеряемой скорости. Для уменьшения этой погрешности необходимо увеличить площадь поперечного сечения поплавок так, чтобы зазор между ним и стенкой сосуда был наименьшим. Если же поперечное сечение сосуда будет меняться, то поплавок либо может вообще не пройти через суженное сечение, либо получит свободу перемещения по поверхности ртути в расширенной части сосуда. Последнее обстоятельство при крепах и дифферентах корабля может привести к защемлению плунжера в направляющей трубке, что скажется на величине измеряемой скорости. Поэтому наиболее целесообразно при выбранной конструкции дифференциального манометра сделать переменной площадь сечения сосуда полного давления. Для этого случая на основании (27.25) устанавливаем, что

$$f = \frac{F}{\frac{2a}{q} v_c - 1} \quad (27.26)$$

Таким образом, формула (27.26) указывает на то, что для обеспечения линейной зависимости величины перемещения поплавок от скорости необходимо, чтобы площадь сосуда полного давления изменялась по гиперболическому закону, так как уравнение (27.26) представляет собой уравнение равнобочной гиперболы. Графически зависимость площади внешнего сосуда от величины измеряемой скорости v_c представлена на рис. 38.

Исследование зависимости (27.26) приводит к неожиданным и непонятным, на первый взгляд, результатам. Действительно, положим, что $v_c = 0$, тогда из уравнения следует, что $f = -F$. Но это условие невыполнимо, так как площадь — это величина существен-

но положительная и отрицательная площадь не имеет физического смысла. При скорости

$$v_{ck} = \frac{q}{2a}, \quad (27.27)$$

которую назовем критической, площадь f обращается в бесконечность, что также неосуществимо. Из сказанного следует заключить, что построить жидкостный дифференциальный манометр с линейной шкалой для всего диапазона скоростей от 0 до v_{max} не представляется возможным, так как принципиально невозможно создание таких площадей сосудов, которые могли бы обеспечить линейность шкалы скорости в диапазоне $0 \leq v_c \leq \frac{q}{2a}$.

Чем же объяснить это положение с физической точки зрения?

Обратимся к рис. 37.

Кривая 1 пересекается с прямой 3 в точке k , которой соответствует скорость v_{ck} . Для всего диапазона скоростей $v_{ck} \leq v_c \leq v_{max}$ соблюдается условие $H = h + y$, причем $h > 0$ и $y > 0$. Но в критической точке k $H = h_k$, $y_k = 0$. Отсюда становится ясным, что, для того чтобы уровень жидкости в сосуде статического давления мог подняться на высоту h_k при величине y , сколь угодно близкой к нулю, площадь сосуда полного давления действительно должна быть бесконечно большой.

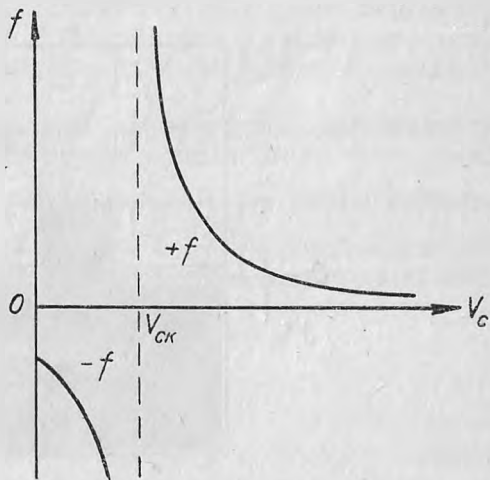


Рис. 38

Рассмотрим далее участок графика для скоростей $0 \leq v_c \leq v_{ck}$. При некоторой скорости v_{c1} разность высот уровней H определяется ординатой $e_1 d_1$, а высота h — ординатой $c_1 d_1$, т. е. $h > H$, что противоречит основному закону (27.9), определяющему принцип действия жидкостного манометра. Для того чтобы условие (27.9) выполнялось и в рассматриваемом диапазоне скоростей, необходимо y сделать величиной отрицательной, т. е. $H = h + (-y)$.

При введении в рассмотрение переменной y предполагалось, что она имеет положительное значение при опускании жидкости в сосуде полного давления. Поэтому если y придать отрицательное значение, то это должно означать, что уровень жидкости в рассматриваемом сосуде находится выше нулевой отметки. Таким образом,

при увеличении скорости от нуля до $v_{ск}$ в обоих сосудах должен иметь место одновременный подъем рабочей жидкости, что при рассматриваемой конструкции дифференциального манометра невозможно.

Если представить себе такой манометр, общее количество рабочей жидкости в котором может изменяться по определенному закону, то задача получения линейной шкалы скорости на всем участке от 0 до $v_{ск}$, казалось бы, может быть решена. Действительно, пусть при скорости $v_{с1}$ (см. рис. 37) уровень жидкости в сосуде статического давления приподнят на высоту h^* , при этом в сосуде полного давления он опустился на величину y^* (рис. 39). В то же самое время для соблюдения условия линейности шкалы скорости необходимо, чтобы уровень ртути в сосуде статического давления был h , т. е. высоту h^* нужно увеличить на Δh . Это можно сделать,

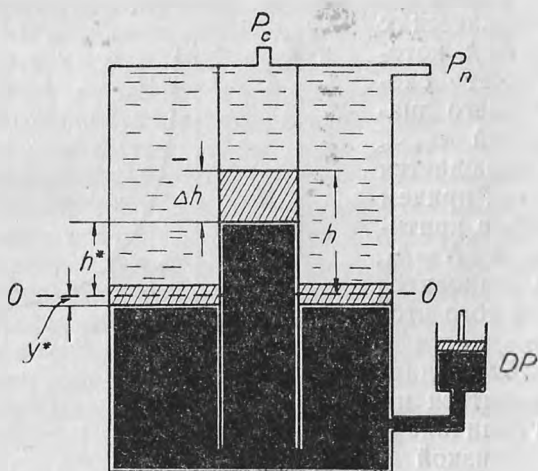


Рис. 39

если добавить в манометр из дополнительного резервуара DP столько ртути, чтобы в сосуде полного давления уровень приподнялся на величину Δy , которая в соответствии с рис. 37 определяется отрезком c_1e_1 . Из этого же рисунка видно, что величина Δy при увеличении скорости от нуля тоже возрастает до некоторого предела, а затем вновь стремится к нулю по мере приближения v_c к $v_{ск}$.

И все же построить манометр с линейной шкалой для всего диапазона скоростей от 0 до v_{max} не представляется возможным даже при переменном объеме рабочей жидкости, так как условие равенства $\dot{f}$ бесконечности при $v_c = v_{ск}$ по-прежнему остается в силе, что физически неосуществимо.

Линейность шкалы может быть обеспечена, лишь начиная с некоторого значения скорости, большего v_{ck} , которая в соответствии с формулами (27.27), (27.18) имеет величину

$$v_{ck} = \frac{g \gamma_{p.в}}{\gamma_{в}} \cdot \frac{h_{max}}{v_{max}}. \quad (27.28)$$

Для того чтобы нелинейная часть шкалы была по возможности короткой, необходимо получить как можно меньшую величину v_{ck} . При заданном значении v_{max} это может быть достигнуто только за счет уменьшения как удельного веса рабочей жидкости, так и максимального перемещения поплавка. Однако первый путь ведет к увеличению и без того больших габаритов манометра, а второй — к снижению его чувствительности. Поэтому уменьшение h_{max} должно выполняться лишь в разумных пределах.

Таким образом, в жидкостных дифференциальных манометрах, применяемых в лагах, сосуд полного давления имеет переменную площадь поперечного сечения, лишь начиная с какой-то расчетной скорости $v_p > v_{ck}$, а в диапазоне от 0 до v_p эта площадь постоянна.

В серийных дифференциальных манометрах, изготовляемых для промышленных нужд, обычно для нелинейной части шкалы принимается $\frac{f}{F} = 2$. В лаговых манометрах эта цифра несколько больше, что объясняется стремлением получить по возможности большие высоты подъема ртути во внутреннем сосуде на нелинейном участке.

Если, например, задаться отношением площадей

$$\frac{f}{F} = 2,7,$$

то можно определить и расчетную скорость, с которой начнется линейная часть шкалы. Так как F заведомо постоянна во всем диапазоне скоростей, то, обращаясь к формуле (27.25), можно рассуждать следующим образом. В случае выполнения условия линейности шкалы на всем диапазоне измеряемых скоростей имеем $\frac{f}{F} = \infty$ при $v_c = v_{ck}$. По мере увеличения скорости это отношение будет уменьшаться и, наконец, при какой-то $v_c = v_p$ станет равным 2,7. Тогда, преобразуя формулу (27.25), можно написать

$$v_p = \frac{g}{2a} \left(\frac{F}{f} + 1 \right) = \frac{\gamma_{p.в} g}{\gamma_{в}} \cdot \frac{h_{max}}{v_{max}} \left(\frac{F}{f} + 1 \right).$$

Примем $v_{max} = 25$ узл., $h_{max} = 20$ см, тогда

$$v_p = \frac{981 \cdot 12,6 \cdot 20 \cdot 3600}{25 \cdot 185200} \left(\frac{1}{2,7} + 1 \right) \approx 5 \text{ узл.}$$

т. е. при выбранном отношении площадей нелинейная часть шкалы будет от 0 до 5 усл. Если, начиная с найденного значения v_p начать изменение площади f в соответствии с зависимостью (27.26), то остальная часть шкалы окажется линейной. Однако выточить сосуд, образующая которого была бы ветвью гиперболы, с технологической точки зрения очень трудно. Поэтому-то в реальных лаговых дифференциальных манометрах внутренняя поверхность сосуда полного давления получена путем сопряжения конических поверхностей, изготовление которых значительно проще. Такая замена, естественно, нарушит линейность хода поплавка. Для восстановления утраченной линейности в счетно-решающей схеме лага предусмотрен специальный эксцентриковый механизм.

§ 28. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РТУТНОГО МАНОМЕТРА

При изготовлении дифференциального манометра, как и любого другого прибора, неизбежно отклонение выполненных размеров от расчетных, что регламентируется полем допусков соответствующего класса точности. Наличие сил трения в измерительном устройстве, отклонение удельного веса рабочей жидкости от расчетного, температурные условия — все это вместе с погрешностями, допущенными при изготовлении корпуса манометра, не может не сказаться на точности измерения скорости корабля. Для установления зависимости погрешности в измеряемой скорости от указанных факторов воспользуемся формулой (27.15), связывающей эту скорость с параметрами манометра. Если в указанной формуле заменить a в соответствии с обозначением (27.10), то получим

$$v_c = \sqrt{\frac{\gamma_n}{2g\gamma_{p.n}} \cdot \frac{F+f}{f} h} \quad (28.1)$$

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln v_c = \frac{1}{2} [\ln \gamma_n - \ln 2 - \ln g - \ln \gamma_{p.n} + \\ + \ln (F+f) - \ln f + \ln h]. \quad (28.2)$$

Найдем полный дифференциал функции (28.2)

$$\frac{dv_c}{v_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma_n}{\gamma_n} - \frac{d\gamma_{p.n}}{\gamma_{p.n}} + \frac{dF}{F+f} + \right. \\ \left. + \frac{df}{f} \cdot \frac{F}{F+f} + \frac{dh}{h} \right).$$

Если дифференциалы переменных заменить конечными приращениями и алгебраическую сумму — суммой абсолютных значений слагаемых, то получим формулу, связывающую относительную ошибку в измерении скорости с аналогичными ошибками в параметрах манометра, т. е.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \gamma_v}{\gamma_v} + \frac{\Delta \gamma_{p.v}}{\gamma_{p.v}} + \frac{\Delta F}{F+f} + \frac{F \Delta f}{f(F+f)} + \frac{\Delta h}{h} \right), \quad (28.3)$$

где $\Delta \gamma_v$, $\Delta \gamma_{p.v}$, ΔF , Δf и Δh — максимальные абсолютные отклонения величин γ_v , $\gamma_{p.v}$, F , f и h от принятых для расчета.

Рассмотрим каждую из погрешностей в правой части (28.3) отдельно.

Ошибка в удельном весе воды $\frac{\Delta \gamma_v}{\gamma_v}$ на основании (2.4) может быть заменена ошибкой в принятой плотности воды, так как ускорение свободного падения можно считать величиной постоянной, что, вообще говоря, уже было учтено при дифференцировании формулы (28.2).

Таким образом,

$$\frac{\Delta \gamma_v}{\gamma_v} = \frac{\Delta \rho_v}{\rho_v}.$$

Плотность воды, как отмечалось в § 2, зависит от температуры и давления, причем влияние давления незначительно. Что же касается температурных влияний, то для того диапазона температур, в которых приходится работать лагу, ошибка в оценке плотности, как это следует из табл. 1, не превзойдет 0,5%, если в качестве расчетной величины взять плотность при температуре 20°С.

Плотность воды зависит и от ее солёности, но погрешность в скорости хода корабля из-за отклонения солёности от расчетной величины является общей для всех гидродинамических лагов, поэтому о ней будет сказано несколько позже.

Ошибки, обусловленные отклонением удельного веса ртути от расчетной величины, также определяются в основном температурным фактором. Для указанного выше диапазона температур они могут достигать существенно больших значений, чем ошибки, обусловленные изменением плотности воды. Связь между удельным весом ртути и температурой устанавливается соотношением [11]

$$\gamma_p = \frac{\gamma_{p0}}{1 + 1,815 \cdot 10^{-3} t^{\circ}}, \quad (28.4)$$

где γ_{p0} — удельный вес при температуре 0°С;
 t° — температура, °С.

Расчет, выполненный по формуле (28.4), показывает, что при изменении температуры от 0 до 40° удельный вес изменяется примерно на 7%.

Для того чтобы избежать больших погрешностей в измеряемой скорости из-за температурного расширения ртути, в дифференциальных манометрах современных лагов применяется подогревное устройство, автоматически удерживающее температуру ртути постоянной. Тем самым обеспечивается и постоянство плотности воды, находящейся в дифференциальном манометре.

Рассмотрим теперь погрешности, обусловленные отклонениями в размерах сосудов. Для этого сначала умножим и разделим на F третье слагаемое в правой части (28.3), после чего величины относительных погрешностей, возникающих из-за отклонения формы сосудов от расчетной, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta F}{F+f} &= \frac{\Delta F}{F} \cdot \frac{F}{F+f}; \\ \frac{\Delta f F}{F+f} &= \frac{\Delta f}{f} \cdot \frac{F}{F+f}. \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

В соответствии с допуском на изготовление диаметра серийных манометров с высотой перемещения поплавка до 400 мм принимается

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta f}{f} = 0,4\%.$$

Так как в лаговых манометрах отношение $\frac{F}{F+f}$ лежит в пределах от 0,27 при малых скоростях до 0,97 при больших, то величина погрешности в измерении скорости от неточности определения площади каждого из сосудов будет находиться в пределах от 0,17 до 0,4%. Устранение этих погрешностей может быть достигнуто при тарировке лага на заводе. Погрешность, обусловленная отклонением от расчетного значения величины перемещения уровня ртути в поплавковом сосуде, является основной погрешностью этого вида манометра.

Поплавок, находящийся в рабочей жидкости, несколько утапливается в нее под действием силы веса. Возникающая при этом выталкивающая сила гидростатического давления компенсирует силу веса, и поплавок находится в состоянии равновесия, которое не меняется при изменении высоты уровня ртути. Таким образом, по положению поплавка можно однозначно судить и о положении уровня ртути. Однако это справедливо лишь в том случае, если на поплавок не действуют какие-либо другие силы. Ранее отмечалось, что поплавок несет на своем штоке плунжер, перемещающийся в направляющей трубке с малым зазором, что при малейших наклоне манометра ведет к возникновению сил трения. Если обозначить силу сопротивления трения Q , то для ее преодоления не-

обходимо, чтобы уровень жидкости в поплавковом сосуде переместился на величину δh . При этом должно выполняться условие

$$\gamma_{p.v} F_n \delta h = Q, \quad (28.6)$$

где F_n — площадь поперечного сечения поплавка.

В этом уравнении под δh понимается величина подъема уровня ртути по всей ее поверхности. Но в действительности, когда поплавок заторможен силами трения, жидкость будет подниматься не по всей площади, а только в кольцевом зазоре между стенкой сосуда и корпусом поплавка.

Если подъем ртути идет по всей площади F поплавкового сосуда, то согласно (27.14)

$$\delta h = \frac{\Delta a v_c^2}{1 + \frac{F}{f}}. \quad (28.7)$$

Если же подъем происходит в зазоре, площадь которого есть $F - F_n$, то приращение уровня ртути Δh при том же самом приращении $\Delta a v_c^2$ будет

$$\Delta h = \frac{\Delta a v_c^2}{1 + \frac{F - F_n}{f}}. \quad (28.8)$$

Поделив уравнение (28.7) почленно на (28.8), получим

$$\frac{\delta h}{\Delta h} = \frac{1 + \frac{F - F_n}{f}}{1 + \frac{F}{f}},$$

откуда

$$\Delta h = \delta h \left(1 - \frac{F_n}{F + f} \right). \quad (28.9)$$

Подставив в (28.9) значение δh из (28.6), получаем

$$\Delta h = \frac{Q}{\gamma_{p.v} F_n} \left(1 - \frac{F_n}{F + f} \right).$$

Если разделить последнее равенство на h , то получим формулу для вычисления относительной ошибки в точности воспроизведения высоты уровня ртути в поплавковом сосуде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{h} &= \frac{Q}{\gamma_{p.v} F_n h} \left(1 - \frac{F_n}{F + f} \right) = \\ &= \frac{Q}{\gamma_{p.v} h} \left(\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F + f} \right). \end{aligned} \quad (28.10)$$

Так как $F_{\pi} \leq F$, то

$$\frac{1}{F_{\pi}} > \frac{1}{F + f}.$$

Тогда разность

$$\frac{1}{F_{\pi}} - \frac{1}{F + f}$$

тем меньше, чем ближе F_{π} к F . При этом и $\frac{\Delta h}{h}$ будет стремиться

к минимуму. Однако равенства $F = F_{\pi}$ быть не может, так как зазор между стенкой сосуда и поплавком должен быть непременно.

Из формулы (28.10) следует также, что ошибка в измерении скорости оказывается меньшей при больших значениях h . Следовательно, чем больше выбрана $h_{\max}$ в манометре, тем меньше будут погрешности. Но здесь следует помнить, что увеличение максимального хода поплавка увеличивает нелинейную часть шкалы скорости, что является нежелательным.

Таким образом, при обеспечении постоянства температурного режима и выполнении необходимой тарировки прибора погрешность в измерении скорости будет определяться в основном величиной силы трения, возникающей при касании плунжера о стенку направляющей трубы. Рассчитать эту силу трения аналитическим путем затруднительно.

Эксперимент показывает, что рассмотренные дифференциальные манометры позволяют обеспечить измерение скоростей с суммарной погрешностью около 1% и даже меньше.

§ 29. ПРУЖИННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАНОМЕТРЫ

Пружинные дифференциальные манометры имеют ряд преимуществ по сравнению с жидкостными манометрами. К этим преимуществам следует отнести простоту устройства и эксплуатации, универсальность, портативность.

Основой каждого пружинного манометра является упругий элемент, в качестве которого могут быть применены мембраны, трубчатые пружины, сильфоны.

Мембраны представляют собой круглые тонкие пластины, закрепленные по их контуру. По внешнему виду они могут быть разделены на два вида: плоские и гофрированные.

Если мембрана подвергается давлению с двух сторон и давление с одной стороны меньше, чем с другой, то она прогнется в сторону меньшего давления. По величине прогиба можно судить и о величине результирующего давления. Однако характеристика стрелы прогиба мембраны от давления имеет, как правило, сложный нелинейный характер. По этой причине применение мембран

в лагах нежелательно. В этих приборах их можно использовать не как измерители абсолютной величины результирующего давления, а как датчики приращения давления в компенсационных измерительных системах. Известен один лишь лаг «Аскания», в котором были использованы мембраны, а в современных лагах они не имеют применения. По этой причине мембраны здесь не рассматриваются.

Рассмотрим несколько подробнее трубчатые пружины, так как они имеют широкое применение в технике, а также использовались в таких лагах, как «Рейс-55», «Питометр». Трубчатые пружины представляют собой полые трубки обязательно некруглого сечения. Один конец такой трубки наглухо закрыт и свободен, а второй открыт и крепится неподвижно. Поперечное сечение трубчатой пружины чаще всего имеет форму эллипса или овала. Для того чтобы такая трубка могла служить измерителем давления ее загибают по дуге окружности, причем с радиусом кривизны трубки совпадает, как правило, малая ось поперечного сечения. Если через открытый конец трубчатой пружины подать давление, то трубка будет увеличивать свой радиус кривизны, т. е. будет раскручиваться. В том случае, когда трубка изогнута так, что с радиусом кривизны совпадает большая ось поперечного сечения, под действием сверхбарометрического давления ее радиус кривизны будет не увеличиваться, а уменьшаться. Трубки строго круглого сечения вообще не меняют своей кривизны под воздействием давления. При создании внутри трубок разрежения те трубчатые пружины, которые раскручивались при повышении давления, будут скручиваться, и наоборот: трубки, уменьшавшие радиус кривизны при повышении давления, будут увеличивать его при разрежении.

Из опыта известно, что если внутри некруглой трубки создать давление, превосходящее давление вне ее, то такую трубку начнет раздувать: малая ось b (рис. 40) будет увеличиваться, а большая ось a уменьшаться, т. е. поперечное сечение трубки будет стремиться принять форму окружности.

Будем считать, что длина AB трубки при деформациях не изменяется. Обозначим внутренний и внешний радиусы трубки до подачи в нее давления r и R соответственно. Центральный угол, образованный радиусами OA и OB , принято называть углом трубки и обозначать буквой γ . Пусть эти же величины после изменения кривизны трубки под действием давления будут r_1, R_1, γ_1 .

Условие неизменяемости длины AB трубки можно записать так: $R\gamma = R_1\gamma_1$ и $r\gamma = r_1\gamma_1$.

Вычтем почленно из первого равенства второе:

$$(R - r)\gamma = (R_1 - r_1)\gamma_1 \quad (29.1)$$

или

$$b\gamma = b_1\gamma_1, \quad (29.2)$$

где b и b_1 — меньшая ось поперечного сечения до и после деформации.

По физическому смыслу $b_1 > b$, поэтому для сохранения равенства (29.2) должно выполняться условие $\gamma > \gamma_1$, а это означает, что трубка должна раскручиваться.

Если трубчатая пружина согнута так, что с радиусом кривизны совпадает большая ось, то равенство (29.1) принимает вид

$$a\gamma = a_1\gamma_1. \quad (29.3)$$

При раздувании трубки $a > a_1$, поэтому для выполнения условия (29.3) необходимо иметь $\gamma < \gamma_1$, т. е. трубка должна еще больше загнуться.

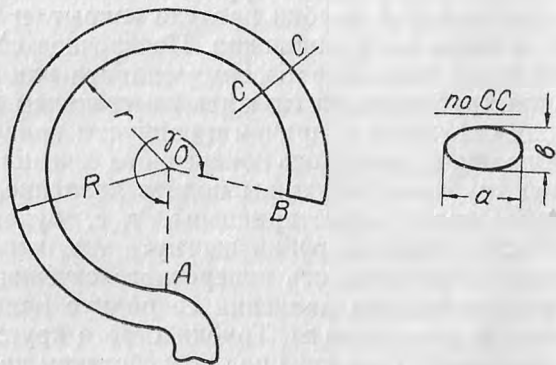


Рис. 40

В пружинных манометрах применяются трубки, малая ось поперечного сечения которых лежит в плоскости закручивания трубчатой пружины. Обозначим буквой x приращение малой оси поперечного сечения трубки, т. е. $x = b_1 - b$, а буквой β — приращение угла закручивания, т. е. $\beta = \gamma - \gamma_1$.

Тогда условие (29.1) с учетом последних равенств запишется так:

$$b\gamma = (b+x)(\gamma - \beta),$$

откуда

$$\beta = \frac{x}{b+x} \gamma. \quad (29.4)$$

В нормальных условиях эксплуатации пружин $x \ll b$, поэтому приращение угла можно подсчитать по более простой формуле

$$\beta \approx \frac{x}{b} \gamma. \quad (29.5)$$

Отсюда следует, что приращение угла γ пропорционально величине угла трубки. Поэтому чем больше γ , тем больше β , а сле-

довательно, и линейное перемещение свободного конца трубки. Это означает, что с увеличением угла γ растет чувствительность трубчатой пружины. Для того чтобы сделать угол трубки возможно большим ($\gamma > 360^\circ$), применяют так называемые геликоидальные трубки, или геликсы. Геликсы навиваются не по окружности, а по винтовой линии с малым углом наклона витка. Именно такие трубки и были применены в лагах «Рейс-55».

Для построения дифференциального манометра приходится применять две трубчатые пружины (рис. 41).

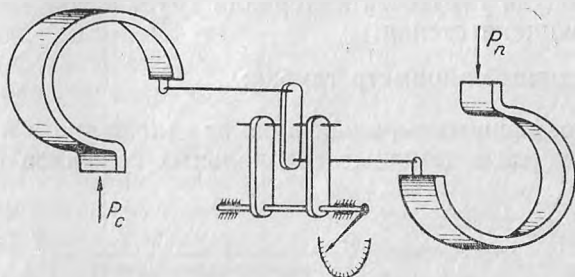


Рис. 41

Основным недостатком трубчатых пружин является присущее им упругое последствие, которое заключается в том, что если сообщать трубке ряд последовательно возрастающих давлений, замечая при этом положение свободного конца трубки, а затем уменьшать давление в том же порядке, то окажется, что конец трубки не занимает тех положений, которые он имел ранее при соответствующих давлениях. Правда, если увеличить выдержку времени на каждой ступени, то трубка постепенно будет приходить в прежнее положение. Этот отрезок времени различен для разных трубок. Он меньше у тех пружин, у которых тоньше стенки и которые работают в диапазоне давлений, не превышающих предела пропорциональности трубки.

Отношение величины давления, соответствующего пределу пропорциональности, к предельному рабочему давлению называется запасом прочности трубки. Опыт показывает, что запас прочности должен быть не меньше двух.

Опытным путем установлено также, что величина линейного перемещения трубки зависит от соотношения осей сечения трубок. Лучшими в этом плане являются пружины, у которых $a : b = 4 \div 6$.

Величина λ линейного перемещения конца трубки может быть подсчитана по формуле [14]

$$\lambda = \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} \rho \sqrt{(\gamma - \sin \gamma)^2 + (1 + \cos \gamma)^2}. \quad (29.6)$$

Относительное приращение угла трубки $\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma}$ подчиняется, в свою очередь, зависимости [14]

$$\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} = p \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \frac{\rho}{bh} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\alpha}{\beta + \kappa^2}, \quad (29.7)$$

где p — сверхбарометрическое давление;
 ρ — средний радиус кривизны трубки;
 μ — коэффициент Пуассона;
 E — модуль упругости материала трубки;
 h — толщина стенки;

$\kappa = \frac{\rho h}{a^2}$ — главный параметр трубки;

α и β — коэффициенты, зависящие от отношения a к b и определяемые с помощью специальных графиков (рис. 42).

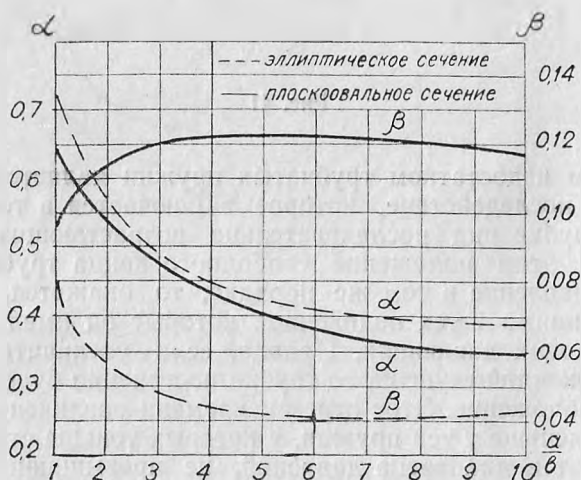


Рис. 42

Остальные обозначения соответствуют принятым ранее. Для определения составляющих перемещения конца трубки по радиусу кривизны λ_r и по касательной к дуге окружности трубки λ_z можно использовать следующие формулы:

$$\lambda_r = \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} \rho (1 - \cos \gamma),$$

$$\lambda_z = \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} \rho (\gamma - \sin \gamma).$$

В качестве материала для изготовления трубок применяют бериллиевую бронзу, латуни Л-62, Л-68, фосфористую бронзу и др. Для больших давлений применяется сталь, а иногда и лигированная сталь — для работы в агрессивных средах.

§ 30. СИЛЬФОНЫ

Сильфоны, или гофрированные коробки, представляют собой тонкостенные цилиндрические сосуды, на боковой поверхности которых нанесены гофры.

Общий вид сильфона представлен на рис. 43. Если сильфон подвергнуть осевой нагрузке, то его длина L изменится. В определенных пределах величина изменения длины сильфона пропорциональна нагрузке, независимо от того, имеет место растяжение или сжатие. Отношение действующей силы P к величине λ деформации сильфона на линейном участке его характеристики называется жесткостью сильфона. Жесткость сильфона определяется упругими свойствами материала, а также геометрическими размерами.

Величину, обратную жесткости, принято называть чувствительностью.

Экспериментально установлено, что при прочих равных условиях величина λ деформации сильфона обратно пропорциональна кубу толщины h стенки сильфона и прямо пропорциональна числу n гофр, т. е.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h_2^3}{h_1^3}; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (30.1)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум сравниваемым сильфонам.

Величина λ деформации сильфона не зависит от того, действует на сильфон сосредоточенная сила P или давление p . На основании этого можно утверждать, что при одной и той же деформации сильфона под действием осевой нагрузки P и давления p должно быть справедливым следующее равенство:

$$P = S_{\text{эф}} p, \quad (30.2)$$

где $S_{\text{эф}}$ — эффективная площадь сильфона.

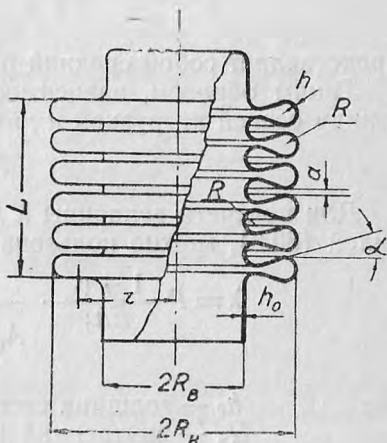


Рис. 43

На основании (30.2) можно написать

$$S_{\text{эф}} = \frac{P}{p}, \quad (30.3)$$

т. е. эффективной площадью называется отношение осевой нагрузки к давлению p , если они вызывают равные деформации λ .

Обычно считают, что

$$S_{\text{эф}} \approx \pi r^2, \quad (30.4)$$

где

$$r = \frac{R_{\text{н}} + R_{\text{в}}}{2}$$

представляет собой средний радиус сальфона (см. рис. 43).

Таким образом, зависимость (30.2), устанавливающая связь между осевой нагрузкой и давлением, может быть записана и так:

$$P = \pi r^2 p. \quad (30.5)$$

Для подсчета величины λ деформации сальфона, нагруженного силой (30.5), можно пользоваться следующей формулой [14]:

$$\lambda = P \frac{1 - \mu}{E h_0} \cdot \frac{n}{A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B \frac{h_0^2}{R_{\text{н}}}}, \quad (30.6)$$

где

h_0 — толщина стенки заготовки сальфона;

$R_{\text{в}}$ — внутренний радиус сальфона;

μ — коэффициент Пуассона;

E — модуль упругости материала;

n — число полных гофр;

α — угол уплотнения сальфона;

A_0, A_1, A_2, B — коэффициенты, выбираемые из специальных номограмм (рис. 44) по параметрам

$$m = \frac{R}{R_{\text{в}}}; \quad c = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{в}}}; \quad (30.7)$$

$R_{\text{н}}$ — наружный радиус сальфона;

R — радиус закругления гофр.

Если угол уплотнения сальфона равен нулю, как это имеет место в сальфонах, применяемых в лагах, то на основании (30.6) с учетом, что $A_0 \ll B$, получаем

$$\lambda = P \frac{(1 - \mu^2) n R_{\text{в}}^2}{B E h_0^3}. \quad (30.8)$$

В лагах сальфоны используются в компенсационных схемах как датчики приращения давления, и поэтому деформация имеет место лишь во время переходных процессов.

Угол уплотнения α увеличивает диапазон линейных деформаций сильфона, но так как абсолютная величина деформации не имеет принципиального значения при измерении давления по компенсационному методу, то в лагах применяют сильфоны с углом уплотнения, равным нулю.

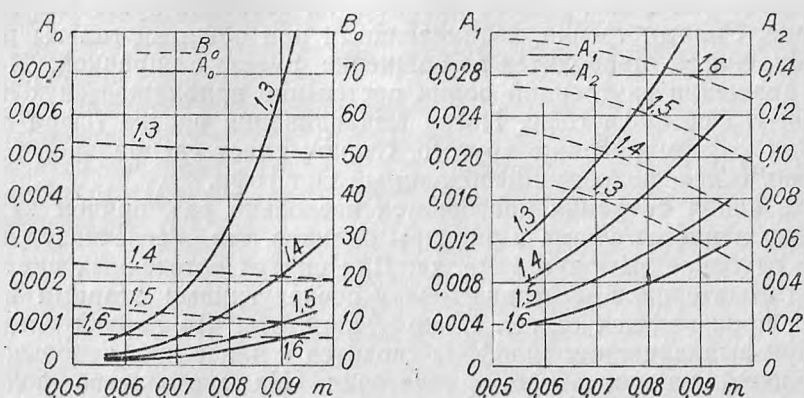


Рис. 44

Однако и при использовании сильфона по компенсационному методу его основной характеристикой остается чувствительность. Она зависит от целого ряда факторов, таких, как модуль упругости материала, толщина стенок гильзы-заготовки, глубина гофр и их количество, угол уплотнения. При этом некоторые из этих факторов зависят от способа изготовления сильфона.

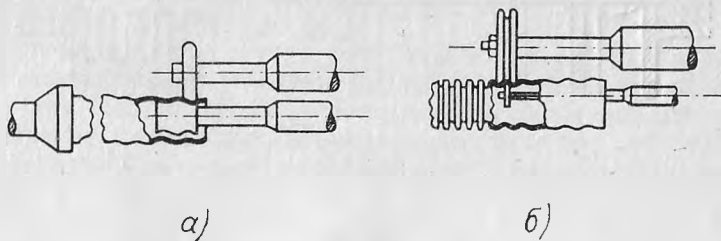


Рис. 45

Изготовление сильфонов может производиться двумя методами: механическим и гидравлическим. При механическом способе изготовления заготовка-гильза сильфона устанавливается в специальный станок, на котором осуществляется выдавливание гофр с помощью специальных роликов (рис. 45). Один из них вводится

внутри заготовки, а другой устанавливается снаружи напротив первого. Наружный ролик имеет по ободу углубление (ручей), форма и размеры которого соответствуют профилю выдавливаемого гофра. Толщина внутреннего ролика такова, что он может входить в ручей, вдавливая в него и гильзу. Оба ролика вращаются вместе с валиками, на которых они закреплены без скольжения. Заготовка своим концом крепится на свободно вращающейся оправке. Силами трения, возникающими при обжатии гильзы роликами, гильза приводится во вращение вместе с оправкой. При этом вращении внутренний ролик постепенно приближается к наружному, формируя гофр. После выдавливания одного гофра переходят к формированию другого. Станок имеет специальное устройство, обеспечивающее необходимый шаг гофра.

Указанная операция повторяется несколько раз, причем каждый раз меняется форма и размеры роликов, что обеспечивает все более глубокие вытяжки металла. Для снятия остаточных напряжений в материале заготовки между последующими этапами вытяжки производится отжиг. Следует заметить, что первая операция при выдавливании силфона сводится к нанесению небольших углублений на поверхности заготовки. На этом этапе ролик с углублениями помещается внутрь заготовки, как показано на рис. 45,а, а на последующих этапах, представленных рис. 45,б, ролики меняются местами.

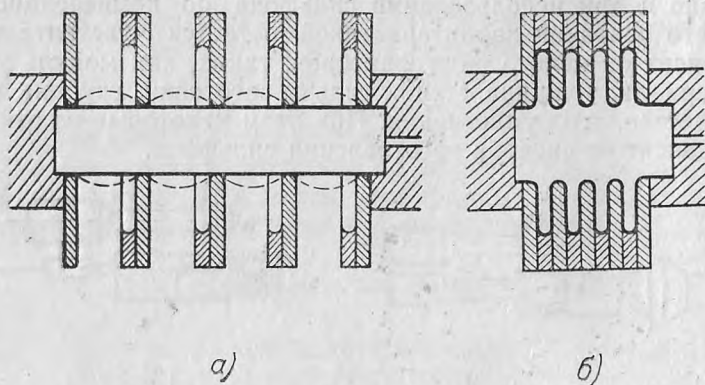


Рис. 46

При гидравлическом способе в качестве заготовки берется тонкостенный стакан. Этот стакан вставляется в набор разъемных колец, удерживаемых друг от друга на расстоянии с помощью специального фиксатора (рис. 46). Каждая пара последовательно чередующихся колец имеет различные диаметры: внутренний диаметр одного кольца равен внутреннему диаметру силфона, а внутренний диаметр второго кольца — внешнему диаметру силфона.

Открытый конец стакана зажимается в цангу, через которую он заполняется маслом. Затем в масле создается давление до 20—60 атм, в результате чего происходит вспучивание гильзы и тем самым намечаются гофры. После этого фиксатор снимается и заготовка подвергается осевому сжатию до полного соприкосновения колец. Давление во время этой операции поддерживается постоянным. Под влиянием внутреннего давления и осевого сжатия материал заготовки выпучивается, заполняя свободный объем между кольцами. Снятие остаточных деформаций после выдавливания осуществляется путем отжига.

Для повышения чувствительности сильфоны после гофрировки «осаживают», подвергая воздействию осевой нагрузки. В результате этой операции у сильфона и появляется угол уплотнения α , величина которого может быть приближенно определена из соотношения [14]

$$\alpha = \frac{m(2n_1 - 1) - \frac{1}{2R_в}}{(c - 1 - 2m)(n_1 - 1)},$$

где n_1 — число внешних закруглений гофр на длине сильфона L . Остальные обозначения прежние.

Сильфоны, изготовленные гидравлическим способом, обладают рядом высоких качеств. Они, прежде всего, более надежны, так как малейший дефект в заготовке (трещина, отверстие и др.) уже в процессе производства будет обнаружен: либо сильфон разорвет, либо видна будет течь масла. Однако гидравлический способ дает большой выход брака, особенно при глубоких вытяжках материала заготовки. В этом отношении механический способ более продуктивен и позволяет получать большие вытяжки заготовки.

Существует и механо-гидравлический способ, представляющий собой сочетание двух первых.

Для стабилизации упругих свойств готовых сильфонов их подвергают искусственному старению (тренировке), которое заключается в том, что сильфоны, установленные на специальных стендах, в течение длительного времени находятся под воздействием знакопеременной нагрузки, изменяющейся с относительно высокой частотой.

§ 31. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИЛЬФОНА

Выше указывалось, что при установившемся движении корабля сильфон принудительно удерживается в нулевом положении с помощью компенсационной системы. Изменение длины сильфона происходит только в моменты изменения режима движения корабля. При этом сильфон, обладающий определенными упругими свойствами, вместе с присоединенной массой воды, заключенной в диф-

ференциальном манометре и трубопроводе, следует рассматривать как некоторую колебательную систему. Естественно, что точность и устойчивость показаний лага будут зависеть в какой-то степени от динамических характеристик компенсационно-измерительного устройства и указанной колебательной системы.

В дифференциальном манометре сильфон находится под воздействием давления скоростного напора и противодействующего осевого усилия со стороны компенсационной системы. Если составить дифференциальное уравнение движения сильфона, то оба названные воздействия будут определять правую часть этого уравнения. И если каждое из этих возмущений рассматривать отдельно, то им будут соответствовать определенные частные решения. Рассмотрим сначала динамические свойства гидравлической части лага в предположении, что компенсационная система отсутствует. Для этого составим дифференциальное уравнение деформации сильфона под действием только динамического давления, являющегося функцией времени.

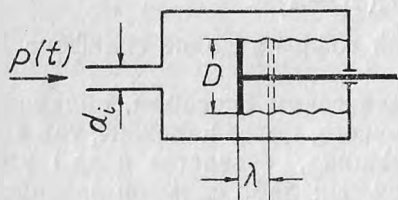


Рис. 47

Введем следующие обозначения (рис. 47):

- $p(t)$ — динамическое давление;
- $S_{\text{эф}}$ — эффективная площадь сильфона;
- λ — деформация сильфона в момент времени t ;
- S_i, d_i — площадь поперечного сечения и диаметр i -го участка трубопровода;
- D — средний диаметр сильфона.

Перемещение сильфона сопровождается движением жидкости как в манометре, так и в трубопроводе. Применим закон об изменении количества движения ко всей массе жидкости, движущейся в манометре и трубопроводе. Этот закон в общем виде записывается так:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} m v dV = F, \quad (31.1)$$

где m — масса частицы жидкости;
 v — скорость жидкой частицы;
 V — объем;
 F — действующая сила.

Если пренебречь массой сильфона по сравнению с массой воды в системе и считать, что трубопровод состоит из конечного числа участков, на каждом из которых его площадь поперечного сечения остается постоянной, то интеграл количества движения можно заменить конечной суммой:

$$\int_{(V)} m v dV \approx \sum_{i=1}^n m_i v_i. \quad (31.2)$$

Перемещение сильфона на величину λ приведет к изменению объема жидкости в манометре на величину $S_{\text{эф}}\lambda$. Этот же объем жидкости переместится и вдоль всего трубопровода. В силу условий несжимаемости и сплошности расход жидкости в любом сечении трубопровода будет величиной постоянной. Отсюда следует, что

$$S_{\text{эф}}\dot{\lambda} = v_i S_i, \quad (31.3)$$

где

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}. \quad (31.4)$$

Тогда скорость жидкой частицы можно выразить через скорость деформации сильфона:

$$v_i = \frac{S_{\text{эф}}}{S_i} \dot{\lambda} = \frac{D^2}{d_i^2} \dot{\lambda}. \quad (31.5)$$

После подстановки (31.5) в (31.2) имеем

$$\int_V m v dV = \sum_{i=1}^n m_i \frac{D^2}{d_i^2} \dot{\lambda}. \quad (31.6)$$

Для упрощения исследования примем, что диаметр трубопровода имеет постоянную величину и равен диаметру D эффективной площади сильфона. При этом допущении массу жидкости, участвующую в движении, можно представить как

$$M = \frac{\gamma_{\text{в}}}{g} S_{\text{эф}} L, \quad (31.7)$$

где L — длина всего трубопровода, включая и камеру дифференциального манометра.

Сделанные допущения позволяют перейти от уравнения (31.6) к следующему представлению этого интеграла:

$$\int_V m v dV = \frac{\gamma_{\text{в}}}{g} L S_{\text{эф}} \dot{\lambda}. \quad (31.8)$$

Перетеканию жидкости по трубопроводу под действием давления $p(t)$ будет противодействовать сопротивление трубопровода и восстанавливающая сила сильфона, обусловленная его упругостью. По-видимому, эти две силы вместе с давлением $p(t)$ и образуют правую часть уравнения (31.1). Если предположить, что течение жидкости в трубопроводе носит ламинарный характер, при котором сопротивление течению жидкости по трубопроводу пропорционально первой степени скорости, то силу сопротивления, отнесенную ко всей площади $S_{\text{эф}}$, можно выразить так:

$$F_{\text{сопр}} = S_{\text{эф}} c \dot{\lambda}, \quad (31.9)$$

где c — коэффициент сопротивления.

Обозначим жесткость сильфона m . Тогда восстанавливающая сила сильфона

$$F_B = m\lambda. \quad (31.10)$$

Таким образом, сумма

$$S_{\Phi} p(t) - S_{\Phi} c\dot{\lambda} - m\lambda. \quad (*)$$

представляет собой правую часть уравнения (31.1).

Продифференцируем по времени интеграл (31.8) и полученный результат вместе с суммой (*) подставим в исходное уравнение (31.1):

$$\frac{\gamma_B}{g} S_{\Phi} \ddot{\lambda} = S_{\Phi} p(t) - S_{\Phi} c\dot{\lambda} - m\lambda$$

или

$$\ddot{\lambda} + 2\sigma\dot{\lambda} + q^2\lambda = q^2 \frac{S_{\Phi}}{m} p(t), \quad (31.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2\sigma &= \frac{qc}{\gamma_B L}; \\ q^2 &= \frac{gm}{\gamma_B L S_{\Phi}}. \end{aligned} \right\} \quad (31.12)$$

Заметим, что $\frac{S_{\Phi}}{m} p(t)$ представляет собой давление, выраженное в величинах деформации сильфона, которое для сокращения записи обозначим

$$\frac{S_{\Phi}}{m} p(t) = \Lambda(t). \quad (31.13)$$

С учетом принятого обозначения уравнение деформации сильфона принимает окончательный вид

$$\ddot{\lambda} + 2\sigma\dot{\lambda} + q^2\lambda = q^2\Lambda(t). \quad (31.14)$$

Как известно, интеграл этого уравнения представляет собой сумму общего решения уравнения

$$\ddot{\lambda} + 2\sigma\dot{\lambda} + q^2\lambda = 0 \quad (31.15)$$

и частного решения, определяемого правой частью уравнения (31.14).

Общий интеграл однородного дифференциального уравнения (31.15) характеризует собственные колебания сильфона и имеет вид

$$\lambda = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad (31.16)$$

где k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$k^2 + 2\sigma k + q^2 = 0. \quad (31.17)$$

Из уравнения (31.17) получаем:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\sigma + \sqrt{\sigma^2 - q^2}; \\ k_2 &= -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (31.18)$$

В зависимости от величины коэффициентов уравнения возможны следующие случаи колебаний сильфона:

1. Коэффициенты уравнения (31.17) имеют разные знаки, и тогда система динамически неустойчива. В нашем случае все коэффициенты имеют один знак, и, следовательно, система устойчива.

2. Если $\sigma > q$, колебания носят аperiodический характер, корни отрицательны и вещественны. Если $\sigma < q$, корни комплексные сопряженные, система совершает гармонические затухающие колебания. Интенсивность затухания зависит от абсолютной величины σ .

Как следует из первой формулы (31.12) σ зависит от коэффициента сопротивления s , для определения которого имеются соответствующие формулы. Однако в этих формулах не учитывается общая шероховатость трубопровода, местные сопротивления и сопротивления арматуры (запорные и дыхательные клапаны и т. д.). Поэтому коэффициент s следует определять опытным путем. Так, например, на основании эксперимента было установлено, что для штатного приемного устройства лага ЛГ-50 имеют место следующие отношения:

$$\frac{\sigma}{q} = 2,35 \text{ при открытом дыхательном клапане;}$$

$$\frac{\sigma}{q} = 8,60 \text{ при закрытом дыхательном клапане.}$$

Частоту собственных незатухающих колебаний просто подсчитать по второй формуле (31.12). Так, для этого же лага оказалось, что

$$q = 22,6 \text{ сек}^{-1}. \quad (31.19)$$

Для нормального режима эксплуатации лага, когда дыхательный клапан закрыт, имеем

$$\sigma = 8,6q = 194 \text{ сек}^{-1}. \quad (31.20)$$

Подстановка численных значений (31.19) и (31.20) в формулы (31.18) дает:

$$k_1 = -1,13 \text{ сек}^{-1}; \quad k_2 = -396 \text{ сек}^{-1},$$

и тогда решение (31.16) принимает вид

$$\lambda = C_1 e^{-1,13t} + C_2 e^{-396t}. \quad (31.21)$$

Таким образом, собственные колебания сильфона носят резко выраженный аperiодический характер. Вторая экспонента в интеграле (31.21) исчезает практически мгновенно, а первая медленнее. И тем не менее даже у первой экспоненты начальное отклонение убывает примерно в 10 раз уже через 2 сек после начала процесса. Поэтому можно считать, что собственные колебания сильфона при переходных режимах исчезают очень быстро и дальнейшие колебания носят вынужденный характер, определяемый возмущением (31.13).

Возвращаясь к замечанию, высказанному в начале этого параграфа, мы можем теперь написать и уравнение колебаний сильфона с учетом реакции компенсационной системы. Если обозначить осевое усилие, отнесенное к единице эффективной площади и действующее со стороны компенсационной системы на сильфон, через $p_k(t)$, то уравнение (31.11) примет вид

$$\ddot{\lambda} + 2\sigma\dot{\lambda} + q^2\lambda = q^2 \frac{S_{\text{эф}}}{m} [p(t) - p_k(t)]. \quad (31.22)$$

Так как в компенсационно-измерительной схеме лага применяется дифференциальный манометр, то под давлением $p(t)$ в уравнении (31.22) следует понимать динамическое давление $p_d(t)$.

Давление $p_k(t)$ определяется параметрами компенсационной системы лага, и его величину можно получить на основании исследования динамики работы этой системы. Однако к этому вопросу мы вернемся несколько позже.

В заключение параграфа отметим, что, применяя теорему об изменении количества движения, можно получить и дифференциальное уравнение движения жидкости в ртутном дифференциальном манометре. Это уравнение имеет вид аналогичный (31.22):

$$\ddot{h} + 2\sigma\dot{h} + q^2h = \frac{1}{\gamma_{\text{р.в}}} q^2 p(t), \quad (31.23)$$

где

$$2\sigma = \frac{cg}{\gamma_{\text{р}}L_{\text{р}} + \gamma_{\text{в}}L_{\text{в}}};$$

$$q^2 = \frac{2g\gamma_{\text{р.в}}}{\gamma_{\text{р}}L_{\text{р}} + \gamma_{\text{в}}L_{\text{в}}};$$

h — высота уровня ртути в измерительном сосуде;

c — коэффициент сопротивления трубопровода;

$\gamma_{\text{р}}, \gamma_{\text{в}}$ — удельный вес ртути и воды соответственно;

$\gamma_{\text{р.в}}$ — удельный вес ртути в воде;

$p(t)$ — динамическое давление;

$L_{\text{в}}$ — длина линии, заполненной водой;

$L_{\text{р}}$ — длина ртутного участка манометра.

Так как в дифференциальных ртутных манометрах компенсационной системы нет, то правая часть уравнения (31.23) содержит в себе только давление скоростного напора.

§ 32. СИСТЕМЫ КОМПЕНСАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В ЛАГАХ

Сильфонные дифференциальные манометры лагов предназначены для измерения давления с высокой точностью в весьма широких диапазонах скоростей. Если предположить, что манометр предназначен для измерения скоростей от 1 до 50 узл., то относительная величина изменения давления

$$\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{v_{\max}^2}{v_{\min}^2} = 2500.$$

При этом измерение давления во всем этом диапазоне должно выполняться с одинаковой точностью, что практически невозможно. Поэтому приходится умышленно идти на сокращение диапазона измеряемых скоростей. Так, если за нижний предел скорости принять $v_{\min} = 6$ узл., то указанное отношение

$$\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{2500}{36} = 69.$$

Естественно, что во втором случае требования к чувствительности сильфона будут более низкими, чем в первом, так как сильфон будет измерять давление с заданной точностью, начиная лишь с 6 узл. Рассматривая эти численные соотношения, мы полагаем, что измерение давления ведется по величине удлинения сильфона. Измерение давлений и, следовательно, калибровка сильфона существенно упрощаются, если его удлинение находится в линейной зависимости от величины давления. Для того чтобы получить линейную характеристику сильфона для измерения скоростей в каком-то диапазоне, нужно задать ему определенную жесткость. И чем больше этот диапазон, тем больше должна быть жесткость. Но с увеличением жесткости уменьшается чувствительность сильфона. Вместе с этим возрастает и погрешность в измерении малых скоростей.

Использование сильфона для измерения давления по величине его удлинения связано еще с одним нежелательным явлением. Дело в том, что сильфоны в лагах находятся под давлением, как правило, длительное время. Если длительно действующее давление вызывает удлинение, близкое к пределу пропорциональности, то это приводит к преждевременной усталости материала сильфона и появлению значительных остаточных деформаций.

Измерение давления по компенсационному методу позволяет, в известной мере, избежать указанных выше неприятностей.

Системы, предназначенные для компенсации динамического давления в лагах, являются по своему принципу действия следящими системами и служат для устранения продольных деформаций сильфонов под действием давления. Измерение давления осуществляется путем сравнения величины момента, создаваемого следящей системой, с моментом сил динамического давления. Это сравнение производится, например, с помощью некоторого рычажного устройства, расположенного в центральном приборе лага. При равенстве указанных моментов линейная деформация сильфона равна нулю.

Может создаться впечатление, что при использовании компенсационных систем для увеличения чувствительности схемы лага можно применять сильфоны с очень малой жесткостью. Однако такое заключение будет ошибочным по той причине, что с жесткостью сильфона связана определенным образом и его прочность. Кроме того, при малой осевой жесткости сильфон имеет и очень малую изгибную жесткость. Последнее обстоятельство приводит к потере устойчивости прямолинейной формы равновесия, т. е. к внезапному изгибу сильфона при некоторой величине давления.

Компенсационные системы, применяемые в лагах, различаются как по принципу действия, так и по конструктивному оформлению. Исходя из принципа действия, компенсационные измерительные системы можно подразделить на четыре основные группы:

- механические системы с винтовыми пружинами (лаги типа ЛГ, МГЛ, «Сименс» и др.);

- механические системы с центробежным регулятором (патент № 666000, 1941 г., СССР);

- гидравлические компенсационные системы (лаги фирмы «Бендикс» RB-25, RB-40);

- электромагнитные компенсационные системы (лаги «Сал-12», «Сал-14», «ЛЭМК»).

Рассмотрим принцип действия этих систем. Для более контрастного выделения особенностей каждой из названных групп их принципиальные схемы будут построены на одних и тех же элементах, за исключением узлов, представляющих специфику данной схемы.

§ 33. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОМПЕНСАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ С ВИНТОВЫМИ ПРУЖИНАМИ

Механические компенсационные системы с винтовыми пружинами нашли наибольшее распространение в лагостроении. На рис. 48 представлена принципиальная схема такой компенсационной системы, примененной, в частности, в лагах типа ЛГ-25. Рассмотрим ее работу.

Если корабль неподвижен, то давление в обоих полостях дифференциального манометра 1 одинаково и равно статическому p_c .

Шток 2 сильфона, опирающийся на плечо 1 главного рычага 3, занимает нулевое положение. Скользящий контакт 10, жестко связанный с главным рычагом, замыкает обе ламели обмоток возбуждения реверсивного исполнительного двигателя 11, и двигатель не вращается. Эксцентрик 5, связанный с двигателем через редуктор 9, прилегает своим наименьшим радиусом к ролику вспомогательного рычага 4, а ролик двухплечего рычага 6 совпадает с осью O_2 вращения сектора с направляющими плоскостями 8. При таком положении системы линии действия сил натяжения пружин регуляторов A и B проходят через точку O опоры рычага 3 и их моменты относительно этой точки будут равны нулю, так как равны нулю их плечи d и c .

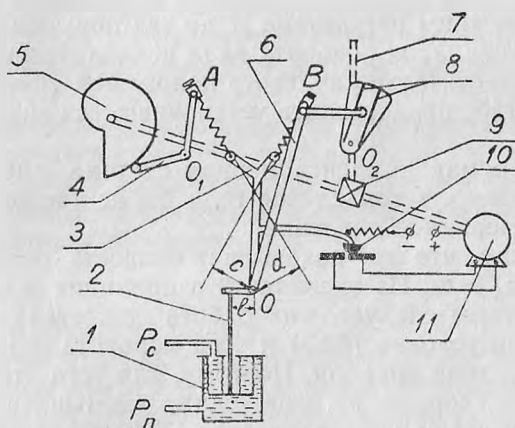


Рис. 48

Если скорость корабля увеличится, то давление в нижней полости манометра возрастет и сожмет сильфон. Шток сильфона, надавив на плечо 1 главного рычага, заставит его отклониться вправо, вследствие чего скользящий контакт переместится на правую ламель и включит исполнительный двигатель. Вращение вала двигателя передается на эксцентрик и ходовой винт 7 каретки регулятора B . Поворачиваясь, эксцентрик своими возрастающими радиусами будет поворачивать вспомогательный рычаг 4 вокруг оси O_1 против хода часовой стрелки. Этот поворот сопровождается растяжением пружины регулятора A , а линия действия силы натяжения этой пружины будет проходить теперь на расстоянии d от оси вращения O главного рычага. В результате возникает вращающий момент силы F_A натяжения пружины относительно точки O , приложенный к рычагу 3, который своим плечом l будет стремиться вернуть сильфон в исходное положение. При занятии сильфоном нулевого положения скользящий контакт вновь замкнет обе ламели и двигатель скорости остановится.

В этом положении момент пружины регулятора A

$$M_A = F_A d \quad (33.1)$$

и момент силы динамического давления относительно той же точки O

$$M_d = p_{д.н} S_{эф} l \quad (33.2)$$

окажутся равными друг другу, т. е.

$$p_{д.н} S_{эф} l = F_A d. \quad (33.3)$$

Если корабль начнет уменьшать скорость, то момент M_A окажется больше момента (33.2) и скользящий контакт переместится на левую ламель. Двигатель, а с ним и эксцентрик начнут вращаться в обратную сторону, уменьшая в конечном итоге натяжение и плечо пружины регулятора A до тех пор, пока вновь не наступит равновесие. Угол поворота вала исполнительного двигателя, отсчитанный относительно нулевого положения ($v=0$), будет в некотором масштабе представлять установившееся значение скорости хода корабля.

Рассматриваемая компенсационная система работала бы так, как было показано, в том случае если бы не требовалось вводить поправок в измеряемое давление.

Предположим, что лаг показывает скорость большую, чем это следует, т. е. $v_d > v_0$. Из сказанного о принципе действия компенсационной системы следует, что работа двигателя прекращается при выполнении условия (33.3) и угол поворота его вала является мерой скорости хода корабля. Поэтому, для того чтобы уменьшить в нашем случае скорость v_d , необходимо уменьшить угол поворота вала. При этом левая часть равенства (33.3) остается прежней, так как корабль не меняет своей скорости. С уменьшением угла поворота вала двигателя уменьшится плечо d силы F_A и сама сила натяжения пружины. Для сохранения равенства (33.3) применительно к новым условиям есть только один выход — искусственно увеличить силу F_A , что можно сделать, изменив начальное натяжение пружины. Если же требуется увеличить лаговую скорость, то необходимо уменьшить начальное натяжение пружины. Эта операция выполняется с помощью регулятора A . Однако начальное натяжение пружины изменяют только при регулировке лага, а во время плавания корабля оно остается неизменным. Отсюда можно сделать заключение, что таким способом можно ввести только постоянную поправку, в то время как погрешность лага помимо постоянной составляющей имеет и переменную составляющую, зависящую от скорости. Для того чтобы построить корректор переменной составляющей погрешности лага, необходимо знать закон ее изменения. Но так как дифференциальный манометр измеряет силу гидродинамического давления, то для решения указанной задачи достаточно знать соотношение между гидродинамическими давлениями, соответствующими истинной скорости и скорости по лагу.

Это соотношение устанавливается зависимостью (20.21) или приближенным выражением (20.22), на основании которого можно написать

$$v_n^2 = (1 + a_d + b_d v_0) v_0^2. \quad (33.4)$$

Из (33.4) следует, что величину лаговой скорости при данном значении v_0 можно изменять, варьируя постоянные a и b , значения которых определяются при регулировках лага на мерной линии. Слагаемое $1+a$ не зависит от скорости и вводится в компенсационную систему регулятором A . Величина слагаемого bv_0 находится в прямой зависимости от скорости хода корабля и вводится в систему с помощью регулятора B , в состав которого входят двухплечий рычаг b (см. рис. 48) с пружиной и каретка, несущая на себе сектор с направляющими плоскостями. Каретка регулятора B при вращении двигателя перемещается вдоль ходового винта. Если при этом направляющие плоскости сектора параллельны оси ходового винта, то отклонения рычага и растяжения пружины не происходит. Поворот сектора на какой-либо угол вокруг оси O_2 при перемещении каретки вызовет отклонение рычага b от среднего положения и натяжение пружины. Линия действия силы F_B натяжения пружины сместится относительно точки O , вследствие чего возникнет дополнительный момент

$$M_B = F_B c, \quad (33.5)$$

приложенный к главному рычагу.

Величина момента (33.5) будет определяться положением каретки на ходовом винте и углом наклона направляющих плоскостей. Знак момента зависит от стороны поворота сектора при его установке. Если сектор относительно начального положения повернуть против часовой стрелки, то момент будет складываться с моментом M_A ; при повороте по часовой стрелке он будет вычитаться из него.

Таким образом, если компенсация давления происходит с учетом погрешности, зависящей от скорости, то уравнение (33.3) следует дополнить моментом (33.5), т. е.

$$p_d S_{эф} l = F_A d \pm F_B c. \quad (33.6)$$

Сила упругого натяжения пружины может быть подсчитана по формуле

$$F = \frac{E}{8} \cdot \frac{d_1^4}{D} \cdot \frac{f}{n}, \quad (33.7)$$

где E — модуль упругости материала пружины;
 d_1 — диаметр проволоки;
 D — средний диаметр витка пружины;
 f — величина растяжения пружины;
 n — число действующих витков пружины.

Перепишем уравнение (33.6) с учетом выражений (20.21), (20.22) и (33.7):

$$(1 + a_d + b_d v_0) \frac{\rho}{2} S_{\text{эф}} l v_0^2 = \\ = -\frac{E_A}{8} \cdot \frac{d_{1A}^4}{D_A^3} \cdot \frac{f_A}{n_A} d \pm \frac{E_B}{8} \cdot \frac{d_{1B}^4}{D_B^3} \cdot \frac{f_B}{n_B} c. \quad (33.8)$$

Регулятор *A* устроен так, что позволяет изменять число действующих витков, а в регуляторе *B* такая возможность не предусмотрена.

Учитывая это замечание, введем обозначения:

$$\frac{\rho}{2} S_{\text{эф}} l = N; \quad \frac{E_A}{8} \cdot \frac{d_{1A}^4}{D_A^3} = A; \quad \frac{E_B}{8} \cdot \frac{d_{1B}^4}{D_B^3} \cdot \frac{1}{n_B} = B.$$

Тогда уравнение (33.8) принимает вид

$$(1 + a_d + b_d v_0) N v_0^2 = A d \frac{f_A}{n_A} \pm B c f_B \quad (33.9)$$

или

$$1 + a_d + b_d v_0 = \frac{A}{N v_0^2} \cdot d \cdot \frac{f_A}{n_A} \pm \frac{B}{N v_0^2} c f_B. \quad (33.10)$$

Поскольку отклонение рычага *b* зависит от положения каретки на ходовом винте и от угла α поворота сектора, то можно показать, что плечо

$$c = m v_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (33.11)$$

где *m* — коэффициент пропорциональности.

Добавим к правой части уравнения (33.10) единицу и вычтем ее, а плечо *c* заменим его значением в соответствии с (33.11). Тогда

$$1 + a_d + b_d v_0 = 1 + \left(\frac{A d}{N v_0^2} \cdot \frac{f_A}{n_A} - 1 \right) + \\ + \frac{B m}{N v_0^2} f_B v_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (33.12)$$

Отсюда нетрудно установить соответствие:

$$\left. \begin{aligned} a_d &= \frac{A d}{N v_0^2} \cdot \frac{f_A}{n_A} - 1; \\ b_d &= \frac{B m}{N v_0^2} f_B \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (33.13)$$

§ 34. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОМПЕНСАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРОБЕЖНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ

подающие питание на реверсивные обмотки исполнительного двигателя 10. Двигатель не вращается, и ползунок 8 потенциометра 7 находится в крайнем правом положении. Напряжение, снимаемое с потенциометра на мотор 4 центрального регулятора ЦР, равно нулю, и центральный регулятор не вращается.

Когда корабль приобретает ход, давление во внутренней камере дифференциального манометра повысится и сильфон удлинится. Шток, связанный с сильфоном, сблизит между собой грузы 3 регулятора и одновременно переместит скользящий контакт 11 на левую ламель, включив тем самым исполнительный двигатель. Последний, вращая ходовой винт 9, будет перемещать движок потенциометра влево. Напряжение на зажимах мотора центробежного регулятора будет возрастать, и ротор двигателя начнет вращаться вместе с регулятором с нарастающей скоростью. Под действием центробежных сил инерции $F_{ц}$ грузы станут удаляться от оси вращения регулятора, создавая при этом усилие F_0 , приложенное к штоку сильфона через упорный подшипник 2. Это усилие при определенной скорости вращения регулятора возвратит сильфон в нулевое положение. Скользящий контакт вновь замкнет обе ламели, и исполнительный двигатель остановится. С потенциометра теперь будет сниматься постоянное по величине напряжение, которое обеспечит постоянство оборотов двигателя 4 и центробежного регулятора.

При уменьшении скорости движения корабля сила динамического давления окажется меньше осевого усилия F_0 и сильфон сожмется, переместив скользящий контакт на правую ламель, что вызовет вращение двигателя 10 в обратную сторону. Ползунок потенциометра будет перемещаться вправо, уменьшая падение напряжения на зажимах мотора центробежного регулятора. В результате упадет скорость вращения центробежного регулятора, а вместе с нею уменьшится и осевое усилие F_0 . Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока вновь не наступит равенство силы динамического давления и осевого усилия F_0 при новой угловой скорости вращения регулятора.

Найдем аналитическую зависимость, связывающую скорость движения корабля с угловой скоростью вращения центробежного регулятора. Если положить, что штанги, связывающие грузы с осью их вращения, одинаковы и имеют длину r , то, обозначив угол между штангой и осью вращения центробежного регулятора буквой α , можно написать, что центробежная сила

$$F_{ц} = m\omega^2 r \sin \alpha, \quad (34.1)$$

где m — масса груза;

ω — угловая скорость вращения регулятора.

Из рис. 49 нетрудно установить, что составляющие силы $F_{ц}$ по направлению штанг есть

$$F_1 = \frac{F_{ц}}{2} \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{2} m\omega^2 r. \quad (34.2)$$

Величина осевого усилия F_0 от двух грузов будет равна удвоенной проекции силы F_1 на направление оси вращения регулятора, т. е.

$$F_0 = 2F_0' = mr\omega^2 \cos \alpha, \quad (34.3)$$

где F_0' — осевое усилие от одного груза.

Условие компенсации динамического давления можно теперь записать так:

$$p_{дл} S_{эф} = mr\omega^2 \cos \alpha. \quad (34.4)$$

Из принципа действия рассмотренной схемы следует, что в установившемся режиме величина угла α будет одной и той же, независимо от величины компенсируемого давления $p_{дл}$.

Имея в виду выражения (20.21) и (20.22), уравнение (34.4) можно записать более кратко:

$$v_0 = A\omega, \quad (34.5)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2mr^2 \cos \alpha}{\rho(1 + a_d + b_d v_0)}}. \quad (34.6)$$

Уравнение компенсации (34.5) позволяет сделать важный вывод: скорость хода корабля и угловая скорость вращения центробежного регулятора связаны линейной зависимостью. Поэтому если соединить мотор центробежного регулятора через редуктор 5 с десятичным счетчиком 6, то последний, являясь интегратором числа оборотов мотора 4, будет давать пройденное кораблем расстояние. Для определения скорости хода корабля и трансляции ее в различные приемники требуется специальное устройство.

Из формулы (34.6) следует, что регулировка лага для исключения погрешности в измеряемой скорости возможна за счет изменения угла α начального разведения грузов. При этом требуется обеспечить постоянство отношения

$$\frac{\cos \alpha}{1 + a_d + b_d v_0} = \text{const}. \quad (34.7)$$

для всего диапазона скоростей хода корабля. Решение этого вопроса возможно путем перемещения мотора центробежного регулятора в направлении дифференциального манометра и обратно по закону, обеспечивающему выполнение условия (34.7), что является относительно сложной задачей.

Положительными сторонами рассмотренной компенсационной системы является простота получения пройденного кораблем расстояния и самостабилизация оборотов центробежного регулятора при падении напряжения бортовой сети.

§ 35. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ КОМПЕНСАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Гидравлическая компенсационная система, принципиальная схема которой представлена на рис. 50, имеет ту особенность, что полное давление p_n подается в дифференциальный манометр 5 непосредственно, а через камеру центробежного насоса 4.

Работа схемы осуществляется следующим образом. Если корабль неподвижен, то давление внутри и снаружи сильфона одинаково и равно статическому. Сильфон находится в нулевом положении, и скользящий контакт 6 замыкает обе ламели реверсивных обмоток возбуждения исполнительного двигателя 7. Двигатель неподвижен. Двигатель 3 центробежного насоса также не вращается, поскольку ползунок 9 потенциометра 10 находится в крайнем левом положении и снимаемое им на мотор 3 напряжение равно нулю.

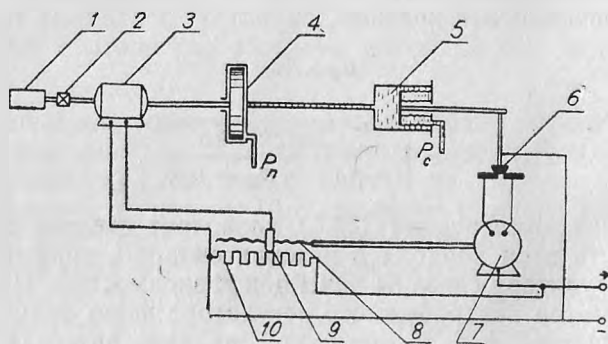


Рис. 50

С началом движения корабля давление в полости полного давления дифференциального манометра возрастает и сильфон, сжимаясь, штоком смещает скользящий контакт на правую ламель. Исполнительный двигатель будет вращаться и с помощью ходового винта 8 перемещать ползунок потенциометра вправо. Напряжение на зажимах двигателя центробежного насоса возрастет. Ротор насоса, жестко связанный с валом двигателя, начнет вращаться с нарастающей скоростью, отбрасывая при этом воду от оси собственного вращения к периферии. В результате по ободу ротора создается область повышенного давления, а ближе к его центру — область пониженного давления. Понизится давление и в камере полного давления дифференциального манометра. Сильфон за счет упругости материала начнет возвращаться к нулевому положению и наконец займет его при некоторой определенной угловой скорости вращения ротора насоса. При этом скользящий контакт выключит исполнительный двигатель и мотор центробежного насоса будет вращаться с постоянной угловой скоростью. Таким образом,

компенсация динамического давления осуществляется созданием противодействия непосредственно в гидравлическом трубопроводе лага.

Работа схемы при снижении скорости корабля вполне очевидна и описания не требует. Установим аналитическое условие компенсации давления, для чего обратимся к рис. 51, на котором представлена часть ротора насоса с радиальными лопатками OA и OB . Сектор заполнен водой на высоту лопаток и вращается относительно точки O с угловой скоростью ω . Вырежем в этом секторе параллелепипед с ребрами $rd\varphi$, dr , b , причем b является высотой лопаток.

Массу воды, заключенную в этом параллелепипеде, можно определить, если объем

$$dV = brd\varphi dr$$

умножить на плотность воды ρ , т. е.

$$dm = \rho brd\varphi dr. \quad (35.1)$$

Если массу (35.1) умножить на величину центростремительного ускорения, то получим величину элементарной центробежной силы инерции, действующей на эту массу:

$$df = \omega^2 r dm = \rho b \omega^2 r^2 d\varphi dr. \quad (35.2)$$

Сила df оказывает давление на внешнюю грань параллелепипеда, площадь которой есть $brd\varphi$. Разделив силу (35.2) на указанную величину площади, получим дифференциал давления в точке, удаленной от центра ротора на расстояние r :

$$dp = \frac{df}{br d\varphi} = \rho \omega^2 r dr. \quad (35.3)$$

Для того чтобы получить величину давления на ободе ротора, радиус которого R , следует проинтегрировать уравнение (35.3):

$$\int_0^R dp = \rho \int_0^R \omega^2 r dr. \quad (35.4)$$

Так как в установившемся режиме $\omega = \text{const}$, то

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2. \quad (35.5)$$

Если полное давление подается в камеру насоса на расстоянии R от оси вращения ротора, то условие компенсации принимает вид

$$K_d \rho \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2.$$

или

$$\sqrt{K_d} v_0 = \omega R. \quad (35.6)$$

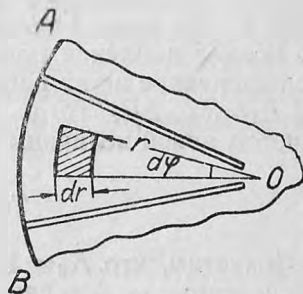


Рис. 51

Таким образом, скорость движения корабля прямо пропорциональна угловой скорости вращения ротора центробежного насоса. Поэтому и в этом случае для получения пройденного кораблем расстояния достаточно десятичный счетчик подключить к мотору центробежного насоса.

Из условия (35.6) следует, что истинная скорость корабля относительно воды

$$v_0 = \frac{R}{\sqrt{K_d}} \omega \quad (35.7)$$

при $K_d \neq 1$ может быть получена только за счет изменения радиуса R . Это нужно понимать следующим образом. Предположим, что полное давление подается в камеру насоса через отверстие, расположенное не на расстоянии R от центра ротора, а на расстоянии $R_1 = R - \Delta R$. Тогда и уравнение (35.7) следует переписать с учетом новой величины радиуса:

$$v_0 = \frac{R_1}{\sqrt{K_d}} \omega. \quad (35.8)$$

Допустим, что $K_d = 1$, тогда скорости v_0 соответствует вполне определенная ω . А теперь предположим, что $K_d > 1$ при той же самой скорости v_0 . Для того чтобы величина ω , являющаяся мерой v_0 , не изменилась, нужно увеличить R_1 . Это можно сделать, переместив отверстие на камере ближе к ободу ротора, причем эта операция возможна лишь за счет имеющегося запаса в виде ΔR .

Если K_d становится меньше единицы, то R_1 нужно тоже уменьшать. Для осуществления такой регулировки в лагах типа RB-25 полное давление подводилось в камеру через специальный цилиндрический штуцер, который мог поворачиваться вокруг своей продольной оси. Параллельно оси цилиндра, но ближе к его боковой поверхности просверлено отверстие, к которому крепится гибкий шланг полного давления. Предположим, что расстояние между осями цилиндра и отверстия равно ΔR , а ось вращения цилиндра перпендикулярна к плоскости ротора и отстоит от его центра на расстояние R_1 . Тогда при повороте цилиндрического штуцера на целый оборот ось отверстия полного давления опишет окружность радиуса ΔR , а ее перемещение относительно радиуса ротора R_1 насоса будет лежать в пределах от $R_1 + \Delta R$ до $R_1 - \Delta R$, т. е. от R до $R - 2\Delta R$. Необходимое положение штуцера подбиралось на мерной линии и фиксировалось. Во время плавания установка его уже больше не менялась. Отсюда можно сделать заключение, что такое устройство позволяло компенсировать только постоянную составляющую погрешности лага.

Гидравлическая компенсационная система обладает теми же преимуществами, что и механическая с центробежным регулятором. Что же касается выработки скорости и особенно трансляции ее, то здесь также требуется специальное дополнительное устройство.

§ 36. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОМПЕНСАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

В настоящее время известно несколько разновидностей лагов с электромагнитной компенсационной системой. Не рассматривая каждую конструкцию отдельно, принцип действия таких систем можно пояснить с помощью рис. 52.

Шток дифференциального манометра 1 упирается в рычаг, жестко скрепленный с поворотным якорем 2 электромагнита 3. Если давление в обеих полостях дифференциального манометра одинаково и равно статическому, то якорь электромагнита, будучи повернутым на некоторый начальный угол вокруг оси O , замкнет скользящим контактом 13 обе ламели обмотки возбуждения исполнительного двигателя 12. Двигатель не вращается. Ползунок 10 потенциометра 9, перемещающийся по ходовому винту 11 при вращении вала двигателя, занимает крайнее левое положение, вследствие чего обмотки электромагнита обесточены.

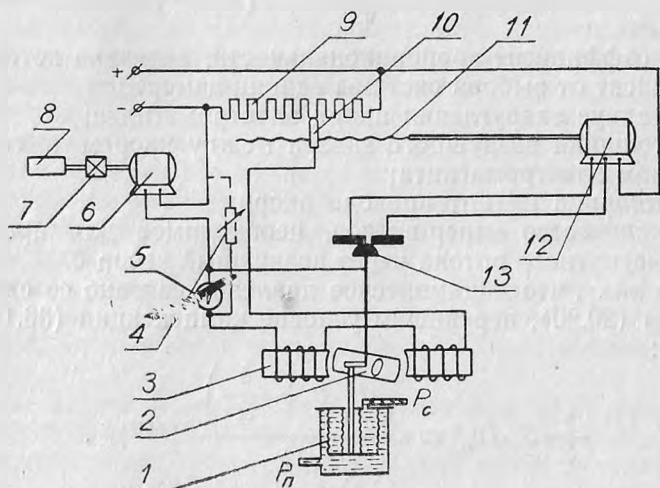


Рис. 52

При возникновении динамического давления шток сильфона повернет якорь вокруг оси O и скользящий контакт переместится на правую ламель, включив исполнительный двигатель. Ползунок потенциометра начнет перемещаться, увеличивая напряжение на обмотке электромагнита. При некотором положении ползунка ток в цепи электромагнита достигнет такой величины, что напряженность магнитного поля в разрезе магнитопровода окажется достаточной для того, чтобы электромагнитный момент, приложенный к якорю, оказался равным моменту сил динамического давления.

Якорь электромагнита вернется в исходное положение, и скользящий контакт вновь замкнет обе ламели, остановив исполнительный двигатель. Ползунок потенциометра останется в некотором фиксированном положении и обеспечит питание электромагнита постоянным по величине напряжением.

Работа схемы при понижении динамического давления очевидна и пояснений не требует. Условие компенсации давления для данной системы может быть записано так:

$$\rho_{д.л} S_{эф} l = M_{эм}, \quad (36.1)$$

где l — плечо силы динамического давления относительно оси вращения якоря электромагнита;

$M_{эм}$ — вращающий момент якоря электромагнита.

Электромагнитный момент $M_{эм}$ может быть представлен зависимостью [5]

$$M_{эм} = \kappa \frac{\left(r + \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} d (IW)_{\delta}^2, \quad (36.2)$$

где κ — коэффициент пропорциональности, величина которого зависит от выбора системы единиц измерения;

r — радиус закругления якоря электромагнита;

δ — толщина воздушного зазора между якорем и сердечником электромагнита;

d — толщина магнитопровода якоря;

$(IW)_{\delta}$ — количество ампер-витков, необходимое для проведения магнитного потока через воздушный зазор δ .

Имея в виду, что динамическое давление связано со скоростью уравнением (20.20), перепишем условие компенсации (36.1) с учетом (36.2):

$$\frac{\rho}{2} S_{эф} l v_{л}^2 = \kappa \frac{d \left(r + \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} (IW)_{\delta}^2,$$

откуда

$$v_{л} = \sqrt{\frac{2\kappa \left(r + \frac{\delta}{2}\right) d}{\rho \delta S_{эф} l}} (IW)_{\delta}. \quad (36.3)$$

Таким образом, скорость движения корабля оказывается прямо пропорциональной величине тока, протекающего через обмотки сердечника электромагнита. Поэтому амперметр 5 (см. рис. 52), включенный последовательно в цепь электромагнита, может служить указателем скорости хода корабля. В эту же цепь можно включить последовательно электродвигатель 6, скорость вращения которого будет пропорциональна величине питающего тока и, следовательно, скорости корабля. Подключив к валу этого двигателя

через редуктор 7 десятичный счетчик 8, получим индикатор пройденного расстояния. Параллельно счетчику или вместо него может быть подключен и датчик дистанционной передачи пройденного расстояния.

Если учесть соотношение (33.5), то формулу (36.3) можно привести к виду

$$v_0 = \frac{A}{\sqrt{K_d}} (IW)_s, \quad (36.4)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2\pi \left(r + \frac{\delta}{2} \right) d}{\rho \delta S_{\text{эф}} l}}.$$

Так как A есть величина постоянная для данной модели лага, то из формулы (36.4) следует, что коррекция показаний лага возможна лишь за счет изменения ампер-витков. Для этой цели в лаге ЛЭМК, например, имеется дополнительная компенсационная обмотка на электромагните, с помощью которой можно ослаблять или увеличивать основной магнитный поток и тем самым изменять величину тока в цепи главной обмотки электромагнита. При этом будут меняться и показания индикаторов скорости и пройденного расстояния. Однако это не нарушит условия компенсации давления, так как результирующий электромагнитный момент, созданный главной и вспомогательной обмотками, будет по-прежнему подчинен условию (36.1). В принципе ток во вспомогательной обмотке можно менять по любому закону. Поэтому можно создать дополнительное устройство, как это имело место в ЛЭМК, которое обеспечило бы изменение тока, соответствующее выполнению условия (36.4).

Эта же задача может решаться и методом шунтирования интегрирующего двигателя и указателя скорости с помощью переменного сопротивления 4 (см. рис. 52). Такой метод регулировки применяется в лагах «Сал», и с помощью этого устройства в указанных лагах компенсируется только постоянная составляющая погрешности лага.

Преимуществом электромагнитной компенсационной системы по отношению к другим является ее относительная простота и малые габариты. Она позволяет легко получить пройденное расстояние и осуществить его передачу потребителям. Для дистанционной передачи скорости необходима разработка специальных узлов.

В качестве основного недостатка этой системы можно назвать невысокую точность измерения скорости, что в значительной степени определяется малой стабильностью характеристик электромагнита. Как показывает опыт, при длительной работе лага эти характеристики могут меняться в сравнительно широких пределах.

Каждая из рассмотренных нами систем компенсации имеет свои преимущества и недостатки, поэтому трудно вынести решение о предпочтительности той или иной системы. Этот вопрос должен решаться применительно к конкретным условиям: для какого корабля проектируется лаг, каков диапазон измеряемых скоростей, какова потребная точность показаний, получение какого из показателей движения корабля (скорости или пройденного расстояния) необходимо обеспечить в первую очередь и т. д.

§ 37. О РАСЧЕТЕ КОМПЕНСАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Различие физических принципов, заложенных в рассмотренные компенсационно-измерительные системы, создает естественное разнообразие в методах их расчета. Но так как каждая из этих систем является системой автоматического регулирования, то расчет ее должен сопровождаться исследованием динамических характеристик, т. е. определением устойчивости, качества переходного процесса и т. д.

Все рассмотренные схемы систем компенсации были построены с использованием скользящего контакта, скачком переключавшего двигатель из неподвижного состояния в рабочее. Такой элемент имеет релейную характеристику и обращает исследуемые системы в нелинейные. Анализ нелинейных систем автоматического регулирования представляет известные трудности и выполняется с помощью приемов, излагаемых в курсах автоматического регулирования. Использование скользящего контакта не является совершенно необходимым, и его введение в рассмотренные нами схемы обусловлено лишь соображениями простоты изложения принципа действия. Эти схемы могут быть легко линеаризованы, если скользящий контакт заменить, например, индукционным датчиком с усилителем.

Исследование любой системы автоматического регулирования начинается с составления ее структурной схемы. В качестве примера составим структурную схему для лага с гидравлической компенсационной системой.

Включение исполнительного двигателя 7 (см. рис. 50) производится скользящим контактом только в тех случаях, когда динамическое давление $p_d(t)$ отличается от давления $p_k(t)$, развиваемого центробежным насосом компенсационной системы, т. е. сигналом для включения двигателя ИД (рис. 53) служит разность давлений

$$\Delta p(t) = p_d(t) - p_k(t). \quad (37.1)$$

Под действием разности давлений (37.1) у сильфона $СФ$ возникнет линейная деформация λ , характер которой определяется уравнением (31.22). Эта деформация вызовет перемещение скользящего контакта, который является в рассматриваемой схеме не-

линейным звеном $HЗ$, имеющим релейную характеристику. Поданное на двигатель скользящим контактом напряжение U приведет его во вращение с номинальной угловой скоростью. Вращаясь какое-то время, он накопит на левой части потенциометра 10 (см. рис. 50) напряжение U_n , необходимое для сообщения мотору M центробежного насоса $ЦН$ такой угловой скорости, при которой насос разовьет давление p_k , равное давлению p_d . Следовательно, исполнительный двигатель вместе с потенциометром следует рассматривать как интегрирующий элемент, который с учетом его инерционности будет иметь передаточную функцию

$$W_2(p) = \frac{k_2}{p(B_2 p + 1)}, \quad (37.2)$$

где k_2 — коэффициент усиления двигателя, в котором учтен и коэффициент усиления потенциометра;
 B_2 — электромеханическая постоянная интегратора;
 p — оператор преобразования Лапласа.

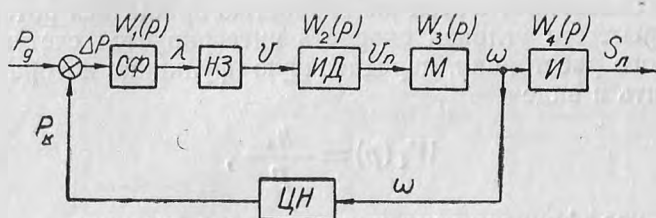


Рис. 53

Передаточная функция для одного и того же динамического звена может иметь различный вид в зависимости от того, какую физическую величину принимают в качестве выходной. Если для двигателя за выходную величину принять угол $\varphi(t)$ поворота его вала при напряжении на его входе $u_{вх}(t)$, то его передаточная функция, как только что было показано, представляется выражением

$$\frac{\varphi(p)}{u_{вх}(p)} = W(p) = \frac{k}{p(Bp + 1)}, \quad (37.3)$$

т. е. передаточную функцию двигателя можно рассматривать как произведение передаточных функций интегрирующего и апериодического звеньев.

В том случае, когда в качестве выходного сигнала принимается угловая скорость $\omega(t)$ вращения вала двигателя, передаточная функция (37.3) изменит вид. Действительно, изображение угловой

скорости можно получить умножением изображения угла поворота вала на оператор преобразования Лапласа:

$$\omega(p) = p\varphi(p),$$

откуда

$$\varphi(p) = \frac{\omega(p)}{p}. \quad (37.4)$$

Подставим полученное значение $\varphi(p)$ в функцию (37.3):

$$\frac{\omega(p)}{u_{вх}(p)} = W(p) = \frac{k}{B_p + 1}. \quad (37.5)$$

Таким образом, если в качестве выходного сигнала принимается угловая скорость вращения двигателя, то его передаточная функция соответствует передаточной функции апериодического звена.

Мотор M центробежного насоса используется в рассматриваемой схеме по двум направлениям. Во-первых, вращаясь с угловой скоростью $\omega(t)$ под действием напряжения, поданного с потенциометра, он заставляет с этой же скоростью вращаться ротор насоса, и, во-вторых, его угловая скорость интегрируется счетчиком (I) пройденного расстояния, передаточную функцию которого можно представить в виде

$$W_4(p) = \frac{k_4}{p}, \quad (37.6)$$

где k_4 — коэффициент усиления редуктора счетчика.

Что же касается самого мотора M , то поскольку с него на центробежный насос снимается угловая скорость, то для этой цели его передаточную функцию следует писать в виде выражения (37.5), т. е.

$$W_3(p) = \frac{k_3}{B_3 p + 1}, \quad (37.7)$$

при этом постоянная B_3 должна учитывать массу ротора насоса и присоединенную к нему массу воды.

Центробежный насос развивает давление на обode его ротора, определяемое выражением (34.5). Из этой зависимости следует, что центробежный насос можно считать функциональным усилителем, коэффициент усиления которого пропорционален угловой скорости $\omega(t)$. Поэтому получаемое на выходе такого усилителя давление оказывается пропорциональным квадрату входной величины $\omega(t)$. Следовательно, центробежный насос является нелинейным звеном, включенным в отрицательную обратную связь. Характеристика этого звена представляет собой параболу, показанную на рис. 54.

Итак, гидравлическая компенсационная система оказалась дважды нелинейной, что представляет существенные трудности для ее исследования. Интегратор I с передаточной функцией (37.6) не оказывает влияния на динамические свойства системы, так как он не входит в замкнутый обратный контур, а потому при анализе свойств системы его рассматривать не следует. Нужно лишь учесть в электромеханической постоянной B_3 нагрузку, которую представляет для мотора M этот интегратор.

Принимая во внимание последнее обстоятельство, структурную схему, представленную на рис. 53, можно упростить, объединив все линейные элементы в одну линейную часть $ЛЧ$, как это показано на рис. 55. Нелинейное звено $НЗ_1$ представляет собой скользящий контакт, а $НЗ_2$ — центробежный насос.

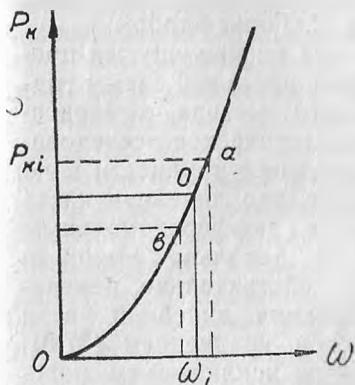


Рис. 54

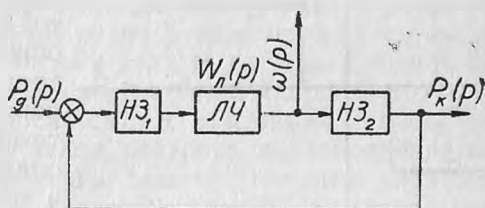


Рис. 55

Оценивая динамические качества системы, нужно прежде всего ответить на вопрос: устойчива данная система или нет, впадает система в режим автоколебаний или таковые отсутствуют? Решение этой задачи облегчается, если отметить следующее обстоятельство. При наборе скорости кораблем возрастает динамическое давление $p_d(t)$, вместе с которым возрастает и компенсационное давление $p_k(t)$. При какой-то установившейся скорости v_i корабля давление, развиваемое центробежным насосом при угловой скорости ω_i вращения его ротора, будет соответствовать какому-то установившемуся значению p_{ki} , которому соответствует точка O_1 на рис. 54. Если система находится на границе устойчивости, т. е. имеет автоколебания, то эти колебания около положения равновесия O_1 будут характеризоваться участком ab характеристики $p_k = p_k(\omega)$, который может быть заменен прямой линией, проходящей через новое начало отсчета O_1 . Тогда можно считать, что центробежный насос для указанного участка является линейным звеном. Протяженность таких участков, обеспечивающих при аппро-

ксимации их одну и ту же ошибку, возрастает с увеличением скорости корабля, которой соответствует угловая скорость ω .

При указанной линеаризации передаточная функция $W_{\lambda}(p)$ линейной части системы, которая в соответствии с рис. 53 и 55 есть

$$W_{\lambda}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p), \quad (37.8)$$

пополнится еще одним сомножителем, соответствующим эквивалентной передаточной функции линеаризованного звена $HЗ_2$.

В этом случае компенсационная система будет нелинейной только за счет первого нелинейного звена, имеющего характеристику, показанную на рис. 56.

Исследование систем с нелинейными характеристиками вида, показанного на рис. 55, разработано и может быть выполнено, в частности, по методу, предложенному Л. С. Гольдфарбом.

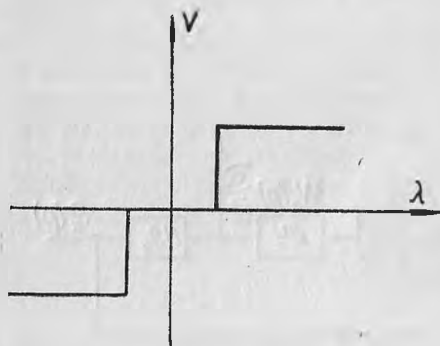


Рис. 56

Несмотря на кажущуюся простоту принципиальной схемы гидравлического метода компенсации, ее аналитическое исследование представляет трудности и по той причине, что линейная часть описывается дифференциальным уравнением довольно высокого порядка. Действительно, передаточная функция линейной части определяется уравнением (37.8), в котором за исключением передаточной функции $W_1(p)$ сильфона все остальные сомножители известны. Передаточная функция

сильфона может быть найдена на основании уравнения (31.22) и имеет вид

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p^3 + T_2 p + 1}, \quad (37.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{S_{\text{эф}}}{m}; \\ T_1 &= \frac{1}{q^2}; \\ T_2 &= \frac{2\sigma}{q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (37.10)$$

Обозначения, входящие в формулы (37.10), те же, что и в § 31.

Подставив передаточные функции (37.9), (37.7) и (37.2) в формулу (37.8), получаем

$$W_{\lambda}(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{p(T_1 p^2 + T_2 p + 1)(B_2 p + 1)(B_3 p + 1)}. \quad (37.11)$$

Итак, линейная часть компенсационной системы соответствует системе, описываемой дифференциальным уравнением пятого порядка.

Исследование компенсационной системы может быть выполнено и на электронной модели, имеющей нелинейные блоки. В этом случае линеаризации не потребуется и картина переходных процессов в системе будет отражена весьма наглядно. Правда, электронная модель дает частные случаи решения для определенных численных значений коэффициентов и постоянных. Однако методом проб при наличии опыта исследования нелинейных систем оптимальное решение может быть найдено довольно-таки быстро.

Аналогичным образом могут быть составлены структурные схемы и для других групп компенсационно-измерительных систем. При этом в каждой такой схеме в линию отрицательной обратной связи будет включено нелинейное звено в виде пружинно-рычажного устройства или центробежного регулятора и т. д. Входной величиной такого нелинейного звена всегда будет скорость хода корабля, но в компенсационных системах с винтовыми пружинами эта скорость будет задаваться углом поворота вала исполнительного двигателя, а в механических компенсационных системах с центробежным регулятором — угловой скоростью вращения приводного двигателя регулятора. В системах с электромагнитным принципом компенсации давления в цепь обратной связи включен электромагнит (см. рис. 52). Развиваемый этим магнитом вращающий момент, как было показано, пропорционален квадрату силы тока в его обмотке. Но величина тока в этой схеме является мерой скорости. Следовательно, поступающая на вход электромагнита скорость преобразуется в компенсационный момент, пропорциональный квадрату скорости, поэтому и этот элемент является нелинейным.

Таким образом, несмотря на конструктивное различие рассмотренных систем компенсации давления, их структурные схемы идентичны и могут быть исследованы указанными выше методами.

§ 38. ИНТЕГРИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА ЛАГОВ

В процессе формирования компенсационного давления в лаге вырабатывается скорость корабля в виде угла поворота вала исполнительного двигателя или в виде угловой скорости вращения двигателя привода центробежных компенсаторов.

В первом случае очень просто создать индикатор скорости. Для этого достаточно с валом исполнительного двигателя связать стрелку, а ее шкалу соответственно проградуировать в узлах. При этом шкала скорости получается равномерной, поскольку угол поворота вала прямо пропорционален скорости хода корабля. Трансляция скорости потребителям осуществляется также просто. Для этого достаточно связать ротор датчика синхронной передачи с валом исполнительного двигателя, и все сельсины-приемники, связанные с этим датчиком, будут показывать скорость корабля. Для получения пройденного расстояния выработанную лагом скорость необходимо интегрировать, что и выполняется с помощью специальных интегрирующих устройств. Наибольшее распространение в лагах нашли функциональные интеграторы.

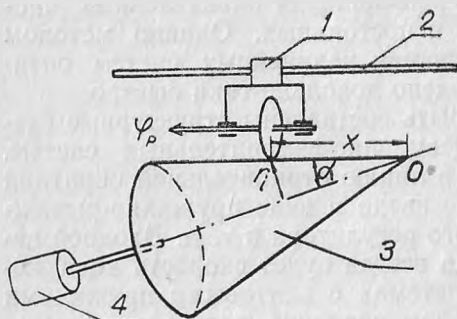


Рис. 57

На рис. 57 представлена принципиальная схема интегратора фрикционного типа. Каретка 1 с роликом при изменении скорости хода корабля перемещается вдоль ходового винта 2 на расстояния, пропорциональные величине приращения скорости корабля. Если скорость равна нулю, то точка касания ролика с поверхностью конуса 3 находится в вершине O последнего. При увеличении скорости ролик

перемещается в сторону основания конуса вдоль его образующей. Для осуществления надежного контакта ролика с поверхностью конуса имеется специальная пружина, не показанная на рисунке, которая все время прижимает ролик к образующей конуса. Двигатель 4, который в лагах обычно называют «двигателем времени», вращает конус с постоянной угловой скоростью ω_d . Так как ось ролика может вращаться в подшипниках каретки, то ролик, увлекаемый силами трения в точке контакта, тоже будет вращаться с какой-то угловой скоростью ω_p . Эту скорость можно определить следующим образом. Если положить, что в точке контакта ролика с конусом проскальзывание отсутствует, то линейная скорость точки на ободе ролика и линейная скорость точки на поверхности конуса в месте контакта будет одна и та же. Ее величина v_M , исходя из рис. 57, есть

$$v_M = \omega_d r_i, \quad (38.1)$$

где r_i — радиус поперечного сечения конуса в точке контакта. Обозначив α угол между образующей и осью симметрии конуса, можно написать, что

$$r_i = x \sin \alpha. \quad (38.2)$$

Величина x смещения ролика относительно вершины конуса воспроизводит в некотором масштабе k скорость хода корабля v :

$$x = kv. \quad (38.3)$$

Скорость (38.1) с учетом равенств (38.2) и (38.3) может быть теперь записана так:

$$v_M = k\omega_d v \sin \alpha. \quad (38.4)$$

С другой стороны, линейная скорость v_M связана с угловой скоростью ω_p вращения ролика соотношением

$$v_M = \omega_p r, \quad (38.5)$$

где r — радиус ролика.

Сравнение формул (38.5) и (38.4) дает

$$\omega_p = \frac{k}{r} \omega_d \sin \alpha \cdot v. \quad (38.6)$$

Так как ω_p является производной от угла φ_p поворота ролика, то равенству (38.6) можно придать другой вид:

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \frac{k}{r} \omega_d v \sin \alpha, \quad (38.7)$$

откуда

$$d\varphi_p = \frac{k}{r} \omega_d v \sin \alpha dt. \quad (38.8)$$

Так как в общем случае $v = v(t)$, угол поворота ролика за некоторый промежуток времени t может быть найден интегрированием формулы (38.8):

$$\varphi_p = \frac{k}{r} \omega_d \sin \alpha \int_0^t v(t) dt. \quad (38.9)$$

Интеграл в правой части (38.9) по своему физическому смыслу представляет собой расстояние, пройденное кораблем за указанное выше время. Поэтому угол φ_p поворота ролика можно рассматривать как проходимое, в некотором масштабе, расстояние. Причем масштабным коэффициентом является множитель, стоящий перед интегралом.

Из формулы (38.9) следует, что чем меньше угол при вершине конуса, тем меньше угол поворота ролика при одном и том же времени интегрирования установившейся скорости. Это указывает на понижение чувствительности интегратора с уменьшением угла α . Очевидно, что чувствительность будет максимальной при $\alpha = 90^\circ$, что соответствует превращению конической поверхности в плоскость. Такие интеграторы тоже находят применение. Однако, повышая чувствительность интегратора, не следует упускать из виду

следующее обстоятельство. Под действием нажимной пружины местом контакта ролика с конусом является не точка, а площадь, имеющая форму овала. При этом малая ось овала будет совпадать с образующей конуса, а большая ось будет перпендикулярной к ней. Пусть ширина овала по образующей будет Δx . Тогда на основании формул (38.1) и (38.2) можно сказать, что ближайшая к вершине O конуса точка контактного овала будет вращаться с линейной скоростью

$$v_x = \omega_d x \sin \alpha, \quad (38.10)$$

а линейная скорость наиболее удаленной от вершины конуса контактной точки будет

$$v_{x+\Delta x} = \omega_d (x + \Delta x) \sin \alpha.$$

Таким образом, точки контактного пятна, расположенные вдоль образующей, имеют разные линейные скорости, и наибольшая разность их

$$\Delta v_x = \omega_d \Delta x \sin \alpha. \quad (38.11)$$

Так как материальные точки поверхности ролика в плоскости контакта не могут двигаться с различными линейными скоростями, то будет иметь место проскальзывание одних точек (ролика) по отношению к другим (конуса). Только в одной точке малой оси контактного пятна будет иметь место трение качения, а не скольжения. Исследования показывают, что указанная точка не совпадает с центром пятна, а смещена от него вдоль образующей конуса. Это не может не сказаться на точности результатов интегрирования, и, видимо, эта ошибка будет тем меньше, чем меньше разность скоростей Δv_x в пределах контактного пятна. Из формулы (38.11) следует, что при одних и тех же размерах пятна проскальзывание будет тем меньше, чем меньше угол α . Таким образом, для уменьшения ошибки от проскальзывания нужно переходить от плоского интегратора к коническому. Правда, это уменьшает, как упоминалось выше, чувствительность интегрирующего устройства. В силу указанных обстоятельств принято считать оптимальным угол $\alpha = 30^\circ$, что обеспечивает довольно-таки высокую чувствительность интегратора и существенно меньшее проскальзывание по сравнению с плоским интегратором.

Величину относительной погрешности в скорости вращения выходного валика интегратора можно получить исходя из формулы (38.6), которая после логарифмирования с последующим интегрированием и заменой дифференциалов переменных их конечными приращениями дает

$$\frac{\Delta \omega_p}{\omega_p} = \frac{\Delta \omega_d}{\omega_d} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (38.12)$$

При выводе формулы (38.12) была использована зависимость (38.3). Величина относительной ошибки в скорости вращения выходного валика интегратора будет равна, по понятным причинам, относительной ошибке в угле поворота этого валика, т. е. относительной ошибке в величине пройденного расстояния, выработанного интегратором.

Из формулы (38.12) следует, что ошибка в пройденном расстоянии зависит от постоянства угловой скорости вращения конуса. Для этой цели, как известно, в лагах применяются часовые регуляторы скорости вращения «двигателей времени». Эта же задача может решаться с помощью стабилизации напряжения и частоты тока, питающего указанный двигатель.

Ошибка, обусловленная отклонениями в размерах радиуса ролика, определяется допуском на изготовление этого элемента и обычно невелика.

Погрешность, возникающая от неточной установки ролика на поверхности конуса, обусловлена рядом причин. Величина Δx зависит прежде всего от ошибки в величине скорости, выработанной узлом скорости, а также от величины мертвого хода в кинематической линии от двигателя скорости к ролику фрикциона. Сюда же следует отнести и погрешность, обусловленную смещением контактной точки в пределах контактного пятна. Уменьшение влияния двух последних причин возможно за счет применения безлюфтовых передач и увеличения твердости материала конуса и ролика для уменьшения площади контактного пятна.

Последнее слагаемое в правой части уравнения (38.12) указывает на то, что отклонение величины угла при вершине конуса от расчетной в большей степени сказывается на величине погрешности в пройденном расстоянии для конусов с малой величиной угла α .

Формула (38.12) не отражает в явном виде еще одного фактора, который существенным образом может влиять на точность работы интегратора. Этим фактором является нагрузка на выходном валике. Нагрузкой для интегратора являются моменты сил сопротивления счетчика и датчика пройденного расстояния, которые подключаются механическим приводом к выходу интегратора. Так как эти узлы приводятся во вращение силами трения качения в точке контакта конуса с роликом, то момент этих сил, приведенный к оси вращения ролика, должен быть достаточным для преодоления указанных сил сопротивления. Если же момент сил трения качения окажется меньше необходимого, то ролик будет проскальзывать по конусу всеми точками контактного пятна и скорость вращения ролика станет меньше расчетной.

Обозначим теоретическую угловую скорость ролика $\omega_{p,т}$, а его действительная скорость пусть по-прежнему будет ω_p . Тогда величину скольжения удобно характеризовать отношением

$$\frac{\omega_{p,т} - \omega_p}{\omega_{p,т}} = \eta, \quad (38.13)$$

которое принято называть коэффициентом скольжения. Из (38.13) следует, что абсолютная величина ошибки в угловой скорости ролика

$$\Delta\omega_p = \omega_p - \omega_{p.т} = -\eta\omega_{p.т}. \quad (38.14)$$

Но теоретической скорости $\omega_{p.т}$ соответствует выражение (38.6), подставив которое в (38.13), получаем

$$\Delta\omega_p = -\eta \frac{k}{r} \omega_d v \sin \alpha \quad (38.15)$$

или

$$\Delta\omega_p = -\eta \frac{\omega_d}{r} x \sin \alpha. \quad (38.16)$$

Таким образом, к величине относительной ошибки (38.12) необходимо добавить еще ошибку, обусловленную скольжением. Формулы абсолютных величин погрешности (38.15) и (38.16) могут быть использованы для подсчета погрешностей как за счет скольжения, так и за счет отклонений в параметрах α , x , r , ω_d , но для этого следует предварительно разложить в ряд Тейлора строку (38.16), удержав в этом разложении лишь члены не выше первого порядка малости.

Многочисленные экспериментальные исследования показали, что коэффициент η зависит от величины x смещения ролика от вершины конуса. При x , близких к нулю, $\eta \approx 1$, но с ростом x величина коэффициента скольжения резко убывает и начиная с какого-то значения x практически остается постоянной.

Для уменьшения коэффициента скольжения нужно увеличить натяжение пружины, прижимающей ролик к конусу. Но это приведет к возрастанию размеров контактного пятна, что нежелательно.

Принятие необходимых мер, часть из которых была перечислена выше, позволило получить фрикционные интеграторы для лагов с относительной ошибкой, не превосходящей 0,2—0,3%.

При рассмотрении схем механической компенсационной системы с центробежным регулятором и гидравлической системы компенсации давления было установлено, что пройденное кораблем расстояние в этих схемах получить очень просто: подключением к валу двигателя через редуктор десятичного счетчика. Так как угловая скорость вала такого двигателя прямо пропорциональна скорости хода корабля, то, соединив с валом тахогенератор, можно получить индикатор скорости, если к его зажимам подключить вольтметр, шкала которого проградуирована в узлах. Однако такая схема непригодна для передачи скорости на большие расстояния и многим потребителям. Это объясняется тем, что тахогенератор не рассчитан на питание многих потребителей, т. е.

имеет малую мощность. Кроме того, при изменении числа принимающих приборов будет изменяться и величина падения напряжения на зажимах тахогенератора, что неизбежно скажется на показаниях остальных индикаторов.

Рассмотренный выше фрикционный интегратор позволяет помимо интегрирования выполнять еще целый ряд других математических операций, в том числе и дифференцирование. На осуществимость последней операции указывает, например, равенство (36.7), из которого следует, что

$$v = \frac{r}{k\omega_n \sin \alpha} \cdot \frac{d\varphi_p}{dt}, \quad (38.17)$$

т. е. скорость хода корабля пропорциональна производной от угла поворота ролика. Но ранее было отмечено, что угол φ_p является мерой проходимого кораблем расстояния. Тогда формула (38.17) действительно указывает на то, что скорость корабля можно получить дифференцированием с помощью фрикционного устройства проходимого кораблем расстояния. Но для этого нужно построить такую схему включения интегратора, чтобы скорость корабля, мерой которой является величина x смещения ролика относительно вершины конуса, вырабатывалась автоматически.

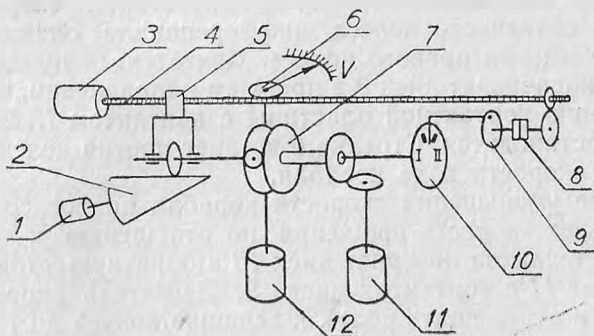


Рис. 58

На рис. 58 представлена принципиальная кинематическая схема, позволяющая решить эту задачу. Двигатель 1 по-прежнему вращает конус 2 с постоянной угловой скоростью. Если ролик, жестко связанный с левым солнечным колесом дифференциала 7, находится на вершине конуса, то его валик не вращается, неподвижно и связанное с ним солнечное колесо. На правое солнечное колесо через коническую зубчатую передачу непрерывно поступает угол поворота ротора сельсина-приемника 11, принимающего пройденное кораблем расстояние. Если принять, что коническая пара имеет передаточное отношение 1 : 1, то угол поворота правого сол-

нечного колеса дифференциала имеет тот же масштаб, что и угол поворота ротора сельсина. Вращающееся солнечное колесо заставит сателлиты катиться по левому колесу. При этом контактный диск 10 подведет один из своих контактов I или II, в зависимости от выбранной стороны вращения сельсина II, к контактной пластине диска 9. Диск 9 связан с приводом «двигателя скорости» 3 через фрикционную муфту 8. Наличие этой муфты предохраняет контактную пластину от поломки контактным диском 10.

Предположим, что в рассматриваемой ситуации замыкание контактной пластины произошло с контактом I. Тем самым окажется замкнутой цепь питания двигателя скорости. Ротор двигателя, приведенный во вращение, заставит перемещаться по жестко с ним связанному ходовому винту 4 каретку 5 ролика. Ролик будет удаляться от вершины конуса в сторону основания, вращая с нарастающей угловой скоростью левое солнечное колесо. Одновременно от ходового винта через червячную передачу будет поворачиваться стрелка указателя скорости 6 и датчик скорости 12. Диск 9 с контактной пластиной тоже получит вращение от ходового винта через зубчатую пару 8, уменьшая нажим пружины на контакт I диска 10. Скорость вращения контактного диска будет уменьшаться, и он остановится совсем, когда ролик фрикциона займет такое положение на конусе, при котором скорость вращения левого солнечного колеса дифференциала окажется равной скорости вращения правого колеса. Двигатель 3 продолжает вращение и поворачивает диск 9 в прежнем направлении, что приведет к размыканию контактной пластины с контактом I. В результате двигатель остановится. Стрелка 6 встанет против деления, соответствующего скорости хода корабля.

В случае уменьшения скорости корабля правое солнечное колесо замедлит скорость вращения по отношению к левому. При этом ось сателлитов повернет диск 10 в обратную сторону и замкнет контакт II с контактом диска 9. Двигатель скорости начнет вращаться и перемещать ролик к вершине конуса до тех пор, пока не наступит равенство скоростей вращения солнечных колес. Ролик займет положение на образующей конуса, соответствующее новому значению скорости, а двигатель скорости вновь остановится.

Рассмотренная схема использования фрикционного «интегратора» для получения скорости движения корабля была применена в лагах типа RB-25. Она не является, конечно, единственной возможной.

В заключение рассмотрим еще одну принципиальную схему трансляции скорости, которая может быть использована вместо указанной на рис. 58. Эта схема построена на индукционных электроэлементах почти при полном отсутствии кинематических связей. На рис. 59 изображен мотор М центробежного регулятора (или насоса, см. рис. 49 и 50), с валом которого жестко связан та-

хогенератор $TГ$ и датчик $ДПР$ со счетчиком $СПР$ пройденного расстояния. При вращении мотора с некоторой постоянной скоростью, пропорциональной скорости v корабля, на зажимах тахогенератора появится напряжение $U_{TГ}$, также пропорциональное скорости v . Это напряжение масштабируется с помощью масштабного вращающегося трансформатора $МВТ$ и подается на вход усилителя в виде напряжения

$$U = kU_{TГ},$$

где k — масштабный коэффициент.

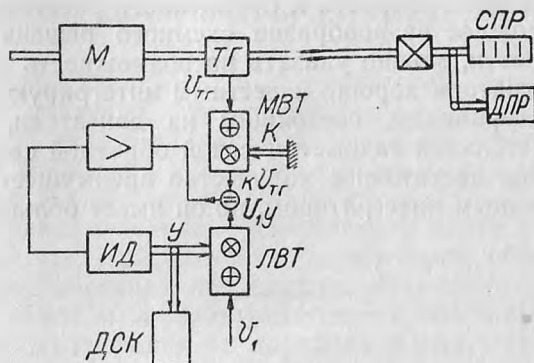


Рис. 59

Сигнал, усиленный в усилителе, заставит вращаться исполнительный двигатель $ИД$, с валом которого связан ротор линейного вращающегося трансформатора $ЛВТ$. Обмотка возбуждения $ЛВТ$ питается от внешнего источника напряжения U_1 . Если вал двигателя повернулся на некоторый угол y , то на выходе $ЛВТ$ появится сигнал $U_{лвт} = U_1y$, который также подается в усилитель навстречу сигналу, снимаемому с $МВТ$. При каком-то значении угла y эти сигналы будут равны по величине и результирующее напряжение на входе усилителя окажется равным нулю, исполнительный двигатель остановится. Угол поворота вала двигателя находится из равенства $U_1y = kU_{TГ}$:

$$y = \frac{k}{U_1} U_{TГ}.$$

Но так как между напряжением на выходе тахогенератора и скоростью корабля существует линейная зависимость $U_{TГ} = k_{TГ}v$, то

$$y = \frac{k k_{TГ}}{U_1} v,$$

где $k_{TГ}$ — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, угол поворота вала исполнительного двигателя является мерой скорости хода корабля. Связав с валом исполнительного двигателя датчик скорости ДСК, можно транслировать скорость корабля любому потребителю. При этом ни количество принимающих приборов, ни расстояния до них не скажутся на точности работы тахогенератора. Следует заметить, что для обеспечения надлежащей точности выработки угла γ необходимо обеспечить стабильность напряжения U_1 , подаваемого на обмотку возбуждения ЛВТ.

Рассмотренными тремя случаями выделения из компенсационно-решающих систем скорости и пройденного расстояния не исчерпывается возможное разнообразие схемного решения указанных задач. В частности, можно указать на возможность замены фрикционного интегратора хорошо известным интегрирующим электро-механическим приводом, состоящим из двигателя, охваченного сильной отрицательной тахометрической обратной связью. У этого привода имеется достаточное количество преимуществ по сравнению с фрикционным интегратором, но он имеет большие габариты.

Глава V. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕГУЛИРОВОК ЛАГОВ

§ 39. УРАВНЕНИЕ КОМПЕНСАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Динамическое давление, измеряемое лагом, как уже известно, отличается от давления, соответствующего истинной скорости движения корабля относительно воды. При рассмотрении принципов компенсации давления в лагах отмечалась возможность варьирования параметров компенсационных систем для автоматического внесения поправок в величину измеряемого лагом давления. В настоящей главе будет рассмотрено теоретическое обоснование регулировок лагов, имеющих компенсационную систему с винтовыми пружинами. Такой выбор объясняется тем, что именно такие лаги получили распространение на кораблях флота. Что же касается ртутных лагов, то в них нет компенсационных систем, а потому отпадает и надобность в их настройке. Исключение погрешности в показаниях таких лагов осуществляется внесением поправок в выработанную скорость с помощью специального ленточного корректора, о порядке работы с которым будет сказано позже.

Итак, целью регулировок лага с пружинной компенсацией динамического давления является такая настройка его центрального прибора, при которой измеренная скорость v_c течения жидкости в районе отверстия приема статического давления автоматически превращалась бы в истинную скорость v_0 движения корабля относительно воды.

Нам уже известно, что величина и знак гидродинамической погрешности зависят от координат места установки отверстия приема статического давления на корабле, а также от скорости хода корабля и его размеров. После установки лага на объекте координаты места размещения приемного устройства больше уже изменяться не будут. Поэтому можно считать, что гидродинамическая погрешность лага будет состоять из двух частей: постоянной и переменной. Следовательно, можно принять, как это отмечалось в § 20, что погрешность лага тоже состоит из двух частей: постоянной C и переменной $f(v_0)$, т. е.

$$\Delta_v = C + f(v_0). \quad (39.1)$$

Аналитическая зависимость погрешности Δ_v от скорости имеет сложный и различный для разных типов кораблей характер. Построить такую компенсационную систему, которая давала бы возможность на любом корабле исключать погрешность на основании общего уравнения (39.1), не представляется возможным. На рис. 60 показаны два частных случая зависимости погрешности лага от скорости. Такие кривые могут быть построены по точкам, соответствующим погрешностям лага, которые определены для нескольких режимов движения корабля, например со скоростями v_{01}, v_{02}, v_{03} .

В § 20 указывалось, что на основании большого опыта, накопленного при эксплуатации лагов, считается допустимым, не внося больших ошибок, точную зависимость (39.1) заменить приближенной (20.15), которая технически относительно просто реализуется в компенсационных системах. На рис. 60 погрешность лага $C + f(v_0)$ заменена линейной функцией $a_v + b_v v_0$. Из рисунка видно, что b_v — это тангенс угла α наклона аппроксимирующей прямой MM к оси абсцисс, ордината точки пересечения которой с осью ординат есть a_v .

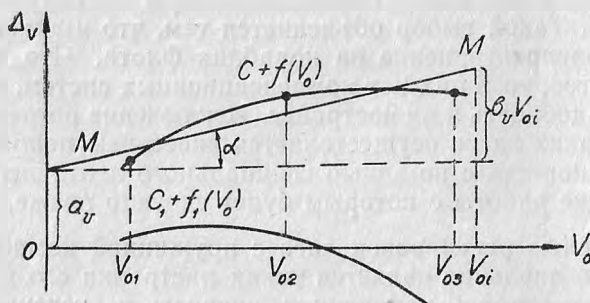


Рис. 60

Переход от лаговой скорости к истинной проще осуществляется не посредством погрешности Δ_v , а с помощью коэффициента Пито (20.16), который отличается от Δ_v на единицу.

Сопоставляя равенства (20.16) и (20.21), замечаем, что $K_d = = K_v^2$ или

$$1 + a_d + b_d v_0 = (1 + a_v + b_v v_0)^2. \quad (39.2)$$

Анализ уравнения (39.2) позволяет сделать очевидный вывод, что это равенство не может иметь место при постоянных значениях a_v, b_v, a_d, b_d , так как в левой части уравнения стоит линейная, а в правой квадратичная функция скорости. Для установления связи между коэффициентами a_v, b_v и a_d, b_d раскроем скобки в правой части (39.2):

$$1 + a_d + b_d v_0 = 1 + a_v (a_v + 2) + b_v (2 + 2a_v + b_v v_0) v_0,$$

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} a_d &= a_v (a_v + 2); \\ b_d &= b_v (2 + 2a_v + b_v v_0). \end{aligned} \right\} \quad (39.3)$$

Формулы (39.3) подтверждают заключение о невозможности равенства (39.2) при постоянстве названных выше коэффициентов, так как, действительно, невозможна точная замена параболической функции прямой линией.

Если нам будет известен хотя бы один коэффициент K_v или K_d , то по показанию лаговой скорости можно определить истинную скорость v_0 и соответствующее ей динамическое давление. Но для того чтобы эта задача решалась автоматически, требуется знать, на какие элементы компенсационной системы и как воздействовать. А для этого необходимо составить уравнение компенсации давления и проанализировать его.

Рассмотрим этот вопрос применительно к лагам ЛГ-4 и МГЛ. Лаги ЛГ-4 и МГЛ, так же как и лаги ЛГ-25, имеют компенсационные системы с винтовыми пружинами, но в отличие от последних регулятор B не имеет собственной пружины, и его воздействие на схему сводится к созданию дополнительных натяжений главной компенсационной пружины.

На рис. 61 представлена принципиальная схема компенсационной системы лага типа ЛГ-4. Динамическое давление p_d воздействуя через шток сильфонного аппарата I на рычаг I , создает относительно точки O_1 вращающий момент

$$M = p_{д.л} S_{эф} n, \quad (39.4)$$

где $S_{эф}$ — эффективная площадь сильфона;

n — плечо силы давления относительно оси вращения рычага I .

Поворачиваясь вокруг оси O_1 , горизонтальный рычаг включает двигатель скорости, который начнет с помощью эксцентрика перемещать ролик 2 из крайнего левого положения по направлению к оси O_2 вращения рычага II . При этом со стороны верхнего рычага на нижний через указанный ролик будет действовать сила F_2 , стремящаяся опустить левое плечо рычага II . Величина этой силы определяется из условия

$$p_{д.л} S_{эф} n = F_2 x, \quad (39.5)$$

где x — плечо силы F_2 относительно оси O_1 .

Из (37.15) получаем

$$F_2 = \frac{p_{д.л} S_{эф} n}{x}. \quad (39.6)$$

С другой стороны, сила F натяжения пружины 4, прикрепленной к правому плечу рычага II на расстоянии d от оси вращения O_2 , будет стремиться поднять левое плечо этого рычага. При этом со стороны нижнего рычага к верхнему через тот же ролик 2 будет прикладываться усилие F_1 , определяемое из соотношения

$$Fd = F_1(L - x), \quad (39.7)$$

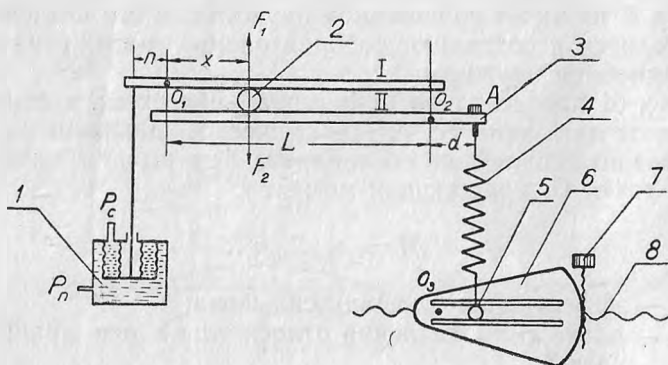
где L — расстояние между опорами O_1 и O_2 .

Из уравнения (39.7) находим

$$F_1 = \frac{Fd}{L - x}. \quad (39.8)$$

При каком-то определенном значении x силы F_1 и F_2 сравняются, и тогда рычажная система вернется в исходное положение, выключив двигатель скорости. При этом условие компенсации давления принимает вид

$$F_1 = F_2. \quad (39.9)$$



Подставляя в (39.9) значения сил (39.8) и (39.6), имеем

$$\frac{p_{\text{д.л}} S_{\text{эф}} n}{x} = \frac{Fd}{L - x},$$

откуда

$$p_{\text{д.л}} S_{\text{эф}} n = \frac{x}{L - x} Fd. \quad (39.10)$$

Заменим $p_{\text{д.л}}$ в соответствии с формулой (20.20):

$$\frac{\rho v_{\text{д}}^2}{2} S_{\text{эф}} n = \frac{x}{L - x} Fd$$

$$\text{или} \quad N v_a^2 = F r(x), \quad (39.11)$$

где обозначено:

$$N = \frac{\rho}{2} S_{\text{эф}} n; \quad r(x) = \frac{x}{L-x} d. \quad (39.12)$$

Из уравнения (39.11) следует, что функция $r(x)$ имеет квадратичный характер, так как F и N — величины постоянные:

$$r(x) = \frac{N}{F} v_a^2. \quad (39.13)$$

Если предположить, что $v_a = v_0$, то формулу (39.13) после небольшого преобразования можно использовать для определения профиля эксцентрика, перемещающего каретку с роликом 2. Но скорость v_a не равна скорости v_0 , и их связывает соотношение (20.22), которым мы и воспользуемся для подстановки в (39.11):

$$(1 + a_d + b_d v_0) N v_0^2 = r(x) F. \quad (39.14)$$

Если эксцентрик рассчитан для случая $K_d = 1$ ($a_d = b_d = 0$), то каждому значению x при заданном постоянном натяжении пружины будет соответствовать какое-то вполне определенное значение истинной скорости. В лабораторных условиях значения истинной скорости могут имитироваться, например, жидкостным манометром.

Предположим, что при некоторой скорости v_{01} функция $r(x)$ имела величину $r(x_1)$. Лаг, установленный на корабле, который движется с той же самой истинной скоростью v_{01} , будет показывать другую скорость, так как в корабельных условиях $K_d \neq 1$. Тогда из уравнения (39.14) следует вывод: поскольку изменилась величина левой части, то должна измениться и правая часть. Но в правой части уравнения при $F = \text{const}$ может изменяться только $r(x)$, и теперь вместо $r(x_1)$ будет какая-то величина $r(x_2) \neq r(x_1)$. Это и означает, что скорость, показываемая лагом, будет отличаться от v_{01} . Для того чтобы сохранить значение $r(x_1)$, в этих условиях имеется только один выход из положения — изменить силу натяжения пружины. Если $K_d < 1$, то натяжение пружины следует уменьшить, а при $K_d > 1$ — увеличить. Силу натяжения пружины можно представить так:

$$F = m(f_0 + z), \quad (39.15)$$

где m — жесткость пружины;

f_0 — начальное натяжение пружины;

z — приращение натяжения пружины, пропорциональное скорости хода корабля,

Дополнительное натяжение создается регулятором В, принцип действия которого заключается в следующем. Нижний конец пружины 4 (см. рис. 61) прикреплен к ролику 5, который может перемещаться в направляющих плоскостях сектора 6, при движении последнего вдоль ходового винта 8. Сектор может поворачиваться относительно оси O_3 , как по ходу часовой стрелки, так и против, с помощью установочного винта 7. При $v_0=0$ ось вращения ролика 5 совпадает с осью O_3 . Если угол поворота α сектора равен нулю, то направляющие плоскости горизонтальны и перемещение сектора влево по ходовому винту при возрастании скорости хода корабля не вызовет изменения натяжения f_0 пружины. В том случае, когда сектор повернут на некоторый угол α , например по часовой стрелке, пружина будет получать дополнительное натяжение z , величину которого можно определить с помощью рис. 62.

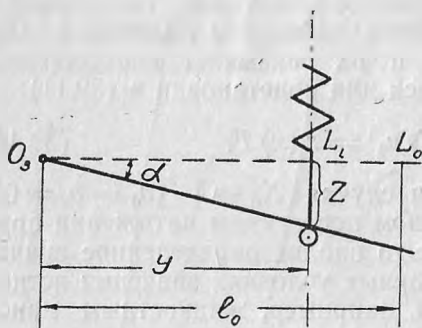


Рис. 62

Пусть $O_3L_0=l_0$ — наибольшее перемещение сектора при возрастании скорости от нуля до $v_{0\max}$, а $O_3L_1=y$ — перемещение сектора, соответствующее скорости $v_0 < v_{0\max}$. Нетрудно установить, что

$$y = \frac{l_0}{v_{0\max}} v_0.$$

Тогда

$$z = y \operatorname{tg} \alpha = q v_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (39.16)$$

где принято обозначение

$$\frac{l_0}{v_{0\max}} = q. \quad (39.17)$$

Теперь уравнение (39.14) с учетом зависимостей (39.15) и (39.16) принимает вид

$$(1 + a_d + b_d v_0) N v_0^2 = m r(x) f_0 + m q r(x) v_0 \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$1 + a_d + b_d v_0 = \frac{\dot{m} r(x)}{N v_0^2} f_0 + \frac{m r(x) q}{N v_0^2} v_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (39.18)$$

Запишем правую часть уравнения (39.18) в виде, аналогичном левой части:

$$1 + a_d + b_d v_0 = 1 + \left(\frac{m r(x)}{N v_0^2} f_0 - 1 \right) + \frac{m r(x) q}{N v_0^2} v_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (39.19)$$

откуда устанавливаем, что

$$a_d = \frac{mr(x)}{Nv_0^2} f_0 - 1; \quad (39.20)$$

$$b_d = \frac{mr(x)q}{Nv_0^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (39.21)$$

Полученное уравнение компенсации в форме (39.19), а также зависимости (39.20) и (39.21) позволяют обосновать методику регулировки лагов.

§ 40. КОМПЕНСАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОГРЕШНОСТИ ЛАГА

Рассмотрим случай, когда $b_d = 0$. Тогда и угол α , как это следует из (39.21), тоже должен быть равен нулю. Уравнение компенсации (39.19) принимает вид

$$a_d = \frac{mr(x)}{Nv_0^2} f_0 - 1.$$

Отсюда следует, что, для того чтобы лаг показывал истинную скорость v_0 , его компенсационная система должна быть настроена так, чтобы выполнялось условие

$$v_0^2 = \frac{mr(x)}{N(1 + a_d)} f_0. \quad (40.1)$$

Так как величина a_d постоянна, то добиться выполнения указанного условия очень просто: нужно подобрать соответствующее начальное натяжение f_0 пружины, которое будет постоянным для всего диапазона скоростей.

Изготовление лага на заводе, а также ремонт в мастерских заканчиваются проверкой его на испытательном стенде. При этом подбор начального натяжения пружины производится при $K_d = 1$ ($a_d = b_d = 0$). Тогда формула (40.1) принимает еще более простой вид:

$$v_0^2 = \frac{mr(x)}{N} f_{00}, \quad (40.2)$$

где под f_{00} понимается начальная установка натяжения пружины, подобранная на заводе. С этим натяжением лаг поступает на корабль. На корабле коэффициент a_d в общем случае не равен нулю, поэтому нужно изменить натяжение f_{00} . Новое натяжение f_0 пружины в принципе может быть рассчитано очень просто, если известно значение a_d . Действительно, сравнением формул (40.2) и (40.1) устанавливаем

$$f_0 = (1 + a_d) f_{00} \quad (40.3)$$

или

$$\Delta f = f_0 - f_{00} = a_d f_{00}. \quad (40.4)$$

Однако в корабельных условиях величина постоянной a_d нам не известна. Но зато имеется возможность при пробегах корабля на мерной линии установить соотношение между лаговой и истинной скоростями для нескольких режимов движения. Нанеся на график, как показано на рис. 60, кривую погрешностей, можно найти коэффициент Пито K_v и, следовательно, постоянную a_v . Пользуясь связью (39.3), формулы (40.3) и (40.4) можно преобразовать к виду:

$$f_0 = [1 + a_v (a_v + 2)] f_{00} = (1 + a_v)^2 f_{00}; \quad (40.5)$$

$$\Delta f = a_v (a_v + 2) f_{00}. \quad (40.6)$$

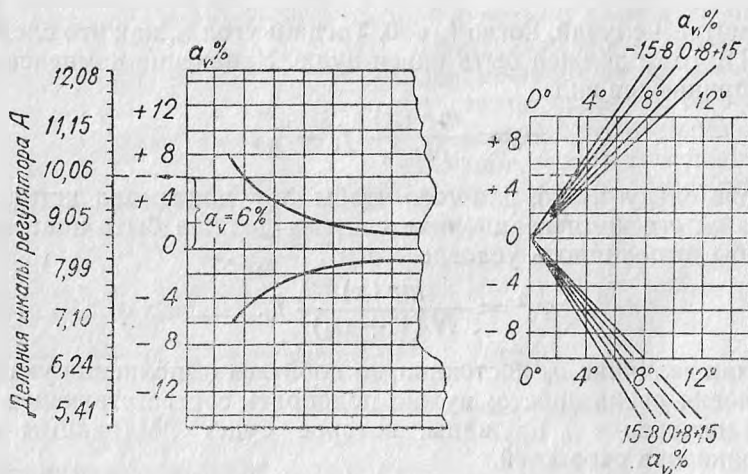


Рис. 63

На основании зависимости (40.5), чтобы не делать каждый раз вычислений, можно построить номограмму, на которой для различных значений a_v нанести соответствующие значения f_0 , выраженные в делениях регулятора A , с помощью которого изменяется начальное натяжение пружины. Эта задача и решается левой частью регулировочной номограммы лага (рис. 63). Для того чтобы найти нужную установку регулятора A , достаточно провести горизонтальную прямую от найденного значения a_v , выраженного в процентах, до пересечения с условной шкалой делений регулятора A . Так, на рисунке показано, что для $a_v = +6\%$ установка шкалы регулятора A должна быть 10,06.

Однако указанная номограмма не рассчитывается, а составляется экспериментальным путем. Аналитический путь был бы пригоден только в том случае, если бы все пружины были совершенно

идентичны, каждая пружина имела бы строго линейную характеристику, не было бы разброса инструментальных ошибок, в пределах допусков, в готовых приборах. Поэтому экспериментальный метод тарировки лага более точен, так как позволяет учесть указанные факторы. Сущность этого метода состоит в том, что на стенде имитируется какая-то лаговая скорость с последовательно меняющейся величиной коэффициента a_v . И для каждого значения a_v регулятором A добиваются того, чтобы лаг показывал истинную скорость, после чего снятый с регулятора отсчет наносится на номограмму. Поэтому и регулировка лага в последующем может выполняться только по той номограмме, которая придана в комплект этого лага. Использование номограммы, взятой из другого комплекта, для регулировки данного лага не приведет к поставленной цели.

Предельные значения a_v в лагах типа ЛГ-4 приняты $\pm 0,15$, или $\pm 15\%$.

§ 41. КОМПЕНСАЦИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОГРЕШНОСТИ ЛАГА

Не останавливаясь на случае $a_d = 0$, $b_d \neq 0$, рассмотрим сразу компенсацию переменной составляющей погрешности, когда a_d не равно нулю. На основании формулы (39.21) можно написать, что при наличии коэффициента $b_d \neq 0$ лаг будет вырабатывать истинную скорость только тогда, когда будет выполняться условие

$$v_0^2 = \frac{mr(x)q}{Nb_d} \operatorname{tg} \alpha, \quad (41.1)$$

а выполнение этого условия возможно только путем подбора определенного значения α при данной величине b_d .

Из формулы (41.1) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Nb_d v_0^2}{mqr(x)},$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Nb_d v_0^2}{mqr(x)} b_d. \quad (41.2)$$

Следовательно, для того чтобы рассчитать углы α для различных значений b_d необходимо задаться какой-то скоростью, причем какой именно — безразлично. Но так как величина $b_d v_0$ должна сниматься с регулировочной номограммы для установки регулятора B , то нужно помнить, при какой скорости рассчитывался угол α для разных b_d на заводе и на ординате этой скорости всегда снимать в последующем величину $b_d v_0$. В качестве расчетной скорости в лагах типа ЛГ-4 принята скорость 40 узл. При фиксиро-

ванном значении расчетной скорости коэффициент, стоящий при b_d в формуле (41.2), будет величиной постоянной, которую можно заранее вычислить. Обозначим

$$Q = \frac{Nv_0^2}{mr(x)q} = \text{const.} \quad (41.3)$$

Тогда для расчета α при $v_0 = \text{const}$ формулу (41.2) можно написать короче:

$$\alpha = \arctg Qb_d. \quad (41.4)$$

Но так как коэффициент b_d может быть определен только в том случае, если известны величины a_v и b_v , то воспользуемся второй формулой (39.3) и заменим b_d соответствующим ему выражением, содержащим указанные коэффициенты:

$$\alpha = \arctg Q [2b_v (a_v + 1) + b_v^2 v_0]. \quad (41.5)$$

Из уравнения (41.5) следует, что угол установки сектора регулятора B определяется не только углом наклона аппроксимирующей прямой, но и ее постоянной составляющей, что, вообще говоря, не учитывалось при регулировках более ранних конструкций лага (ЛГ-25, ЛГ-50). Особенностью этой формулы является и то, что если подставить в нее какие-то численные значения a_v и b_v и вычислить угол α , то он окажется отличным по абсолютной величине от угла, вычисленного для этих же коэффициентов, но взятых с обратным знаком. Эту асимметрию вносит квадратичный член $b_v^2 v_0^2$.

Выбор установочной величины угла α производится по правой части номограммы лага (см. рис. 63). По оси ординат здесь отложены величины $b_v v_0$ в процентах, а по оси абсцисс — углы установки регулятора, выраженные в градусной мере. Для нахождения нужного угла α требуется снять с регулировочной номограммы величину $b_v v_0$ на абсциссе 40 узл. и, определив ее знак, войти в правую часть номограммы. От деления, соответствующего величине $b_v v_0$ следует провести прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с наклонной линией, против которой стоит величина a_v в процентах, найденная при установке регулятора A . От полученной точки пересечения проводится вертикальная прямая вверх, если построение ведется на верхней половине малой координатной сетки, и вниз — при построении на нижней половине. В точке пересечения вертикальной линии с верхней (нижней) границей координатной сетки будет находиться искомое значение угла α . Так, например, на рис. 63 показан порядок нахождения α при $b_v v_0 = +5\%$ и $a_v = -8\%$.

Рассмотрение частного случая, когда $a_d = 0$, не представляет интереса, так как при этом и $a_v = 0$. Величина угла поворота сектора находится точно таким же образом.

В лагах типа МГЛ регулировочные номограммы не содержат малой координатной сетки. Вместо нее имеется постоянная шкала, с которой снимается отсчет установки регулятора B . Для пользования этой шкалой тоже нужно снять с номограммы $b_v v_0$. Но в этом случае указанная ордината снимается не при постоянном значении расчетной скорости, а при специально вычисляемом по формуле

$$v = v_p - \left(\frac{\pm a_v \%}{100} v_p \right), \quad (41.6)$$

где v_p — расчетная скорость лага.

В лагах МГЛ-50 расчетная скорость равна 50 узл. Если подставить это значение v_p в (41.6), то

$$v = 50 - \left(\frac{\pm a_v \%}{2} \right). \quad (41.7)$$

На линии ординат, соответствующей абсциссе (41.7), и снимается величина $b_v v_0$.

Отличие в выборе установочных данных для регуляторов B из регулировочных номограмм для лагов ЛГ-4 и МГЛ объясняется тем, что в последних у регулятора B нет сектора, который нужно разворачивать на угол α . Вместо него там имеется коноид. Поэтому для компенсации переменной составляющей погрешности нужно определить лишь, на какое сечение коноида установить его шуп. Это и делается с помощью номограммы с учетом a_v .

§ 42. ПЕРВАЯ РЕГУЛИРОВКА ЛАГА НА КОРАБЛЕ

После установки на корабле лага, отрегулированного в заводской лаборатории, необходимо произвести его настройку применительно к корабельным условиям. Эта необходимость диктуется тем, что регулировка в заводских условиях, как уже упоминалось, выполняется при $K_d = 1$, а на корабле это равенство в общем случае не выполняется.

Корабельная регулировка лага производится на мерной линии и имеет своим назначением отыскание такого положения регуляторов A и B , при котором величины остаточных погрешностей не выходили бы за пределы допусков, предусмотренных техническими условиями на изготовление и приемку лага.

Обычно корабль совершает пробеги на мерной линии на трех различных скоростях, для которых определяются погрешности лага по формуле

$$\Delta_v = \frac{v_A - v_0}{v_0} 100\%. \quad (42.1)$$

Для исключения влияния течения в районе мерной линии корабль на каждой скорости, при одном и том же числе оборотов машин, совершает три пробега: два пробега в одну сторону (v_1 и v_3) и один — в обратную (v_2). Затем скорость рассчитывается как среднее арифметическое:

$$v = \frac{v_1 + 2v_2 + v_3}{4}, \quad (42.2)$$

причем сами скорости v_1, v_2, v_3 вычисляются по формулам:

$$v_{\text{лi}} = \frac{3600S_{\text{лi}}}{t_i}; \quad v_{\text{oi}} = \frac{3600S_{\text{м}}}{t_i}, \quad (42.3)$$

где $S_{\text{л}}$ — расстояние, пройденное по лагу за время t_i ;

$S_{\text{м}}$ — длина мерной линии;

t_i — время, потребное для пробега между текущими створами мерной линии.

Методика определения скорости корабля на мерной линии излагается в курсах навигации, и поэтому подробнее на этом мы не останавливаемся.

Формулу погрешности лага (42.1) можно представить в несколько ином виде:

$$\Delta_v = \left(\frac{v_{\text{л}}}{v_0} - 1 \right) 100\%, \quad (42.4)$$

откуда можно получить

$$(1 + \Delta_v) 100\% = \frac{v_{\text{л}}}{v_0} 100\%. \quad (42.5)$$

Если сравнить последнюю формулу с (20.16) и (20.18), то приходим к заключению, что формула (42.5) представляет собой не что иное, как коэффициент Пито K_v , выраженный в процентах:

$$100\% + \Delta_v\% = K_v\% = 100\% + a_v\% + b_v v_0\%. \quad (42.6)$$

Отсюда следует, что определенная на мерной линии погрешность Δ_v лага представляет собой сумму

$$\Delta_v = a_v + b_v v_0. \quad (42.7)$$

Если изобразить кривую погрешностей графически, откладывая по оси абсцисс скорость, а по оси ординат погрешность лага, то из этой же кривой можно получить и график K_v , но для этого на основании (42.6) потребуется сместить начало координат вниз на сто процентов. И тогда на регулировочной номограмме (рис. 64) против отсчета погрешности 0 пришлось бы поставить 100%, а вместо +12%, например, было бы написано 112%. В нижней части номограммы на месте —12% стояло бы 88%. Однако такое уточнение, связанное с пересчетом погрешности в коэффициент K_v при той же самой форме кривой, несколько не меняет сущности дела и лишь

осложняет его. Тем не менее в литературе, рассматривая регулировки лага, часто применяют термин «точка сто». Если говорят, например, что лаг отрегулирован на «точке сто», то под этим следует понимать, что регулировка лага производилась в предположении $\Delta\% = 0$, что соответствует $K_v = 100\%$.

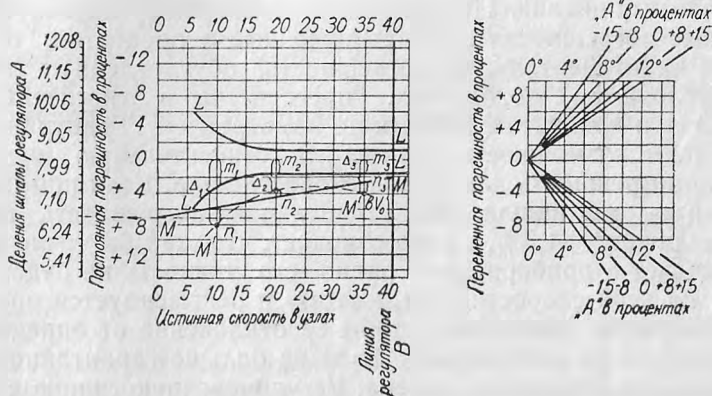


Рис. 64

По трем погрешностям Δ_1, Δ_2 и Δ_3 , полученным на мерной линии, можно нанести соответствующие точки на регулировочной номограмме. Через эти точки можно провести плавную кривую $M'M'$ (см. рис. 64), которая представит приближенный график зависимости погрешности от скорости хода корабля. Но так как регуляторы A и B решают линейную зависимость, то с целью отыскания данных для их установки эту кривую следует аппроксимировать прямой MM , которую принято называть регулировочной линией. Для того чтобы эта аппроксимация выполнялась наилучшим образом, следует придерживаться следующего правила проведения регулировочной линии. Прямая должна проходить примерно на равном расстоянии от точек Δ_1, Δ_2 и Δ_3 , но при этом отрезки ординат n_1, n_2, n_3 , заключенные между регулировочной линией и кривой $M'M'$, должны быть соответственно меньше гарантийных погрешностей m_1, m_2, m_3 . Кривые LL гарантийных погрешностей наносятся на номограмму, чтобы для каждой скорости v_{0i} можно было определить величину допустимой погрешности m_i .

Гарантийные кривые являются отражением того факта, что построить прибор без инструментальных погрешностей невозможно. Так же обстоит дело и в лагах. Сильфон, например, имеет некоторую зону нечувствительности, т. е. при изменении давления меньше некоторой величины длина сильфона не меняется. Кроме того, в линиях кинематической передачи существуют трения и т. д. Все это, вместе взятое, создает некоторый знакопеременный момент

сил сопротивления, на преодоление которого расходуется некоторая часть измеряемого динамического давления. Этим же обстоятельством в значительной мере характеризуется и точность прибора. Поэтому при выдаче технических условий на изготовление лага обязательно указывается, какими должны быть остаточные инструментальные погрешности, которые задаются, как правило, в абсолютных числах. Но так как на номограмму наносятся относительные погрешности лага, выраженные в процентах, то абсолютную инструментальную погрешность, обусловленную техническими условиями, можно тоже пересчитать в относительную и, выразив ее в процентах, нанести на номограмму. Гарантийные кривые и дают возможность определить относительную инструментальную погрешность для любой скорости хода. Если при какой-то скорости v_{0i} мы нашли, что гарантийная погрешность прибора имеет величину $\pm 1,5\%$, то это означает, что, как бы точно ни снимался отсчет с прибора, все равно его точность не будет выше $\pm 1,5\%$ на этой скорости. Вот поэтому и рекомендуется проводить регулировочную линию так, чтобы ее отклонение от определенной на мерной линии погрешности было не больше гарантийного, т. е. укладывалось бы в поле допуска. Регулировочную линию с учетом указанного правила проводят влево до пересечения с осью ординат, а вправо — до пересечения с линией регулятора B^* , соответствующей скорости 40 узл.

По точке пересечения регулировочной линии с осью ординат устанавливается знак и величина a_v (на рис. 64 $a_v = -7\%$) и находится положение шкалы регулятора A ($A=6,80$) указанным ранее способом. Разность ординат точек пересечения регулировочной линии с линиями нулевой скорости и регулятора B представляет собой переменную часть погрешности лага при скорости 40 узл. Знак этой погрешности определяется следующим образом: если регулировочная линия, при наблюдении за нею слева направо, опускается, то $b_v v_0 < 0$, в противном случае $b_v v_0 > 0$. На рис. 64 $b_v v_0 = +5,2\%$. С полученными значениями a_v и $b_v v_0$ входим в малую координатную сетку и описанным в § 41 способом выбираем угол поворота сектора регулятора B ($\alpha = +4^\circ$).

После установки регуляторов A и B в соответствии с найденными отсчетами их шкал на мерной линии определяются остаточные погрешности лага. Если остаточные погрешности не выходят за пределы допуска, то по наблюдаемым данным вычисляется поправка лага по формуле

$$\Delta L = \frac{v_0 - v_{\lambda}}{v_{\lambda}} 100\%. \quad (42.8)$$

В случае, когда остаточные погрешности значительно отличаются от допустимых, регулировку следует выполнить вновь.

* На рис. 64 сохранены в основном все названия, употребляемые заводом-изготовителем в выпускаемой им технической документации по лагу.

§ 43. ПОВТОРНАЯ РЕГУЛИРОВКА ЛАГА

С течением времени у лага, отрегулированного на мерной линии, остаточные погрешности могут измениться и выйти за допустимые пределы. Одной из главных причин этого «разрегулирования», при исправной схеме лага, является изменение гидродинамического поля корабля. На первом после установки лага на корабле выходе на мерную линию был определен коэффициент Пито K_v и в соответствии с ним компенсационная система была отрегулирована так, что скорость по лагу после регулировки $v_{л.р}$ стала равна истинной скорости корабля относительно воды:

$$v_{л.р} = v_0. \quad (43.1)$$

Пользуясь формулой (20.16), равенство (43.1) можно продолжить:

$$v_{л.р} = v_0 = \frac{v_{\lambda}}{K_v}, \quad (43.2)$$

где под v_{λ} понимается скорость, показанная лагом до изменения заводской установки ($k_v = 1$) регуляторов A и B . Поэтому получение истинной скорости можно рассматривать как автоматическое деление в центральном приборе лаговой скорости на коэффициент Пито, определенный на мерной линии.

Пусть по истечении некоторого времени нами было отмечено, что $v_{л.р} \neq v_0$. На основании зависимости (43.2) можно сделать вывод, что при старой настройке компенсационной системы возникли новые условия течения жидкости в районе расположения приемных устройств лага и теперь v_{λ} , которую в этой главе мы отождествляем с v_c , стала какой-то v'_{λ} . По этой причине лаг будет показывать скорость

$$v'_{л.р} = \frac{v'_{\lambda}}{K_v} \neq v_0. \quad (43.3)$$

Для того чтобы скорость по лагу вновь стала равна v_0 , необходимо учесть новое значение K_v коэффициента Пито и настроить так компенсационную систему, чтобы опять выполнялось условие

$$v_{л.р} = v_0 = \frac{v'_{\lambda}}{K'_v}. \quad (43.4)$$

На основании сопоставления соотношений (43.3) и (43.4) можно написать очевидное равенство

$$K_v v'_{л.р} = K'_v v_0$$

или

$$\frac{K'_v}{K_v} = \frac{v'_{л.р}}{v_0}. \quad (43.5)$$

Вычтем из обеих частей равенства (43.5) по единице:

$$\frac{K'_v}{K_v} - 1 = \frac{v'_{л.р}}{v_0} - 1$$

и приведем полученные разности к общему знаменателю:

$$\frac{K'_v - K_v}{K_v} = \frac{v'_{л.р} - v_0}{v_0}. \quad (43.6)$$

Правая часть уравнения (43.6) представляет собой величину новой относительной погрешности лага, а в левой части находится величина относительного изменения коэффициента Пито. Введем обозначения:

$$\frac{v'_{л.р} - v_0}{v_0} = \Delta_v'; \quad K'_v - K_v = \delta K_v. \quad (43.7)$$

Подставив (43.7) в (43.6), получим

$$\delta K_v = \Delta_v' K_v. \quad (43.8)$$

Таким образом, погрешности лага, определенные на мерной линии, позволяют найти не абсолютную величину коэффициента Пито, а только величину его приращения по отношению к предыдущему значению. Это же самое, но в несколько завуалированном виде, мы имели и при первой регулировке лага на корабле. Действительно, компенсационная система нового лага, установленного на корабле, настроена на $K_v = 1$, так как на заводе он отрегулирован на «точке сто». Новое значение коэффициента Пито на корабле в том случае мы обозначили не K'_v , а просто K_v . При этом скорость $v_{л.р}$ обозначалась просто $v_{л.}$. Поэтому если формулу (43.6) записать для первой после завода регулировки, то получим

$$\frac{K_v - 1}{K_v} = \frac{v_{л.} - v_0}{v_0}. \quad (43.9)$$

Но на основании (20.16) и (20.15)

$$K_v - 1 = \delta K_v = a_v + b_v v_0 \quad (43.10)$$

или

$$\delta K_v = \Delta_v. \quad (43.11)$$

Равенство (43.11) отличается от (43.8) тем, что в правой части (43.11) отсутствует коэффициент K_v . Но так как на первой регулировке лага заводское значение K_v равно единице, то указанные формулы абсолютно идентичны. Таким образом, для того чтобы на регулировочной номограмме построить новое значение коэффициента K'_v необходимо найти приращение δK_v этого коэффициента по отношению к его прежнему значению. Величина и знак приращения коэффициента Пито в соответствии с формулой (43.8) опре-

деляются в результате умножения погрешности лага на предыдущее значение коэффициента K_v , снятое с номограммы с помощью старой регулировочной линии для той же скорости, на которой определялась погрешность. Полученное приращение следует сложить с предыдущим значением, и тогда алгебраическая сумма

$$K_v + \delta K_v = K_v'. \quad (43.12)$$

Исходя из сказанного определяется следующий порядок регулировки лага на мерной линии. На каждой из трех скоростей корабль делает по три пробега, и рассчитываются средние лаговые и истинные скорости в соответствии с формулами (42.1), (42.2) и (42.3). Затем вычисляются приращения коэффициента K_v , выраженные в процентах. Вычисление на основании (43.8) ведется по формулам:

$$\begin{aligned} \delta K_{v1} &= \frac{v_{\lambda 1} - v_{01}}{v_{01}} K_{v1} \% ; \\ \delta K_{v2} &= \frac{v_{\lambda 2} - v_{02}}{v_{02}} K_{v2} \% ; \\ \delta K_{v3} &= \frac{v_{\lambda 3} - v_{03}}{v_{03}} K_{v3} \% . \end{aligned} \quad (43.13)$$

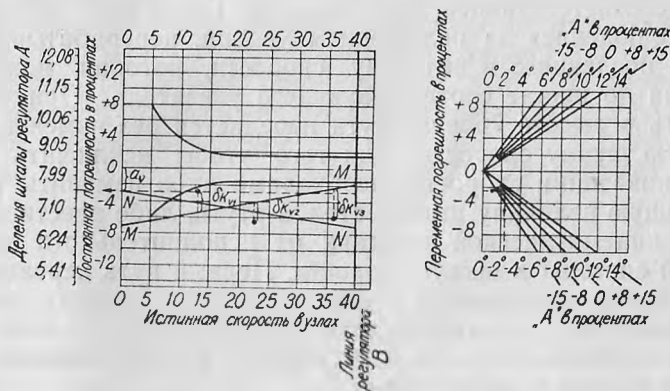


Рис. 65

Чтобы найти старое значение коэффициента, например K_{v1} , нужно измерить в процентах ординату между осью абсцисс и предыдущей регулировочной линией при скорости v_{01} . Полученный результат следует алгебраически сложить со 100%. Эта сумма и будет равна значению K_{v1} , которое можно теперь подставить в первую формулу (43.13). Аналогично определяют K_{v2} и K_{v3} . После того как величины (43.13) будут вычислены, их следует нанести

на номограмму, откладывая от предыдущей регулировочной прямой MM по линии ординат той скорости, для которой вычислено данное приращение (рис. 65). В результате на номограмме появятся три точки, соответствующие новым значениям K'_{v1} , K'_{v2} и K'_{v3} . Теперь, так же как и ранее, следует провести новую регулировочную линию NN , с помощью которой находятся новые установки регуляторов A и B описанным выше порядком. И так поступают при каждой последующей регулировке лага.

В заключение параграфа следует заметить, что в лагах типа МГЛ для еще большего уменьшения оставшихся после регулировки лага погрешностей предусмотрен зубчатый корректор, несложный по своей теории.

§ 44. РЕГУЛИРОВКА РТУТНЫХ ЛАГОВ

В ртутных лагах скорость хода корабля определяется по высоте столба рабочей жидкости в сосуде статического давления. Предположим, что профиль сосудов дифференциального манометра обеспечивает линейную зависимость высоты подъема уровня ртути в измерительном сосуде от скорости хода корабля. Если гидродинамическое поле корабля вносит погрешность в измерение истинной скорости, то и высота уровня ртути будет отличаться от высоты, соответствующей этой скорости. Следящая система, ведущая «наблюдение» за положением уровня, перерабатывает перемещение последнего в величину скорости, которая может быть прочитана по шкале соответствующего указателя. При этом погрешность в высоте уровня ртути передается без изменения и на указанную шкалу скорости. Для того чтобы исключить погрешность в показании скорости, необходимо либо изменить на соответствующую величину высоту столба ртути, либо ввести поправку в линию кинематической передачи от исполнительного двигателя следящей системы к шкале скорости. Первый путь нереален, и поэтому в лагах применяется второй способ, т. е. необходимая поправка вводится автоматически в кинематическую линию с помощью ленточного корректора. Сущность работы корректора сводится в основном к следующему.

В соответствии с формулой (20.14) и (20.15) относительная погрешность лага

$$\Delta_v = \frac{v_1 - v_0}{v_0} = a_v + b_v v_0. \quad (44.1)$$

Абсолютная погрешность измеренной скорости на основании (44.1) будет

$$v_0 \Delta_v = v_1 - v_0 = (a_v + b_v v_0) v_0 \quad (44.2)$$

или

$$v_0 \Delta_v = a_v v_0 + b_v v_0^2. \quad (44.3)$$

Таким образом, если относительная погрешность лага изменяется по линейному закону, то абсолютная погрешность — по квадратичному. С другой стороны, известно, что поправка лага

$$\Delta L = \frac{v_0 - v_{\lambda}}{v_{\lambda}}. \quad (44.4)$$

Формулы (44.1) и (44.4) аналогичны, и поэтому можно считать, что поправка лага тоже может быть представлена линейной зависимостью от скорости

$$\Delta L = \frac{v_0 - v_{\lambda}}{v_{\lambda}} = a_v' + b_v' v_{\lambda}. \quad (44.5)$$

Тогда величина абсолютной поправки скорости, измеренной лагом, есть

$$v_{\lambda} \Delta L = v_0 - v_{\lambda} = (a_v' + b_v' v_{\lambda}) v_{\lambda}$$

или

$$v_{\lambda} \Delta L = a_v' v_{\lambda} + b_v' v_{\lambda}^2. \quad (44.6)$$

Однако известно, что поправка прибора представляет собой его погрешность, взятую с обратным знаком:

$$v_{\lambda} \Delta L = -v_0 \Delta_v. \quad (44.7)$$

Так как поправка и погрешность лага равны по модулю, то сравнение формул (44.3) и (44.6) позволяет сделать заключение, что постоянные a_v' и b_v' погрешности лага не могут быть соответственно равны по модулю постоянным a_v' и b_v' его поправки, что и учитывается в обозначении последних введением штриха. Связь между абсолютными величинами этих постоянных устанавливается очевидным образом на основании сравнения формул (44.3) и (44.6):

$$\left. \begin{aligned} a_v' &= a_v \frac{v_0}{v_{\lambda}}; \\ b_v' &= b_v \left(\frac{v_0}{v_{\lambda}} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (44.8)$$

Поправка лага, как это следует из выражения (44.6), тоже представляет собой квадратичную функцию, но только не истинной, а лаговой скорости. Если построить график зависимости ΔV от скорости по лагу, то это будет ветвь параболы ON , проходящая через начало координат (рис. 66). График абсолютной погрешности лага имел бы примерно такой же вид, но по оси абсцисс следовало бы наносить не лаговую, а истинную скорость, при этом крутизна параболы была бы иной, что следует из (44.8). В нормальных условиях плавания истинная скорость корабля не известна, а известна лишь скорость по лагу. Поэтому для отыскания истинной скорости

следует пользоваться графиком, представленным на рис. 66. Так, некоторой скорости $v_{ли}$ соответствует поправка ΔV_i , измерив которую, можно получить и текущее значение истинной скорости

$$v_{oi} = v_{ли} + \Delta V_i.$$

Процесс снятия поправки с графика можно автоматизировать. Предположим, что кривую ON мы заменили стальной лентой. С этой лентой свяжем планку — щуп. На одном конце щупа расположены два ролика, между которыми проходит указанная лента. Второй конец щупа насажен свободно на ось, жестко связанную с кареткой, способной перемещаться вдоль оси абсцисс. Если скорость корабля равна нулю, то ось качаний щупа совпадает с точкой O_1 , а точка p контакта роликов с лентой совместится с началом координат O . Угол между продольной осью качающегося щупа и осью абсцисс в этом положении равен нулю. По мере увеличения скорости корабля ось O_1 качаний щупа начнет перемещаться вдоль оси абсцисс, а ролики будут отходить от нее, удерживаемые лентой,

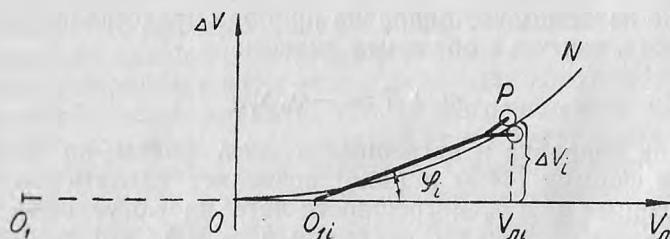


Рис. 66

в результате чего будет возрастать и угол ϕ между щупом и осью абсцисс. Если добиться такого положения, чтобы расстояние от оси ординат до контактной точки роликов с лентой представляло собой в каком-то масштабе лаговую скорость, то угол ϕ поворота щупа был бы мерой поправки лага, так как на основании рис. 66

$$\varphi_i = \arcsin \frac{\Delta V_i}{R}, \quad (44.9)$$

где R — длина щупа, представляющая собой расстояние от оси качаний до контактной точки p .

Однако в выбранной координатной сетке это сделать затруднительно. Дело в том, что перемещение щупа можно рассматривать как состоящее из двух движений: поступательного — вдоль оси абсцисс и вращательного — вокруг оси качаний O_1 . При поступательном движении ролики перемещаются от начала координат на величину скорости по лагу в выбранном масштабе. Поворотом вокруг оси качаний они приводятся в соприкосновение с лентой,

при этом угол поворота щупа должен воспроизвести величину поправки лага для данной скорости.

На рис. 67 показаны два фиксированных положения щупа при скоростях $v_{л1}$ и $v_{л2}$. Дугами окружностей радиуса R показаны траектории перемещения роликов при повороте щупа. Кривая ON по-прежнему представляет собой кривую положительных поправок лага, рассчитанную по формуле (44.6), а ON' — график отрицательных поправок при тех же значениях a_v' и b_v' .

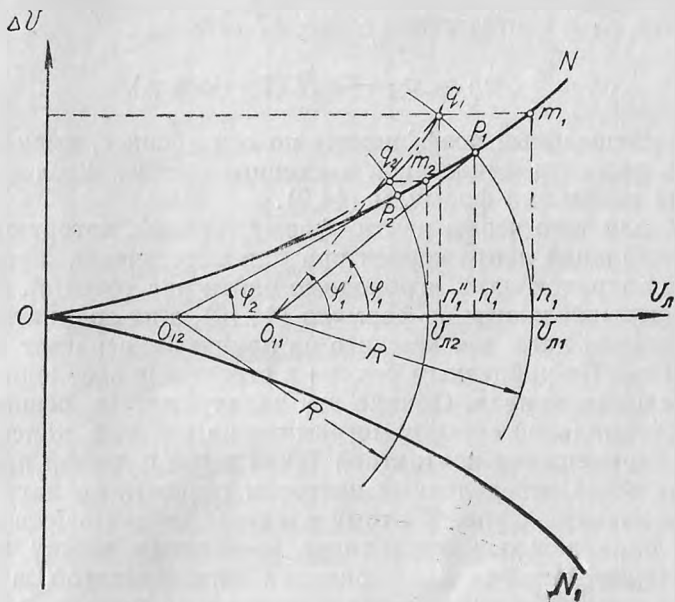


Рис. 67

Предположим, что корабль движется с истинной относительной скоростью v_{01} , лаг показывает скорость $v_{л1} < v_{01}$. Ось качаний щупа переместится при этом в точку O_{11} на оси абсцисс. Лаговой скорости $v_{л1}$ соответствует поправка ΔV_1 , величина которой в выбранном масштабе определяется ординатой $m_1 n_1$. Если перемещение роликов щупа по-прежнему рассматривать по составляющим, то при переходе оси качаний в положение O_{11} контактная точка роликов должна совпасть с n_1 . Затем поворотом щупа на угол φ_1 ролики переводятся в соприкосновение с лентой в точке p_1 . При этом угол φ_1 окажется мерой поправки $p_1 n'_1$, а не $m_1 n_1$. Для того чтобы угол поворота щупа соответствовал действительной поправке $m_1 n_1$, его ролики следует переместить из точки p_1 в точку q_1 , ордината которой будет равна искомой поправке. Точка q_1 получается как результат пересечения траектории перемещения контактной точки

роликов при данной скорости по лагу с прямой, проведенной параллельно оси абсцисс на расстоянии, равном поправке лага.

Введение поправки при скорости $v_{\lambda 2} < v_{\lambda 1}$ потребует перемещения контактной точки не в позицию p_2 , а в точку q_2 , которая получается таким же образом, как и q_1 .

Отсюда следует, что для правильного ведения поправок с помощью качающегося щупа его ролики должны перемещаться не по параболе ON , а по кривой Oq_2q_1 . Особенностью этой кривой является то, что ордината каждой ее точки q_i равна поправке лага ΔV_i , а абсцисса v_{qi} в соответствии с рис. 67 есть

$$v_{qi} = v_{\lambda i} - mR (1 - \cos \varphi_i), \quad (44.10)$$

где m — масштабный коэффициент по оси абсцисс, имеющий размерность скорости, отнесенной к единице длины. Угол φ_i определяется на основании формулы (44.9).

Итак, для того чтобы найти форму кривой, которую следует придать стальной ленте корректора для обеспечения правильного введения поправок лага, необходимо найти ряд точек q_i . Абсциссы этих точек вычисляются по формуле (44.10), а их ординатами являются поправки лага для каждого из принятых в расчет значений скорости $v_{\lambda i}$. По найденным точкам и строится в необходимом масштабе искомая кривая. Однако эту задачу проще решить с помощью специальной сетки-номограммы, на которой нанесены траектории перемещения контактной точки щупа с лентой при фиксированных через определенный интервал скорости по лагу положениях оси качаний щупа. К этому следует добавить совокупность прямых, параллельных оси абсцисс, расстояния между которыми соответствуют какой-то доле поправки лага, принятой за единицу. Тогда построение искомых точек q_i будет выполняться так, как это было указано в пояснении к рис. 67. Регулировочная номограмма, показанная на рис. 68, и представляет собой именно такую сетку. По оси ординат откладываются поправки лага, определяемые на мерной линии, а по оси абсцисс — скорости по лагу. При этом наибольшая скорость соответствует в определенном масштабе, например $M=5:1$, максимальному перемещению контактной точки щупа вдоль оси абсцисс от $v_{\lambda} = 0$ до $v_{\lambda} = v_{\lambda \max}$.

Предположим, что на мерной линии при движении корабля со скоростями по лагу $v_{\lambda 1}=6$ узл., $v_{\lambda 2}=12$ узл. и $v_{\lambda 3}=22,5$ узл. были определены соответствующие им поправки: $\Delta V_1=+1,1$ узл.; $\Delta V_2=+1,6$ узл.; $\Delta V_3=+1,65$ узл.

Полученным поправкам на рис. 68 соответствуют точки 1, 2 и 3. Поскольку кривая фактических поправок лага изменяется довольно плавно, то по полученным точкам 1, 2, 3 можно построить график поправок в избранной нами криволинейной системе координат, причем к указанным точкам следует отнести и начало координат, так как на основании (44.6) при $v_{\lambda}=0$ равна нулю и поправка

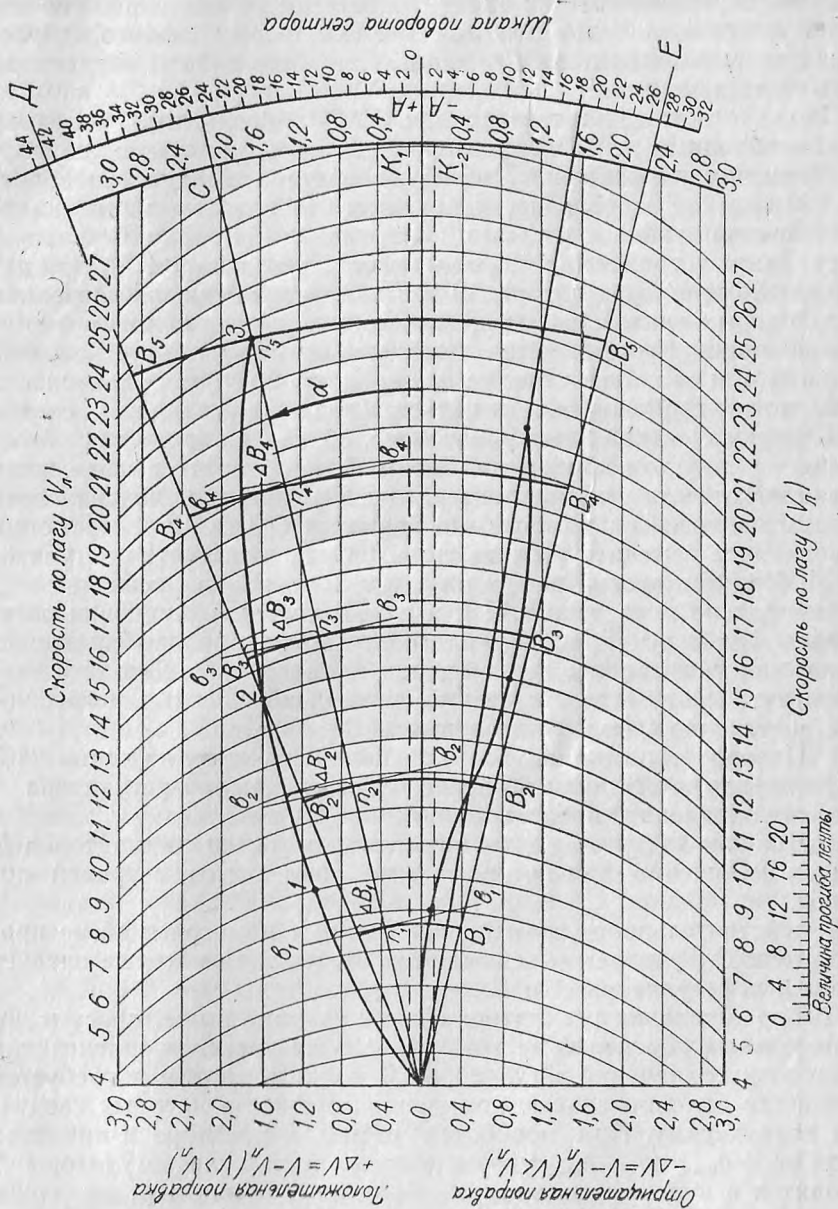


Рис. 68

лага. Построенная кривая абсолютных поправок отличается от рассматривавшейся ранее идеализированной зависимости поправки от скорости. Однако это не имеет существенного значения, так как гибкой ленте можно придать практически форму любого относительно плавно меняющегося графика. Сущность работы корректора от этого не изменится.

После того как получена кривая 0123 абсолютных поправок лага, необходимо ленте корректора придать точно такую же форму. Известно, что основной частью корректора является поворотная рамка с регулировочными винтами. На каждом винте находится ходовая гайка с упорами, охватывающими гибкую стальную ленту. Такое устройство принято называть регулятором B . При нулевом положении регуляторов B их гайки расположены посередине длин ходовых винтов, а лента, охваченная упорами, имеет форму прямой линии. Нижняя часть ленты жестко скреплена с поворотной рамкой и проходит через ее ось вращения. Другая оконечность ленты может свободно перемещаться в верхнем упоре. Если совместить рамку с сеткой номограммы рис. 68, то ось вращения рамки совпадет с началом координат. Верхняя часть рамки имеет сектор со шкалой отсчета угла наклона рамки. Предельные значения этих углов ограничены на номограмме прямыми $ОД$ и $ОЕ$. Устройство, позволяющее изменять угол наклона рамки, называется регулятором A . При наложении рамки на сетку номограммы, если последняя выполнена в масштабе 1 : 1, в случае нулевой установки регуляторов A и B лента совпадет с осью абсцисс, а ось вращения рамки, как указывалось, — с началом координат O . Для того чтобы выгнуть ленту в соответствии с кривой абсолютных погрешностей, достаточно сделать следующее:

1. Поворотом рамки на угол α расположить ленту по линии 03С. Продолжение этой линии до пересечения со шкалой регулятора A позволит определить численное значение угла α .

2. Вращая ходовые винты, передвинуть гайки регуляторов B в такое положение, при котором лента совместится с кривой поправок.

В действительности совмещения рамки с номограммой не производится. С номограммы снимаются отсчеты, на которые следует установить регуляторы A и B .

Выбор установки регулятора A , как указано выше, прост и дополнительных пояснений не требует. Что же касается определения установочных значений регуляторов B , то на номограмме требуется произвести дополнительные построения, сущность которых сводится к следующему. При поворотах рамки корректора в пределах углов от $+\alpha_{\max}$ до $-\alpha_{\max}$ упоры ходовых гаек, если регуляторы B находятся в нулевом положении, будут перемещаться по дугам окружностей B_1, B_2 и т. д. (см. рис. 68). Если рамка корректора занимает, например, положение, показанное на рис. 68, то упомянутые упоры совпадают с точками n_1, n_2, n_3, n_4 и n_5 . Вращение хо-

дового винта любого из регуляторов B_1, B_2 и т. д. вызовет перемещение вдоль его оси соответствующей гайки. Но теперь, при фиксированном значении угла α , упор будет перемещаться не по дуге окружности, а по касательной к ней. Эти касательные обозначены на рисунке символами b_1b_1, b_2b_2 и т. д. Для того чтобы лента корректора в рассматриваемом примере приняла форму кривой абсолютных поправок лага, необходимо гайку регулятора B_1 продвинуть вдоль касательной b_1b_1 до кривой $O123$, т. е. на расстояние ΔB_1 . Гайки остальных регуляторов должны быть перемещены соответственно на расстояния $\Delta B_2, \Delta B_3, \Delta B_4, \Delta B_5$. Эти расстояния, измеренные циркулем, переносят на шкалу величины прогиба ленты, помещенную на номограмме внизу, получая тем самым отсчет, на который следует установить данный регулятор. При этом следует иметь в виду, что если кривая поправок выгнута вниз относительно прямой OC , то найденные отсчеты считаются положительными и устанавливаются по шкалам регуляторов B с черной оцифровкой. В противном случае поправки, вводимые регуляторами B , считаются отрицательными и выставляются по шкалам с красной оцифровкой. В тех случаях, когда кривая абсолютных поправок имеет вид, аналогичный показанному на нижней части номограммы (рис. 68), установка регулятора B_1 будет произведена по красной шкале, а регуляторов B_3 и B_4 — по черной.

Укажем еще на одну особенность номограммы. Предположим, что на корабле, движущемся с истинной скоростью v_0 , установлены два однотипных лага с ленточным корректором. Один из лагов показывает скорость $v_{\Delta 1} < v_0$, а второй — $v_{\Delta 2} > v_0$, т. е. в первом случае абсолютная поправка лага ΔV_1 положительна, а во втором — отрицательна. Наложим условие, что абсолютные величины этих поправок одинаковы, т. е. $|\Delta V_1| = |\Delta V_2|$.

Тогда величина угла (44.9) поворота качающегося щупа будет в обоих случаях одна и та же, поскольку ординаты точек q_1 и q_2 (рис. 69) одинаковы по величине. Предположим также, что закон изменения поправок для обоих лагов может быть представлен формулой (44.6) без второго слагаемого в правой части, т. е. $\Delta V = a_v' v_{\Delta}$.

В этом случае введение поправки в кинематическую линию скорости может быть осуществлено только поворотом рамки на определенный угол α при нулевой установке регуляторов B .

При положительной поправке этот угол на основании рис. 69 может быть определен из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{n_1 q_1}{On_1};$$

при отрицательной поправке — из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{n_2 q_2}{On_2}.$$

Регулировка лага осуществляется на специальном стенде, принципиальная схема которого показана на рис. 70. Дифференциальный манометр 1 центрального прибора 2 лага соединяется с резервуаром 3, заполненным водой, дюритовыми шлангами 6 и 7 с запорными кранами 4 и 5. По шлангам вода из резервуара поступает в полости статического и динамического давлений дифференциального манометра. С этим же резервуаром через тройник трубопровода полного давления соединяется с помощью трубки 8 разделительный баллон 9, который примерно на половину своего объема заливается ртутью. Верхняя половина объема, как и дифференциальный манометр, заполняется водой, поступающей из бачка 3.

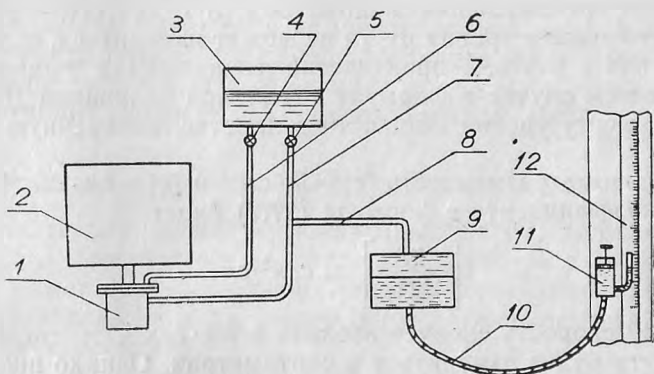


Рис. 70

Разделительный баллон трубопроводом 10 связан с подвижной кареткой 11, которая может перемещаться вдоль шкалы 12 стенда. При заполнении гидравлической схемы водой и при ее продувке (удалении пузырьков воздуха) краны 4 и 5 открыты, а в процессе регулировки открытым остается только кран 4.

Разделительный баллон с кареткой и шлангом 10 представляет собой ртутный манометр чашечного типа, который используется, однако, не для измерения давления, а для его создания. Перемещая каретку манометра, подключенного трубками 8 и 7 к полости полного давления дифференциального манометра, вдоль вертикальной шкалы стенда, можно имитировать динамическое давление нужной величины.

Для того чтобы подать в лаг давление, точно соответствующее интересующей нас скорости хода корабля, необходимо знать зависимость между имитируемой скоростью и высотой уровня ртути над нулем шкалы стенда. Вообще говоря, высоту уровня ртути в каретке следует отсчитывать от поверхности раздела ртуть—вода

в разделительном баллоне. Во время этой выверки производится, в частности, согласование нуля шкалы с высотой уровня ртути в разделительном баллоне, а затем уже все отсчеты проводятся от нуля шкалы стенда.

Искомая зависимость определяется выражением (27.7)

$$H = \frac{\gamma_b}{2g\gamma_p} v^2.$$

В рассматриваемой схеме стенда высота уровня ртути в разделительном баллоне практически не будет изменяться при подъемах каретки. Это объясняется тем, что подъем уровня ртути в разделительном баллоне должен сопровождаться вытеснением воды из трубопровода 7 и 8. Но так как этот трубопровод с одного конца закрыт дифференциальным манометром, а с другого — запорным краном 5, то высота уровня ртути не может измениться, если учесть что вода, как и ртуть, — практически несжимаемая жидкость. Поэтому в нашем случае в формуле (27.7) под величиной H следует понимать высоту уровня жидкости в каретке, измеренную от нуля шкалы.

Если принять размерность $[\gamma] = \Gamma \cdot \text{см}^{-3}$ и $[g] = \text{см} \cdot \text{сек}^{-2}$, то размерность коэффициента в формуле (27.7) будет

$$\left[\frac{\gamma_b}{2g\gamma_p} \right] = \text{сек}^2/\text{см}.$$

Поэтому скорость следует вводить в $\text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$, и тогда высота столба ртути будет измеряться в сантиметрах. Однако шкалы скорости лагов градуируются в узлах, и, следовательно, формулой (27.7) пользоваться удобнее, если в нее подставлять скорость в узлах, а не в $\text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$. Известно, что

$$1 \text{ узл.} = \frac{1 \text{ миля}}{1 \text{ ч}} = \frac{185200}{3600} \text{ см/сек} = 51,5 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Учитывая это соотношение, формулу (27.7) теперь можно написать так:

$$H_{\text{см}} = \frac{\gamma_b}{2g\gamma_p} (51,5)^2 v_{\text{узл.}}^2. \quad (45.1)$$

Шкала стенда разбивается в миллиметрах, поэтому и высоту столба ртути лучше сразу же получить в миллиметрах, для чего (45.1) необходимо умножить на 10, т. е.

$$H_{\text{мм}} = 10 \frac{\gamma_b}{2g\gamma_p} (51,5)^2 v_{\text{узл.}}^2. \quad (45.2)$$

Подставив в формулу (45.2) численные значения $\gamma_b = 1 \Gamma \cdot \text{см}^{-3}$, $\gamma_p = 13,6 \Gamma \cdot \text{см}^{-3}$ и $g = 981 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$, получим

$$H_{\text{мм}} = 0,995 v_{\text{узл.}}^2. \quad (45.3)$$

Так как ранее были более подробно изложены теоретические обоснования регулировок лагов типа ЛГ-4, то и стендовую регулировку рассмотрим применительно к лагу этого типа.

Основным содержанием стендовой регулировки лагов является такая настройка регуляторов A и B , при которой инструментальные погрешности прибора не должны выходить за пределы допуска, установленного техническими условиями на изготовление и приемку лагов данного типа. Установленный на стенде лаг предварительно подготавливается к испытаниям. На этом этапе осуществляется проверка монтажа, сопротивления изоляции, заполнение и продувка гидравлической схемы лага, проверка «статического» и «электрического» нулей и ряд других операций, содержание и порядок которых подробно излагаются в соответствующих инструкциях. По окончании подготовительных работ приступают к регулировке начального натяжения компенсационной пружины. Эту операцию принято называть регулировкой лага на «точке сто», т. е. здесь предполагается, что отношение скорости v_d , показанной лагом, к истинной скорости v_0 , заданной стендом, есть

$$\frac{v_d}{v_0} = K_v = 1. \quad (45.4)$$

Следовательно, скорость, показанная лагом, должна в пределах допуска соответствовать скорости, заданной стендом. Но это условие может быть выполнено лишь в том случае, если регулятор B установлен на нуль, а начальное натяжение пружины имеет необходимую величину.

Порядок работы на «точке сто» заключается примерно в следующем. Установив регулятор B на нуль, регулятор A выставляют на отсчет 10,00 и создают стендом давление, соответствующее 35 узл. Вращением регулятора A добиваются того, чтобы центральный прибор показал тоже 35 узл. Затем, снизив давление до величины, соответствующей 6 узл., вращением регулятора C получают показание на шкале скорости центрального прибора 6 узл. При найденной таким образом установке регуляторов A и C снимается характеристика работы лага на «точке сто», для чего каретка стенда устанавливается в положения, соответствующие различным значениям скорости, начиная с 6 узл. с шагом в 5 узл., кроме первого, который равен 4 узл. При каждой установке скорости снимаются показания лага и определяется его погрешность. Такие замеры делаются при прямом ходе каретки, т. е. от скорости 6 до 40 узл., и при обратном ходе — от 40 до 6 узл. Если все погрешности при прямом и обратном ходе укладываются в поле допуска, то отсчет по шкале регулятора A записывается и на этом регулировка на «точке сто» заканчивается. Если же погрешности выходят за пределы допустимых, то изменяют натяжение пружины и повторяют замеры. Так поступают до тех пор, пока погрешности не уложатся в поле допуска.

Для того чтобы на каждом этапе регулировки не делать вычислений высоты подъема каретки и для упорядочения записей применяются специальные таблицы, приведенные в приложении.

Поскольку при регулировке лага на «точке сто» коэффициент Пито принимается равным единице, то показания лага должны соответствовать истинной скорости, задаваемой стендом. Поэтому высоты H уровня ртути над нулем шкалы рассчитываются по формуле (45.3) и заносятся в третью графу табл. 1 приложения. В первой графе записываются порядковые номера установок каретки, а во второй — указываются истинные скорости, для которых рассчитаны высоты H уровня ртути, приведенные в третьей графе. Остальная часть таблицы разделена пополам для записи показаний и погрешностей лага при прямом и обратном ходе каретки. Допустимая величина погрешности для каждой скорости записывается заранее в графу «Допуск по ТУ».

После того как подобрано начальное натяжение пружины, приступают к подбору числа ее действующих витков. Проверка правильности выбора количества рабочих витков производится с помощью регулятора B , который сначала устанавливается в положение $+7^{\circ}15'$, что соответствует учету положительной переменной погрешности $+10\%$, а затем — в положение $-6^{\circ}34'$, соответствующее исключению переменной отрицательной погрешности -10% . В обоих положениях снимаются характеристики регулятора при прямом и обратном ходе каретки для тех же скоростей, которые приведены в табл. 1. Но в этом случае высоты H установки уровня ртути должны отличаться от указанных в табл. 1. Действительно, предположим, что истинная скорость равна 40 узл. При введенной поправке $+10\%$ лаг тоже должен показывать 40 узл., но для этого следует каретку установить в положение, соответствующее 35 узл. Расчет высоты H уровня выполняется исходя из следующих соображений. Так как переменная часть погрешности принимается неравной нулю, то теперь отношение (45.4) приобретает вид

$$\frac{v_1}{v_0} = K_v = 1 \pm b_v v_0. \quad (45.5)$$

В рассматриваемом случае график коэффициента K_v на регулировочной номограмме будет представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат.

Естественно, что составляющая

$$y = b_v v_0 \quad (45.6)$$

коэффициента Пито будет иметь разную величину при различных скоростях хода. И если говорится, что регулятор B выставлен на введение поправки $+10\%$, то эта численная величина должна относиться к какой-то вполне определенной скорости. В § 43 указывалось, что в качестве такой расчетной скорости в данном лаге

принято 40 узл. Тогда появляется возможность определить величину b_v :

$$b_v v_0 = 0,1,$$

откуда

$$b_v = \frac{0,1}{v_0} = \frac{0,1}{40} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ узл}^{-1}.$$

Используя полученное численное значение b_v и формулу (45.5), можно написать

$$v_{\pm} = (1 \pm 0,25 \cdot 10^{-2} v_0) v_0. \quad (45.7)$$

Подстановка (45.7) в (45.3) дает формулу для расчета высоты столба ртути при установках регулятора в положение $\pm 10\%$:

$$H = 0,995 [(1 \pm 0,25 \cdot 10^{-2} v_0) v_0]^2. \quad (45.8)$$

Табл. 2 и 3 приложения имеют ту же форму, что и табл. 1, но численные значения высот столба ртути получены на основании зависимости (45.8). При этом знак плюс используется при расчете таблицы для установки регулятора на $+10\%$, а знак минус — для установки на -10% . После того как подобрано начальное натяжение пружины и количество рабочих витков, определяются значения положения регулятора A при исключении различных постоянных погрешностей в пределах $\pm 15\%$. Эта операция производится при значении истинной скорости, равном 30 узл., и установке регулятора B на нуль. Величина постоянной погрешности изменяется с шагом в 1% . Так как на этом этапе коэффициент K_v принимается равным $1 + a_v$, то формула для расчета высоты столба ртути получает вид

$$H = 0,995 [(1 + a_v) v_0]^2 \quad (45.9)$$

или

$$H = 895 (1 + a_v)^2, \quad (45.10)$$

где величине a_v придаются последовательно все значения от $-0,15$ до $+0,15$ с шагом в $0,01$. Результаты вычислений сводятся в табл. 4. На стенде последовательно выставляются рассчитанные высоты уровня ртути и в каждой позиции изменением натяжения пружины добиваются показания скорости 30 узл. Отсчет по шкале регулятора заносится в четвертую графу таблицы. Эти цифры затем и надписываются у шкалы регулятора A на регулировочной номограмме.

Для проверки правильности определения положений регулятора снимаются две характеристики при прямом и обратном ходе каретки. Одна характеристика снимается при установке регулятора A на $+15\%$, а вторая — на -15% . Для расчета необходимых высот ртутного столба на стенде пользуются формулой (45.9), которую можно записать теперь так:

$$H = 0,995 [(1 - 0,15) v_0]^2. \quad (45.11)$$

В соответствии с зависимостью (45.11) рассчитываются табл. 5 и 6 приложения, которые аналогичны первым трем таблицам.

Регулировка узла скорости заканчивается проверкой совместной работы регуляторов *A* и *B*, которая осуществляется в соответствии с табл. 7. Здесь расчет высоты ртутного столба должен выполняться по формуле

$$H = 0,995 [(1 + a_v + b_v v_0) v_0]^2. \quad (45.12)$$

Значения коэффициентов a_v и b_v в процентах, для которых следует найти *H*, показаны в четвертой и пятой графах таблицы.

Регулировка лага на стенде заканчивается проверкой точности работы центрального прибора по пройденному расстоянию. Регуляторы лага при этом устанавливаются в положение, соответствующее «точке сто», а кареткой стенда последовательно имитируется движение корабля со скоростями, показанными в четвертой графе табл. 8. С помощью секундомера измеряется время, необходимое для набора счетчиком пройденного расстояния в указателе скорости, количества миль, указанных в одиннадцатой графе табл. 8. Узел пройденного расстояния считается правильно отрегулированным, если замеры пройденного расстояния уложились в пределы допусков, которые записываются в соответствующие графы этой таблицы из «Технических условий на изготовление и приемку лага».

Естественно, что лаги различных типов имеют свои особенности регулировки на стенде, однако указанные выше формулы для расчета высоты ртутного столба остаются справедливыми во всех случаях.

§ 46. ЗАМЕЧАНИЯ О ПОГРЕШНОСТЯХ ОТРЕГУЛИРОВАННОГО ЛАГА В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Показания лага в реальных условиях плавания, как правило, не соответствуют истинным значениям скорости, несмотря на тщательность его регулировки. Это обстоятельство объясняется целым рядом причин.

Прежде всего следует указать на то, что в основу принципа действия лага положено представление о характере потока жидкости, обтекающей приемные устройства лага, как о стационарном потенциальном течении, для которого справедлив интеграл Бернулли—Лагранжа. Такой поток может иметь место, если корабль движется постоянным курсом, с неизменной скоростью, по спокойной поверхности моря, в достаточно глубоководном районе. Гидродинамическую погрешность лага, определенную в этих условиях, принято называть основной гидродинамической погрешностью. Эта погрешность и имела в виду, когда в предыдущих параграфах говорилось о влиянии поля корабля на точность показаний лага.

Реальные условия плавания отличаются от указанных выше, так как корабль маневрирует, изменяя курс и скорость движения, под действием ветра у него появляется дрейф и качка, движение корабля сопровождается рысканием и т. д. Эти особенности движения искажают идеализированную картину стационарного течения, что неизбежно приводит к возникновению дополнительных гидродинамических погрешностей.

Определить экспериментально гидродинамическую погрешность в корабельных условиях без дополнительной аппаратуры не представляется возможным, так как погрешность лага, определяемая на мерной линии по его показаниям, включает в себя ошибки счетно-решающей схемы прибора, а именно ошибки узлов скорости и пройденного расстояния. После регулировки лага на заводе его остаточные погрешности носят в основном случайный характер, хотя не исключена возможность появления повторяющихся ошибок. Последнее замечание в наибольшей степени справедливо для лагов с компенсационной системой, работающей по линейному закону, так как невозможно полностью компенсировать линейной системой погрешность, изменяющуюся по нелинейному закону.

Помимо ошибок, указанных выше, в погрешность лага входит и ошибка определения скорости на мерной линии. Показания лага принято считать удовлетворительными, если остаточные погрешности не выходят за пределы, указанные в технических условиях.

Несколько особое место занимает погрешность, обусловленная изменением плотности забортной воды по сравнению с плотностью, имевшей место в момент регулировки лага. Для оценки величины этой погрешности рассмотрим выражение

$$p_A = \frac{\rho v^2}{2},$$

на основании которого можно заключить, что при одном и том же давлении скорость может иметь различную величину в зависимости от плотности жидкости. Следовательно, если корабль идет постоянным курсом, удерживая постоянство оборотов машин, в районах моря с различной плотностью воды, то и показания лага будут тоже различными. Для установления зависимости величины отклонения скорости от ее действительного значения из-за изменения плотности воды прологарифмируем указанное выше выражение:

$$\ln p_A = \ln \rho + 2 \ln v - \ln 0,5$$

и продифференцируем его по переменным ρ и v , полагая $p_A = \text{const}$:

$$\frac{dv}{v} = -0,5 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Переходя от дифференциалов dv и $d\rho$ к конечным приращениям скорости и плотности жидкости, находим

$$\frac{\Delta v}{v} = -0,5 \frac{\Delta \rho}{\rho} = -0,5 \frac{\Delta \gamma}{\gamma}.$$

Отсюда следует, например, что если лаг отрегулирован в Балтийском море при удельном весе воды $\gamma = 1,004 \text{ т/м}^3$, а затем корабль с этим лагом перешел в Японское море, где $\gamma = 1,028 \text{ т/м}^3$, то относительная погрешность

$$\frac{\Delta v}{v} = -1\%.$$

Таким образом, с этой погрешностью следует считаться, если корабль переходит с одного морского театра на другой с резко отличной плотностью воды. После регулировки лага в новых условиях плавания эта ошибка будет автоматически исключаться компенсационно-измерительной системой лага.

Ранее указывалось на трудность предвычисления основной гидродинамической погрешности даже для идеализированной картины течения жидкости. Вполне понятно, что расчет дополнительных погрешностей сопряжен с еще большими трудностями, т. е. аналитический учет влияния внешних факторов на работу лага весьма сложен и даже практически невозможен в настоящее время. Определенные возможности в изучении этого вопроса открывают статистические методы исследования. Однако в этом направлении сделано пока что еще очень мало. Поэтому здесь мы остановимся лишь на отдельных выводах, полученных на основании эксперимента и опыта эксплуатации лагов.

Этот опыт показывает, в частности, что при качке корабля показываемая лагом скорость колеблется в некоторых пределах, причем эти колебания зависят от ряда причин и схемы приемного устройства лага. Так, например, вертикальная качка вызывает наибольшие колебания скорости в лагах со штатным приемным устройством. Дело в том, что при вертикальных колебаниях корабля возникает скоростной напор воды $\frac{\rho v_B^2}{2}$, где v_B — вертикальная составляющая скорости хода корабля. Этот скоростной напор, изменяющийся по величине и знаку, передается в камеру статического давления дифференциального манометра, тогда как трубка приема полного давления не воспринимает указанный напор. Следовательно, разность давлений, измеряемая манометром, будет изменяться в такт с вертикальной качкой. С другой стороны, трубка приема полного давления при качке совершает вместе с кораблем колебательные движения. В результате вектор мгновенной скорости течения жидкости не совпадает по направлению с продольной осью корабля. Поэтому если раньше, при выводе уравнений работы лага,

мы считали, что в точке приема полного давления относительная скорость воды равна нулю (мертвая точка), то теперь скорость может быть отличной от нуля, так как мертвая точка получает возможность перемещаться по насадке приемной трубки, что неизбежно скажется на показаниях лага.

При килевой качке из-за наличия больших инерционных масс воды в трубопроводе полного давления штевневое устройство также могут иметь место пульсации скоростного напора. Следует заметить, что само волнение изменяет гидродинамическое поле корабля. Здесь имеет место сложный процесс взаимодействия корабля с волною, при котором давление под взволнованной поверхностью моря, зависящее от параметров волны, дополнительно изменяется вблизи корабля за счет отражения волны от его корпуса, деформации волн при огибании корабля, а также в зависимости от скорости относительного движения. Скорость распространения волн относительно корабля в значительной мере зависит от величины курсового угла направления бега волн на корабль. Все это вместе взятое и служит в основном причинами возникновения погрешности при качке корабля. Однако эти погрешности имеют знакопеременный характер, и, как показывает опыт, суммарная ошибка, обусловленная качкой корабля, в величине расстояния, пройденного по лагу, равна или по крайней мере близка к нулю.

Таким образом, влияние качки на точность счисления пути корабля незначительно, но если от лага требуется выдача мгновенной скорости, то здесь следует считаться с появлением значительных ошибок, учесть которые не представляется возможным. Известны случаи, когда погрешность в показании скорости при качке корабля достигала 2 узл. и удерживалась лагом в течение целой минуты. При больших скоростях хода корабля влияние качки на точность показаний лага меньше, чем при движении с малыми скоростями.

Вывод о том, что среднее значение погрешности от качки корабля равно или близко к нулю, относится по существу к лагам с сильфонными дифференциальными манометрами. Что же касается ртутных лагов, то они могут иметь на качке погрешность, среднее значение которой отлично от нуля. Сущность этого явления объясняется следующим образом. Все сделанные ранее выводы о работе ртутного дифференциального манометра относились к случаю, когда оси симметрии сосудов полного и статического давлений были вертикальны и величина перемещения плунжера в измерительном сосуде была мерой скорости хода корабля. Для упрощения рассуждений предположим, что площадь сосуда полного давления очень велика по сравнению с площадью сосуда статического давления и поэтому можно считать, что при вертикальном расположении манометра величина h подъема плунжера над нулевой отметкой равна разности H высот уровней ртути в сосудах полного и статического давлений, т. е. $h=H$. Если же манометр наклонить на какой-то угол θ , то при той же скорости хода $h \neq H$.

Высота столба ртути, уравнивающего динамическое давление, оставаясь неизменной, будет равна проекции на вертикаль расстояния между уровнями поверхностями, отсчитанного по оси измерительного сосуда, т. е.

$$H = h \cos \theta$$

или

$$h = H \sec \theta.$$

Следовательно, при $\theta \neq 0$ $h > H$. Поэтому плунжер переместится в направляющей трубке на большее расстояние от нулевой отметки по сравнению с тем, какое было при $\theta = 0$. В результате наклон манометра будет сопровождаться увеличением скорости, вырабатываемой лагом. Для приближенной оценки возникающей погрешности разложим $\sec \theta$ в ряд, в котором удержим члены не выше второго порядка малости. Тогда

$$h = H \left(1 + \frac{1}{2} \theta^2 \right),$$

откуда

$$\Delta H = h - H = \frac{1}{2} H \theta^2.$$

Эта погрешность соответствует случаю постоянного угла наклона дифференциального манометра. Если предположить, что при качке этот угол меняется по закону

$$\theta = \theta_0 \sin \omega_k t,$$

где θ_0 — амплитуда угла качки;
 ω_k — круговая частота качки,

то

$$\Delta H = \frac{1}{2} H \theta_0^2 \sin^2 \omega_k t$$

или

$$\Delta H = \frac{1}{4} H \theta_0^2 - \frac{1}{4} H \theta_0^2 \cos 2\omega_k t.$$

Среднее значение $\overline{\Delta H}$ за период τ качки будет

$$\overline{\Delta H} = \frac{1}{4} H \theta_0^2,$$

так как

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos 2\omega_k t \, dt = 0.$$

Если в полученной формуле заменить H в соответствии с (27.9), то приходим к величине средней абсолютной погрешности в показании скорости

$$\Delta \bar{V} = \frac{1}{8} v \theta_0^2.$$

Для амплитуды θ_0 , выраженной в градусах, последняя формула принимает вид

$$\Delta \bar{V} = 3,06 \cdot 10^{-4} v (\theta_0^\circ)^2.$$

Для того чтобы избавиться от погрешности в скорости, обусловленной наклонами дифференциального ртутного манометра, его необходимо стабилизировать в плоскости горизонта. Однако это мероприятие приведет к значительному увеличению и без того больших весов и габаритов этих манометров. К тому же следует учитывать, что ртутные лаги устанавливаются на подводных лодках и указанная погрешность может иметь место при нахождении последних в непосредственной близости к водной поверхности или в надводном положении. Но такой режим плавания для современных подводных лодок явление редкое и кратковременное. В основном же лодка совершает переходы на значительных глубинах, куда волнение практически не проникает. Вместе с этим отпадают и нежелательные последствия в работе лага, обусловленные качкой.

Ранее указывалось, что одним из факторов, вызывающих дополнительные гидродинамические погрешности при качке, является смещение мертвой точки на насадке приемника полного давления. Аналогичная картина имеет место и при ветровом дрейфе корабля, с той лишь разницей, что при качке мертвая точка совершает возвратно-поступательное движение по поверхности насадки, а при установившемся дрейфе это смещение есть величина постоянная. Погрешность, обусловленная смещением мертвой точки, зависит от формы насадки, как об этом говорилось в § 24. В качестве примера можно привести приемную трубку лага ЛГ-50. Опыт показал, что при работе с такой трубкой дополнительная гидродинамическая погрешность от дрейфа не превышает 1%, если угол дрейфа $\alpha \leq 5^\circ$.

Погрешность, по характеру аналогичная погрешности от дрейфа, возникает и при установившейся циркуляции корабля. В этом случае трубка приема полного давления перемещается вместе с кораблем не только по направлению его диаметральной плоскости, но и в направлении, к ней перпендикулярном. При этом линейная скорость перемещения по второму направлению зависит от величины угловой скорости циркуляции и от расстояния между трубкой и центром поворотливости корабля. В результате угол скоса потока относительно продольной оси приемной трубки становится отличным от нуля, что вызывает смещение мертвой точки, так же как и при ветровом дрейфе. Следовательно, дополнительная гидродинамическая погрешность на установившейся циркуляции будет су-

ществовать лишь во время циркуляции, с ее прекращением исчезает и погрешность.

Маневр скоростью на постоянном курсе тоже может привести к образованию дополнительной погрешности, которая существует только во время переходного режима движения корабля, т. е. пока действуют ускорения. Погрешность от изменения скорости хода корабля является наиболее характерной для штевневых приемных устройств, и ее происхождение объясняется тем, что в трубопроводе полного давления, проходящем в диаметральной плоскости корабля, сосредоточена относительно большая масса воды. Под действием сил инерции эта масса жидкости создает дополнительное давление в дифференциальном манометре, что и приводит к образованию дополнительной погрешности. Если отверстия приема статического давления расположены рядом с отверстием приема полного давления, то длины трубопроводов полного и статического давлений в этом случае примерно одинаковы и тогда повышение давления за счет сил инерции в одной полости манометра компенсируется аналогичным противодавлением в другой полости и погрешность не возникает.

До сих пор мы рассматривали качественную картину некоторых дополнительных гидродинамических погрешностей, не касаясь инструментальных погрешностей прибора, обусловленных наличием трения, люфтов, отклонениями в размерах отдельных деталей и многими другими причинами. Эти погрешности в известной мере отражают технологическую культуру производства, зрелость конструкторской мысли. Уменьшение этих погрешностей достигается применением более современных материалов, узлов, новыми конструктивными решениями, которые часто приводят к усложнению схемы, и т. д. И если даже предположить, что инструментальные погрешности будут сведены к нулю, то все равно погрешность лага не удастся сделать равной нулю из-за наличия гидродинамических погрешностей, и особенно дополнительных. Эти погрешности еще мало изучены, и их качественная картина не так проста, как это было показано выше.

Несмотря на то что лаги обладают целым рядом погрешностей, порою недостаточно изученных, все же следует признать, что современные гидродинамические измерители скорости хода корабля и пройденного им расстояния являются достаточно совершенными приборами. И если сейчас еще не достигнута необходимая точность счисления пути корабля, то причина этого лежит в плохой изученности течения. Изучение течений в океане показывает, что это явление имеет в основном случайный характер, а поэтому нет оснований надеяться на то, что удастся когда-либо составить такие пособия, из которых можно было бы выбрать на любой момент времени элементы течения с интересующей нас точностью. Поэтому радикальное решение вопроса о повышении точности счисления может быть достигнуто лишь путем создания абсолютных лагов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

$K=1; A=0; B=0$

№	$v_{т}$, узл.	$H_{т}$, мм	Прямой ход			Обратный ход		
			$v_{л}$	$v_{л} - v_{т}$	допуск по ТУ $\pm$	$v_{л}$	$v_{л} - v_{т}$	допуск по ТУ $\pm$
			узл.			узл.		
1	6	35,8						
2	10	99,5						
3	15	223,9						
4	20	398,0						
5	25	621,9						
6	30	895,5						
7	35	1218,9						
8	40	1592,0						

Таблица 2

 $K \neq 1; B = -10\%; A = 0$

№	$v_{\text{т}}$, узл.	$H_{\text{т}}$, мм	Прямой ход			Обратный ход		
			$v_{\text{л}}$	$v_{\text{л}} - v_{\text{т}}$	допуск по ТУ $\pm$	$v_{\text{л}}$	$v_{\text{л}} - v_{\text{т}}$	допуск по ТУ $\pm$
			узл.			узл.		
1	6	34,7						
2	10	94,6						
3	15	207,4						
4	20	395,2						
5	25	546,5						
6	30	766,2						
7	35	1014,9						
8	40	1289,5						

Таблица 3

 $K \neq 1; B = +10\%; A = 0$

№	$v_{\text{т}}$, узел	$H_{\text{т}}$, мм	Прямой ход			Обратный ход		
			$v_{\text{л}}$	$v_{\text{л}} - v_{\text{т}}$	допуск по ТУ $\pm$	$v_{\text{л}}$	$v_{\text{л}} - v_{\text{т}}$	допуск по ТУ $\pm$
			узел.			узел.		
1	6	36,9						
2	10	104,5						
3	15	240,9						
4	20	438,8						
5	25	702,0						
6	30	1034,8						
7	35	1441,5						
8	40	1926,3						

Таблица 4

№	Величина пост. попр., %	Высота рту- тного столба на стенде, мм	Положе- ние регу- лятора А	№	Величина пост. попр., %	Высота рту- тного столба на стенде, мм	Положе- ние регу- лятора А
1	-15	647		17	+1	913	
2	-14	662		18	+2	931	
3	-13	678		19	+3	950	
4	-12	693		20	+4	968	
5	-11	709		21	+5	987	
6	-10	725		22	+6	1006	
7	-9	741		23	+7	1025	
8	-8	758		24	+8	1044	
9	-7	774		25	+9	1064	
10	-6	791		26	+10	1083	
11	-5	808		27	+11	1103	
12	-4	825		28	+12	1123	
13	-3	842		29	+13	1143	
14	-2	860		30	+14	1163	
15	-1	877		31	+15	1184	
16	0	895					

Таблица 5

$$K \neq 1; A = -15\%; B = 0$$

№	v_T , узел.	H_T , мм	Прямой ход			Обратный ход		
			v_T	$v_L - v_T$	допуск по ТУ	v_L	$v_L - v_T$	допуск по ТУ
			узел.		±	узел.		±
1	6	25,9						
2	10	71,9						
3	15	161,7						
4	20	287,5						
5	25	449,3						
6	30	646,4						
7	35	880,6						
8	40	1150,2						

Таблица 6

$$K \neq 1; A = +15\%; B = 0$$

№	v_T , узел.	H_T , мм	Прямой ход			Обратный ход		
			v_L	$v_L - v_T$	допуск по ТУ	v_L	$v_L - v_T$	допуск по ТУ
			узел.		±	узел.		±
1	6	47,4						
2	10	131,6						
3	15	296,1						
4	20	526,3						
5	25	822,4						
6	30	1184,3						
7	35	1612,0						
8	40	2105,4						

Таблица 7

Совместная работа регуляторов А и В

№	v_T , у.зл.	H_T , мм	Поправки				Прямой ход		Допуск по ТУ ±
			А, %	В, %	А, мм	В	v_A	$v_A - v_T$	
1	10	100,5	-2	+10		7°6'			
2	20	422,2	-2	+10		7 6			
3	35	388,9	-2	+10		7 6			
4	6	36,2	+2	-10		6 42			
5	15	216,1	+2	-10		6 42			
6	30	799,7	+2	-10		6 42			
7	10	72,7	-15	+2		1 12			
8	25	462,9	-15	+2		1 12			
9	40	1250,0	-15	+2		1 12			
10	6	47,1	+15	-2		1 36			
11	20	517,2	+15	-2		1 36			
12	35	1566,2	+15	-2		1 36			
13	10	82,4	-10	+4		2 33			
14	20	336,9	-10	+4		2 33			
15	30	774,5	-10	+4		2 33			
16	15	263,5	+10	-4		3 0			
17	25	718,6	+10	-4		3 0			
18	40	1788,8	+10	-4		3 0			

Таблица 8

Проверка узла пройденного расстояния

Изменение напряжения, %	Изменение частоты, %	H_T	v_T	Погреш- ность прибора по скорости, узл.		Показание счетчика пройденного расстояния, мили				s — пройденное расстоя- ние, мили	T_T — теоретическое вре- мя набора s миль, сек	T_n — изме- ренное время наборо ра s миль, сек		$T_n - T_T$ — абсолют- ная погрешность механизма прой- денного расстоя- ния, сек			Относительная погрешность $\frac{T_n - T_T}{T_T} \cdot 100\%$			
				прямой ход	обратный ход	прямой ход	обратный ход	прямой ход	обратный ход			допуск по $T_T \pm$	прямой ход	обратный ход	допуск по $T_T \pm$					
0	0	35,8	6						1	600										
+5	+3	39,5	10						1,5	540										
+5	+3	39,8	20						2,5	450										
-5	-3	89,5	30						3	360										
-5	-3	159,2	40						4	360										

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. Гос. научно-техн. изд-во машиностр. лит., 1962.
 2. Аржанников Н. С., Мальцев В. Н. Аэродинамика. Оборонгиз, 1956.
 3. Губанов А. И. Основы гидродинамики. Изд. ВМАКВ им. А. Н. Крылова, 1952.
 4. Жоховский М. К. Техника измерения давлений и разряджений. Гос. научно-техн. изд-во машиностр. лит., 1952.
 5. Итенберг С. И., Дворников А. П., Балашков И. В. Лаги в автосчислители. «Курс кораблевождения», т. V, кн. 3. Изд. УГС ВМФ. 1964.
 6. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей. ГИТТЛ, 1951.
 7. Кремлевский П. Г. Расходомеры. Машгиз, 1955.
 8. Кузнецов Д. С. Гидродинамика. Гидрометеиздат, 1951.
 9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. ГИТТЛ, 1957.
 10. Павловский А. Н. Измерение расхода и количества жидкостей, газа и пара. Гос. научно-техн. изд-во машиностр. лит., 1951.
 11. Патрашев А. Н. Гидромеханика. Военмориздат, 1953.
 12. Прандль Л. Гидроаэромеханика. Изд-во иностр. лит., 1951.
 13. Технические описания лагов.
 14. Феодосьев В. Н. Упругие элементы точного приборостроения. Оборонгиз, 1949.
 15. Юрьев Б. Н. Экспериментальная аэродинамика. Оборонгиз, 1939.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение	3
--------------------	---

Глава I. Основные сведения из гидростатики

§ 1. Предмет гидромеханики. Основные определения	7
§ 2. Физические свойства жидкости	10
§ 3. Силы, действующие в жидкости	13
§ 4. Гидростатическое давление и его свойства	18
§ 5. Уравнение равновесия жидкости	21
§ 6. Основное уравнение гидростатики	25
§ 7. Вычисление давления в заданной точке	26

Глава II. Основные теоремы гидродинамики

§ 8. Два метода изучения движения жидкости	29
§ 9. Уравнение неразрывности жидкости	32
§ 10. Уравнение движения жидкости в форме Эйлера	35
§ 11. Установившееся течение жидкости. Уравнение Бернулли	41
§ 12. Вихревое течение жидкости	44
§ 13. Потенциальное течение жидкости	52
§ 14. Уравнение движения вязкой жидкости	55
§ 15. Плоское течение жидкости	60
§ 16. Удобообтекаемая форма тела для случая плоского течения жидкости	68
§ 17. Гидродинамическое подобие потоков жидкости	74
§ 18. Частные случаи гидродинамического подобия потоков	76

Глава III. Теоретические основы измерения скорости хода корабля гидродинамическими лагами

§ 19. Принцип действия гидродинамического лага с дифференциальным пружинным манометром	83
§ 20. Гидродинамическая погрешность лага	89
§ 21. Факторы, влияющие на величину коэффициента гидродинамического давления	93
§ 22. Краткие сведения из теории пограничного слоя	101
§ 23. Оценка влияния вязкости жидкости на величину гидродинамической погрешности лага	110

Глава IV. Некоторые вопросы проектирования конструкций гидродинамических лагов

§ 24. Приемные устройства для измерения статического и полного давлений	115
§ 25. О методике определения возможных мест размещения приемных устройств на корабле	128
§ 26. Дифференциальные манометры	131

	Стр.
§ 27. Жидкостные дифференциальные манометры, используемые в лагах	134
§ 28. Инструментальные погрешности дифференциального ртутного манометра	144
§ 29. Пружинные дифференциальные манометры	148
§ 30. Сильфоны	153
§ 31. Дифференциальные уравнения колебаний сильфона	157
§ 32. Системы компенсации динамического давления в лагах	163
§ 33. Механические компенсационные системы с винтовыми пружинами	164
§ 34. Механическая компенсационная система с центробежным регулятором	169
§ 35. Гидравлические компенсационные системы	172
§ 36. Электромагнитные компенсационные системы	175
§ 37. О расчете компенсационных систем	178
§ 38. Интегрирующие устройства лагов	183

Глава V. Теоретические основы регулировок лагов

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
57	16 сверху	$+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)_z$	$+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)_z dZ$
64	3 сверху	$-Q \ln r_2$	$\pm Q \ln r_2$
78	12 сверху	∇r	∇q
88	2 сверху	p_g	p_d
202	21 снизу	$b_v^2 v_0^2$	$b_v^2 v_0$
207	8 снизу	K_v	K_v'
211	18 снизу	a_v'	a_v
211	16 сверху	$v_d \Delta L = -v_0 \Delta v$	$v_d \Delta L = -v_0 \Delta v = \Delta V$
222	15 снизу	35 узл.	36,4 узл.
223	1 снизу	-0,15	$\pm 0,15$

	Стр.
§ 27. Жидкостные дифференциальные манометры, используемые в лагах	134
§ 28. Инструментальные погрешности дифференциального ртутного манометра	144
§ 29. Пружинные дифференциальные манометры	148
§ 30. Сильфоны	153
§ 31. Дифференциальные уравнения колебаний сильфона	157
§ 32. Системы компенсации динамического давления в лагах	163
§ 33. Механические компенсационные системы с винтовыми пружинами	164
§ 34. Механическая компенсационная система с центробежным регулятором	169
§ 35. Гидравлические компенсационные системы	172
§ 36. Электромагнитные компенсационные системы	175
§ 37. О расчете компенсационных систем	178
§ 38. Интегрирующие устройства лагов	183

Глава V. Теоретические основы регулировок лагов

§ 39. Уравнение компенсации динамического давления	193
§ 40. Компенсация постоянной составляющей погрешности лага	199
§ 41. Компенсация переменной составляющей погрешности лага	201
§ 42. Первая регулировка лага на корабле	203
§ 43. Повторная регулировка лага	207
§ 44. Регулировка ртутных лагов	210
§ 45. Стендовая регулировка лагов	218
§ 46. Замечания о погрешностях отрегулированного лага в реальных условиях его использования	224
Приложение	231
Литература	237