Г 791

Гребные винты

Современные методы расчета

27887



ЛЕНИНГРАД «СУДОСТРОЕНИЕ» 1983

ББК 39.455.9
Б13
УДК 629.12.037.001.24

Авторы: **В. Ф. БАВИН, Н. Ю. ЗАВАДОВСКИЙ, Ю. Л. ЛЕВКОВСКИЙ, В. Г. МИШКЕВИЧ**

Рецензент д-р техн. наук **В. Б. ЛИПИС**
Научный редактор д-р техн. наук **А. А. РУСЕЦКИЙ**

БИБЛИОТЕКА
Новосибирского института
инженеров водного транспорта

Б13 **Гребные** винты. Современные методы расчета/В. Ф. Бавин, Н. Ю. Завадовский, Ю. Л. Левковский, В. Г. Мишкевич.— Л.: Судостроение, 1983.— 296 с., ил.

ИСБН

Рассмотрены все основные этапы проектировочного и поверочного расчетов некавитирующих гребных винтов, включая определение периодических сил и давлений на лопастях, винте в целом и корпусе судна в условиях обтекания неравномерным потоком. Описаны методы прогнозирования кавитационных характеристик гребного винта и обусловленных кавитацией вредных эффектов.

Для инженеров и научных работников судостроительной отрасли, а также студентов и аспирантов, специализирующихся в области теории корабля и гидродинамики.

Б $\frac{3605030000-038}{048(01)-83}$ 11—83 39.455.9

© Издательство «Судостроение», 1983 г.

ОТ АВТОРОВ

Разрабатываемые в последние два-три десятилетия методы расчета судовых гребных винтов характеризуются, с одной стороны, существенным расширением круга вопросов, которые они затрагивают, а с другой — усложнением расчетных схем в связи с возможностью применения современных ЭВМ. Обе отмеченные тенденции обусловлены требованиями практики судостроения и необходимостью все более разносторонней и точной предварительной оценки характеристик гребных винтов в процессе их проектирования. Если еще сравнительно недавно основным и почти единственным условием при проектировании было обеспечение наибольшего КПД гребного винта (при достаточной его прочности), то в настоящее время к нему дополнительно предъявляется целый ряд требований, таких, как снижение амплитуд периодических сил и давлений, передаваемых винтом на корпус, устранение вредных последствий развития кавитации на лопастях винта (повышенной вибрации и шума в помещениях, кавитационной эрозии лопастей и направляющих устройств), обеспечение достаточно высоких эксплуатационных характеристик гребного винта и главного двигателя в условиях движения судна на нерегулярном морском волнении. Удовлетворение этим требованиям становится в то же время делом все более сложным вследствие существенного роста водоизмещения судов и мощности их механических установок, произошедшего за последние десятилетия. Поэтому проектант должен иметь в своем распоряжении достаточно надежные расчетные методы, позволяющие оптимизировать основные геометрические элементы гребного винта и в случае необходимости рекомендовать изменение формы кормовых обводов корпуса судна, расположения выступающих частей, а иногда и характеристик главного двигателя с тем, чтобы оптимизировать также и условия работы гребных винтов.

В предлагаемой читателям книге описаны современные методы проектирования судовых гребных винтов, а также методы теоретического расчета их гидродинамических и кавитационных характеристик. При ее написании авторы учитывали, что теория судовых гребных винтов с большой полнотой изложена в монографиях А. М. Басина и И. Я. Миниовича [10] и В. Б. Липиса [56]. В связи с этим в данной книге содержатся лишь те

разделы теории, которые являются основной и неотъемлемой частью описываемых расчетных методов.

Н. Ю. Завадовским написаны гл. 1, 7, § 4.4 и 6.3; В. Г. Мишкевичем — гл. 2, 3 и приложения; В. Ф. Бавиным — гл. 4, 5, а также введение; Ю. Л. Левковским — гл. 6; совместно В. Г. Мишкевичем и В. Ф. Бавиным — § 2.3, 2.5 и 4.3.

Авторы считают приятным долгом отметить, что в разработке некоторых из изложенных в книге расчетных методов принимали участие их коллеги — М. А. Вашкевич, В. В. Дробленков, Г. И. Каневский, С. С. Масленников, А. А. Русецкий и Е. Н. Сыркин, выражают благодарность принимавшим участие в разработке программ расчетов на ЭВМ специалистам и в первую очередь — Л. А. Мухиной, разработавшей такие программы для поверочного расчета винта, расчетов периодических сил и давлений, передаваемых винтом на корпус, и расчета сил, создаваемых винтом на выступающих частях корпуса (совместно с М. Ю. Томницким).

Авторы с благодарностью примут замечания читателей, направленные по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство «Судостроение».

ВВЕДЕНИЕ

Современные методы расчета гребных винтов основаны на вихревой теории крыла и винта, разработанной Н. Е. Жуковским и развитой В. П. Ветчинкиным, В. В. Голубевым, В. М. Лаврентьевым и Н. Н. Поляховым в нашей стране, Л. Прандтлем, Г. Глауэртом, С. Гольдштейном и Г. Лербсом за рубежом.

Фундаментальные работы этих ученых, а также многочисленные работы прикладного характера, появившиеся в 30—50-е годы нашего столетия, обеспечили возможность разработки практических методов проектировочного и поверочного расчетов гребных винтов на базе так называемой вихревой теории несущей линии, основанной на замене лопасти одним несущим вихрем. Однако эта теория без введения дополнительных поправок позволяет рассчитывать лишь узколопастные винты типа авиационных. В то же время относительная ширина лопастей судовых гребных винтов достаточно велика, и с целью учета этого обстоятельства в расчеты, основанные на теории несущей линии, вносились различного рода приближенные поправки (так называемые поправки на влияние решетки [84, 94, 123], поправки на кривизну потока [80, 118]). Более строгие и полные результаты по учету конечности ширины лопасти можно получить, заменив лопасти не одним присоединенным вихрем, а системой таких вихрей, распределенных по всей опорной поверхности лопасти. Реализация такой модели, которую принято называть вихревой несущей поверхностью, из-за значительных вычислительных трудностей не была осуществлена до появления быстродействующих вычислительных машин. Это обстоятельство и обусловило необходимость применения на практике методов расчета, основанных на введении упомянутых приближенных поправок в вихревую теорию несущей линии.

Появление ЭВМ стимулировало разработку как самой теории несущей поверхности применительно к гребным винтам в начале 60-х годов [49, 86, 146], так и многочисленных практических методов расчета, на ней базирующихся [110, 111, 134, 140]. За последние два десятилетия эта теория стала основой не только методов проектирования некавитирующих гребных винтов, но также и методов расчета сил и моментов, возникающих на винтах, периодических давлений, передаваемых винтом на корпус, а также сил, создаваемых им на кормовых высту-

пающих частях корпуса и рулях. Характерно, что при построении указанных методов не использованы какие-либо экспериментальные данные или поправки и они являются в этом смысле чисто теоретическими. Несколько иначе обстоит дело в случае расчетов, связанных с оценкой влияния кавитации, возникающей на лопастях винта, на его гидродинамические характеристики, а также на периодические силы и давления, передаваемые винтом на корпус. Методы таких расчетов, ввиду исключительной сложности математического описания физических процессов образования и захлопывания кавитационных каверн в жидкости, в большинстве своем полуэмпирические. Однако и они базируются на расчетных данных о распределении циркуляции и давления по лопасти винта, получаемых на основе вихревой теории несущей поверхности.

Как уже указывалось, современные методы расчета гребных винтов, основанные на вихревой теории несущей поверхности, можно реализовать лишь с помощью ЭВМ. При этом значительный объем информации (исходной, конечной и получаемой на промежуточных стадиях расчета) общий для различных расчетов. Так, данные о геометрии винта, получаемые в результате его проектировочного расчета, служат исходной информацией при всех остальных расчетах, связанных с определением периодических сил и давлений, создаваемых винтом, а также с оценкой влияния кавитации на характеристики винта. Информация о распределении гидродинамической нагрузки по лопастям, получаемая в результате поверочного расчета винта, используется в расчетах периодических сил и давлений и т. д. Наконец, некоторый объем информации, необходимой при расчетах, целесообразно постоянно хранить в памяти ЭВМ. Эти обстоятельства, а также упомянутая выше необходимость комплексной расчетной оценки характеристик проектируемого винта, делают целесообразным объединение различного рода расчетов в единую систему автоматизированного проектирования гребных винтов (САПР ГВ).

Создание такой системы представляет собой самостоятельную задачу в области развития методов расчета винтов. В связи с широким внедрением программно-управляемого оборудования для изготовления гребных винтов САПР ГВ следует ориентироваться на возможность непосредственного использования выходной информации о геометрии спроектированного винта при разработке управляющих программ для винтообрабатывающих станков с числовым программным управлением (ЧПУ). Это делает необходимым математическое представление геометрии проектируемых гребных винтов. Соответствующие методы расчета в настоящее время разработаны в нашей стране [79].

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Принятые в книге обозначения основных величин соответствуют рекомендациям Международной конференции опытовых бассейнов. В приведенном ниже перечне (табл. 1) даны необходимые пояснения, исключающие различное толкование используемых величин.

Безразмерные величины, соответствующие приведенным в перечне обозначений размерным величинам, обозначены прямой чертой сверху. При переводе размерных величин в безразмерные используются следующие отношения:

— линейных величин к R [$\bar{r} = r/R$, $\bar{c} = c/R$ и т. д.];
— скоростей к V [$\overline{V}_x = V_x/V$, $\overline{w}_x = w_x/V$];
— интенсивности вихревого слоя к V [$\overline{\gamma} = \gamma/V$];
— циркуляции скорости к VR [$\overline{\Gamma} = \Gamma/(VR)$];
— давлений к $\rho V^2/2$ [$\overline{p}^+ = 2p^+/(\rho V^2)$];
— сил к $\rho n^2 D^4$ [$\overline{F}_x = F_x/(\rho n^2 D^4)$];
— моментов к $\rho n^2 D^5$ [$\overline{M}_x = M_x/(\rho n^2 D^5)$];
— мощностей к $\rho n^3 D^5$ [$\overline{P}_D = P_D/(\rho n^3 D^5)$].

Линейные величины, связанные с сечением на данном радиусе, можно отнести к половине хорды. Такие безразмерные величины обозначены волнистой чертой сверху ($\widetilde{\xi} = 2\xi/c$, $\tilde{c}_S = 2c_S/c$ и т. д.).

Индексом «B» отмечены величины, определенные с учетом влияния корпуса судна.

В книге использованы следующие системы координат.

Система координат A_0: O_0, X_0, Y_0, Z_0. Правая прямоугольная неподвижная система координат A_0 связана с покоящейся на бесконечности жидкостью. В момент времени $t = 0$ система A_0 совпадает с корабельной системой A.

Система координат A: O, X, Y, Z (рис. 1). Правая прямоугольная корабельная система координат A связана с судном. Используется при определении размещения гребного винта относительно корпуса. Начало координат расположено в точке пересечения плоскостей мидель-шпангоута, конструктивной ватерлинии и диаметрали. Ось X лежит в диаметральной плоскости и направлена в нос. Ось Y лежит в плоскости конструктивной ватерлинии и направлена на правый борт. Ось Z лежит в плоскости мидель-шпангоута и направлена вниз.

Таблица 1. **Перечень обозначений**

Обозначение	Наименование величины	Пояснение
	Геометрия гребного винта	
A_0	Площадь диска гребного винта, м^2	
A_E	Площадь спрямленной поверхности лопастей, м^2	
A_E/A_0	Дисковое отношение	
A_S	Площадь цилиндрического сечения лопасти, м^2	
c	Ширина спрямленного контура лопасти, длина хорды профиля сечения лопасти, м	
c_S	Отстояние середины хорды профиля сечения от осевой линии, м	$c_S>0$, если середина хорды смещена от плоскости (xy) в положительном направлении оси ξ
d	Диаметр ступицы, м	
D	Диаметр гребного винта, м	
e	Наибольшая толщина профиля сечения лопасти, м	
e_0	Условная наибольшая толщина лопасти на оси гребного винта, м	
e_1	Наибольшая толщина концевого сечения лопасти, м	
f_M	Наибольшая стрелка прогиба средней линии профиля сечения лопасти, м	
F_C	Функция распределения ординат средней линии профиля сечения вдоль хорды	$F_C=\eta_c/f_M$ (max $F_C=1$)
F_T	Функция распределения ординат толщины профиля сечения вдоль хорды	$F_T=\eta_e/e$ (max $F_T=1$)
H	Шаг сечения лопасти, м	Шаг винтовой координаты ξ
r_H	Радиус ступицы, м	
R	Радиус гребного винта, м	
x_R	Смещение вдоль оси гребного винта сечений лопасти (абсцисса точки пересечения координаты ξ с плоскостью (xy), м	Характеристика откидки лопасти
x_S	Смещение вдоль оси гребного винта середины сечений лопасти, м	Абсцисса середины хорды сечения в системе координат E
Z	Число лопастей гребного винта	
δ	Относительная толщина профиля сечения лопасти	$\delta=e/c$
δ_c	Относительная величина стрелки прогиба средней линии	$\delta_c=f_M/c$

Обозначение	Наименование величины	Пояснение
	профиля сечения лопасти (кривизна средней линии)	
η_c	Ордината средней линии профиля, м	В системе координат F
η_e	Местная толщина профиля, м	То же
η^+	Ордината засасывающей поверхности профиля, м	„
η^-	Ордината нагнетающей поверхности профиля, м	„
θ_S	Угол саблевидности лопасти	Угловая координата середины хорды сечения в системе координат E
ρ_L	Радиус кривизны входящей кромки, м	
ρ_T	Радиус кривизны выходящей кромки, м	
φ	Шаговый угол сечения лопасти	
χ_j	Угловое смещение j-й лопасти	$\chi_j = 2\pi j/Z$, $j = 0,1,\ldots, Z-1$
χ_R	Угол наклона осевой линии лопасти	Измеряется от плоскости (yz). Положителен при наклоне лопасти в корму
h_0	Глубина погружения оси гребного винта под свободную поверхность, м	$h_0 = Z_p$
X_p, Y_p, Z_p	Координаты центра диска гребного винта в системе координат A, м	
Z_P	Количество гребных валов	
φ_{SH}	Угол наклона вала в горизонтальной плоскости	
ψ_{SH}	Угол наклона вала в вертикальной плоскости	

Скорости и циркуляция скорости

V	Скорость судна, м/с	
V_A	Поступательная скорость гребного винта, м/с	
V_R	Результирующая скорость потока (с учетом вызванных скоростей), натекающего на элемент лопасти, м/с	
V_S	Скорость судна, уз	
V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}	Проекции на оси системы B вектора $\vec{V}$, м/с	
V_x, V_r, V_θ	Проекции на оси системы E (при нулевом угле поворота нулевой лопасти) вектора $\vec{V}$, м/с	

Обозначение	Наименование величины	Пояснение
F_{nP}	Число Фруда, определенное по радиусу гребного винта	$F_{nP}=V/\sqrt{gR}$
G	Безразмерная циркуляция скорости	$G=\Gamma/(\pi DV)$
n	Частота вращения гребного винта, об/с	
n_m	Частота вращения гребного винта, об/мин	
R_{nS}	Число Рейнольдса сечения лопасти	$R_{nS}=V_R c/\nu$
$\vec{V}$	Вектор скорости внешнего потока в месте расположения гребного винта, м/с	
W_Q	Коэффициент попутного потока, определяемый по равенству момента гребного винта за корпусом и в свободной воде	$W_Q=\dfrac{J_V-J}{J_V}\Bigg\vert K_{QB}=K_Q$
W_T	Коэффициент попутного потока (эквивалентной поступи), определенный по равенству упора гребного винта за корпусом и в свободной воде	$W_T=\dfrac{J_V-J}{J_V}\Bigg\vert K_{TB}=K_T$
w_x, w_r, w_θ	Проекции на оси системы E (при нулевом угле поворота нулевой лопасти) вектора $\vec{w}$, м/с	
$\vec{w}$	Вектор абсолютной (вызванной гребным винтом) скорости жидкости, м/с	
$\vec{w}_\infty$	Вектор вызванной скорости на бесконечности за гребным винтом, м/с	
γ	Интенсивность вихревого слоя, м/с	
Γ	Циркуляция скорости вокруг профиля цилиндрического сечения лопасти, м²/с	
Γ_Z	Суммарная циркуляция скорости вокруг лопастей гребного винта на данном радиусе, м²/с	$\Gamma_Z=Z\Gamma$
ψ	Коэффициент номинального попутного потока за корпусом судна	
ψf_∞	Коэффициент номинального попутного потока трения далеко за корпусом	
ψ_P	Коэффициент потенциального попутного потока корпуса	

Обозначение	Наименование величины	Пояснение
Ω	Угловая скорость вращения гребного винта, рад/с	
i_Q	Коэффициент влияния неравномерности поля скоростей на крутящий момент	
i_T	Коэффициент влияния неравномерности поля скоростей на упор	
J	Относительная поступь гребного винта	$J = V_A/nD$
J_V	Кажущаяся относительная поступь гребного винта	$J_V = V/nD$
α	Кромочный угол атаки профиля сечения лопасти	$\alpha = \varphi - \beta_I$
α_I	Индуктивный угол атаки	$\alpha_I = \varphi + \alpha_0 - \beta_I$
α_0	Угол нулевой подъемной силы	Угол между хордой и направлением нулевой подъемной силы
β	Угол поступи сечения лопасти	$\beta = \operatorname{arctg}(\lambda_t/\bar{r})$
β_I	Угол индуктивной поступи	$\beta_I = \operatorname{arctg}(\lambda_I/\bar{r})$
η_B	КПД гребного винта за корпусом судна	$\eta_B = \frac{\lambda_t}{2}\frac{K_{TB}}{K_{QB}}$
η_D	Пропульсивный коэффициент	$\eta_D = \frac{P_E}{P_D} = \eta_0\eta_H\eta_R$
η_H	Коэффициент влияния корпуса	$\eta_H = \frac{1-t}{1-W_T}$
η_I	Индуктивный КПД гребного винта	
η_R	Коэффициент влияния неравномерности поля скоростей за корпусом судна на пропульсивный коэффициент	$\eta_R = i_T/i_Q$
η_S	Коэффициент механических потерь при передаче мощности на гребной винт	
η_0	КПД гребного винта в свободной воде	$\eta_0 = \frac{\lambda_t}{2}\frac{K_T}{K_Q}$
λ_I	Индуктивная поступь гребного винта	$\lambda_I = \frac{V_A + w_x}{\Omega r - w_\theta}$
λ_t	Коэффициент поступи гребного винта	$\lambda_t = J/\pi$

Обозначение	Наименование величины	Пояснение
σ_S	Число кавитации элемента лопасти, соответствующее результирующей скорости набегающего потока и мгновенной глубине погружения сечения	$\sigma_S = \dfrac{\sigma_0 - 2\bar{r}\cos\theta_P / F_n^2 P}{\overline{V}_x^2 + \left(\dfrac{\pi\bar{r}}{J_V} - \overline{V}_\theta\right)^2}$
σ_0	Число кавитации гребного винта	$\sigma_0 = 2(p_0 - p_V)/\rho V^2$
σ_A	Число кавитации гребного винта по скорости V_A	$\sigma_A = \sigma_0 / \overline{V}_A^2$
	Динамические характеристики	
B	Гидродинамическая характеристика сечения лопасти	$B = \bar{c} C_L / 2$
C_D	Коэффициент сопротивления элемента лопасти	$C_D = \dfrac{2D_S}{\rho V_R^2 c1}$
C_L	Коэффициент подъемной силы элемента лопасти	$C_L = \dfrac{2L_S}{\rho V_R^2 c1}$
C_P	Коэффициент нагрузки гребного винта по мощности	$C_P = \dfrac{2P_D}{\rho V^3 A_0}$
C_T	Коэффициент нагрузки гребного винта по упору	$C_T = \dfrac{2T}{\rho V^2 A_0}$
D_S	Сила сопротивления элемента лопасти, Н	
$\vec{F}$	Вектор гидродинамических сил, действующих на лопасть гребного винта, Н	
K_{DE}	Коэффициент нагрузки гребного винта по тяге	$K_{DE} = J_V / \sqrt{K_E}$
K_E	Коэффициент тяги гребного винта	$K_E = \overline{T}_E$
K_Q	Коэффициент крутящего момента гребного винта в свободной воде	$K_Q = \overline{Q}$
K_T	Коэффициент упора гребного винта в свободной воде	$K_T = \overline{T}$
L_S	Подъемная сила элемента лопасти, Н	
$\vec{M}$	Вектор момента гидродинамических сил, действующих на лопасть гребного винта, Н·м	
P_D	Мощность потребляемая гребным винтом, кВт	$P_D = Q\Omega 10^{-3}$

Обозначение	Наименование величины	Пояснение
P_E	Буксировочная мощность судна, кВт	$P_E = R_T V 10^{-3}$
P_S	Мощность на выходном фланце двигателя или редуктора при номинальных оборотах, кВт	
p^+	Давление на засасывающей стороне лопасти, Па	
p^-	Давление на нагнетающей стороне, Па	
p_0	Давление на оси гребного винта	
Q	Крутящий момент гребного винта, Н·м	
R_{AP}	Сопротивление выступающих частей, Н	
R_T	Полное буксировочное сопротивление судна, Н	
t	Коэффициент засасывания	$t = 1 - \frac{R_T}{\sum T_B}$
T	Упор гребного винта, Н	
T_E	Тяга гребного винта, Н	При установившемся движении $\sum T_E = R_T Z_P$
ε	Коэффициент обратного качества элемента лопасти	$\varepsilon = C_D / C_L$
	Прочие величины	
g	Ускорение свободного падения, м/с²	$g = 9{,}807$
p_V	Давление насыщенных паров воды, Па	В расчетах принято $p_V = 873$ Па
ν	Кинематическая вязкость воды, м²/с	В расчетах принято $\nu = 1{,}50 \times 10^{-6}$ м²/с
ρ	Плотность воды, кг/м³	В расчетах принято: для морской воды — $\rho = 1025$ кг/м³; для пресной воды — $\rho = 1000$ кг/м³

Система координат B: 0_0, x_0, y_0, z_0 (рис. 1, 2). Правая прямоугольная система координат B связана с судном. Используется при определении поля скоростей в диске гребного винта, а также для задания угла поворота лопасти. Начало координат системы B принимается в центре диска гребного винта. Ось x_0 направлена вдоль оси гребного винта в нос судна (в сторону перемещения гребного винта при ходе судна вперед). Положение оси x_0 относительно системы A задано углами наклона линии вала φ_{SH} и ψ_{SH}. Угол φ_{SH} (долгота) определяет поворот

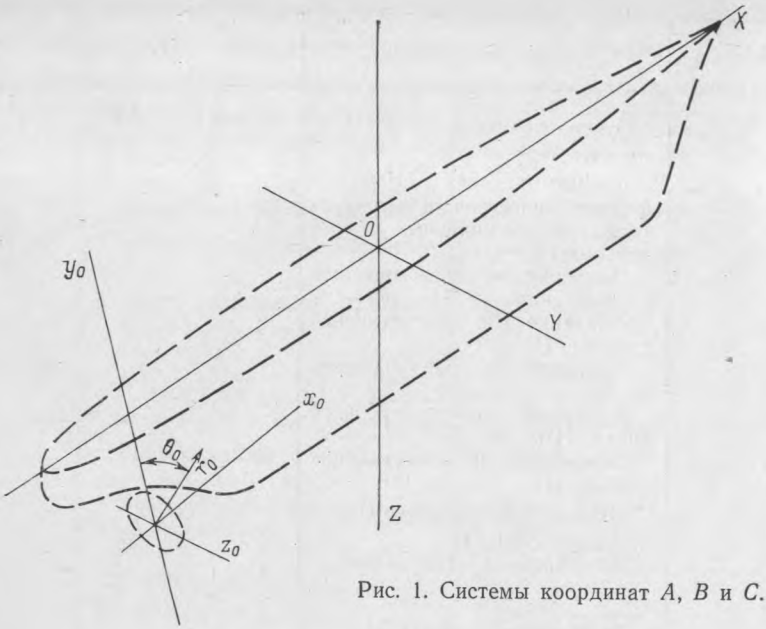


Рис. 1. Системы координат *A*, *B* и *C*.

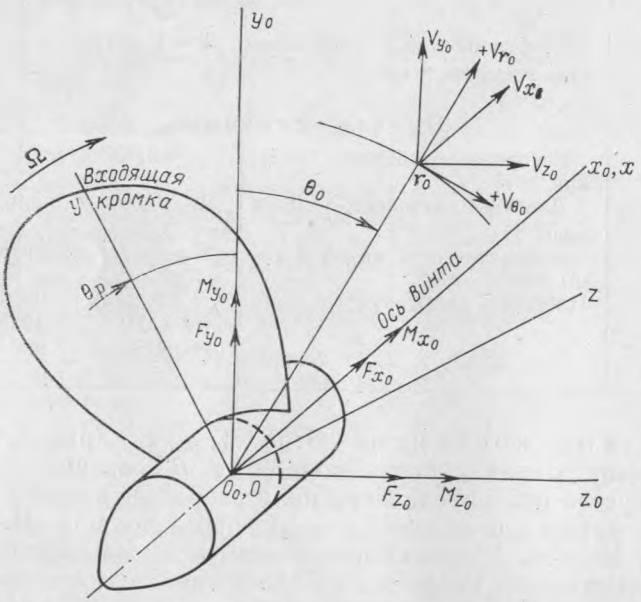


Рис. 2. Системы координат *B*, *C* и *D*.

относительно оси Z проекции оси x_0 на плоскость (XY). Угол φ_{SH} отсчитывают от оси X и принимают положительным при отклонении положительного конца оси x_0 на правый борт. Угол ψ_{SH} (широта) равен углу между осью x_0 и ее проекцией на плоскость (XY). Положительный угол ψ_{SH} соответствует подъему положительного конца оси x_0 относительно плоскости (XY).

Переход от системы B к системе A определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_p + \cos\varphi_{SH}\cos\psi_{SH}x_0 - \cos\varphi_{SH}\sin\psi_{SH}y_0 - \sin\varphi_{SH}z_0; \\ Y &= Y_p + \sin\varphi_{SH}\cos\psi_{SH}x_0 - \sin\varphi_{SH}\sin\psi_{SH}y_0 + \cos\varphi_{SH}z_0; \\ Z &= Z_p - \sin\psi_{SH}x_0 - \cos\psi_{SH}y_0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Система координат C: 0_0, x_0, r_0, θ_0 (см. рис. 1, 2). Цилиндрическая система координат, соответствующая прямоугольной системе B. Переход от системы C к системе B определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0; \\ y_0 &= r_0\cos\theta_0; \\ z_0 &= r_0\sin\theta_0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Система координат D: 0, x, y, z (см. рис. 2). Правая прямоугольная система координат D связана с гребным винтом. Используется для определения геометрии гребного винта. Начало координат системы D совпадает с началом системы B. Ось y направлена так, чтобы осевая линия нулевой лопасти лежала в плоскости (xy). Система D совпадает с системой C, если совмещены оси y_0 и y, т. е. если угол поворота θ_P гребного винта равен нулю. Переход от системы D к системе B определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x; \\ y_0 &= y\cos\theta_p - z\sin\theta_p; \\ z_0 &= y\sin\theta_p + z\cos\theta_p. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Система координат E: 0, x, r, θ (см. рис. 2). Цилиндрическая система координат, соответствующая прямоугольной системе D. В случаях, когда это не может вызвать путаницы, индексы этой системы используются вместо индексов системы C при обозначении проекций вектора поля скоростей. Переход от системы E к системе D определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= x; \\ y &= r\cos\theta; \\ z &= r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

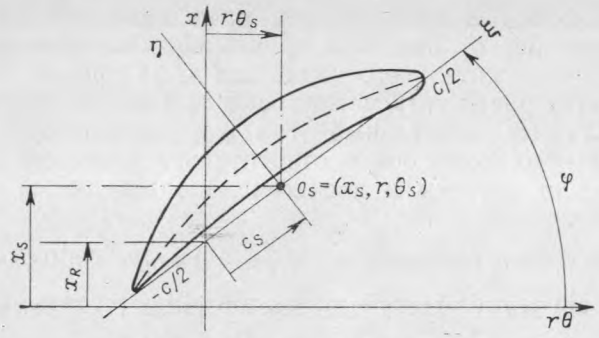


Рис. 3. Система координат F.

Система координат F: o_S, ξ, η (рис. 3). Локальная ортогональная правая система координат, связанная с цилиндрическим сечением лопасти. Используется при определении геометрии профиля сечения лопасти. Начало координат системы F расположено в середине хорды спрямленного цилиндрического сечения лопасти. Координата ξ направлена вдоль хорды к входящей кромке и представляет собой винтовую линию, лежащую на поверхности цилиндра радиуса r с осью x и имеющую шаговый угол по отношению к плоскости, перпендикулярной оси x, равный шаговому углу данного сечения. Координата η в начале координат перпендикулярна ξ и направлена в сторону засасывающей поверхности профиля. Переход от системы F к системе E определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_S + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi = x_R + (c_S + \xi)\sin\varphi + \eta\cos\varphi; \\ r &= r_S; \\ \theta &= \theta_S + \frac{1}{r}(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi) = \frac{1}{r}[(c_S + \xi)\cos\varphi - \eta\sin\varphi], \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где x_S, r_S, θ_S — координаты начала системы F в системе E.

Системы координат для гребных винтов левого вращения. Системы координат D, E и F приспособлены для определения геометрии гребного винта правого вращения. Поскольку, как правило, проводятся расчеты гребных винтов только правого вращения, ограничимся введенными системами координат, лишь упомянув, что при определении геометрии гребного винта левого вращения целесообразно вместо системы D ввести левую систему координат D', сохраняя направления осей x и y.

Глава 1

ГЕОМЕТРИЯ ГРЕБНОГО ВИНТА

Предъявляемые к гребному винту все более разнообразные и жесткие требования приводят к усложнению применяемых на практике конструкций. Еще 20—30 лет назад основная масса гребных винтов имела лопасти с постоянным шагом, симметричным или почти симметричным контуром, прямолинейной откидкой и профилем с плоской нагнетающей поверхностью. Гребной винт современного судна (рис. 1.1) имеет лопасти с переменным шагом и несимметричным контуром, образованные профилями с криволинейной нагнетающей поверхностью.

Геометрия лопастей гребного винта определяется в процессе его проектирования. Затем информацию по геометрии лопастей используют в качестве основной:

— при выполнении любых поверочных расчетов гребного винта;

— в процессе конструкторско-технологической подготовки производства гребного винта.

27822 47

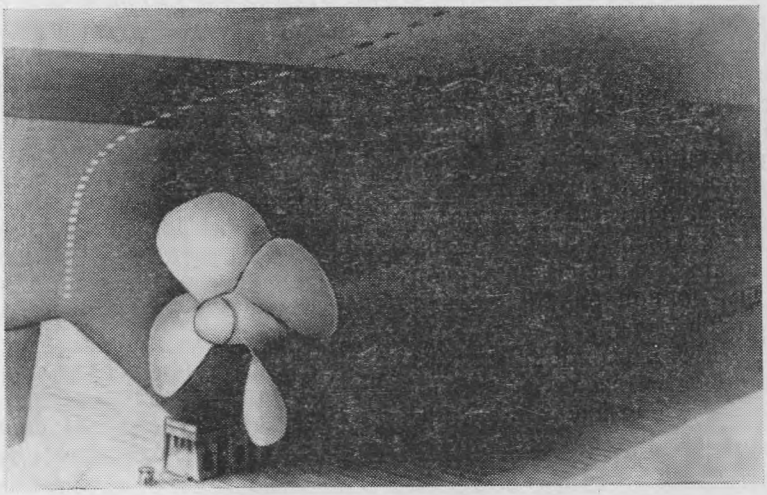


Рис. 1.1. Гребной винт современного быстроходного транспортного судна.

БИБЛИОТЕКА
Новосибирского института
инженеров водного транспорта

До недавнего времени геометрия лопастей гребного винта определялась только его чертежом и приведенной на нем числовой информацией.

Внедрение в производство винтообрабатывающих станков с числовым программным управлением (ЧПУ) [18], а в практику проектирования — чертежных автоматов заставило пересмотреть форму представления результатов проектирования гребного винта и дополнить традиционные чертежи данными по аппроксимации поверхности винта [32]. Это было связано с тем, что исходной информацией для работы указанного программно-управляемого оборудования являются результаты математического представления обрабатываемой или вычерчиваемой поверхности.

Указанные обстоятельства приводят к необходимости рассматривать геометрию гребного винта на основе уравнений его поверхности.

1.1. Геометрические элементы и уравнения поверхности лопасти гребного винта

Геометрия цилиндрического сечения лопасти. Лопасть гребного винта представляет собой крыло сложной формы, закрепленное на ступице. Поскольку работающий гребной винт вращается, чаще всего рассматривают сечение лопасти коаксиальным гребному винту цилиндром. Такое сечение называют цилиндрическим сечением лопасти или просто сечением лопасти.

Профиль каждого сечения лопасти естественно задавать в собственной системе координат. Наиболее удобной для этой цели представляется система координат F. Ее определение, как и других систем координат, используемых для описания геометрии лопасти, было дано ранее (см. раздел «Системы координат»). Здесь лишь подчеркнем, что координата ξ проходит через внутреннюю хорду * профиля сечения. Таким образом, весь профиль всегда расположен между перпендикулярными к оси ξ винтовыми линиями, пересекающими эту ось в тех же точках, что и входящая и выходящая кромки профиля. Расстояние между указанными перпендикулярами (отсчитанное вдоль винтовой оси ξ, естественно) есть длина профиля сечения или, что то же, ширина лопасти на рассматриваемом радиусе, равном радиусу секущего цилиндра.

В связи с тем, что все современные методы проектирования гребных винтов основаны на линеаризации задачи обтекания лопасти, принято форму профиля задавать функциями распределения толщины $\eta_e(\xi)$ и средней линии $\eta_c(\xi)$. В этом случае

---

* Поскольку в книге использовано лишь понятие «внутренняя хорда» (отрезок, соединяющий входящую и выходящую кромки профиля), определение «внутренняя» далее опускается.

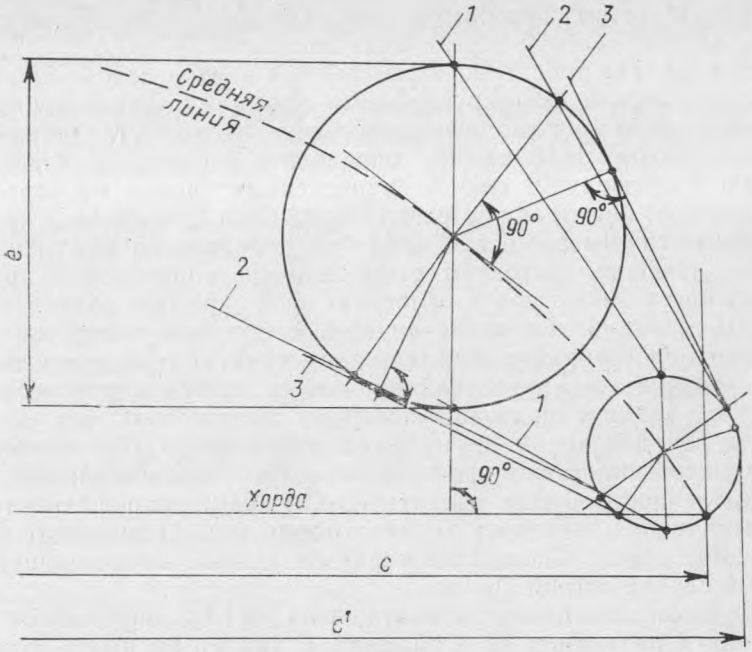


Рис. 1.2. Построение профиля при основных определениях толщины.

1 — полутолщины отложены перпендикулярно хорде; *2* — полутолщины отложены перпендикулярно средней линии; *3* — профиль касается окружностей диаметра η_e.

ординаты засасывающей и нагнетающей поверхностей определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\eta^+(\xi) &= \eta_c(\xi) + \eta_e(\xi)/2;\\ \eta^-(\xi) &= \eta_c(\xi) - \eta_e(\xi)/2.\end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Заметим, что на чертежах гребных винтов, как правило, задаются ординаты нагнетающей поверхности и значения толщин в этих же точках [39].

В работах, касающихся проектирования гребных винтов, в том числе содержащих рекомендации по винтовым профилям, нет однозначной трактовки понятия толщины профиля (рис. 1.2). В силу небольшой относительной толщины и сравнительно малой кривизны винтовых профилей различные варианты определения толщины не дают существенных отличий в форме профиля. Удобство принятого определения толщины профиля — полутолщины в соответствии с формулой (1.1) откладывают перпендикулярно хорде — состоит в том, что только в этом случае хорда профиля совпадает с хордой, стягивающей среднюю линию. Естественно, что путем пересчета форму профиля,

заданную одним способом, можно задать с использованием любого другого способа определения толщины.

В практике проектирования гребных винтов используют профили с острыми и закругленными кромками. Угол заострения кромок почти никогда непосредственно не задают. Однако его всегда можно приближенно определить с помощью известных ординат профиля. В случае закругленных кромок на чертежах указывают, как правило, радиус некоторой вписанной в кромку окружности. Вместе с тем принятые определения хорды и толщины профиля допускают существование вписанной в кромку окружности лишь при симметрии этой кромки относительно хорды, что в большинстве случаев места не имеет. В связи с этим целесообразно отказаться от понятий «радиус кромки» или «толщина закругленной кромки» и ввести в рассмотрение понятие «радиус кривизны кромки», считая, что этот радиус определен для точки пересечения хорды (оси ξ) с профилем.

Существуют также профили с торцевой задней кромкой. Для определенности будем считать, что у таких профилей торец кромки перпендикулярен хорде, которая (ось ξ) проходит через середину торца. Скошенная торцевая кромка представляет частный случай острой кромки.

Функции, входящие в соотношения (1.1), определяют геометрию в размерном виде профиля. С тем чтобы иметь возможность задавать форму профиля независимо от его размеров, вводят функции $F_T(\tilde{\xi})$ и $F_C(\tilde{\xi})$, характеризующие распределение толщины профиля вдоль хорды и форму средней линии соответственно. Примем следующую нормировку этих функций

$$\max_{\xi} F_T = \max_{\xi} F_C = 1; \quad \tilde{\xi} \in [-1, 1].$$

Местную толщину профиля, таким образом, получают умножением F_T на наибольшую толщину e, а ординату средней линии — умножением F_C на стрелку прогиба средней линии f_M. Ординаты засасывающей и нагнетающей сторон профиля с помощью введенных функций определяют по соотношениям, вытекающим из формулы (1.1):

$$\eta^{\pm} = f_M F_C \pm eF_T/2. \tag{1.2}$$

При определении геометрических характеристик профилей с закругленными кромками, а также при аппроксимации таких профилей (о чем пойдет речь в следующем параграфе) полезно уравнение распределения толщины профиля задавать в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} \eta_e &= eF_T(t); \\ \xi &= c\tilde{\xi}(t)/2, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

выбирая параметр $t \in [0, \pi]$ так, чтобы на концах хорды, соответствующих закругленным кромкам, выполнялось условие

$d\tilde{\xi}/dt = 0$. В частности, если обе кромки закруглены, целесообразно принять

$$\tilde{\xi} = -\cos t. \tag{1.4}$$

Легко показать, что радиус кривизны кромки (при выбранном параметре) пропорционален квадрату первой производной функции F_T по параметру

$$\left.\begin{aligned} \rho_L &= \frac{e^2}{2c}\dot{F}_T^2(\pi); \\ \rho_T &= \frac{e^2}{2c}\dot{F}_T^2(0), \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

где точкой обозначено дифференцирование по параметру.

Заметим, что при явном задании уравнения $\eta_e(\xi)$ радиусы кривизны закругленных кромок нельзя так просто определить, хотя бы в силу того, что на соответствующих концах кромки производная $dF_T/d\xi$ не конечна.

Если задняя кромка профиля острая, а передняя закруглена, то параметр следует выбирать так, чтобы выполнялись условия:

$$\dot{\tilde{\xi}}(0) = 1$$

на задней кромке (при $\tilde{\xi} = -1$) и

$$\dot{\tilde{\xi}}(\pi) = 0$$

на передней кромке (при $\tilde{\xi} = 1$).

Этим условиям удовлетворяет, в частности, параметр, определяемый соотношением

$$\tilde{\xi} = -1 - 2\cos\frac{\pi + t}{2}, \tag{1.6}$$

где вновь $t \in [0, \pi]$.

Введение функций F_T и F_C позволяет задавать форму профиля независимо от значений наибольшей его толщины и стрелки прогиба средней линии. Вместе с тем эти функции зависят от положения абсцисс указанных характерных точек. Для того чтобы иметь возможность задавать или аппроксимировать формы кривых $\eta_e(\xi)$ и $\eta_c(\xi)$ независимо от положения их максимумов, необходимо перейти к новым независимым переменным:

$$\tilde{\xi}_e = \begin{cases} -1 + \dfrac{1+\tilde{\xi}}{1+\tilde{\xi}_{eM}} & \text{при } \tilde{\xi} \leqslant \tilde{\xi}_{eM}; \\ 1 + \dfrac{1-\tilde{\xi}}{1-\tilde{\xi}_{eM}} & \text{при } \tilde{\xi} > \tilde{\xi}_{eM}; \end{cases}$$

$$\tilde{\xi}_c = \begin{cases} -1 + \dfrac{1+\tilde{\xi}}{1+\tilde{\xi}_{cM}} & \text{при } \tilde{\xi} \leqslant \tilde{\xi}_{cM}; \\ 1 + \dfrac{1-\tilde{\xi}}{1-\tilde{\xi}_{cM}} & \text{при } \tilde{\xi} > \tilde{\xi}_{cM}, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\tilde{\xi}_{cM}$ и $\tilde{\xi}_{eM}$ — абсциссы максимумов распределений $\eta_c(\tilde{\xi})$ и $\eta_e(\tilde{\xi})$ соответственно.

Функции $F_{TM}(\tilde{\xi}_e) = F_T(\tilde{\xi})$ и $F_{CM}(\tilde{\xi}_c) = F_C(\tilde{\xi})$, не зависящие от величины и положения максимумов исходных зависимостей $\eta_e(\xi)$ и $\eta_c(\xi)$, логично называть приведенными нормированными ординатами толщины и средней линии профиля.

Уравнения поверхности лопасти. Пространственное положение профиля каждого цилиндрического сечения лопасти определяется четырьмя параметрами — тремя координатами начала o_S системы F (середины хорды сечения) в системе E и шаговым углом сечения (точнее, винтовой линии ξ). Однако удобнее задавать вместо координат x_S и θ_S параметры x_R и c_S (см. рис. 3), характеризующие соответственно смещение сечения вдоль оси (откидку лопасти) и вдоль винтовой линии ξ (саблевидность лопасти). Координаты середины хорды x_S и θ_S, называемые также полной откидкой и углом саблевидности, легко определяются через параметры x_R, c_S и шаговый угол:

$$\left.\begin{aligned} x_S &= x_R + c_S \sin\varphi; \\ \theta_S &= \frac{c_S}{r}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Естественными независимыми переменными при построении уравнений поверхности лопасти являются радиус рассматриваемого сечения r (радиальная координата системы E) и винтовая координата ξ системы F. Уравнения поверхности лопасти получают подстановкой в формулы (5) перехода от системы координат F к системе E ординат засасывающей и нагнетающей сторон профиля сечения в системе F:

$$\left.\begin{aligned} x^{\pm} &= x_R + (c_S + \xi)\sin\varphi + \eta^{\pm}\cos\varphi; \\ \theta^{\pm} &= \frac{1}{r}\left[(c_S + \xi)\cos\varphi - \eta^{\pm}\sin\varphi\right], \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

где $x^{\pm}$, $\theta^{\pm}$ — координаты засасывающей или нагнетающей поверхностей; $\eta^{\pm} = \eta^{+}$ или η^{-}. Координаты поверхности лопасти в системе D определяют в соответствии с уравнением (4):

$$\left.\begin{aligned} y^{\pm} &= r\cos\theta^{\pm}; \\ z^{\pm} &= r\sin\theta^{\pm}. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Подставляя в формулу (1.9) выражение (1.2) для ординат профиля сечения и переходя к безразмерному виду, получим основную используемую на практике форму уравнений поверхности лопасти:

— засасывающей

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^{+} &= \bar{x}_R + (\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}\tilde{\xi})\sin\varphi + (\bar{f}_M F_C + 0{,}5eF_T)\cos\varphi;\\ \theta^{+} &= \frac{1}{\bar{r}}[(\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}\tilde{\xi})\cos\varphi - (\bar{f}_M F_C + 0{,}5eF_T)\sin\varphi];\end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

— нагнетающей

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^{-} &= \bar{x}_R + (\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}\tilde{\xi})\sin\varphi + (\bar{f}_M F_C - 0{,}5eF_T)\cos\varphi;\\ \theta^{-} &= \frac{1}{\bar{r}}[(\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}\tilde{\xi})\cos\varphi - (\bar{f}_M F_C - 0{,}5eF_T)\sin\varphi].\end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

Независимыми переменными в этих уравнениях являются безразмерные координаты $\bar{r} \in [\bar{r}_H,\ 1]$ и $\tilde{\xi} \in [-1,\ 1]$. Входящие в уравнения величины F_C и F_T можно задать, как уже указывалось, в виде функций некоторых параметров или нормированных переменных, однозначно определяемых по заданным значениям $\bar{r}$ и $\tilde{\xi}$. Говорят, что лопасть имеет единый профиль, если величины F_C и F_T не зависят от $\bar{r}$.

В ряде случаев введены понятия номинальной и срединной поверхностей лопасти. Уравнения номинальной поверхности, образуемой хордами цилиндрических сечений, получают из общих уравнений (1.11), если положить в них $F_C = F_T = 0$. Уравнения срединной поверхности, образуемой средними линиями сечений, также выводят из общих уравнений (1.11) при равной нулю толщине лопасти, т. е. при $F_T = 0$.

Из рассмотрения уравнений поверхности лопасти следует, что эта поверхность полностью определяется заданием десяти функций, называемых в дальнейшем «базисными геометрическими элементами». Приведем перечень этих элементов с номерами, которые удобно считать стандартными:

Стандартные номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обозначение элементов	F_{TM}	F_{CM}	$\bar{c}$	$\bar{c}_S$	$\bar{x}_R$	$\bar{e}$	$\bar{f}_M$	$\bar{H}$	$\tilde{\xi}_{eM}$	$\tilde{\xi}_{cM}$

Лишь первые два элемента (F_{TM} и F_{CM}) могут зависеть от двух переменных — $\tilde{\xi}$ и $\bar{r}$. Остальные базисные элементы зависят только от радиальной координаты $\bar{r}$.

Подобно тому, как при описании профиля сечения с закругленными кромками удобно вводить параметрическую форму уравнений, при задании уравнений базисных элементов, зависящих от радиальной координаты, также полезно использовать параметр, если производная элемента на конце лопасти

не конечна. Практически такими элементами чаще всего являются $\bar{c}$ и $\bar{e}$. Одна из возможных форм параметра

$$\bar{r} = \frac{1+\bar{r}_H}{2} - \frac{1-\bar{r}_H}{2}\left(1 + 2\cos\frac{\pi+t}{2}\right), \qquad (1.13)$$
$$t \in [0,\ \pi].$$

На практике часто принимают распределение $\bar{c}_S(\bar{r})$ в виде квадратичной параболы:

$$\bar{c}_S(\bar{r}) = \overline{R}_S - \sqrt{\overline{R}_S^2 - (\bar{r} - \bar{r}_H)^2},$$

где

$$\overline{R}_S = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\bar{r}_H)^2}{\overline{S}_*} + \overline{S}_*\right];$$
$$\overline{S}_* = \theta_S^*/\cos\varphi\ (\bar{r} = 1);$$
$$\theta_S^* = \theta_S\ (\bar{r} = 1) - \theta_S\ (\bar{r} = \bar{r}_H).$$

Параметр саблевидности θ_S^* характеризует несимметрию контура лопасти.

Нормаль к поверхности лопасти (общий случай). В задачах гидродинамики гребного винта нормаль к поверхности лопасти используют при формулировке граничного условия. Вычисление направляющих косинусов нормали приходится также выполнять в процессе подготовки управляющих программ для обработки лопастей на фрезерных станках с ЧПУ.

Общая формула для единичного вектора внешней нормали к поверхности лопасти имеет следующий вид:

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}, \qquad (1.14)$$

где $n_x = \frac{A}{\Lambda}q$; $n_y = \frac{B}{\Lambda}q$; $n_z = \frac{C}{\Lambda}q$ — направляющие косинусы нормали; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты осей системы координат D;

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\tilde{\xi}} - \frac{\partial\bar{y}}{\partial\tilde{\xi}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{r}};\\ B &= \frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\tilde{\xi}} - \frac{\partial\bar{z}}{\partial\tilde{\xi}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\bar{r}};\\ C &= \frac{\partial\bar{x}}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\tilde{\xi}} - \frac{\partial\bar{x}}{\partial\tilde{\xi}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{r}};\\ \Lambda &= (A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}; \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

$q = 1$ — при вычислении нормали к засасывающей стороне и $q = -1$ — при вычислении нормали к нагнетающей стороне. Подставляя в формулы (1.15) уравнения поверхности лопасти

(1.10)—(1.11), можно получить выражения для направляющих косинусов нормали через базисные геометрические элементы:

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \cos\varphi - \frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\tilde{\xi}}\sin\varphi;\\
\widetilde{B} &= Q_1\sin\theta^{\pm} - Q_2\cos\theta^{\pm};\\
\widetilde{C} &= -Q_1\cos\theta^{\pm} + Q_2\sin\theta^{\pm};\\
\widetilde{\Lambda}^2 &= 1 + Q_2^2 + \left(\frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\tilde{\xi}}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

где

$$Q_1 = \sin\varphi + \frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\tilde{\xi}}\cos\varphi;$$

$$Q_2 = D_1 + \frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\tilde{\xi}}D_2;$$

$$\frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\tilde{\xi}} = \frac{2}{\bar{c}}\left[\bar{f}_M\frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}} \pm 0{,}5\bar{e}\,\frac{\partial F_T}{\partial\tilde{\xi}}\right];$$

$$D_1 = -\left[\bar{x}_R' + a\,(\tilde{c}_S + \tilde{\xi})\,\frac{\overline{H}'}{2\pi}\right]\cos\varphi + \frac{\tilde{\eta}^{\pm}}{\bar{r}}\sin^2\varphi - \frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\bar{r}};$$

$$D_2 = -a\left[(\tilde{c}_S + \tilde{\xi}) + \tilde{\eta}^{\pm}\,\frac{\overline{H}'}{2\pi}\right]\cos\varphi +$$

$$+ (\bar{x}_R' + 2a\tilde{\eta}^{\pm})\sin\varphi + \bar{c}_S' + 0{,}5\bar{c}'\tilde{\xi};$$

$$a = \frac{\bar{c}\cos\varphi}{2\bar{r}};$$

$$\frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\bar{r}} = \bar{f}_M' F_C \pm 0{,}5\bar{e}'F_T + \bar{f}_M\frac{\partial F_C}{\partial\bar{r}} \pm 0{,}5\bar{e}\,\frac{\partial F_T}{\partial\bar{r}}.$$

Штрихом в формулах (1.16)—(1.33) и далее обозначено дифференцирование по безразмерной радиальной координате $d/d\bar{r}$.

Полученные выражения для проекций единичной нормали справедливы лишь в тех регулярных точках поверхности* лопасти, в которых ограничены входящие в эти выражения производные базисных геометрических элементов. В нерегулярных точках (на ребрах и в вершинах), если таковые имеются на поверхности лопасти, определяемое соотношениями (1.15) и (1.16)

---

* Регулярными называются точки поверхности, в которых существуют частные производные координат по параметрам $\tilde{\xi}$ и $\bar{r}$, а величины A, B и C в формулах (1.15) одновременно в нуль не обращаются.

направление нормали зависит от пути, по которому осуществляется предельный переход из регулярной области поверхности к нерегулярной точке. В частности, острая кромка лопасти образует ребро. Направление нормали к этой кромке будет зависеть от того, вычисляют нормаль к засасывающей или нагнетающей стороне. Угол между этими двумя нормалями дополняет угол между соответствующими касательными плоскостями (угол кромки) до развернутого.

По формулам (1.15), (1.16) нельзя непосредственно определить нормаль к закругленной кромке, поскольку в этом случае перестает быть ограниченной производная $\partial\bar{\eta}/\partial\tilde{\xi}$.

Нормаль к закругленной кромке. Введем для сокращения записи следующие обозначения: $q_E = +1$ на входящей кромке $(\tilde{\xi} = 1)$; $q_E = -1$ на выходящей кромке $(\tilde{\xi} = -1)$; $\theta_E = a(\bar{c}_S + q_E)$; $Q_E = -\theta_E \cos\varphi + \bar{x}'_R \sin\varphi + \bar{c}'_S + 0{,}5\bar{c}' q_E$; $\Lambda_E = (1+Q_E^2)^{1/2}$. Тогда направляющие косинусы внешней нормали к закругленной кромке можно вычислить по формулам:

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{\sin\varphi}{\Lambda_E} q_E; \\ n_y &= -\frac{\cos\varphi \sin\theta_E + Q_E \cos\theta_E}{\Lambda_E} q_E; \\ n_z &= \frac{\cos\varphi \cos\theta_E - Q_E \sin\theta_E}{\Lambda_E} q_E. \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

Нетрудно показать, что если кромка является отрезком направленной радиально прямой, то $Q_E = 0$. С другой стороны, равенство нулю величины Q_E можно рассматривать как достаточное условие прямолинейности кромки.

Нормаль к вершине лопасти. Вершиной лопасти назовем точку с координатами $\bar{r} = 1$, $\tilde{\xi} = 0$, $\bar{\eta} = 0$. При $\bar{c}(1) = \bar{e}(1) = 0$ вершина лопасти — регулярная точка поверхности лопасти, если $\bar{r} \to 1$; $\dfrac{\partial F_T}{\partial\tilde{\xi}} \to \infty$; $\dfrac{d\bar{c}}{d\bar{r}} \to \infty$ и $\dfrac{d\bar{e}}{d\bar{r}} \to \infty$, а производные $\partial/\partial\bar{r}$ и $\partial/\partial\tilde{\xi}$ остальных элементов ограничены. Во всех других случаях к вершине лопасти подходят ребра или она представляет собой точку, аналогичную вершине конуса.

Если лопасть завершает сечение с конечными размерами c и e, то нормаль к этому торцевому сечению направлена по радиальной координате:

$$n_x = 0, \quad n_y = \cos\theta, \quad n_z = \sin\theta, \qquad (1.18)$$

где $\theta = (\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}\tilde{\xi})\cos\varphi - \bar{\eta}\sin\varphi$.

Полагая в уравнениях (1.18) $\tilde{\bar{\xi}} = \bar{\eta} = 0$, получаем нормаль к вершине лопасти

$$n_x = 0, \quad n_y = \cos\theta_1, \quad n_z = \sin\theta_1, \tag{1.19}$$

где $\theta_1 = \bar{c}_S \cos\varphi$ — угловая координата вершины.

Формула (1.19) справедлива и в случае, если $\bar{c}(1) = \bar{e}(1) = 0$, но вершина — регулярная точка.

Нормаль к срединной поверхности лопасти. Направляющие косинусы этой нормали можно вычислить по формулам (1.15) и (1.16), положив в них, однако,

$$q = 1;$$

$$\tilde{\eta}^{\pm} = \tilde{\eta}_c = \frac{2\bar{f}_M}{\bar{c}} F_C = 2\delta_c F_C;$$

$$\frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\bar{r}} = \frac{\partial\tilde{\eta}_c}{\partial\bar{r}} = \bar{f}'_M F_C + \bar{f}_M \frac{\partial F_C}{\partial\bar{r}};$$

$$\frac{\partial\tilde{\eta}^{\pm}}{\partial\tilde{\xi}} = \frac{\partial\tilde{\eta}_c}{\partial\tilde{\xi}} = \bar{f}_M \frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}} = 2\delta_c \frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}}.$$

Приняв $q = +1$, мы тем самым за положительное направление нормали приняли ее направление к засасывающей стороне лопасти.

Таким образом, нормаль к срединной поверхности имеет следующие составляющие:

$$n_{cx} = \frac{A_c}{\Lambda_c}; \quad n_{cy} = \frac{B_c}{\Lambda_c}; \quad n_{cz} = \frac{C_c}{\Lambda_c}, \tag{1.20}$$

где

$$A_c = \cos\varphi - \bar{f}_M \frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}};$$

$$B_c = Q_{c1}\sin\theta_c + Q_{c2}\cos\theta_c;$$

$$C_c = -Q_{c1}\cos\theta_c + Q_{c2}\sin\theta_c;$$

$$\tilde{\xi}_c^2 = 1 + Q_{c2}^2 + \bar{f}_M^2 \left(\frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}}\right)^2;$$

$$Q_{c1} = \sin\varphi + \bar{f}_M \frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}} \cos\varphi;$$

$$Q_{c2} = D_{c1} + \bar{f}_M \frac{\partial F_C}{\partial\tilde{\xi}} D_{C2};$$

$$\theta_c = \frac{1}{\bar{r}} [(\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}\tilde{\xi})\cos\varphi - \bar{f}_M F_C];$$

$$D_{c1} = -\left[\bar{x}'_R + a\,(\tilde{c}_S + \tilde{\xi})\,\frac{\overline{H}'}{2\pi}\right]\cos\varphi + \\ + \frac{\bar{f}_M F_C}{\bar{r}}\sin^2\varphi - \bar{f}'_M F_C - \bar{f}_M \frac{\partial F_C}{\partial \bar{r}};$$

$$D_{c2} = -a\left[(\tilde{c}_S + \tilde{\xi}) + \bar{f}_M F_C \frac{\overline{H}'}{2\pi}\right]\cos\varphi + \\ + (\bar{x}'_R + 2a\bar{f}_M F_C)\sin\varphi + \bar{c}'_S + 0{,}5\bar{c}'\tilde{\xi}.$$

Нормаль к номинальной и опорной поверхности лопасти. В гидродинамических задачах нормаль к номинальной поверхности лопасти не используют. В то же время в граничном условии непротекания вызванные скорости проектируют на нормаль к поверхности, на которой распределены особенности. Эта поверхность, называемая опорной, вообще говоря, не совпадает с номинальной поверхностью лопасти, но ее цилиндрические сечения также являются отрезками правильной винтовой линии, но иного шага. В связи с этим обстоятельством приводимые ниже формулы для нормали к номинальной поверхности лопасти определяют с точностью до обозначений и нормаль к опорной поверхности.

Выражения для такой нормали легко получить из общих формул (1.15) и (1.16), если положить в них $\eta^{\pm} = 0$ и $q = +1$:

$$\left.\begin{aligned} n_{0x} &= \frac{\cos\varphi}{\Lambda_0}; \\ n_{0y} &= -\frac{1}{\Lambda_0}\,(\sin\varphi\sin\theta + D_0\cos\varphi\cos\theta); \\ n_{0z} &= -\frac{1}{\Lambda_0}\,(\sin\varphi\cos\theta + D_0\cos\varphi\sin\theta), \end{aligned}\right\} \qquad (1.21)$$

где

$$\Lambda_0 = (1 + \cos^2\varphi D_0^2)^{1/2};$$

$$\theta = a\,(\tilde{c}_S + \tilde{\xi});$$

$$D_0 = \bar{x}'_R + a\,(\tilde{c}_S + \tilde{\xi})\,\frac{\overline{H}'}{2\pi}.$$

В случае, когда опорная поверхность является правильной винтовой поверхностью, $\bar{x}'_R = 0$ и $\overline{H}' = 0$. Следовательно, $D_0 = 0$ и $\Lambda_0 = 1$,

$$n_{0x} = \cos\varphi; \quad n_{0y} = \sin\varphi\sin\theta; \qquad (1.22)$$

$$n_{0z} = -\sin\varphi\cos\theta.$$

Формулы (1.22) для нормали к правильной винтовой поверхности можно элементарно получить из геометрических соображений.

Поверхность ступицы. В общем случае внешняя поверхность ступицы представляет собой поверхность вращения:

$$\bar{r}_{Hl} = \bar{r}_{Hl}(\bar{x}); \quad \bar{x} \in [\bar{x}_{H1}, \ \bar{x}_{H2}], \tag{1.23}$$

где $\bar{r}_{Hl}$ — местный радиус ступицы; $\bar{x}_{H1}$ и $\bar{x}_{H2}$ — координаты кормового и носового среза ступицы соответственно.

В уравнениях поверхности лопасти за радиус ступицы принят ее наименьший радиус $\bar{r}_H = \min \bar{r}_{Hl}(\bar{x})$ Таким образом, если ступица не цилиндрическая, часть поверхности лопасти, заданной уравнениями (1.11), (1.12), оказывается внутри нее.

Пересечение поверхности лопасти со ступицей. Для определения линии пересечения поверхности лопасти, заданной уравнениями (1.11) и (1.12), с поверхностью ступицы, заданной уравнением (1.23), можно использовать следующую процедуру.

Из уравнений *

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}^{+}(\tilde{\xi}, \ \bar{r}); \\ \bar{r} &= \bar{r}_{Hl}(\bar{x}), \end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

где $\bar{x}^{+}(\tilde{\xi}, \ \bar{r})$ — правая часть первого уравнения (1.11). Для всех значений $\bar{x} \in [\bar{x}_{H1}, \ \bar{x}_{H2}]$ определяют координаты $\tilde{\xi}$ точек пересечения засасывающей поверхности лопасти со ступицей, а по координатам $(\tilde{\xi}, \ \bar{r}_{Hl})$ из второго уравнения (1.11) находят угловые координаты θ этих точек. Аналогично из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}^{-}(\tilde{\xi}, \ \bar{r}); \\ \bar{r} &= \bar{r}_{Hl}(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

определяют координаты точек пересечения нагнетающей поверхности лопасти со ступицей.

Следует заметить, что при

$$\bar{x} > \bar{x}_R + (\bar{c}_S + 0{,}5\bar{c}) \sin\varphi$$

уравнения (1.25) решения не имеют, а уравнения (1.24) могут иметь два, одно или вовсе не иметь решения. Соответственно при

$$\bar{x} < \bar{x}_R + (\bar{c}_S - 0{,}5\bar{c}) \sin\varphi$$

уравнения (1.24) не имеют решения, в то время как уравнения (1.25) могут иметь два, одно или тоже не иметь решения. Возможные случаи решения уравнений (1.24) и (1.25) иллюстрирует рис. 1.3.

Галтельный переход от лопасти к ступице. В настоящее время отсутствуют в достаточной степени обоснованные рекомендации по выбору формы сопряжения поверхностей лопасти и ступицы.

---

* Здесь и далее мы не будем касаться известных итерационных методов решения нелинейных уравнений типа (1.24).

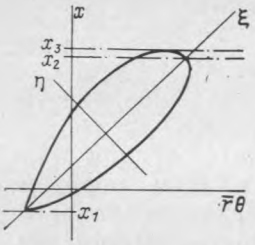


Рис. 1.3. К определению пересечения лопасти со ступицей: $\bar{x}<\bar{x}_1$ и $\bar{x}>\bar{x}_3$ — решений нет; $\bar{x}_1\leqslant\bar{x}\leqslant\bar{x}_2$ — уравнения (1.24) и (1.25) имеют по одному решению; $\bar{x}_2<\bar{x}<\bar{x}_3=\max\bar{x}^+$ — уравнение (1.24) имеет два решения, а уравнение (1.25) — ни одного.

С точки зрения формального определения поверхности галтельного перехода удобно считать, что эта поверхность образуется «катящимся» шаром, касающимся одновременно лопасти и ступицы. В этом случае необходимо задать радиус указанного шара в зависимости от координаты $\tilde{\xi}$ точки его касания к поверхности лопасти для засасывающей

$$\bar{\rho}_\Gamma^+ = \bar{\rho}^+(\tilde{\xi})$$

и нагнетающей сторон лопасти

$$\bar{\rho}_\Gamma^- = \bar{\rho}^-(\tilde{\xi}).$$

Величины $\bar{\rho}_\Gamma^\pm$ уместно отождествлять с радиусами сопряжения. Поверхность галтельного перехода при принятом ее определении образуется дугами большого круга «катящегося» шара, соединяющими точки касания этого шара с лопастью и ступицей.

С тем чтобы определить положения линий сопряжения галтели с лопастью и галтели со ступицей, введем обозначения (рис. 1.4): P_1 — точка касания шара, образующего галтель, и лопасти; P_2 — точка касания этого же шара и ступицы; P_3 — центр шара,

$$\psi_H(\bar{x}) = \operatorname{arctg}\frac{|d\bar{r}_{Hl}}{d\bar{x}}.$$

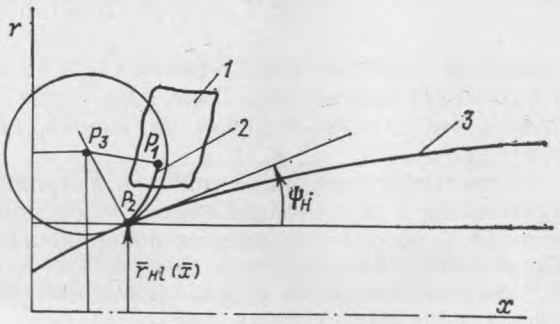


Рис. 1.4. К определению поверхности сопряжения лопасти со ступицей.

1 — часть поверхности лопасти; *2* — дуга, образующая галтель; *3* — поверхность ступицы.

Условимся также координатам точек P_1, P_2 и P_3 приписывать такие же индексы. Кроме того, для простоты опустим индексы «+» и «—», указывающие на принадлежность величин к засасывающей или нагнетающей стороне, поскольку формулы для обеих сторон идентичны.

Центр шара, образующего поверхность галтели, лежит на перпендикуляре к поверхности лопасти, восстановленном в точке P_1:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_3 &= \bar{x}_1(\tilde{\xi},\ \bar{r}_1) + \bar{\rho}_\Gamma(\tilde{\xi})\, n_x(P_1);\\ \bar{y}_3 &= \bar{y}_1(\tilde{\xi},\ \bar{r}_1) + \bar{\rho}_\Gamma(\tilde{\xi})\, n_y(P_1);\\ \bar{z}_3 &= \bar{z}_1(\tilde{\xi},\ \bar{r}_1) + \bar{\rho}_\Gamma(\tilde{\xi})\, n_z(P_1). \end{aligned}\right\} \qquad (1.26)$$

Уравнения, позволяющие определить положения точек P_1 и P_2, получают путем проектирования радиуса шара P_3P_2, лежащего в меридиональном сечении ступицы на оси r и x:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_3 - \bar{r}_{H1}(\bar{x}_2) &= \bar{\rho}_\Gamma(\tilde{\xi})\cos\psi_H(\bar{x}_2);\\ \bar{x}_2 - \bar{x}_3 &= \bar{\rho}_\Gamma(\tilde{\xi})\sin\psi_H(\bar{x}_2). \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

В уравнениях (1.27) величины $\bar{x}_3$ и $\bar{r}_3 = (\bar{y}_3^2 + \bar{z}_3^2)^{1/2}$ вычисляют по формулам (1.26) и, следовательно, они являются функциями $\bar{r}_1$ и $\tilde{\xi}$. Эти уравнения позволяют для заданного значения координаты $\tilde{\xi} \in [-1, 1]$ определить величины $\bar{r}_1(\tilde{\xi})$ и $\bar{x}_2(\tilde{\xi})$. Все остальные координаты интересующих нас точек P_1, P_2 и P_3 затем без труда определяют по соотношениям (1.26) и (1.27), учитывая, что $\theta_2 = \theta_3$.

При условии, что плоскость, проходящая через точки P_1, P_2 и P_3, не параллельна оси x, уравнение дуги, образующей галтель, можно задать в виде

$$(1+F^2)(\bar{y}-\bar{y}_3)^2 + (1+G^2)(\bar{z}-\bar{z}_3)^2 + 2FG(\bar{y}-\bar{y}_3)(\bar{z}-\bar{z}_3) = \bar{\rho}_\Gamma^2, \qquad (1.28)$$

где

$$F = -\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_3)(\bar{z}_2-\bar{z}_3) - (\bar{x}_2-\bar{x}_3)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)}{(\bar{y}_1-\bar{y}_3)(\bar{z}_2-\bar{z}_3) - (\bar{y}_2-\bar{y}_3)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)};$$

$$G = -\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_3)(\bar{y}_2-\bar{y}_3) - (\bar{x}_2-\bar{x}_3)(\bar{y}_1-\bar{y}_3)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_3)(\bar{y}_2-\bar{y}_3) - (\bar{z}_2-\bar{z}_3)(\bar{y}_1-\bar{y}_3)}.$$

Вычислив из квадратного уравнения (1.28) y в зависимости от z (или наоборот), определяют третью координату x точки галтели из уравнения сферы

$$(\bar{x}-\bar{x}_3)^2 + (\bar{y}-\bar{y}_3)^2 + (\bar{z}-\bar{z}_3)^2 = \rho_\Gamma^2.$$

При решении уравнения (1.28) следует обратить внимание на правильный выбор ветви — зависимость $y(z)$ должна соответствовать меньшей из дуг, соединяющих точки P_1 и P_2.

Пересечение лопасти плоскостью. В процессе проектирования гребного винта при определении прочности лопастей, а также при решении некоторых конструкторско-технологических задач приходится определять сечение лопасти плоскостью.

В общем случае удобно секущую плоскость задавать координатами x_1, y_1, z_1 некоторой точки этой плоскости и направляющими косинусами N_x, N_y, N_z нормали к плоскости.

Линию пересечения поверхности лопасти с этой плоскостью задают уравнением

$$N_x\left[\bar{x}^{\pm}(\tilde{\xi},\ \bar{r})-\bar{x}_1\right]+N_y\left[\bar{y}^{\pm}(\tilde{\xi},\ \bar{r})-\bar{y}_1\right]+ \\ +N_z\left[\bar{z}^{\pm}(\tilde{\xi},\ \bar{r})-\bar{z}_1\right]=0, \qquad (1.29)$$

из решения которого определяют зависимости $\bar{r}(\tilde{\xi})$ для нагнетающей и засасывающей сторон сечения.

На практике чаще всего приходится определять сечения плоскостями, параллельными оси x. В этом случае вместо общего уравнения (1.29) проще использовать уравнение

$$\bar{r}\cos\left[\theta^{\pm}(\tilde{\xi},\ \bar{r})-\theta_1\right]=\bar{r}_1,$$

где $\bar{r}_1$, θ_1 — цилиндрические координаты точки, через которую проходит секущая плоскость.

В еще более частном случае, когда секущая плоскость проходит через ось x, целесообразно задавать ее положение углом θ_{PS}, который она образует с осью y. При этом уравнение (1.29) преобразуется в условие постоянства угловых координат сечения:

$$\theta^{\pm}(\tilde{\xi},\ \bar{r})=\theta_{PS}.$$

Решая уравнение (1.29), следует обратить внимание на то, что сечение лопасти плоскостью может быть двусвязным.

Интегральные геометрические характеристики лопасти и ее сечений. В расчетах гребных винтов используют целый ряд интегральных геометрических характеристик лопасти и ее сечений. Ниже приведены формулы для вычисления основных из них. В этих формулах можно считать сечения цилиндрическими или плоскими, образованными плоскостями, параллельными оси x и проходящими через начало координат местной системы F. В последнем случае следует считать, что уравнение профиля плоского сечения по структуре не отличается от уравнения (1.2), введенного для цилиндрического сечения, а местная система координат, относительно которой записано уравнение, лежит в секущей плоскости. Заметим также, что для плоских сечений зависимости базисных геометрических элементов от координат $\bar{r}$ и $\tilde{\xi}$ не совпадают большей частью с аналогичными зависимостями для цилиндрических сечений.

Введем предварительно следующие обозначения:

$$g_1(\bar{r}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F_T(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi};$$

$$g_2(\bar{r}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\xi} F_T(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi};$$

$$g_3(\bar{r}) = \int_{-1}^{1} F_C(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, F_T(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi};$$

$$g_4(\bar{r}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F_C^2(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, F_T(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi};$$

$$g_5(\bar{r}) = \frac{1}{24}\int_{-1}^{1} F_T^3(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi};$$

$$g_6(\bar{r}) = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \tilde{\xi}^2 F_T(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi};$$

$$g_7(\bar{r}) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \tilde{\xi} F_C(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, F_T(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, d\tilde{\xi}.$$

Заметим, что величины g_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, когда лопасть имеет единый профиль, являются константами, определяемыми типом профиля.

Интегральные геометрические характеристики сечений лопасти:

— площадь сечения

$$\overline{A}_S = A_S R^{-2} = \bar{e}\bar{c} g_1(\bar{r});$$

— координаты центра тяжести сечения

$$\tilde{\xi}_0 = \frac{\bar{e}\bar{c} g_2(\bar{r})}{\overline{A}_S} = g_2(\bar{r})/g_1(\bar{r});$$

$$\tilde{\eta}_0 = \frac{\bar{e}\bar{f}_M}{\overline{A}_S} g_3(\bar{r}) = \delta_c g_3(\bar{r})/g_1(\bar{r});$$

— моменты инерции сечения

$$\overline{I}_\xi = I_\xi R^{-4} = \bar{e}\bar{c}\left[\bar{f}_M^2 g_4(\bar{r}) + \bar{e}^2 g_5(\bar{r})\right];$$

$$\overline{I}_\eta = I_\eta R^{-4} = \bar{e}\bar{c}^3 g_6(\bar{r});$$

$$\overline{I}_{\xi\eta} = I_{\xi\eta} R^{-4} = \bar{f}_M \bar{e}\bar{c}^2 g_7(\bar{r});$$

— главные центральные моменты инерции сечения

$$\bar{I}_{\xi 0} = \bar{I}^*_{\xi} \cos^2 \alpha^* + \bar{I}^*_{\eta} \sin^2 \alpha^* - \bar{I}^*_{\xi\eta} \sin 2\alpha^*;$$
$$\bar{I}_{\eta 0} = \bar{I}^*_{\xi} \sin^2 \alpha^* + \bar{I}^*_{\eta} \cos^2 \alpha^* + \bar{I}^*_{\xi\eta} \sin 2\alpha^*,$$

где

$$\bar{I}^*_{\xi} = \bar{I}_{\xi} - \bar{\xi}_0^2 \bar{A}_S;$$
$$\bar{I}^*_{\eta} = \bar{I}_{\eta} - \bar{\eta}_0^2 \bar{A}_S;$$
$$\bar{I}^*_{\xi\eta} = \bar{I}_{\xi\eta} - \bar{\xi}_0 \bar{\eta}_0 \bar{A}_S;$$
$$\alpha^* = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\bar{I}^*_{\xi\eta}}{\bar{I}^*_{\eta} - \bar{I}^*_{\xi}};$$

— координаты профиля сечения в главных центральных осях

$$\tilde{\xi}_* = (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_0) \cos \alpha^* + (\tilde{\eta}^{\pm} - \tilde{\eta}_0) \sin \alpha^*;$$
$$\tilde{\eta}_* = -(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_0) \sin \alpha^* + (\tilde{\eta}^{\pm} - \tilde{\eta}_0) \cos \alpha^*;$$

— моменты сопротивления сечения

$$\bar{W}_{\xi} = \bar{I}_{\xi 0} / (\max |\bar{\eta}_*|);$$
$$\bar{W}_{\eta} = \bar{I}_{\eta 0} / (\max |\bar{\xi}_*|).$$

Интегральные характеристики лопастей:

— дисковое отношение

$$A_E / A_0 = \frac{Z}{\pi} \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{c}\, d\bar{r};$$

— объем лопастей

$$\bar{\mathcal{V}}_B = \mathcal{V}_B R^{-3} = Z \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{A}_S\, d\bar{r} = Z \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{e}\bar{c} g_1(\bar{r})\, d\bar{r}.$$

Следует обратить внимание на приближенный характер последней формулы для объема лопастей, которая становится точной только при цилиндрической ступице и отсутствии галтельного перехода от лопасти к ступице.

Ортогональная система координат на опорной поверхности лопасти. Запись основных уравнений поверхности лопасти гребного винта (1.11) и (1.12) произведена с использованием естественных параметров $\bar{r}$ и $\tilde{\xi}$. Координатные линии, соответствующие постоянным значениям этих параметров, не образуют на опорной поверхности лопасти ортогональную сетку. Вместе с тем в некоторых линейных гидродинамических задачах требуется введение на опорной поверхности такой ортогональной

системы координат, чтобы направление одной из ее координатных линий совпадало с направлением винтовых линий, получаемых сечением опорной поверхности цилиндрами $\bar{r} = \text{const}$.

В таких случаях следует вместо ξ ввести для определения поверхности другой параметр (обозначим его ν), обеспечивающий ортогональность координатной сетки на опорной поверхности.

В переменных $\bar{r}$, θ уравнения опорной поверхности имеют следующий простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_R + \bar{r}\theta \operatorname{tg}\varphi; \\ \bar{y} &= \bar{r}\cos\theta; \\ \bar{z} &= \bar{r}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

Путем непосредственной проверки диагональности метрического тензора можно убедиться, что подстановка

$$\theta = \exp\{-I(\bar{r})\}\left[\nu - \int_{\bar{r}_H}^{\bar{r}} \sin\varphi(\bar{r}_1)\cos\varphi(\bar{r}_1)\,\bar{x}'_R(\bar{r}_1) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\{I(\bar{r}_1)\}\frac{d\bar{r}_1}{\bar{r}_1}\right], \tag{1.31}$$

где

$$I(\bar{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{r}_H}^{\bar{r}} \sin\varphi(\bar{r}_1)\cos\varphi(\bar{r}_1)\,\overline{H}'(\bar{r}_1)\,\frac{d\bar{r}_1}{\bar{r}_1}$$

приводит к ортогональной системе координат $\bar{r}$, ν на опорной поверхности (1.30). Нетрудно заметить, что при $\bar{r} = \bar{r}_H$ параметр ν совпадает с угловой координатой θ.

В частном случае правильной винтовой поверхности, когда $\overline{H}' = 0$ и $\bar{x}'_R = 0$, из уравнения (1.31) следует, что $\theta = \nu$ для любого значения $\bar{r}$. Можно показать и обратное — только на правильной винтовой поверхности параметры $\bar{r}$ и θ образуют ортогональную сетку.

Выпишем теперь для введенной системы координат $\bar{r}$, ν коэффициенты Ламе:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \left(1 + \cos^2\varphi D_0^2\right)^{1/2}; \\ H_\nu &= \frac{\bar{r}\exp\{-I(\bar{r})\}}{\cos\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

где

$$D_0 = \bar{x}'_R + \overline{H}'\frac{\theta}{2\pi}.$$

Сравнивая выражение для H_r с формулами (1.21), легко заметить, что $H_r = \Lambda_0$, а величина D_0 имеет в обеих группах формул одинаковый смысл. Заметим также, что косинус угла

наклона координатной линии $\nu = \text{const}$ к радиальному направлению равен $1/H_r$.

Орты введенных координат:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{e}_\nu &= \sin\varphi\vec{i} - \cos\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\varphi\cos\theta\vec{k};\\
\vec{e}_r &= \frac{D_0\cos^2\varphi}{H_r}\vec{i} + \frac{1}{H_r}(\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi D_0)\vec{j} +\\
&+ \frac{1}{H_r}(\sin\theta - \cos\theta\sin\varphi\cos\varphi D_0)\vec{k}.
\end{aligned}\right\} \quad (1.33)$$

Нетрудно убедиться, что орт $\vec{e}_\nu$ действительно направлен вдоль винтовых линий ξ. Между определенной формулами (1.21) нормалью к опорной поверхности и ортами $\vec{e}_\nu$ и $\vec{e}_r$ существует связь, выражающая их взаимную ортогональность:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_\nu \times \vec{n}_0.$$

В заключение укажем формулу, позволяющую осуществлять переход от основного параметра $\tilde{\xi}$ к ортогональной координате ν:

$$\nu = a(\tilde{c}_S + \tilde{\xi})\exp\{I(\bar{r})\} +$$

$$+ \int_{\bar{r}_H}^{\bar{r}} \sin\varphi(\bar{r}_1)\cos\varphi(\bar{r}_1)\,\bar{x}'_R(\bar{r}_1)\exp\{I(\bar{r}_1)\}\frac{d\bar{r}_1}{\bar{r}_1}.$$

1.2. Методы аппроксимации геометрических элементов поверхности гребного винта

Математическое представление поверхности лопасти гребного винта. Рассматривая уравнения поверхности лопасти гребного винта, можно выявить два подхода к решению задачи аппроксимации этой поверхности. Первый подход заключается в аппроксимации всех входящих в уравнения (1.11) и (1.12) базисных геометрических элементов поверхности лопасти, которую естественным образом можно осуществить в процессе проектирования гребного винта при последовательном определении базисных элементов. Такой подход удобен еще и тем, что позволяет изменять, в случае необходимости, лишь отдельные геометрические элементы. Например, если при испытаниях модели спроектированного гребного винта выявилась необходимость внесения коррекции в шаг винта, соответствующим образом изменяется лишь аппроксимация зависимости $\bar{H}(\bar{r})$, а найденные до этого аппроксимации других элементов остаются без изменений. Кроме того, поэлементная аппроксимация позволяет

для некоторых элементов иметь стандартные наборы аппроксимаций часто встречающихся зависимостей. В частности, к таким элементам относятся нормированная средняя линия $F_C(\tilde{\xi})$ и нормированный профиль $F_T(\tilde{\xi})$, для которых в последнее время часто используют зависимости NACA $a=0{,}8$ и NACA 66*M* соответственно. Представление поверхности лопасти на основе уравнений (1.11) и (1.12) также весьма удобно при автоматизированном выполнении конструкторских работ по гребным винтам, поскольку содержит в явном виде используемые при этом аппроксимации геометрических элементов.

Второй подход заключается в непосредственной аппроксимации зависимостей декартовых координат точек засасывающей и нагнетающей поверхностей от параметров. Иначе говоря, в этом случае непосредственно аппроксимируют шесть функций двух переменных:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^{\pm} &= \bar{x}^{\pm}(u,\ v);\\ \bar{y}^{\pm} &= \bar{y}^{\pm}(u,\ v);\\ \bar{z}^{\pm} &= \bar{z}^{\pm}(u,\ v), \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

где u, v — параметры.

Указанный подход по отношению к поэлементной аппроксимации обладает преимуществом: требуется меньшее число операций, необходимых для вычисления координат поверхности лопасти. Кроме того, в сочетании с кусочно-гладкой аппроксимацией уравнений (1.34) второй подход позволяет рассматривать отдельно и независимо куски поверхности лопасти. Опыт показывает, что именно такую аппроксимацию удобнее всего использовать в системах автоматизированного программирования (САП) винтообрабатывающих станков с ЧПУ. Видимо, непосредственная кусочно-гладкая аппроксимация уравнений поверхности лопасти (1.34) будет наиболее подходящей для решения нелинейных задач гидродинамики гребного винта.

В настоящее время принято целесообразным получать в результате проектирования гребного винта математическое представление поверхности лопасти на основе уравнений (1.11) и (1.12), а затем, на этапе подготовки управляющих программ для обрабатывающих гребной винт станков, переходить к представлению, основанному на непосредственной аппроксимации уравнений (1.34). Указанный переход состоит в интерполяции таблиц функций (1.34), вычисленных путем поэлементной аппроксимации.

Таким образом, проблема сглаживания, связанная с разбросом исходных данных, возникает только на этапе поэлементной аппроксимации.

Существует большое число методов приближения кривых и поверхностей, которые в принципе можно использовать в целях аппроксимации поверхности гребного винта. Вместе с тем опыт многочисленных расчетов показывает, что наиболее универсальными свойствами обладают методы кусочно-гладкой аппроксимации сплайн-функциями. По этой причине разработчики отечественной системы программ математического представления поверхности гребных винтов (С. С. Масленников, А. А. Русецкий), вошедшей в отраслевой стандарт ОСТ 5.0317—80 [79], выбрали для решения задач аппроксимации аппарат сплайн-функций. В настоящем параграфе будут указаны основные особенности применения этого аппарата к формированию математического представления поверхности гребного винта.

При построении вошедших в эту систему алгоритмов аппроксимации сплайнами в качестве основы в большинстве случаев были приняты алгоритмы, предложенные Ю. С. Завьяловым [35]. Ряд идей, связанных с проблемой сглаживания сплайнами, авторами системы был почерпнут из книги Г. И. Марчука [63].

В силу замечательных аппроксимационных свойств сплайны, по нашему мнению, найдут широкое применение при решении вычислительных задач гидродинамики гребного винта.

Интерполяция кривых кубическими сплайнами. Математический термин «сплайн» введен Шёнбергом в 1946 г. [151]. Английское слово «spline» означает чертежная гибкая рейка. Такую рейку, широко используемую при ручном вычерчивании кривых сложной формы, прижимают к чертежу в заданных точках и проводят нужную плавную линию.

Как известно, линеаризованное уравнение изгиба тонкой балки имеет вид

$$EIy''(x) = -M(x), \tag{1.35}$$

где EI — жесткость балки; $y(x)$ — ее прогиб, а $M(x)$ — изгибающий балку момент, изменяющийся между опорами линейно. Решение этого уравнения — функция с непрерывной второй производной, являющаяся на каждом участке между опорами кубической параболой. Такая функция и называется кубическим сплайном. Если дифференциальное уравнение (1.35) заменить аналогичным уравнением порядка $n-1$, то можно прийти к понятию «сплайн степени n». Сплайн первой степени — кусочно-линейная функция.

Тонкая балка всегда имеет минимальную потенциальную энергию, которая в случае слабого изгиба пропорциональна интегралу от квадрата второй производной прогиба. Аналогичным свойством обладает и кубический сплайн: в классе функций, обладающих непрерывной второй производной и интерполирующих заданную таблицу (x_i, f_i), $i=0, N$, кубический сплайн

$S(x)$ с краевыми условиями $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$ доставляет минимум функционалу

$$I[f] = \int_{x_0}^{x_N} |f''(x)|^2 dx. \tag{1.36}$$

Рассмотрим теперь интерполяцию кубическим сплайном таблицы (x_i, f_i), $i = 0, N$ при $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Помимо интерполяционных условий $S(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, сплайн $S(x)$ должен удовлетворять условию непрерывности второй производной. На каждом участке $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн определяется четырьмя коэффициентами кубической параболы. Таким образом, сплайн в целом определяют $4N$ коэффициентов. $N+1$ — интерполяционное условие вместе с $3(N-1)$ — условиями склейки в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$:

$$S(x_i - 0) = S(x_i + 0);$$
$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0);$$
$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$$

дают $4N-2$ — условия для определения коэффициентов сплайна. Два недостающих условия, называемых краевыми, следует задать дополнительно, необходимость чего следует также из формулы (1.35). Для интерполяции одномерных геометрических элементов, определяющих поверхность лопасти гребного винта, используют краевые условия следующих типов:

I. $S'(x_j) = f'(x_j)$;

II. $S''(x_j) = f''(x_j)$;

III. $S'''(x_{j+\alpha} + 0) = S'''(x_{j+\alpha} - 0)$;

IV. $S''(x_j) + k_j S''(x_{j+\alpha}) = 0$

при задании условий на концах промежутка:

— левом $j = 0, \ \alpha = 1.$

— правом $j = N, \ \alpha = -1.$

Кроме того, предполагают, что краевые условия выставляются обязательно для обоих концов промежутка $[x_0, x_N]$. Величины $f'(x_j)$, $f''(x_j)$ и k_j считают заданными, если использовано краевое условие соответствующего типа. Введем ставшие в теории сплайнов общеупотребительными обозначения:

$$h_i = x_{i+1} - x_i; \quad t = (x - x_i)/h_i;$$
$$\mu_i = h_{i-1}/(h_{i-1} + h_i); \ \lambda_i = 1 - \mu_i;$$
$$m_i = S'(x_i); \quad M_i = S''(x_i)/6;$$
$$d_i = \frac{(f_{i+1} - f_i)/h_i - (f_i - f_{i-1})/h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}.$$

Коэффициенты M_i по аналогии с (1.35) называются моментами сплайна. Нетрудно убедиться, что на каждом участке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $S(x) = f_i + t\{f_{i+1} - f_i - (x_{i+1} - x)[(x_{i+1} - x + h_i)M_i + (h_i + x - x_i)M_{i+1}]\}$ удовлетворяет интерполяционным условиям и всем условиям склейки, за исключением, быть может, условий $S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$, которые вместе с краевыми условиями дают возможность записать систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин M_i, $i = 0, 1, \ldots, N$.

При всех рассматриваемых типах краевых условий склейка по первой призводной во внутренних узлах x_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ приводит к следующим $N-1$ уравнениям: $\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Недостающие два уравнения определяют краевые условия на концах промежутка:

— левом

I. $2M_0 + M_1 = ((f_1 - f_0)/h_0 - f_0')/h_0$;

II. $M_0 = f_0''/6$;

III. $(\lambda_1^2 - \mu_1^2) M_0 - (\lambda_i + 2\mu_1) M_1 = \lambda_1 - \mu_1 d_1$;

IV. $M_0 + k_0 M_1 = 0$;

— правом

I. $M_{N-1} + 2M_N = [f_N' - (f_N - f_{N-1})/h_{N-1}]/h_{N-1}$;

II. $M_N = f_N''/6$;

III. $(2\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) M_{N-1} + (\lambda_{N-1}^2 - \mu_{N-1}^2) M_N = \lambda_{N-1} d_{N-1} - \mu_{N-1}$;

IV. $k_N M_{N-1} + M_N = 0$.

Как видно, во всех случаях имеем систему уравнений с трехдиагональной матрицей. Главная диагональ этой матрицы доминирует, что позволяет применить для решения системы эффективный метод прогонки. Алгоритмы прогонки приведены, например, в книгах [35, 89].

Выбор краевых условий того или иного типа зависит от априорной информации о поведении интерполируемой функции на концах промежутка $[x_0, x_N]$. Условия типов I и II используют, когда известны значения первой и второй производной.

Условия типов III и IV применяют в случаях, когда задана лишь таблица ординат интерполируемой функции. При этом, как правило, удовлетворительного результата достигают при использовании условия типа III. Хорошие результаты дает также условие типа IV при $k_j = -1$, т. е. условие равенства вторых производных в двух соседних точках, прилегающих к одному из концов промежутка $[x_0, x_N]$.

Если интерполируемая функция имеет на одном или обоих концах промежутка интерполяции неограниченную производ-

ную, то непосредственное применение интерполяционного сплайна недопустимо. В этом случае уравнение кривой $z = f(x)$ целесообразно представить в параметрическом виде

$$z = f[x(u)];$$
$$x = x(u),$$

причем параметр u принимают таким, при котором $dx/du = 0$ в тех точках, где $f'(x)$ неограничена. Примеры параметров такого рода были даны в предыдущем параграфе [см. формулы (1.4), (1.6) и (1.13)]. Выбрав тот или иной параметр $u = u(x)$, исходную таблицу (x_i, f_i) можно заменить таблицей (u_i, f_i), которая и интерполируется кубическим сплайном. Применение такого параметра позволяет при задании радиуса кривизны на конце интерполируемой кривой, подходящей под прямым углом к оси абсцисс, использовать для построения сплайна $S(u)$ краевое условие типа I. Такая ситуация возникает при интерполяции нормированных ординат толщины сечения лопасти $F_T(\tilde{\xi})$ [см. формулы (1.5)].

Необходимо отметить, что чаще всего рекомендуется в случае сложных кривых строить два сплайна: $z = S_1(u)$ и $x = S_2(u)$, приняв за параметр u длину ломаной с вершинами в исходных точках. Однако опыт расчетов показал, что изложенный выше подход, когда одно из параметрических уравнений кривой задается подходящей аналитической зависимостью (выбор которой, как правило, труда не составляет), имеет существенные преимущества: повышается качество интерполяции, экономятся ресурсы ЭВМ.

Интерполяция поверхностей бикубическими сплайнами. Пусть на плоскости (xy) задана прямоугольная область A $x_0 \leqslant x \leqslant x_N$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_M$, разбитая сетками $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ и $y_0 < y_1 < \ldots < y_M$ на прямоугольные ячейки $A_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. В каждом узле (x_i, y_j) задано значение f_{ij} функции, которую надлежит интерполировать. В классе функций двух переменных, имеющих непрерывные вторые частные производные по каждой переменной, интерполяцию можно выполнить с помощью бикубического сплайна.

Интерполяционный бикубический сплайн в каждой ячейке A_{ij} — кубический полином по каждой переменной. Для определения 16 коэффициентов этого полинома необходимо использовать такое же число условий. В целом бикубический сплайн имеет 16 NM коэффициентов. Можно показать, что из них лишь $(N+3)(M+3)$ коэффициентов не определяются из условий склейки по аппликатам сплайна и его первым и вторым производным. Интерполяционные условия

$$S(x_i, y_j) = f_{ij}; \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$
$$j = 0, 1, \ldots, M$$

позволяют найти $(N+1)(M+1)$ коэффициентов. Остальные $2(N+M+4)$ соотношения для определения коэффициентов сплайна следуют из граничных условий.

Введем обозначения:

$$l_j = y_{j+1} - y_j;$$

$$s = (y - y_j)/l_j;$$

$$\psi_1(t) = 1 - t;$$

$$\psi_2(t) = t;$$

$$\psi_3(t) = t(t-1)(2-t);$$

$$\psi_4(t) = t(t^2-1);$$

$$M_{ij}^{(k,\,n)} = \frac{1}{6^{\frac{k+n}{2}}} \frac{\partial^{k+n} S(x,\,y)}{\partial x^k\, \partial y^n}\Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}}; \qquad (1.37)$$

$$\Psi(t,\ h_i) = \| \psi_1(t),\ \psi_2(t),\ h_i^2\psi_3(t),\ h_i^2\psi_4(t) \|;$$

— матрица-строка:

$$\Phi_{ij} = \left\| \begin{array}{cc|cc} f_{ij} & f_{i,\,j+1} & M_{ij}^{(0,\,2)} & M_{i,\,j+1}^{(0,\,2)} \\ f_{i+1,\,j} & f_{i+1,\,j+1} & M_{i+1,\,j}^{(0,\,2)} & M_{i+1,\,j+1}^{(0,\,2)} \\ \hline M_{ij}^{(2,\,0)} & M_{i,\,j+1}^{(2,\,0)} & M_{ij}^{(2,\,2)} & M_{i,\,j+1}^{(2,\,2)} \\ M_{i+1,\,j}^{(2,\,0)} & M_{i+1,\,j+1}^{(2,\,0)} & M_{i+1,\,j}^{(2,\,2)} & M_{i+1,\,j+1}^{(2,\,2)} \end{array} \right\|. \qquad (1.38)$$

С помощью этих обозначений сплайн в каждой ячейке A_{ij} можно представить в виде произведения трех матриц [35]:

$$S(x,\ y) = \Psi(t,\ h_i)\,\Phi_{ij}\Psi^T(s,\ l_j).$$

Вычисления по этой формуле выполняют с помощью подпрограммы умножения матриц.

Как видно, матрицы Φ_{ij} (1.38) состоят из четырех клеток. Верхняя левая клетка заполнена значениями интерполируемой функции в узлах. Правая верхняя клетка включает моменты одномерных сплайнов $S(x,\ y_j)$. $M+1$ сплайн $S(x,\ y_j)$ строят при фиксированном узловом значении y_j, используя задаваемые на вертикальных границах области A краевые условия любого из указанных при рассмотрении одномерных сплайнов типа. Аналогично элементы нижней левой клетки матрицы (1.38) определяют как моменты $N+1$ кубического сплайна $S(x_i,\ y)$. Из уравнения (1.37) следует, что моменты $M_{ij}^{(2,\,2)}$, заполняющие правые нижние клетки матриц Φ_{ij}, являются моментами одномерных сплайнов $S_M(x,\ y_j)$, интерполирующих моменты $M_{ij}^{(0,\,2)}$

как функции переменной x при фиксированных значениях $y = y_j$. В силу коммутативности операции взятия частных производных моменты $M_{ij}^{(2,2)}$ можно определить и как моменты кубических сплайнов $S_M(x_i, y)$, интерполирующих моменты $M_{ij}^{(2,0)}$ при фиксированных значениях $x = x_i$. Краевыми условиями для построения сплайнов $S_M(x_i, y)$ [или $S_M(x, y_j)$] служат моменты интерполянтов исходных краевых условий типа I или II. Для однозначного построения указанных интерполянтов следует задаться соответствующими краевыми условиями в углах прямоугольника A. В практических задачах интерполяции двумерных геометрических элементов поверхности лопасти гребного винта смешанные производные в углах области интерполяции никогда не задаются, а для построения сплайнов, интерполирующих первые или вторые частные производные, заданные на границе A, используются краевые условия типа IV при $k = -1$. Если на границе A заданы условия типа III или IV, то при построении сплайнов $S_M(x_i, y)$ [или $S_M(x, y_j)$] используют такие же условия. При условиях типа III в угловых подобластях прямоугольника A, состоящих из четырех ячеек, становятся непрерывными все производные бикубического сплайна вплоть до $\partial^6 S(x, y)/\partial x^3 \partial y^3$ включительно.

Интерполяция бикубическими сплайнами применяется:

— для приближения функций $F_T(\tilde{\xi}, \bar{r})$ и $F_C(\tilde{\xi}, \bar{r})$ [или $F_{TM}(\tilde{\xi}_{TM}, \bar{r})$ и $F_{CM}(\tilde{\xi}_{CM}, \bar{r})$] в тех случаях, когда они действительно зависят от $\bar{r}$;

— для представления поверхности лопасти уравнениями вида (1.34).

В связи с принципиальным значением последнего случая сделаем несколько замечаний относительно применяемой при этом процедуры интерполяции.

Исходную двумерную сетку выбирают в прямоугольной области изменения параметров $\tilde{\xi}$, $\bar{r}$. Число узлов по $\tilde{\xi}$ принимают равным 21, а по $\bar{r}$ — 11. В этих узлах вычисляют значения координат засасывающей и нагнетающей поверхностей лопасти в декартовой системе D: $\bar{x}_{ij}^{\pm}$, $\bar{y}_{ij}^{\pm}$, $\bar{z}_{ij}^{\pm}$, $i = 0, 1, \ldots, j = 0, 1, \ldots, 10$.

Принимают краевые условия типа III.

Параметры u и v, в зависимости от которых строят бикубические сплайны, назначают так, чтобы они принимали на узловых линиях сетки целочисленные значения, равные номеру линии. Иначе говоря, $u_i = i$ и $v_j = j$. При необходимости осуществления переходов от параметров u, v к параметрам $\tilde{\xi}$, $\bar{r}$ и обратно можно построить сплайны, интерполирующие таблицы $(i, \tilde{\xi}_i)$ и $(j, \bar{r}_j)$.

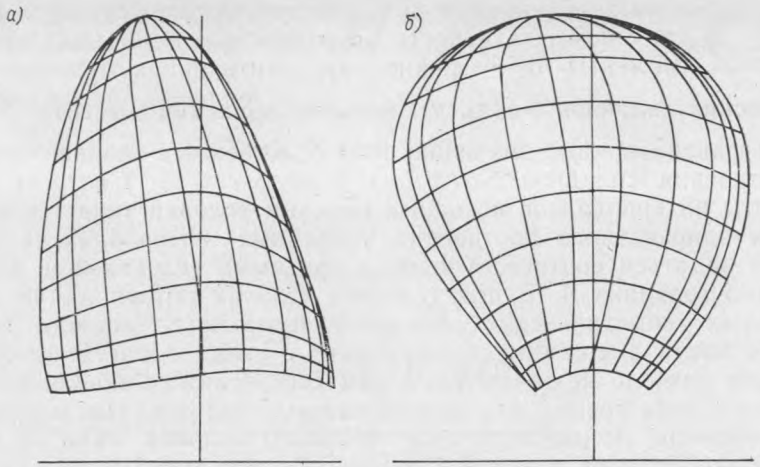


Рис. 1.5. Проекции поверхности лопасти гребного винта, представленной параметрическими бикубическими сплайнами (на поверхность нанесена координатная сетка параметров $\tilde{\xi}$ и $\bar{r}$, размер сетки 10×11): *а* — проекция на плоскость xy; *б* — проекция на плоскость yz.

Вычисление коэффициентов вида $M_{ij}^{(2,\,2)}$ осуществляют путем построения сплайнов $S_M(x_i,\ y)$, выполняя в этом случае для построения каждого из шести бикубических сплайнов 5400 арифметических операций в процессе решения 53 одномерных задач интерполяции.

Общее число коэффициентов сплайнов, определяющих поверхность лопасти, равно 25 800. При таком большом числе коэффициентов особое значение приобретает экономизация процесса вычисления координат поверхности. Коэффициенты сплайнов записывают в специальные файлы внешней памяти ЭВМ блоками по 48 чисел. В каждом таком блоке содержатся коэффициенты трех сплайнов, определяющих нагнетающую или засасывающую поверхность в одной ячейке $A_{ij}=[i,\ i+1]\times$ $\times[j,\ j+1]$. Благодаря сделанному выбору параметров u и v определение индексов нужной ячейки осуществляют двумя операциями: $i=\text{entier}\,(u)$; $j=\text{entier}\,(v)$ (рис. 1.5).

Сглаживание кубическими сплайнами. Практика аппроксимации геометрических элементов поверхности гребных винтов показала, что сглаживание необходимо, даже если таблица ординат этих элементов определена проектировочным расчетом на ЭВМ. Интерполяция поверхности лопасти по данным, приведенным на чертеже гребного винта, практически осуществима лишь методом «проб и ошибок» с многократным исправлением этих данных. Указанные обстоятельства и послужили причиной включения в состав программного обеспечения математического представления поверхности гребных винтов средств сглажива-

ния, а точнее неинтерполяционного приближения кривых и поверхностей. Для этой цели также весьма эффективным оказался аппарат сплайн-функций.

Подобно тому, как интерполяционные сплайны можно получить из условия минимума функционала (1.36), сглаживающие сплайны строят путем минимизации на классе функций с непрерывной второй производной функционала

$$J_1[f] = \alpha \int_{x_0}^{x_N} |f''(x)|^2 \, dx + \sum_{i=0}^{N} \rho_i^{-1} [f(x_i) - f_i^*]^2, \qquad (1.39)$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\rho_i \geqslant 0$ * и f_i^* — заданные числа.

Функционал (1.39) является линейной комбинацией функционала «кривизны» (1.36) и функционала, минимизируемого в методе наименьших квадратов. Чем меньше величины α и ρ_i, тем больше приближается функция, доставляющая $\min J_1$ к интерполяционному сплайну, построенному по величинам f_i^*.

Для целей аппроксимации геометрических элементов поверхности гребного винта удобно подчинить сглаживающий сплайн следующим дополнительным требованиям:

— через крайние точки (x_0, f_0^*) и (x_N, f_N^*) сплайн проходит точно, т. е. $S(x_0) = f_0^*$, $S(x_N) = f_N^*$;

— сплайн удовлетворяет краевым условиям рассмотренных в задаче интерполяции типов;

— весовые множители ρ_i принимают два значения: 1 или 0 в зависимости от того, разрешается ли кривой проходить мимо точки или нет;

— сплайн удовлетворяет условию

$$G(\alpha) \equiv \max_i |S(x_i) - f_i^*| \leqslant \varepsilon,$$

где ε — заданное допускаемое наибольшее отклонение сплайна от ординат f_i^*.

Как показано в книге [35], решение задачи минимизации функционала (1.39) приводит к кубическому сплайну, моменты которого удовлетворяют соотношениям:

$$b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = g_1;$$

$$c_{i-2} M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} + c_i M_{i+2} = g_i,$$

$$i = 2, \ldots, N-2;$$

$$c_{N-3} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N = g_{N-1},$$

---

* Если какое-либо из чисел ρ_i равно нулю, необходимо из суммы (1.39) исключить соответствующее слагаемое.

где

$$a_i = \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{h_{i-1}^2}\rho_{i-1}^* + \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)^2 \rho_i^* + \frac{1}{h_i^2}\rho_{i+1}^*;$$

$$\rho_0^* = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$b_i = \frac{1}{6}h_i - \frac{1}{h_i}\left[\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\rho_i^* + \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\rho_{i+1}^*\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-2;$$

$$b_0 = \frac{1}{6}h_0 - \frac{1}{h_0}\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}\right)\rho_1^*;$$

$$b_{N-1} = \frac{1}{6}h_{N-1} - \frac{1}{h_{N-1}}\left(\frac{1}{h_{N-2}} + \frac{1}{h_{N-1}}\right)\rho_{N-1}^*;$$

$$c_i = \frac{\rho_{i+1}^*}{h_i h_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-3;$$

$$\rho_i^* = \alpha\rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$g_i = \frac{1}{6}\left[(f_{i+1}^* - f_i^*)/h_i - (f_i^* - f_{i-1}^*)/h_{i-1}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Для получения замкнутой системы уравнений относительно моментов M_i следует к вышеприведенным соотношениям добавить пару уравнений, вытекающих из краевых условий. Эти уравнения идентичны применяемым в интерполяционном случае.

Пятидиагональную систему уравнений для определения M_i можно решить методами, рекомендуемыми в книгах [35, 89].

Естественно, что коэффициенты этой системы становятся определенными, если известна величина α. Можно показать, что для точек, в которых допускается отклонение от заданной ординаты f_i^*, имеет место соотношение:

$$S(x_i) - f_i^* = -\alpha\left[(M_{i+1} - M_i)/h_i - (M_i - M_{i-1})/h_{i-1}\right].$$

Иначе говоря, параметр α — коэффициент пропорциональности между отклонением сплайна в точке x_i и скачком его третьей производной в этой же точке. Для определения величины параметра α приходится строить последовательные приближения для решения нелинейного уравнения $G(\alpha) = \varepsilon$, вытекающего из условия (1.40). В качестве нулевого приближения принимают $\alpha^{(0)} = 0$, т. е. сначала строят интерполяционный сплайн. В следующем приближении принимают

$$\alpha^{(1)} = \frac{\varepsilon}{\max\limits_i \left|\left(M_{i+1}^{(0)} - M_i^{(0)}\right)/h_i - \left(M_i^{(0)} - M_{i-1}^{(0)}\right)/h_{i-1}\right|}.$$

Последующие итерации строят методом хорд. Процесс продолжается до достижения равенства $G(\alpha) \approx \varepsilon$ с заданной относительной точностью.

Принципиальное значение при использовании сглаживающего сплайна имеет назначение наибольшего допустимого отклонения ε. В ОСТ 5.0317—80 [79] разрешено при сглаживании данных, приведенных на чертеже гребного винта, принимать величину такой, чтобы отклонения аппроксимации от чертежных данных не превысили половины соответствующего допуска на изготовление по ГОСТ 8054—72 «Винты гребные металлические». Что же касается выбора величины ε при аппроксимации геометрических элементов в процессе проектирования гребного винта, то определенных рекомендаций здесь дать нельзя. В этом случае ε назначается разработчиком алгоритма проектирования на основе пробных расчетов.

Таблица 1.1. **Сглаживающая аппроксимация средней линии NACA $a=0{,}8$**

$\tilde{\xi}$	$F_C(\tilde{\xi})$				$\frac{dF_C}{d\tilde{\xi}}$	
	Исходные данные	ε=0,005	ε=0,0025	Расчет по аналитической формуле	ε=0,0025	Расчет по аналитической формуле
—1,0	0	0	0	0	1,593	1,500 17
—0,9	0,17	0,173 1	0,170 9	0,171 11	1,825	1,832 69
—0,8	0,36	0,359 4	0,359 3	0,358 37	1,885	1,882 63
—0,7	0,54	0,540 3	0,540 8	0,542 00	1,732	1,760 32
—0,6	0,70	0,695 8	0,698 3	0,702 24	1,358	1,354 97
—0,5	0,81	0,810 4	0,810 7	0,811 55	0,934	0,905 97
—0,4	0,89	0,889 5	0,889 3	0,888 54	0,634	0,646 83
—0,3	0,94	0,942 4	0,941 4	0,942 68	0,447	0,442 24
—0,2	0,98	0,977 2	0,978 1	0,977 91	0,242	0,265 74
—0,1	0,99	0,994 3	0,992 5	0,996 37	0,117	0,105 42
—0,030 66	1,00	1,000 0	1,000 0	1	0,005	0
0,1	0,99	0,989 2	0,989 7	0,987 38	—0,209	—0,192 31
0,2	0,96	0,961 2	0,960 7	0,960 85	—0,351	—0,338 55
0,3	0,92	0,918 9	0,919 3	0,919 56	—0,500	—0,488 23
0,4	0,86	0,861 3	0,860 7	0,862 94	—0,649	—0,645 73
0,5	0,79	0,789 6	0,789 6	0,789 96	—0,793	—0,816 90
0,6	0,70	0,700 8	0,700 3	0,698 82	—0,992	—1,010 68
0,7	0,59	0,591 3	0,589 9	0,586 55	—1,231	—1,243 05
0,8	0,45	0,452 6	0,451 4	0,447 81	—1,552	—1,549 11
0,9	0,27	0,265 0	0,268 4	0,270 93	—2,207	—2,039 77
1,0	0	0	0	0	—3,161	—6,571 86

В табл. 1.1 представлены результаты аппроксимации сглаживающим сплайном функции $F_C(\tilde{\xi})$, соответствующей средней линии типа NACA $a=0{,}8$ при различных значениях допустимого отклонения. Исходные данные в табл. 1.1 специально приняты с бóльшим разбросом, чем это обычно встречается на практике. В этой же таблице приведены ординаты этой кривой, вычисленные по аналитической формуле [102].

Сглаживание бикубическими сплайнами. Сглаживание поверхностей приходится выполнять только при аппроксимации функций $F_{TM}(\tilde{\xi}_e, \bar{r})$ и $F_{CM}(\tilde{\xi}_c, \bar{r})$. В тех случаях, когда их определяют по чертежу гребного винта, задачу построения сглаживающего бикубического сплайна $S(x, y)$, приближающего функцию $f(x, y)$ по ее таблице f^*_{ij} и краевым условиям, выполняют в три основных этапа. На первом этапе строят сглаживающие одномерные сплайны $S^*_j(x)$ по таблице (x_i, f^*_{ij}) для всех j; на втором — кубические сплайны $S^{**}_i(y)$ по таблице $[y_j, S^*_j(x_i)]$ для всех i, на третьем — интерполяционный бикубический сплайн по таблице $[(x_i, y_j, S^{**}_i(y_j)]$.

Как видно, процедура сглаживания поверхностей сложна и трудоемка, поэтому ее следует (по возможности) избегать. В частности, при определении функций F_{TM} и F_{CM} расчетом вычисления следует выполнять с точностью, обеспечивающей необходимую плавность.

Вычисление нормалей к кривым и поверхностям. Если кривая или поверхность аппроксимированы сплайном, то направляющие косинусы этой нормали определяют по общим формулам дифференциальной геометрии. Если точка, в которой вычисляют нормаль, не узловая, то входящие в формулы для нормали производные находят по соотношениям, получаемым дифференцированием сплайна. В узловых точках процедура вычисления нормали может быть несколько упрощена.

В заключение главы укажем, что приведенные соотношения позволяют получать математическое представление поверхности гребных винтов любых встречающихся на практике конструкций.

Глава 2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ

Гребной винт в реальных условиях работает в присутствии корпуса судна и его выступающих частей. Влияние корпуса приводит к тому, что набегающий на движитель поток пространственно неоднороден. Кроме того, влияние таких факторов, как волнение моря, маневрирование судна, турбулентный характер обтекания корпуса приводит к тому, что набегающий на винт поток становится нестационарным.

В книге рассмотрен случай, когда нестационарность обусловлена лишь неоднородностью поля скоростей в месте распо-

ложения винта по окружной координате. Такой случай соответствует равномерному поступательному движению судна на тихой воде и вращению винта с постоянной угловой скоростью. Турбулентные пульсации скорости не учитываются.

Как известно, работающий гребной винт оказывает влияние на формирование набегающего на него потока. Однако этот вопрос здесь не рассмотрен и поле скоростей в месте расположения винта сочтено заданным.

Установлено, что попутный поток корпуса и его выступающих частей имеет вследствие влияния вязкости в основном вихревой характер и лишь небольшая его часть обусловлена потенциальным «вытесняющим» влиянием корпуса. Однако исследование работы гребного винта методами динамики вязкой жидкости наталкивается на ряд непреодолимых в настоящее время препятствий. Естественно, что в таких условиях задачу о действии гребного винта в неоднородном поле скоростей можно решить, только приняв допущения о малой его завихренности. Можно показать, что в линейной теории малых возмущений и слабых градиентов поля набегающего потока вызванное винтом течение потенциально. По этой причине в дальнейшем использованы зависимости теории идеальной жидкости в их обычной формулировке.

2.1. Уравнения движения жидкости и постановка задач гидродинамики гребного винта

Рассмотрим основные уравнения движения жидкости в системах координат A_0 и D. Учитывая, что переносная скорость определяется выражением

$$\vec{V}_E = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \tag{2.1}$$

а абсолютная (вызванная) —

$$\vec{w} = \vec{V}_E + \vec{V}_R, \tag{2.2}$$

запишем уравнение абсолютного движения жидкости в связанной с винтом подвижной системе координат D [46]:

$$\frac{\partial' \vec{w}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\vec{w}^2}{2} - \vec{w}\vec{V}_E\right) - \vec{V}_R \times \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{2.3}$$

Здесь штрих означает, что производная берется в подвижной системе координат. Обозначая $\vec{\gamma} = \operatorname{rot} \vec{w}$, собирая члены под общий знак grad и преобразуя уравнение, получим

$$\frac{\partial' \vec{w}}{\partial t} - \vec{V}_R \times \vec{\gamma} = \vec{F} - \operatorname{grad}\left[\frac{p}{\rho} + \vec{w}\left(\frac{\vec{w}}{2} - \vec{V}_E\right)\right]. \tag{2.4}$$

Учитывая, что вне вихрей течение жидкости потенциально, т. е. $\vec{w} = \operatorname{grad}\Phi$, и опуская вектор $\vec{F}$, характеризующий гравитационные силы, приведем уравнение (2.4) к виду

$$\vec{V}_R \times \vec{\gamma} = \operatorname{grad}\left[\frac{\partial'\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \vec{w}\left(\frac{\vec{w}}{2} - \vec{V}_E\right)\right]. \qquad (2.5)$$

Из анализа уравнения (2.5) вытекает, что в области, не занятой вихрями ($\vec{\gamma} = 0$), или где $\vec{V}_R \times \vec{\gamma} = 0$, существует интеграл Лагранжа—Коши:

$$\frac{\partial'\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \vec{w}\left(\frac{\vec{w}}{2} - \vec{V}_E\right) = f(t). \qquad (2.6)$$

Функцию $f(t)$ можно определить, рассматривая условия на бесконечности перед винтом ($\vec{w} = 0$, $p = p_0$). В результате получим интеграл Лагранжа—Коши в относительном движении:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\vec{w}\left(\frac{\vec{w}}{2} - \vec{V}_E\right) - \frac{\partial'\Phi}{\partial t}. \qquad (2.7)$$

В случае стационарного течения интеграл Бернулли в относительном движении имеет вид

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\vec{w}\left(\frac{\vec{w}}{2} - \vec{V}_E\right) \qquad (2.8)$$

или в терминах относительной и переносной скоростей

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{1}{2}\left(\vec{V}_R^2 - \vec{V}_E^2\right). \qquad (2.9)$$

Интеграл Бернулли в форме (2.8) использован В. М. Лаврентьевым при исследовании широколопастного гребного винта [49].

В дальнейшем нам понадобятся интегралы Лагранжа—Коши и Бернулли в линеаризованной форме, т. е. в рамках допущения о малости вызванной скорости $\vec{w}$ по сравнению со скоростью $\vec{V}_E$. После преобразований формулы (2.7) получим линеаризованный интеграл Лагранжа—Коши

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \vec{w}\vec{V}_E - \frac{\partial'\Phi}{\partial t} \qquad (2.10)$$

и из уравнения (2.8) — линеаризованный интеграл Бернулли

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \vec{w}\vec{V}_E. \qquad (2.11)$$

В абсолютной (неподвижной) системе координат линеаризованный интеграл Лагранжа—Коши имеет вид

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \Phi_a}{\partial t}. \qquad (2.12)$$

Рассмотрим начальные и граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнений движения жидкости.

При вращении гребного винта с постоянной угловой скоростью и одновременном равномерном поступательном его движении с судном движение жидкости (в подвижных системах координат) носит периодический характер. Поэтому начальные условия, имевшие место при $t = 0$, можно игнорировать как несущественные для этих процессов.

Что касается граничных условий, то они сводятся к требованию непротекания жидкости через поверхности лопастей и корпуса судна, а также постоянства давлений на свободной поверхности и исчезновения вызванных скоростей далеко от гребного винта и его струи.

Рассмотрим граничное условие на поверхности лопасти с номером j. Уравнение поверхности лопасти в системе D имеет вид

$$A_j(x,\ r,\ \theta) = 0, \quad j = 0,\ \ldots,\ Z - 1. \qquad (2.13)$$

При наличии на лопастях нестационарных кавитационных каверн целесообразно считать, что поверхность этих каверн — часть поверхности A_j. В этом более общем случае в последнее уравнение необходимо в качестве параметра ввести время:

$$A_j(x,\ r,\ \theta,\ t) = 0, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ Z - 1. \qquad (2.14)$$

Тогда условие непротекания (касательности вектора скорости поверхности лопасти) будет иметь вид [50]:

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} + \vec{V}_R \operatorname{grad} A_j = 0, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ Z - 1. \qquad (2.15)$$

Первое слагаемое этой формулы связано с изменением поверхности каверны во времени; второе представляет собой нормальную к поверхности составляющую относительной скорости жидкости.

Дальнейшие преобразования граничного условия непротекания будем производить, вводя допущение о малости возмущений в жидкости, производимых лопастями гребного винта, и малости их толщины. Будем считать, что скорости попутного потока корпуса — также малые величины, что определяется: для скоростей — по отношению к величине скорости V_E, для толщины — по отношению к хорде сечений лопасти. Принимая такие допущения, мы становимся на позиции линейной теории гребного винта. Естественно, что чем меньше нагрузка гребного винта и тоньше его лопасти, тем точнее линейная теория описывает действительную картину течения.

Вблизи кромок сечений лопасти, где происходит торможение потока и велики значения производной $\partial\eta_e/\partial\xi$, допущения линейной теории несправедливы. Можно показать [21, 88], что размер области вблизи кромок, в которой не применима линейная теория, имеет порядок:

$$\left.\begin{array}{ll} O(\delta^2) & \text{— для закругленной кромки;} \\ O(e^{-1/\delta}) & \text{— для острой кромки,} \end{array}\right\} \qquad (2.16)$$

где δ — относительная толщина профиля сечения лопасти. Видно, что размер этой области весьма мал на большей части лопасти и вне ее линейная теория справедлива.

Важное следствие принятия допущений линейной теории — возможность перенесения граничного условия непротекания с поверхности лопасти на близкую к ней правильную винтовую поверхность, называемую в дальнейшем опорной (рис. 2.1). В линейной постановке шаг опорной поверхности $2\pi V/\Omega$. Обозначим эту поверхность как A_{0j}. Засасывающая сторона лопасти теперь соответствует верхней стороне поверхности A_{0j} ($\eta = 0^+$), а нагнетающая — нижней стороне A_{0j} ($\eta = 0^-$). Подставим в формулу (2.15) уравнение поверхности лопасти (см. § 1.1). Тогда с учетом введенных допущений получим для некавитирующего винта граничные условия непротекания:

$$w_n^+ + W_n + V_E\left(\frac{\partial\eta_c}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial\eta_e}{\partial\xi}\right) = 0, \quad \eta = 0^+; \qquad (2.17)$$

$$w_n^- + W_n + V_E\left(\frac{\partial\eta_c}{\partial\xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial\eta_e}{\partial\xi}\right) = 0, \quad \eta = 0^-, \qquad (2.18)$$

где

$$W^- + V_x\cos\varphi + (\Omega r - V_\theta)\sin\varphi = V_E\sin(\varphi - \beta) - \Delta V_n; \qquad (2.19)$$

$$\Delta V_n = -(V + V_x)\cos\varphi + V_\theta\sin\varphi,$$

а индекс «n» означает, что рассматривают нормальную к хорде проекцию скорости.

Сложим и вычтем выражения (2.17) и (2.18). Тогда получим:

$$w_n \equiv \frac{w_n^+ + w_n^-}{2} = -W_n - V_E\frac{\partial\eta_c}{\partial\xi} =$$

$$= -V_E\sin(\varphi - \beta) - V_E\frac{\partial\eta_e}{\partial\xi} + \Delta V_n; \qquad (2.20)$$

$$[w_n] \equiv w_n^+ - w_n^- = -V_E\frac{\partial\eta_e}{\partial\xi}. \qquad (2.21)$$

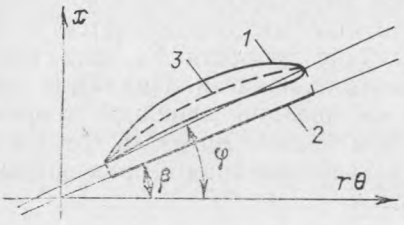


Рис. 2.1. Цилиндрическое сечение лопасти и опорной поверхности.

1 — профиль сечения; *2* — опорная поверхность; *3* — средняя линия профиля.

Левая часть выражения (2.20) определяет прямое значение нормальной вызванной скорости, а левая часть уравнения (2.21) — скачок нормальной скорости при переходе от засасывающей к нагнетающей поверхности. Выражения (2.20) и (2.21) формулируют граничное условие непротекания в рамках линейной теории [49, 101].

Поскольку поле скоростей внешнего потока по предположению стационарно, граничное условие непротекания через поверхность лопасти, вследствие симметричного расположения лопастей, достаточно записать лишь для одной из них.

Граничное условие непротекания (2.20) соответствует, как указывалось выше, слабонагруженному гребному винту. Его можно распространить, оставаясь в рамках линейной теории малых возмущений, на случай умеренно нагруженного гребного винта, у которого квадраты вызванных скоростей малы по сравнению с V_E^2.* При этом величину относительной скорости потока, набегающего на элемент лопасти, следует рассчитывать с учетом вызванных скоростей и скоростей попутного потока, имеющих тот же порядок малости:

$$V_R^* = \sqrt{(V_x + w_{x1})^2 + (\Omega r - V_\theta - w_{\theta 1})^2}, \tag{2.22}$$

а ее направление характеризовать углом β_I:

$$\operatorname{tg} \beta_I = \frac{V_x + w_{x1}}{\Omega r - V_\theta - w_{\theta 1}}, \tag{2.23}$$

где w_{x1}, $w_{\theta 1}$, V_x, V_θ — некоторые характерные для данного сечения вызванные скорости (см. § 2.4) и скорости набегающего потока соответственно.

Граничное условие непротекания теперь должно выполняться на винтовой поверхности шага $2\pi r \operatorname{tg} \beta_I$ и имеет вид

$$w_n = -V_R^* \left(\frac{\partial \eta_c}{\partial \xi} + \alpha \right) + \Delta V_n, \tag{2.24}$$

где $\alpha = \varphi - \beta$.

Соотношение (2.21) принимает в случае умеренно нагруженного гребного винта вид

$$[w_n] = -V_R^* \frac{\partial \eta_e}{\partial \xi}. \tag{2.25}$$

Возвращаясь к общему виду граничного условия (2.15), мы видим, что рассматривали лишь второе слагаемое, т. е. считали, что гребной винт не кавитирует.

Если теперь допустить существование каверн на лопасти, то в рамках линейной теории малых возмущений можно считать,

---

* Подобное обобщение было предложено Л. Прандтлем в теории несущей линии.

что дополнительное слагаемое, соответствующее изменению толщины каверны $e_{\text{cav}}(\xi, r, t)$ во времени, также вычисляется в точках поверхности A_{0j}. Для слабонагруженного гребного винта граничные условия (2.17) и (2.18) преобразуются к виду:

$$\left.\begin{aligned} w_n^+ + W_n^+ + V_E\left(\frac{\partial \eta_c}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial \xi}\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial t} = 0, \quad \eta = 0^+; \\ w_n^- + W_n^- + V_E\left(\frac{\partial \eta_c}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial \xi}\right) - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial t} = 0, \quad \eta = 0^-. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Преобразования, аналогичные проведенным ранее, приводят к той же формуле (2.20) для граничного условия непротекания. Однако соотношение для скачка нормальной составляющей вызванной скорости принимает вид

$$[w_n] = -V_E \frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} - V_E \frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial \xi} - \frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial t} \tag{2.27}$$

для слабо нагруженного гребного винта и

$$[w_n] = -V_R^* \frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} - V_R^* \frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial \xi} - \frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial t} \tag{2.28}$$

для умеренно погруженного.

Что касается условий на бесконечности, то соответствующее поведение вызванных скоростей обеспечивается свойствами потенциала скоростей возмущенного течения гребного винта (см. § 2.3).

Постановка задач гидродинамики гребного винта. Записанные выше уравнения движения жидкости и граничные условия непротекания позволяют сформулировать прямую и обратную задачи гидродинамики гребного винта.

Прямая задача формулируется как задача определения гидродинамических характеристик гребного винта, работающего в заданном неоднородном поле скоростей набегающего потока. Ее решение называется поверочным расчетом гребного винта. В прямой задаче гидродинамическую нагрузку, действующую на лопасти, находят из граничного условия непротекания (2.20) или (2.24). При ее решении помимо характеристик винта также определяют давления, вызываемые винтом в окружающей жидкости, и силы на выступающих частях корпуса судна [81].

Обратная задача формулируется как задача определения геометрических характеристик лопасти, обеспечивающих заданные суммарные гидродинамические характеристики гребного винта и заданный закон распределения нагрузки по лопасти. При этом ординаты средних линий профилей сечений и их ша-

говые углы находят из граничного условия непротекания, записанного в виде уравнения линий тока течения. При решении обратной задачи предполагают, что попутный поток корпуса судна равномерен по угловой координате.

Решение обратной задачи называется проектировочным расчетом гребного винта (см. гл. 3).

2.2. Основные положения вихревой теории гребного винта

Используя принятое выше допущение о том, что жидкость является идеальной и несжимаемой, можно воздействие гребного винта на окружающую жидкость заменить воздействием некоторой системы гидродинамических особенностей. Их интенсивность определяют из граничного условия непротекания, а расположение диктуется уравнениями движения жидкости и принятыми допущениями.

Тип гидродинамических особенностей определяется формулой Грина, дающей общее представление для потенциала скоростей течения [50]. Для моделирования циркуляционной части течения около лопастей, связанной с наличием сил и моментов на гребном винте, следует использовать эквивалентные им диполи или вихри. Течение, обусловленное телесностью (толщиной) лопастей, моделируется источниками и стоками. В линейной теории телесность тонких лопастей соответствует наличию скачка нормальной скорости при переходе от одной стороны поверхности к другой [см. формулу (2.21)]. В § 2.3 показана связь этого скачка с интенсивностью слоя источников-стоков; в настоящем параграфе рассмотрена только вихревая часть гидродинамической модели гребного винта.

Вихри, заменяющие действие лопастей гребного винта, подразделяют на присоединенные и свободные. Присоединенные вихри неподвижны относительно лопастей, и на них возникают силы, характеризующие динамическое взаимодействие гребного винта с жидкостью. В свою очередь, свободные вихри не фиксированы относительно лопастей, они уносятся вниз по течению и на них силы не развиваются. Их интенсивность зависит от интенсивности присоединенных вихрей, изменяющихся во времени и по координатам.

Рассмотрим некоторые свойства присоединенных и свободных вихрей в рамках допущений линейной теории. В этом случае, как было показано в предыдущем параграфе, граничные условия можно удовлетворять на опорной поверхности A_{0j}. На этой же поверхности следует располагать гидродинамические особенности. Поскольку силы возникают только на лопастях, присоединенные вихри существуют в пределах проекции лопастей на поверхность A_{0j}. Область, занятая присоединенными вихрями, называется несущей поверхностью.

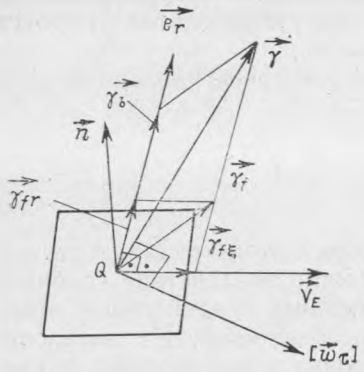


Рис. 2.2. Векторы завихренности и скорости на элементе несущей поверхности.

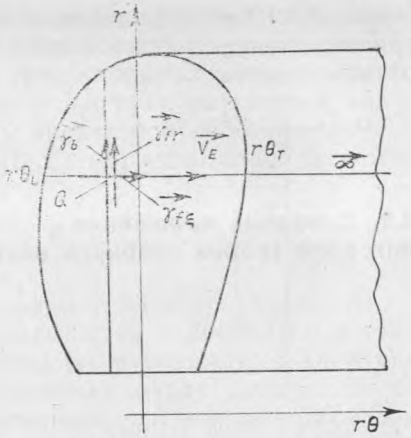


Рис. 2.3. Присоединенные ($\vec{\gamma}_b$) и свободные ($\vec{\gamma}_{fr}$ и $\vec{\gamma}_{f\xi}$) вихри лопасти гребного винта в точке Q.

Скачок давлений при переходе через несущую поверхность с помощью интеграла Лагранжа—Коши в линеаризованной форме (2.10) можно записать в виде

$$\frac{[p]}{\rho} = \left[\vec{w}_\tau\right]\vec{V}_E - \frac{\partial'[\Phi]}{\partial t}, \tag{2.29}$$

где $[p] = p^+ - p^-$, а $[\vec{w}_\tau]$ — скачок касательной к поверхности скорости при переходе от одной стороны поверхности к другой. В соответствии с формулой (2.21) вектор скачка полной вызванной скорости должен содержать также скачок ее нормальной к поверхности компоненты:

$$\left[\vec{w}\right] = \left[\vec{w}_n\right] + \left[\vec{w}_\tau\right]. \tag{2.30}$$

В выражение для скачка давления (2.29) вектор $[\vec{w}_n]$ не входит, так как он перпендикулярен вектору $\vec{V}_E$.

Существование скачка касательной скорости $[\vec{w}_\tau]$ связано с наличием вихревого слоя интенсивности $\vec{\gamma}$, причем

$$\vec{\gamma} = \vec{n}_I \times \left[\vec{w}_\tau\right] = \vec{\gamma}_b + \vec{\gamma}_f, \tag{2.31}$$

где $\vec{n}_I$ — нормаль к несущей поверхности; $\vec{\gamma}_b$, $\vec{\gamma}_f$ — интенсивности присоединенных и свободных вихрей соответственно (рис. 2.2). Скачок потенциала $[\Phi]$ равен циркуляции скорости Γ по контуру, охватывающему несущую поверхность и пересе-

кающему ее в рассматриваемой точке: $[\Phi] = \Gamma$ [46]. Вектор интенсивности свободных вихрей $\vec{\gamma}_f$ можно представить в виде двух компонент: радиально направленной компоненты $\vec{\gamma}_{fr}$ и компоненты $\vec{\gamma}_{f\xi}$, коллинеарной вектору $\vec{V}_E$, т. е. направленной вдоль винтовой линии (рис. 2.3):

$$\vec{\gamma}_f = \vec{\gamma}_{fr} + \vec{\gamma}_{f\xi}. \tag{2.32}$$

Аналогично можно разложить и вектор $\vec{\gamma}_b$:

$$\vec{\gamma}_b = \vec{\gamma}_{br} + \vec{\gamma}_{b\xi}.$$

Учитывая формулу (2.31) связи между $[\vec{\omega}_\tau]$ и $\vec{\gamma}$, преобразуем (2.29) к виду

$$\frac{[p]}{\rho} = \left(\vec{\gamma}_{br} \times \vec{n}_I\right)\vec{V}_E + \left(\vec{\gamma}_{b\xi} \times \vec{n}_I\right)\vec{V}_E + \left(\vec{\gamma}_{fr} \times \vec{n}_I\right)\vec{V}_E +$$

$$+ \left(\vec{\gamma}_{f\xi} \times \vec{n}_I\right)\vec{V}_E - \frac{\partial'\Gamma}{\partial t} = \gamma_{br}V_E + \gamma_{fr}V_E - \frac{\partial'\Gamma}{\partial t}. \tag{2.33}$$

Тогда в соответствии с определением присоединенных вихрей:

$$\frac{[p]}{\rho} = \gamma_{br}V_E; \tag{2.34}$$

$$\gamma_{fr}V_E - \frac{\partial'\Gamma}{\partial t} = 0. \tag{2.35}$$

Из уравнения (2.34) следует, что сила обусловлена только наличием компоненты γ_{br}. Следовательно, по определению присоединенных вихрей $\gamma_{b\xi} = 0$. В дальнейшем индекс r при γ_b опускаем.

По формуле (2.35) получим для интенсивности радиальных свободных вихрей зависимость

$$\gamma_{fr} = \frac{1}{V_E}\frac{\partial'\Gamma}{\partial t}. \tag{2.36}$$

Интенсивность свободных вихрей γ_{fr} можно непосредственно связать с изменением интенсивности присоединенных вихрей во времени. Для этого нужно учесть, что в связанной с несущей поверхностью системе координат присоединенные вихри неподвижны, а свободные вихри движутся мимо них со скоростью V_E вниз по течению. В пределах несущей поверхности отдельный свободный вихрь, начиная свое движение от передней кромки,

последовательно проходит мимо присоединенных, «накапливая» интенсивность за счет изменения последних во времени. В точке с координатами (r, ξ) в момент времени t его интенсивность

$$\gamma_{fr}(\xi, t) = \frac{1}{V_E} \int_{\xi}^{\xi_L} \frac{\partial'}{\partial t} \gamma_b \left(\xi', t - \frac{\xi' - \xi}{V_E} \right) d\xi'. \qquad (2.37)$$

где ξ_L — координата передней кромки; $(\xi' - \xi)/V_E = t - t'$ — время, за которое свободный вихрь, находящийся в момент времени t в точке с координатой ξ, прошел расстояние от присоединенного вихря с координатой ξ', около которого он был в момент времени t', до этой точки.

При достижении задней кромки в момент времени t_1 свободный вихрь имеет интенсивность

$$\gamma_{fr}(\xi_T, t_1) = \frac{1}{V_E} \int_{\xi_T}^{\xi_L} \frac{\partial'}{\partial t} \gamma_b \left(\xi', t_1 - \frac{\xi' - \xi_T}{V_E} \right) d\xi', \qquad (2.38)$$

где ξ_T — координата задней кромки. Перемещаясь далее вниз по потоку, свободный вихрь при $t > t_1$ сохраняет интенсивность неизменной. Рассматривая фиксированную точку на несущей поверхности или в следе за ней, получим, что интенсивность свободных вихрей в ней изменяется во времени.

Интенсивность свободных винтовых вихрей $\gamma_{f\xi}$ в точке (r, ξ) связана с циркуляцией Γ по контуру, пересекающему несущую поверхность в этой точке, формулой

$$\gamma_{f\xi}(r, \theta, t) = -\frac{\partial \Gamma(r, \theta, t)}{\partial r}. \qquad (2.39)$$

Формулы для интенсивности свободных вихрей (2.36) и (2.39) можно получить также иным путем, используя теорему Томсона о сохранении циркуляции во времени [46].

Таким образом, анализ вихревой системы слабонагруженного гребного винта в неоднородном потоке показывает, что она состоит из радиальных присоединенных вихрей в пределах несущей поверхности и систем радиальных и винтовых вихрей, расположенных на несущей поверхности и на полубесконечной винтовой поверхности, простирающейся вниз по потоку. В однородном потоке течение около лопастей стационарно, и следовательно, радиальные свободные вихри отсутствуют. В этом случае несущая поверхность покрыта присоединенными вихрями и винтовыми свободными вихрями, начинающимися у передней кромки и идущими вниз по потоку до бесконечности. Таким образом, в струе слабонагруженного гребного винта имеются только правильные винтовые свободные вихри, направленные

по вектору переносной скорости $\vec{V}_E$.* Интенсивность свободных вихрей стационарного течения рассчитывают по формуле

$$\gamma_{f\xi}(r, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial r}\displaystyle\int_{\theta}^{\theta_L} \gamma_b(r, \xi')\,\frac{r\,d\theta'}{\cos\beta}, & \xi_T \leqslant \xi \leqslant \xi_L; \\ -\dfrac{\partial \Gamma(r)}{\partial r}, & \xi_T > \xi > -\infty, \end{cases} \tag{2.40}$$

где $\Gamma(r) = \displaystyle\int_{\xi_T}^{\xi_L} \gamma_b(r, \xi)\,d\xi$ — циркуляция скорости вокруг лопасти.

Рассмотренная вихревая система слабонагруженного гребного винта соответствует схеме несущей поверхности. Такая гидродинамическая модель получила в настоящее время большое распространение [9, 49, 68, 81, 92]. Она является аналогом линейной теории несущей поверхности для крыла конечного размаха (см., например, [101]).

2.3. Линейная теория несущей поверхности

Линейная теория несущей поверхности строится на основе гидродинамической модели, описанной в § 2.2. Расположенные на несущей поверхности вихри приводят к появлению скачка касательной скорости и потенциала при переходе через несущую поверхность, а имитирующие влияние толщины лопасти источники — скачка нормальных вызванных скоростей.

Наличие скачка потенциала в точках несущей поверхности и ее следа, а также существование скачка нормальной скорости при переходе через несущую поверхность позволяет представить потенциал вызванных скоростей течения в точке P, создаваемого одной лопастью, в виде суммы

$$\Phi(P) = \Phi_L(P) + \Phi_T(P), \tag{2.41}$$

где

$$\Phi_L(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{A_1 + A_2} d(Q)\,\frac{\partial}{\partial n_Q}\left[\frac{1}{S(P, Q)}\right] dA \tag{2.42}$$

— потенциал двойного слоя (слоя диполей), расположенного по несущей поверхности A_1 и следу A_2; оси диполей направлены

* Это положение соответствует известной теореме Н. Е. Жуковского [31], по которой вихри вызванной (абсолютной) скорости расположены по линиям тока относительного движения. Для слабонагруженного гребного винта относительная и переносная скорости равны.

по нормали к поверхности, а их интенсивность $d(Q)$ равна скачку потенциала в точке Q;

$$\Phi_T(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{A_1} q(Q)\frac{1}{S(P, Q)}\,dA \tag{2.43}$$

— потенциал простого слоя (слоя источников и стоков), распределенного по несущей поверхности A_1; интенсивность источников-стоков равна скачку нормальной скорости при переходе через поверхность:

$$q(Q) = [w_n]_Q = -V_E\frac{\partial\eta_e}{\partial\xi}; \tag{2.44}$$

$S(P, Q)$ — расстояние между точкой P и текущей точкой интегрирования Q.

Скорость, индуцированная винтом в точке P,

$$\vec{w}(P) = \operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\Phi_T + \operatorname{grad}\Phi_L. \tag{2.45}$$

Вид общего представления потенциала скорости (2.41) и формулы (2.42) и (2.43) показывает, что в рамках линейной теории течение, создаваемое гребным винтом, можно представить как сумму течения, обусловленного нагрузкой (вихревая составляющая), и течения, вызванного телесностью лопастей (составляющая от источников-стоков).

Отметим, что формулы (2.41)—(2.44) справедливы для некавитирующего гребного винта. Если гребной винт работает в режиме кавитации, причем толщина и граница распространения каверн изменяется в течение оборота лопасти вследствие нестационарности режима обтекания, то это обстоятельство нужно учесть, соответствующим образом определяя интенсивность диполей в уравнении (2.42) и вводя дополнительный потенциал простого слоя

$$\Phi_{TC}(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{A_c} q_c(Q)\frac{1}{S(P, Q)}\,dA, \tag{2.46}$$

где A_c — часть винтовой поверхности, покрытая каверной. Потенциал вызванного винтом течения в этом случае есть сумма трех составляющих (рис. 2.4)

$$\Phi(P) = \Phi_L(P) + \Phi_T(P) + \Phi_{TC}(P). \tag{2.47}$$

Интенсивность дополнительных источников в соответствии с формулой (2.27) определяется соотношением

$$q_c = -V_E\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial\xi} - \frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial t}, \tag{2.48}$$

где $e_{\text{cav}}(\xi, r, t)$ — толщина каверны.

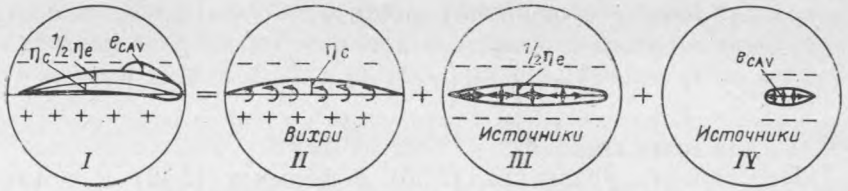


Рис. 2.4. Схема разделения течения около сечения лопасти (*I*) на течение, обусловленное нагрузкой (*II*), толщиной лопасти (*III*) и толщиной каверны (*IV*) (линейная теория, кавитирующий винт).

В случае некавитирующего винта интенсивность источников, определяемая формулой (2.44), удовлетворяет условию замкнутости поверхности лопасти

$$\iint\limits_{A_1} q(Q)\, dA = 0. \tag{2.49}$$

Для дополнительных источников q_c, имитирующих влияние толщины нестационарных каверн, условие (2.49) не выполняется. Суммарная интенсивность этих источников при $\partial e_{cav}/\partial t \neq 0$ не равна нулю.

Важное свойство потенциалов (2.41) и (2.47) — «мгновенность» их действия. Иными словами, если в какой-то момент времени t плотность двойного и простого слоев принимает известные значения, то в этот же момент, без запаздывания, устанавливается течение, описываемое потенциалом Ф. Это свойство является следствием принятия допущения о несжимаемости среды. Для точек, близких к несущей поверхности, это допущение практически не приводит к погрешностям при определении скоростей и давлений. При удалении от движителя вносимая погрешность увеличивается, и для ее устранения может оказаться необходимым учитывать сжимаемость среды (см. § 5.1).

Рассмотрим подробнее выражение для потенциала Φ_L, представив интенсивность диполей $d(\xi', r', t)$ через интенсивность присоединенных вихрей. Как указывалось выше, d равно циркуляции скорости $\Gamma(Q)$ по контуру, охватывающему несущую поверхность и пересекающему ее в точке Q. Выбрав контур лежащим на поверхности, пересекающей несущую поверхность по винтовой линии, получим, что $\Gamma(Q)$ равна сумме интенсивностей всех присоединенных и радиальных свободных вихрей, охваченных контуром. Но в соответствии с теоремой Томсона о сохранении циркуляции такая сумма в момент времени t равна сумме интенсивностей присоединенных вихрей, взятых в моменты времени t', когда каждый из них проходил точку Q. С учетом сказанного получим:

$$d_1^{(j)}(r', \xi', t) = \int\limits_{\xi'}^{c/2} \gamma_b\left(r', \xi'', t + \frac{\chi_j}{\Omega} - \frac{\xi'' - \xi'}{V_E}\right) d\xi'' \tag{2.50}$$

— для точек несущей поверхности A_1;

$$d_2^{(j)}(r', \xi', t) = \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_b\left(r', \xi'', t + \frac{\chi_j}{\Omega} - \frac{\xi'' - \xi'}{V_E}\right) d\xi'' \quad (2.51)$$

— для точек следа A_2.

Подстановка уравнения (2.50) в формулу (2.42) и суммирование по лопастям дает выражение для Φ_L (в связанной с винтом цилиндрической системе координат):

$$\Phi_L(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{Z-1} \left\{ \int_0^R \int_{-c/2}^{c/2} \int_{\xi'}^{c/2} \gamma_b\left(r', \xi'', t + \frac{\chi_j}{\Omega} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\xi'' - \xi'}{V_E}\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{S_j}\right) d\xi''\, d\xi'\, dr' + \int_0^R \int_{-\infty}^{-c/2} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_b\left(r', \xi'', t + \frac{\chi_j}{\Omega} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\xi'' - \xi'}{V_E}\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{S_j}\right) d\xi''\, d\xi'\, dr' \right\}, \quad (2.52)$$

где $S_j = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - \chi_j) + (x - h\theta')^2]^{1/2}$; $2\pi h$ — шаг несущей поверхности на радиусе r'.

Если в уравнении (2.52) изменить порядок интегрирования по ξ' и ξ'', то выражение для Φ_L примет вид

$$\Phi_L(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{Z-1} \int_0^R \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-\infty}^{\xi''} \gamma_b\left(r', \xi'', t - \right.$$

$$\left. - \frac{\xi'' - \xi'}{V_E} + \frac{\chi_j}{\Omega}\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{S_j}\right) d\xi'\, d\xi''\, dr' \quad (2.53)$$

или, после замены переменных $\xi' = \xi'' - \tau V_E$ (и соответственно $\theta' = \theta'' - \Omega\tau$):

$$\Phi_L(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{Z-1} \int_0^R \int_{-c/2}^{c/2} \int_0^{\infty} V_E \gamma_b\left(r', \xi'', t - \right.$$

$$\left. - \tau + \frac{\chi_j}{\Omega}\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{S_j}\right) d\tau\, d\xi''\, dr', \quad (2.54)$$

где $S_j = [(x - h\theta'' + V\tau)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta'' + \Omega\tau - \chi_j)]^{1/2}$.

В этих формулах $\tau = t - t'$ — время, в течение которого несущая линия $\gamma_b(\xi'')$ переместилась из точки $Q(\xi')$ в положение, которое она занимает в момент времени t'.

Зависимость (2.54) можно получить и непосредственно без преобразования выражения (2.52), если записать выражение потенциала скоростей для одной несущей линии, а затем проинтегрировать его в пределах лопасти.

При проведении поверочного расчета гребного винта неизвестную плотность распределения присоединенных вихрей γ_b

находят из граничного условия (2.20), т. е. условия равенства нулю нормальной к срединной поверхности составляющей относительной скорости. Это условие можно переписать в следующем виде:

$$w_{\gamma n}(Q_1) = -V_n - w_{qn}, \tag{2.55}$$

где $w_{\gamma n}$ — нормальная скорость, вызванная вихревой системой винта; V_n — проекция относительной скорости внешнего потока на нормаль к срединной поверхности лопасти; w_{qn} — прямое значение нормальной скорости, вызванной системой источников. Причем $w_{\gamma n}$ следует понимать как предел, к которому стремится нормальная составляющая индуктивной скорости, вычисленной в точке пространства P при стремлении этой точки к вихревой пелене по нормали к ней:

$$w_{\gamma n}(Q_1) = \lim_{P \to Q_1} w_{\gamma n}(P) = \lim_{P \to Q_1} \frac{\partial \Phi_L}{\partial n}. \tag{2.56}$$

Для вычисления скоростей $w_{\gamma n}$, вызванных несущей поверхностью и ее следом, можно также использовать закон Био—Савара [46]. Запишем выражение для скачка вызванной скорости на несущей поверхности (см. § 2.2):

$$\left[\vec{w}\right] \equiv \left[\vec{w}_n\right] + \left[\vec{w}_\tau\right] = [w_n]\vec{n} + \vec{\gamma} \times \vec{n},$$

где $\vec{n}$ — нормаль; $\vec{\gamma}$ — вектор интенсивности слоя присоединенных и свободных вихрей. По определению поверхностных дивергенции и ротора [42] имеем:

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{n}\left[\vec{w}\right] = [w_n] = q \text{ (на поверхности } A_1); \tag{2.57}$$

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{n} \times \left[\vec{w}\right] = \vec{n} \times \left[\vec{w}_\tau\right] = \vec{\gamma} \text{ (на поверхностях } A_1 \text{ и } A_2). \tag{2.58}$$

Зная дивергенцию и ротор вектора $\vec{w}$ на поверхностях A_1 и A_2, можно найти вектор $\vec{w}$ [46] для одной лопасти:

$$\vec{w} = \operatorname{grad} \Phi_T + \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{A_1 + A_2} \frac{\vec{\gamma}}{S}\, dA\right). \tag{2.59}$$

Первое слагаемое (2.59) соответствует индукции простого слоя интенсивности q [см. формулы (2.43), (2.45)], а второе слагаемое есть вызванная скорость от вихревого слоя, выраженная по формуле Био—Савара [46].

Тогда величина

$$w_{\gamma n} = \vec{n}_I \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{A_1 + A_2} \frac{\vec{\gamma}}{S}\, dA\right). \tag{2.56а}$$

Поскольку в выражение для вызванных скоростей плотность вихрей γ_b входит через интегралы [формулы (2.52), (2.54), (2.59)], выражение (2.55) относительно γ_b — интегральное уравнение. Ядро некоторых интегралов имеет особенность при $Q \to Q_1$. При этом порядок особенностей различен в зависимости от того, каким образом вычислена нормальная скорость $w_{\gamma n}$. Более подробно об этом сказано в § 4.1.

Искомая плотность присоединенных вихрей должна удовлетворять определенным граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_b(r' = R,\ \xi') &= 0; \\ \gamma_b(r',\ \xi_T) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

Первое условие соответствует равенству нулю гидродинамической нагрузки на конце лопасти, второе — постулату Чаплыгина—Жуковского о плавном обтекании задней кромки лопасти.

Отметим, что вид уравнения (2.55) указывает на то, что интенсивность присоединенных вихрей, подлежащая определению при поверочном расчете винта, зависит от толщины лопастей [слагаемое w_{qn} в правой части уравнения (2.55)]. В этом смысле слагаемые в формуле (2.41) не являются независимыми.

При решении обратной (проектировочной) задачи для некавитирующего гребного винта течение около лопастей принимают стационарным, поскольку компоненты скоростей попутного потока осредняются по окружности. Таким образом, гребной винт проектируют с учетом некоторых средних по окружности условий, а также радиальной неоднородности поля осредненных по окружности скоростей. Вихревая система несущей поверхности упрощается (по сравнению со случаем неоднородного потока); она состоит из присоединенных $\gamma_b(r', \xi')$ и свободных винтовых вихрей $\gamma_{f\xi}(r', \xi')$. Граничное условие (2.20) при этом используют как основу для определения формы средней линии и шаговых углов сечения проектируемого винта.

Приведенные формулы линейной теории несущей поверхности можно, как указывалось выше, распространить на случай умеренно нагруженного винта. Тогда присоединенные и свободные вихри распределяются по винтовым поверхностям, имеющим шаг $H(r) = 2\pi r \operatorname{tg} \beta_I$, где β_I — угол индуктивной поступи, а величина скорости набегающего потока становится равной V_R^*.

2.4. Вихревая теория несущей линии

На определенных этапах решения обратной (проектировочной) задачи гребного винта, а в ряде случаев и при поверочном расчете винта в однородном потоке находит применение вихре-

вая теория несущей линии. То обстоятельство, что схему несущей линии используют наряду с более строгой схемой несущей поверхности, объясняется ее относительной простотой. Следует, помнить, что вызванную скорость на несущем вихре (в схеме несущей линии) можно приближенно найти при помощи трансцендентных функций, в то время как в произвольной точке несущей поверхности ее определение связано с вычислением несобственного интеграла.

Вывод формул теории несущей линии можно осуществить путем перехода от схемы несущей поверхности. В этом случае в формуле (2.59) следует положить в качестве плотности присоединенных вихрей выражение

$$\gamma_b(r, \xi) = \Gamma(r)\,\delta(\xi)/c(r),$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака [42]. При этом в силу известного свойства дельта-функции интеграл вдоль хорды можно взять и останется лишь интеграл вдоль радиуса. В настоящем параграфе дается, однако, вывод зависимостей, основанный на непосредственном использовании модели несущей линии.

Рассмотрим гребной винт правого вращения, имеющий Z лопастей. Каждую лопасть заменяют одиночным радиально направленным вихрем. Набегающий на гребной винт поток однороден и течение около лопастей в связанной системе координат E стационарно. Вначале будем считать, что нагрузка гребного винта мала; в дальнейшем будет дано обобщение на случай умеренной нагрузки.

Пусть распределение циркуляции вдоль лопасти гребного винта характеризуется функцией $\Gamma(r)$. Тогда вихревую модель гребного винта можно представить состоящей из множества так называемых элементарных винтов, для каждого из которых циркуляция присоединенных и свободных вихрей равна $d\Gamma$. Вихревая система элементарного винта состоит из Z радиальных присоединенных вихрей, идущих от оси винта до некоторого текущего радиуса r', Z концевых винтовых свободных вихрей интенсивности $d\Gamma$ и осевого прямолинейного вихря интенсивности $Zd\Gamma$ (рис. 2.5). Величина шага свободных винтовых вихрей для слабой нагрузки $H = 2\pi V_A/\Omega$. Такая вихревая схема подробно изучена во многих работах (см., например, [10, 44, 55]).

Наибольший практический интерес представляет анализ вызванных скоростей в точках несущего вихря, поскольку именно они определяют углы атаки профилей сечений лопасти в теории несущей линии.

Определение вызванных скоростей. Факторы индукции. Воспользуемся для вычисления вызванных скоростей в точках на несущем вихре лопасти с номером $j = 0$ формулой Био—Савара [46]. Известно, что вызванная скорость от соседних присоединенных вихрей в точках рассматриваемой несущей линии равна нулю, а значит, нужно исследовать скорости, обусловленные

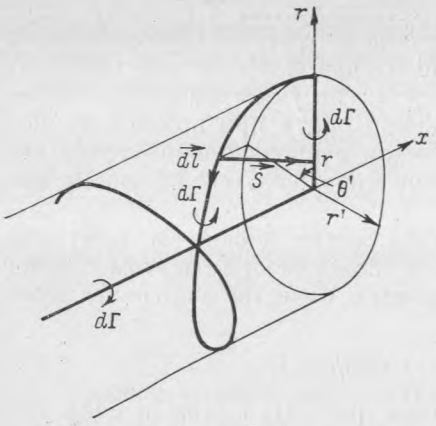


Рис. 2.5. Элементарный винт (показана вихревая система одного несущего вихря).

только свободными вихрями. Тогда вектор вызванной скорости в точке $(r, 0, 0)$ от элемента свободного вихря с координатами (r', θ', x'):

$$d^2\vec{w}_1(r) = -\frac{d\Gamma}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\vec{S}}{S^3}, \qquad (2.61)$$

где $\vec{dl}$ — вектор элемента свободного вихря; $\vec{S}$ — радиус-вектор, длина которого $S = [r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta' + (r'\theta'\operatorname{tg}\beta')^2]^{1/2}$; β' — шаговый угол винтового вихря; $\operatorname{tg}\beta' = V_A/(\Omega r')$.

Здесь и в дальнейшем индекс «1» указывает на то, что рассматривают скорость на несущем вихре. В результате интегрирования вдоль полубесконечного винтового вихря, осевого вихря и суммирования по всем лопастям получают следующие выражения для окружной и осевой вызванных скоростей элементарного винта:

$$dw_{\theta 1}(r) = -\frac{d\Gamma}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg}\beta'\,(r - r'\cos\theta_j - r'\theta'\sin\theta_j)\,r'\,d\theta'}{S_j^3} - \frac{Z\,d\Gamma}{4\pi r}; \qquad (2.62)$$

$$dw_{x1}(r) = -\frac{d\Gamma}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\int_0^\infty \frac{(r' - r\cos\theta_j)\,r'\,d\theta'}{S_j^3}, \qquad (2.63)$$

где $\theta_j = \theta' + \chi_j$; $S_j = [r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta_j + (r'\theta'\operatorname{tg}\beta')^2]^{1/2}$. Второе слагаемое в формуле (2.62) соответствует окружной вызванной скорости от осевого вихря.

При принятых допущениях радиальная составляющая вызванной скорости не оказывает влияния на угол атаки профиля сечения лопасти и поэтому формула для ее вычисления не приводится.

Как известно, в теории несущей линии крыла конечного размаха выражения для скоростей, вызванных полубесконечным

прямолинейным вихрем, имеют весьма простой вид. К сожалению, интегралы в формулах (2.62) и (2.63), соответствующие скоростям от полубесконечных винтовых вихрей, в общем случае не берутся в квадратурах. Они могут быть выражены через ряды по Бесселевым функциям [60]. Н. Е. Жуковский [31], а затем А. М. Лепилкин [55] проанализировали поведение вызванных скоростей от винтовых вихрей. Оказалось, что вызванные осевая и окружная скорости в точке несущего вихря на радиусе r от Z полубесконечных винтовых вихрей, сошедших с точек на радиусе r', имеют следующую структуру:

$$dw_{\theta 1}(r) = \frac{d\Gamma}{4\pi(r'-r)}\sin\beta - \frac{d\Gamma}{8\pi r}\sin\beta\cos^2\beta\ln\left|\frac{r'}{r}-1\right| + \frac{Z\,d\Gamma}{4\pi r}J_0; \quad (2.64)$$

$$dw_{x1}(r) = \frac{d\Gamma}{4\pi(r'-r)}\cos\beta - \frac{d\Gamma}{8\pi r}\cos^3\beta\ln\left|\frac{r'}{r}-1\right| + \frac{Z\,d\Gamma}{4\pi r}\operatorname{ctg}\beta J_0, \quad (2.65)$$

где β — шаговый угол на радиусе r правильной винтовой поверхности, совпадающей со свободным вихрем; J_0 — регулярная функция.

Анализ этих выражений показывает, что вызванные скорости от полубесконечных винтовых вихрей содержат скорости от прямолинейного полубесконечного вихря, касательного к винтовому в точке его схода с несущего вихря (первые слагаемые формул). При приближении рассматриваемой точки к вихрю это слагаемое, как и следовало ожидать, стремится к бесконечности. Вторые слагаемые, имеющие логарифмическую особенность при $r \to r'$, отражают влияние кривизны винтового вихря [31]. Функция J_0 дает регулярную часть вызванных скоростей от винтового вихря собственной несущей линии и свободных вихрей остальных $Z-1$ несущих вихрей.

То обстоятельство, что основной член, описывающий поведение вызванной скорости вблизи винтового свободного вихря, соответствует величине вызванной скорости от прямолинейного полубесконечного вихря, позволило Морийа и Кавада ввести понятия окружного и осевого факторов индукции, величины которых равны отношению соответствующих вызванных скоростей от винтового и касательного к нему прямолинейного вихрей.

При использовании понятия факторов индукции формулы для вызванных скоростей принимают вид:

$$dw_{\theta 1}(r) = \frac{d\Gamma}{4\pi(r'-r)}\,i_t(Z,\ r,\ r',\ \beta') + \frac{Z\,d\Gamma}{4\pi r}; \quad (2.66)$$

$$dw_{x1}(r) = \frac{d\Gamma}{4\pi(r'-r)}\,i_a(Z,\ r,\ r',\ \beta'). \quad (2.67)$$

Из сопоставления формул (2.64), (2.65), (2.67) видно, что функции i_t и i_a — непрерывные функции аргументов r и r', при $r \to r'$ они равны

$$i_t \to \sin\beta, \quad i_a \to \cos\beta. \tag{2.68}$$

В то же время производная факторов индукции по радиусу не является в точке $r = r'$ непрерывной функцией из-за наличия членов типа $(r' - r)\ln|r'/r - 1|$.

Сравнение формул (2.64) и (2.65) дает следующую простую связь между вызванными скоростями элементарного винта в точках на несущем вихре:

$$\frac{dw_{\theta 1}(r)}{dw_{x1}(r)} = \operatorname{tg}\beta. \tag{2.69}$$

Эта формула отражает известное свойство перпендикулярности вызванной скорости на несущем вихре к правильной винтовой поверхности, совпадающей со свободным вихрем. Используя зависимость (2.69), В. В. Копеецкий получил следующую связь между осевым и окружным факторами индукции:

$$i_t = i_a \operatorname{tg}\beta - Z\left(\frac{r'}{r} - 1\right). \tag{2.70}$$

Вызванные скорости от всех элементарных винтов находят путем интегрирования вдоль радиуса:

$$w_{\theta 1}(r) = \int_0^R dw_{\theta 1}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^R \frac{d\Gamma}{dr'}\frac{i_t}{r' - r}\,dr' + \frac{Z}{4\pi r}\int_0^R \frac{d\Gamma}{dr'}\,dr' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^R \frac{d\Gamma}{dr'}\frac{i_t}{r' - r}\,dr' + \frac{Z}{4\pi r}[\Gamma(R) - \Gamma(0)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^R \frac{d\Gamma}{dr'}\frac{i_t}{r' - r}\,dr'; \tag{2.71}$$

$$w_{x1}(r) = \int_0^R dw_{x1}(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^R \frac{d\Gamma}{dr'}\frac{i_a}{r' - r}\,dr'. \tag{2.72}$$

Здесь использовано условие о том, что на концах лопастей и на оси винта циркуляция равна нулю.

При анализе подынтегральных функций (2.71) и (2.72) было выяснено, что они обращаются в бесконечность при $r = r'$. Тем не менее интегралы (2.71) и (2.72) имеют конечные значения, если интегралы понимать в смысле Коши.

При выводе этих формул предполагалось, что присоединенные вихри оканчиваются у оси винта. При учете наличия ступицы присоединенные вихри следует ограничивать ее поверхностью, на которой, кроме того, необходимо удовлетворить условие непротекания. В первом приближении можно считать, что

поверхность ступицы имеет цилиндрическую форму и бесконечную длину. В этом случае каждый элементарный винт представляет собой Z присоединенных вихрей, переходящих в свободные винтовые вихри (рис. 2.6). От всех элементарных винтов вызванные скорости [71]:

$$w_{\theta 1}(r) = \int_{r_H}^{R} dw_{\theta 1}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{r_H}^{R} \frac{d\Gamma}{dr'} \frac{i'_t}{r' - r} dr' + \frac{Z}{4\pi r} \int_{r_H}^{R} \frac{d\Gamma}{dr'} dr' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{r_H}^{R} \frac{d\Gamma}{dr'} \frac{i'_t}{r' - r} dr' - \frac{Z\Gamma(r_H)}{4\pi r}; \qquad (2.73)$$

$$w_{x1}(r) = \int_{r_H}^{R} dw_{x1}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{r_H}^{R} \frac{d\Gamma}{dr'} \frac{i'_a}{r' - r} dr', \qquad (2.74)$$

где r_H — радиус цилиндрической ступицы [по-прежнему предполагается, что на конце лопасти $\Gamma(R) = 0$]. В формулы (2.73) и (2.74) входят обобщенные факторы индукции i'_t и i'_a, отличные от использованных в формулах (2.71) и (2.72). Различие между ними состоит в том, что факторы индукции i_t и i_a соответствуют вызванным скоростям от винтовых вихрей в безграничной жидкости, а i'_t и i'_a — полю скоростей от винтовых вихрей в присутствии цилиндрической поверхности ступицы [70].

При вычислении факторов индукции будем использовать свойство течения, в соответствии с которым величины окружной и осевой вызванных скоростей на несущей линии равны половинам аналогичных скоростей в точках пелены свободных вихрей на бесконечном удалении вниз по потоку [10, 44]. Это

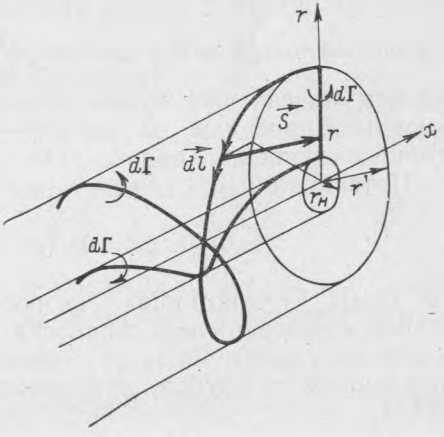


Рис. 2.6. Элементарный винт со ступицей (показана вихревая система одного несущего вихря без вихрей, моделирующих ступицу).

позволяет исследовать поток от бесконечных в обе стороны винтовых свободных вихрей, вычислить вызванные скорости в точках пелены, а затем перейти к точкам на несущем вихре, взяв половину полученных величин.

Рассмотрим с этой целью поле скоростей, вызванных Z бесконечными в обе стороны оси x винтовыми свободными вихрями единичной интенсивности. Отстояние вихрей от оси равно r' ($r_H \leqslant r' \leqslant R$), шаговый угол β'. Для общности задачи будем считать, что граничное условие непротекания должно удовлетворяться не только на цилиндрической поверхности $r = r_H = \text{const}$, моделирующей ступицу, но и на поверхности $r = R_1 = \text{const}$, моделирующей трубу, в которой может работать гребной винт ($R_1 > R$). Введение цилиндрической поверхности $r = R_1$ позволяет использовать решение этой задачи для расчета как изолированного гребного винта, так и работающего в насадке или трубе водомета [47]. В пределе при $R_1 \to \infty$ это решение переходит в зависимости, соответствующие винту в безграничной жидкости с учетом ступицы, а при $r_H \to 0$ — в решение В. В. Копеецкого для винта в трубе без учета ступицы [44].

Известно [44], что поле вызванных скоростей бесконечных винтовых вихрей зависит лишь от двух переменных: параметра $\mu = \dfrac{\Omega r}{V_A} = \dfrac{r}{r' \operatorname{tg} \beta'}$ и винтовой координаты $\zeta = \theta - \dfrac{\Omega x}{V_A}$, постоянное значение которой описывает уравнение винтовой линии. Таким образом, имеем следующую граничную задачу для определения поля скорости [70]:

$$\Delta \Phi (\mu, \zeta) = 0 \quad \text{всюду, кроме вихрей;} \tag{2.75}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right|_{\mu = \mu_1} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right|_{\mu = \mu_H} = 0, \tag{2.76}$$

где $\Phi (\mu, \zeta)$ — потенциал вызванных скоростей от бесконечных винтовых вихрей с учетом условия непротекания через поверхности $r = r_H$ и $r = R_1$; $\mu_1 = \dfrac{R_1}{r' \operatorname{tg} \beta'}$; $\mu_H = \dfrac{r_H}{r' \operatorname{tg} \beta'}$. В дальнейшем индекс «$H$» будем приписывать величинам, соответствующим значениям на цилиндрической поверхности, моделирующей ступицу, а индекс «1» — значениям на трубе.

Потенциал $\Phi (\mu, \zeta)$ представим в виде суммы

$$\Phi (\mu, \zeta) = \Phi_p (\mu, \zeta) + \Phi_t (\mu, \zeta), \tag{2.77}$$

где $\Phi_p (\mu, \zeta)$ — потенциал скоростей Z бесконечных винтовых вихрей в безграничной жидкости (соответствует обычным факторам индукции); $\Phi_t (\mu, \zeta)$ — потенциал взаимодействия вихрей со ступицей и трубой, учитывающий условие непротекания (2.76).

Граничное условие (2.76) теперь можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial \mu}, \quad \mu = \mu_1;$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial \mu}, \quad \mu = \mu_H. \tag{2.78}$$

Потенциал $\Phi_p(\mu, \zeta)$ известен [10, 44]:

$$\Phi_p(\mu, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{Z}{2} - \dfrac{Z\theta}{2\pi} - \dfrac{\mu' Z}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} I'_{kZ}(kZ\mu') K_{kZ}(kZ\mu) \sin kZ\zeta \\ \qquad - \text{для } \mu > \mu' \text{ (внешнее поле);} \\ -\dfrac{\mu' Z x}{2\pi r'} - \dfrac{\mu' Z}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} K'_{kZ}(kZ\mu') I_{kZ}(kZ\mu) \sin kZ\zeta \\ \qquad - \text{для } \mu < \mu' \text{ (внутренее поле),} \end{cases} \tag{2.79}$$

где I_{kZ}, K_{kZ} — модифицированные функции Бесселя [27]. Введем обозначения:

$$-\frac{\partial \Phi_p}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=\mu_1} = \psi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \sin kZ\zeta;$$

$$-\frac{\partial \Phi_p}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=\mu_H} = \psi_H(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{Hk} \sin kZ\zeta,$$

где

$$a_{1k} = \frac{\mu' Z^2}{\pi} k I'_{kZ}(kZ\mu') K'_{kZ}(kZ\mu_1);$$

$$a_{Hk} = \frac{\mu' Z^2}{\pi} k K'_{kZ}(kZ\mu') I'_{kZ}(kZ\mu_H).$$

Таким образом, имеем для искомого потенциала взаимодействия $\Phi_t(\mu, \zeta)$ следующую краевую задачу:

$$\Delta \Phi_t(\mu, \zeta) \equiv \mu^2 \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \mu^2} + \mu \frac{\partial \Phi_t}{\partial \mu} + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \zeta^2} = 0; \tag{2.80}$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=\mu_1} = \psi_1(\zeta); \quad \frac{\partial \Phi_t}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=\mu_H} = \psi_H(\zeta). \tag{2.81}$$

Задачу будем решать методом раздеелния переменных. Учитывая, что функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ нечетные, представим потенциал $\Phi_t(\mu, \zeta)$ в виде

$$\Phi_t(\mu, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} [c_k I_{kZ}(kZ\mu) + d_k K_{kZ}(kZ\mu)] \sin kZ\zeta. \tag{2.82}$$

Присутствующие в решении (2.82) неизвестные константы c_k и d_k находим из граничных условий (2.81). Совершая подстановку (2.82) в (2.81) и сравнивая коэффициенты при $\sin kZ\zeta$, получим:

$$\left.\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{kZ}\,\frac{a_k I'_{kZ}(kZ\mu_H) - a_{Hk} I'_{kZ}(kZ\mu_1)}{K'_{kZ}(kZ\mu_1)\, I'_{kZ}(kZ\mu_H) - K'_{kZ}(kZ\mu_H)\, I'_{kZ}(kZ\mu_1)}; \\ c_k &= \frac{1}{I'_{kZ}(kZ\mu_1)}\left[\frac{a_{1k}}{kZ} - d_k K'_{kZ}(kZ\mu_1)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.83)$$

Окружную составляющую скорости $\delta w_{\theta\infty}$, вызванной цилиндрическими поверхностями в произвольной точке (μ, ζ), находят путем дифференцирования (2.82) по ζ:

$$\delta w_{\theta\infty} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_t}{\partial \zeta} = \frac{Z}{r}\sum_{k=1}^{\infty} k\,[c_k I_{kZ}(kZ\mu) + d_k K_{kZ}(kZ\mu)]\cos kZ\zeta. \qquad (2.84)$$

осевая составляющая скорости

$$\delta w_{x\infty} = \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} - \frac{\Omega}{V_A}\frac{\partial \Phi_t}{\partial \zeta} = -\frac{\Omega r}{V_A}\delta w_{\theta\infty} = -\operatorname{tg}\beta\,\delta w_{\theta\infty}. \qquad (2.85)$$

Аналогичное соотношение между осевой и окружной составляющими имеет место и для скоростей элементарного винта в безграничной жидкости. Таким образом, в произвольной точке на бесконечном удалении вниз по потоку геометрическая сумма векторов осевой и окружной скорости элементарного винта образует на плоскости спрямленных цилиндрических сечений вектор, перпендикулярный винтовой поверхности, на которой лежит элементарный вихрь. Что касается вектора полной вызванной скорости (с учетом еще и радиальных скоростей), то он перпендикулярен указанной винтовой поверхности лишь для точек, лежащих на самой этой поверхности, либо посередине между поверхностями, на которых лежат соседние винтовые вихри, т. е. там, где радиальная скорость равна нулю.

Анализ решения (2.82) показывает, что в частном случае, когда $\mu_H = 0$, оно переходит в известное решение В. В. Копецкого [44], а при $r_H = 0$, $R_1 = \infty$ — в формулы (2.79). Если $R_1 = \infty$, а $r_H \neq 0$, то структура потенциала (2.82) соответствует структуре решения задачи об оптимальном винте со ступицей бесконечной длины [138]. Интересно отметить, что если винтовые вихри лежат на цилиндрической поверхности $r = r_H = \text{const}$, то вызванные ими скорости

$$\left.\begin{aligned} w^*_{\theta\infty}(\mu, \zeta) &= w_{\theta\infty} + \delta w_{\theta\infty} = -\frac{Z}{2\pi r}; \\ w^*_{x\infty}(\mu, \zeta) &= w_{x\infty} + \delta w_{x\infty} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.86)$$

где $w_{\theta\infty}$, $w_{x\infty}$ — скорости, вызванные винтовыми вихрями в безграничной жидкости [соответствуют потенциалу (2.79)].

Следовательно, вызванные скорости Z винтовых вихрей, лежащих на бесконечном цилиндре, всюду конечны во внешней области, включая и поверхность цилиндра, не зависят от угловой координаты и соответствуют осредненным по окружности скоростям изолированных вихрей. Такой результат получился из-за того, что индукция трубы полностью компенсировала переменную по окружности составляющую поля, обращающуюся в бесконечность при $\zeta = 0$, $\mu \to \mu_H$, а постоянная составляющая сохранилась.

Найдя решение задачи для потенциала скоростей Φ_t, построим теперь обобщенные факторы индукции для Z винтовых свободных вихрей, расположенных в пространстве между цилиндрическими поверхностями. При этом следует учесть, что факторы индукции используются при расчете скоростей в диске гребного винта, равных половине соответствующих скоростей на бесконечности. Таким образом, имеем для окружного обобщенного фактора индукции:

$$\frac{1}{2}\overset{*}{w}_{\theta\infty}(r) = \frac{1}{2} w_{\theta\infty}(r) + \frac{1}{2}\delta w_{\theta\infty}(r) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{i_t}{r'-r} + \frac{1}{2}\delta w_{\theta\infty} = \frac{1}{4\pi}\frac{i'_t}{r'-r}; \qquad (2.87)$$

$$i'_t = i_t + \delta i_t = i_t + 2\pi(r'-r)\delta w_{\theta\infty}, \qquad (2.88)$$

где i_t — известный окружной фактор индукции для Z винтовых вихрей в безграничной жидкости:

$$i_t = \begin{cases} Z\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left[1 + 2\mu' Z \sum\limits_{k=1}^{\infty} k I'_{kZ}(kZ\mu') K_{kZ}(kZ\mu)\right], & \mu > \mu'; \\ 2Z^2\mu'\left(1-\frac{r'}{r}\right)\sum\limits_{k=1}^{\infty} k I_{kZ}(kZ\mu) K'_{kZ}(kZ\mu'), & \mu < \mu'. \end{cases} \qquad (2.89)$$

Поскольку для элементарного винта в пространстве между цилиндрическими поверхностями сохраняется известное условие перпендикулярности вызванной скорости винтовой поверхности, на которой лежат вихри, то сохраняется и связь (2.70) между обобщенными осевыми i'_a и окружным i'_t факторами:

$$i'_a = \frac{r}{r'\operatorname{tg}\beta'}\left[i'_t + Z\left(\frac{r'}{r}-1\right)\right]. \qquad (2.90)$$

Обобщенные факторы индукции ведут себя при $r \to r'$ так же, как и обычные факторы индукции i_t и i_a, т. е.

$$i'_a \to i_a \to \cos\beta; \quad i'_t \to i_t \to \sin\beta, \quad r \to r', \qquad (2.91)$$

а при $Z \to \infty$

$$\delta i_t \to 0; \quad \delta i_a \to 0;$$

$$i_t' \to i_t \to \begin{cases} Z\left(1 - \frac{r'}{r}\right), & r > r'; \\ 0, & r < r'; \end{cases} \tag{2.92}$$

$$i_a' \to i_a \to \begin{cases} 0, & r > r'; \\ Z\left(1 - \frac{r'}{r}\right)\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}, & r < r'. \end{cases}$$

Воспользуемся для вычисления фактора индукции i_t асимптотическими формулами Никольсона для модифицированных функций Бесселя [10, 141]. Использование этих формул позволяет просуммировать ряды (2.89). В результате такого суммирования получим

$$i_t = \begin{cases} Z\left(1 - \frac{r'}{r}\right)\left\{1 + \sqrt[4]{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\left[\frac{1}{1-q} - 1 + \right.\right. \\ \quad \left.\left. + \frac{\sin\beta\cos^2\beta}{2Z}\ln(1-q)\right]\right\}, \quad r > r'; \\ -Z\left(1 - \frac{r'}{r}\right)\sqrt[4]{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\left[\frac{1}{1-q} - 1 + \right. \\ \quad \left. + \frac{\sin\beta\cos^2\beta}{2Z}\ln(1-q)\right], \quad r < r', \end{cases} \tag{2.93}$$

где

$$q = \begin{cases} e^{-Z(y-y')}, & r > r'; \\ e^{-Z(y'-y)}, & r < r'; \end{cases}$$

$$y = \sqrt{1+\mu^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{\sqrt{1+\mu^2}-1};$$

$$y' = \sqrt{1+\mu'^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mu'^2}+1}{\sqrt{1+\mu'^2}-1}.$$

Иные, менее наглядные формулы для фактора индукции i_t можно получить, используя асимптотические формулы Лемера [139]:

$$i_t = \begin{cases} Z\left(1 - \frac{r'}{r}\right)(1 + 2\mu' Z F_{1,2}), & r > r'; \\ 2Z^2\left(1 - \frac{r'}{r}\right)\mu' F_{1,2}, & r < r', \end{cases} \tag{2.94}$$

где

$$F_{1,2}=\frac{\operatorname{sign}(r-r')}{2Z\mu'}\left(\frac{u'}{u}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\nu-1}-\frac{\operatorname{sign}(r-r')}{24Z}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{9\mu'^2+2}{u'^3}+\frac{3\mu^2-2}{u^3}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)\right];$$

$$\operatorname{sign}(r-r')=\begin{cases}1, & r>r';\\ -1, & r<r';\end{cases}$$

$$u=\sqrt{1+\mu^2};\quad u'=\sqrt{1+\mu'^2};$$

$$\nu=\left(\frac{u-1}{\mu}\,\frac{\mu'}{u'-1}\right)^{Z\operatorname{sign}(r-r')}e^{Z|u-u'|}.$$

Используя асимптотические формулы Никольсона и проводя суммирование, можно получить следующее выражение для δi_t:

$$\delta i_t=-Z\left(1-\frac{r'}{r}\right)\sqrt[4]{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\left\{\frac{1}{1-\exp\left[-Z\left(2y_1-y-y'\right)\right]}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-\exp\left[-Z\left(y+y'-2y_H\right)\right]}\right\},\qquad(2.95)$$

где y_1 и y_H определяют аналогично y и y' [см. формулы (2.93)]. Таким образом, обобщенные факторы индукции — функции следующих переменных: Z, $\operatorname{tg}\beta$, r/r', r_H/r', R_1/r'. При $R_1\to\infty$ первое слагаемое в фигурных скобках выражения (2.95) обращается в единицу; при $r_H\to 0$ аналогично ведет себя второе слагаемое. При одновременном стремлении $R_1\to\infty$ и $r_H\to 0$ $\delta i_t\to 0$.

Интегродифференциальное уравнение теории несущей линии. Рассмотрим выражения для вызванных скоростей гребного винта (2.73), (2.74). Следуя Л. Прандтлю, будем считать, что шаг свободных вихрей определяется с учетом вызванных скоростей. Если функция распределения циркуляции $\Gamma(r)$ задана, а $w_{\theta 1}(r)$ и $w_{x1}(r)$ неизвестны, то уравнения (2.73) и (2.74) есть просто интегралы типа Коши с известной плотностью. В случае, если одна из функций $w_{\theta 1}(r)$ или $w_{x1}(r)$ известна, то любое из этих выражений представляет собой сингулярное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Gamma(r)$.

Преобразуем формулу (2.73) к виду, удобному для дальнейшего анализа. Для этого введем безразмерные величины и произведем замену переменных:

$$\frac{w_{\theta 1}(\bar r)}{V_A}=\frac{1}{2}\int_{r_H}^{1}\frac{dG_A}{d\bar r'}\,\frac{i_t'}{\bar r'-\bar r}\,d\bar r'-\frac{ZG_A(\bar r_H)}{2\bar r}=$$

$$=\frac{1}{1-\bar r_H}\int_{-1}^{+1}\frac{dG_A}{dx'}\,\frac{i_t'}{x'-x}\,dx'-\frac{ZG_A(\bar r_H)}{2\bar r},\qquad(2.96)$$

где $G_A = \Gamma/(\pi D V_A)$; $x = (2\bar{r} - 1 - \bar{r}_H)/(1 - \bar{r}_H)$. Здесь все линейные размеры отнесены к радиусу винта, $\bar{r}' = \bar{r}_H$ соответствует $x' = -1$, $\bar{r}' = 1$ соответствует $x' = 1$, т. е. отрезок радиальной прямой $[\bar{r}_H, 1]$ переводится в стандартный отрезок $[-1, 1]$.

Уравнение (2.96) удобно использовать при проектировочном расчете оптимального изолированного или приспособленного к попутному корпусу судна гребного винта, когда w_{01} задано (см. § 3.2).

При проведении поверочного расчета гребного винта обычно используют не формулу (2.96), в интегродифференциальное уравнение в несколько ином виде [10]. Для вывода этого уравнения применяют уравнение связи

$$\Gamma(r) = \frac{1}{2} C_L V_R^* c \tag{2.97}$$

и линейную зависимость коэффициента подъемной силы C_L от угла атаки

$$C_L = \frac{dC_L}{d\alpha}(\alpha_I - \alpha_0), \tag{2.98}$$

где V_R^* — скорость натекания на профиль сечения лопасти, имеющий хорду c и угол атаки с учетом индуктивных скоростей $\alpha_I = \varphi - \beta_I$. Подставляя формулы для вызванных скоростей и выражение связи (2.97) в формулу (2.98), получим интегродифференциальное уравнение в виде

$$G_A(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{dc}{d\alpha} \frac{c}{D} \overline{V}_R^* \left[\varphi - \beta - \frac{w_{n1}(x)}{V_R^*} \right], \tag{2.99}$$

где

$$\overline{V}_R^* = V_R^*/V_A; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{V_A}{\Omega r};$$

$$\frac{w_{n1}(x)}{V_R^*} = \frac{1}{(1 - \bar{r}_H)\overline{V}_R^*} \int_{-1}^{+1} \frac{dG_A}{dx'} \frac{i_t' \sin\beta_I - i_a' \cos\beta_I}{x' - x} dx' - \frac{Z G_A(\bar{r}_H)}{2\bar{r}\overline{V}_R^*} \sin\beta_I \tag{2.100}$$

— индуктивный скос потока, вызванный всеми свободными вихрями гребного винта. Величина угла индуктивной поступи β_I вычисляется в этом выражении на радиусе r, соответствующем переменной x.

Представление функции распределения циркуляции. Относительно производной $d\Gamma/dr$ уравнения (2.96) или (2.99) интегральные. Из теории сингулярных интегральных уравнений известно [23], что их решение возможно только в трех классах

искомой функции dG_A/dx (или $d\Gamma/dr$). Из анализа поведения функции видно, что у левого конца участка интегрирования ($x=-1$, $\bar{r}=\bar{r}_H$), т. е. около ступицы, решение следует искать в классе ограниченных функций, так как условие равенства нулю радиальной скорости на ступице (условие непротекания) приводит к требованию равенства нулю производной циркуляции на ней *.

Действительно, рассмотрим потенциал скоростей и его производные по радиусу с обеих сторон пелены свободных вихрей в непосредственной близости от ступицы. С одной стороны пелены имеем

$$\frac{\partial\Phi^+}{\partial r}=\frac{\partial\Phi^0}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(\Phi^+-\Phi^-)=0$$

в силу условия непротекания. Здесь Φ^+, Φ^-, Φ^0 — предельные и прямое значения потенциала на пелене. С другой стороны пелены аналогично

$$\frac{\partial\Phi^-}{\partial r}=\frac{\partial\Phi^0}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(\Phi^+-\Phi^-)=0.$$

Складывая и вычитая оба равенства, получаем

$$\frac{\partial\Phi^0}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial}{\partial r}(\Phi^+-\Phi^-)=\frac{\partial}{\partial r}[\Phi]=\frac{d\Gamma}{dr}=0,$$

где $[\Phi]$ — скачок потенциала при переходе через пелену, равный циркуляции скорости. Таким образом, принятие класса ограниченных у ступицы функций $d\Gamma/dr$ — необходимое условие выполнения граничного условия непротекания на ступице.

Что касается поведения функции $d\Gamma/dr$ около конца лопасти ($\bar{r}\to 1$, $x\to 1$), то здесь можно принять либо класс ограниченных либо неограниченных функций. В частности, в практически важной задаче об оптимальном гребном винте производную $d\Gamma/dr$ принимают неограниченной у конца лопасти (см. § 2.6, 3.2).

В соответствии с изложенным, функцию производной распределения циркуляции вдоль радиуса представим в виде [71]

$$\frac{dG_A}{dx}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sum_{n=0}^{M}a_nP_n^{\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x), \qquad (2.101)$$

где $P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x)$ — полином Якоби [27], ортогональный с весом $(1-x)^{-1/2}(1+x)^{1/2}$ на промежутке $[-1, 1]$. В регулярной части представления (2.101) могут присутствовать вместо $P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x)$ другие полиномы или функции, однако использование полиномов Якоби упрощает последующие преобразования.

---

* Под классом ограниченных функций подразумевается такой класс, в котором функция ведет себя как $\sqrt{\nu}$, где ν — расстояние до соответствующего конца; под классом неограниченных функций — такой, в котором ее поведение описывается функцией $1/\sqrt{\nu}$.

Циркуляция $G_A(x)$ находится по формуле (2.101) с помощью интеграла с переменным верхним пределом:

$$G_A(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dG_A}{dx}\,dx + G_A(-1) = a_0\left(\pi - \sqrt{1-x^2} - \arccos x\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(1+x)^{3/2}\sum_{n=1}^{M}\frac{a_n}{n}P_{n-1}^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2}\right)}(x) + G_A(-1). \quad (2.102)$$

Учитывая условие на конце лопасти $G_A(1) = 0$, получаем, что $G_A(-1) = -\pi a_0$; при этом выражение для циркуляции принимает вид

$$G_A(x) = -a_0\left(\sqrt{1-x^2} + \arccos x\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(1+x)^{3/2}\sum_{n=1}^{M}\frac{a_n}{n}P_{n-1}^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2}\right)}(x). \quad (2.103)$$

В случае, если по каким-либо причинам принимается класс ограниченных у конца лопасти функций $d\Gamma/dr$, т. е.

$$\frac{dG_A}{dx} = \sqrt{1-x^2}\sum_{n=0}^{M} a_n P_n^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x), \quad (2.104)$$

распределение циркуляции $G_A(x)$ находят из формулы

$$G_A(x) = -a_0\left(\frac{1}{2}\arccos x - \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(1-x)^{3/2}(1+x)^{3/2}\sum_{n=1}^{M}\frac{a_n}{n}P_{n-1}^{\left(\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}\right)}(x). \quad (2.105)$$

В заключение параграфа отметим, что циркуляция на ступице $G_A(-1)$ в общем случае не равна нулю, что следует из

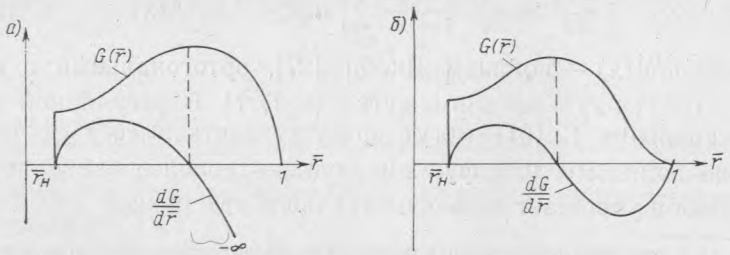


Рис. 2.7. Типичные распределения циркуляции $G(\bar{r})$ и ее производной $dG/d\bar{r}$ для неограниченного значения $dG/d\bar{r}$ у конца лопасти (*а*) и ограниченного (*б*).

формул (2.103) и (2.105). Например, для оптимального гребного винта $G_A(-1)$ всегда больше нуля (см. § 3.2) [71]. В случае, если распределение циркуляции вдоль лопасти задано и по каким-либо причинам принято $G_A(-1) = 0$, необходимо следить за тем, чтобы $dG_A/dx(-1) = 0$.

Графики изменения $dG_A/d\bar{r}$ и $G_A(\bar{r})$ вдоль радиуса винта схематично приведены на рис. 2.7.

2.5. Силы и моменты, действующие на гребной винт

При определении сил и моментов гидродинамической природы, действующих на гребной винт, будем, как обычно, считать, что основная их часть может быть рассчитана. Предположим, что жидкость идеальна, а толщина сечений лопасти мала. Влияние вязкости жидкости и толщины лопастей винта будем учитывать дополнительно, вводя поправки к основным величинам.

Силы и моменты в идеальной жидкости. При сделанных предположениях главную часть сил и моментов, действующих на винт со стороны окружающей жидкости, удобно определять, используя теорему Н. Е. Жуковского «в малом». Доказательство этой теоремы для плоских задач содержится в работах [26, 76, 85]. Для пространственной задачи нестационарного обтекания тонкой несущей поверхности оно дано С. М. Белоцерковским [12], а для лопастей гребного винта — В. Б. Липисом [56].

Следуя В. Б. Липису, рассмотрим элемент тонкой несущей винтовой поверхности dA, на которой расположен слой присоединенных и свободных вихрей. Запишем интеграл Лагранжа—Коши (2.7) в относительном движении для точек верхней и нижней сторон элемента dA *:

$$\frac{p^+ - p_0}{\rho} = -\vec{w}^+\left(\frac{\vec{w}^+}{2} - \vec{V}_E\right) - \frac{\partial' \Phi}{\partial t}; \qquad (2.106)$$

$$\frac{p^- - p_0}{\rho} = -\vec{w}^-\left(\frac{\vec{w}^-}{2} - \vec{V}_E\right) - \frac{\partial' \Phi}{\partial t}. \qquad (2.107)$$

Знак «+» соответствует верхней (засасывающей), а «—» — нижней (нагнетающей) стороне элемента.

Найдем разность давлений $[p] = p^+ - p^-$, действующих на элемент:

$$\frac{[p]}{\rho} = \left(\vec{w}^- - \vec{w}^+\right)\left(\frac{\vec{w}^- + \vec{w}^+}{2} - \vec{V}_E\right) - \frac{\partial' [\Phi]}{\partial t}. \qquad (2.108)$$

---

* Отметим, что вывод дальнейших формул не изменится, если предположить, что скорость $\vec{w}$ содержит составляющую, обусловленную присутствием корпуса.

Здесь $^1/_2(\vec{w}^- + \vec{w}^+) - \vec{V}_E = \vec{V}_R^0$ — прямое значение относительной скорости в точках вихревой поверхности (в дальнейшем обозначается как $\vec{V}_0$); $[\Phi]$ — скачок потенциала, равный циркуляции скорости Γ по контуру, охватывающему несущую поверхность и замыкающемуся в точке на выбранном элементе. Разность предельных значений вызванной скорости $(\vec{w}^- - \vec{w}^+)$ связана с вектором интенсивности вихревого слоя $\vec{\gamma}$ зависимостью

$$\vec{w}^- - \vec{w}^+ = -[\vec{w}] = \vec{n} \times \vec{\gamma},$$

где $\vec{n}$ — нормаль к элементу.

Поскольку внешний поток непрерывен в месте расположения гребного винта, скачок скорости $[\vec{w}]$ равен скачку вызванных скоростей гребного винта. Аналогичные рассуждения справедливы и для скачка потенциала $[\Phi]$.

Вектор $\vec{\gamma}$ равен сумме вектора присоединенных вихрей $\vec{\gamma}_b$ и вектора свободных вихрей $\vec{\gamma}_f$. Аналогично можно считать, что циркуляция Γ состоит из суммы циркуляций, соответствующих присоединенным (Γ_b) и свободным (Γ_f) вихрям. Таким образом,

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_b + \vec{\gamma}_f; \quad \Gamma = \Gamma_b + \Gamma_f. \tag{2.109}$$

Подставив формулы (2.109) в выражение (2.108), получим

$$\frac{[p]}{\rho} = \left(\vec{n} \times \vec{\gamma}_b\right)\vec{V}_0 + \left(\vec{n} \times \vec{\gamma}_f\right)\vec{V}_0 - \frac{\partial' \Gamma_b}{\partial t} - \frac{\partial' \Gamma_f}{\partial t}. \tag{2.110}$$

В соответствии с теоремой Томсона

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\,(\Gamma_b + \Gamma_f)}{dt} = 0. \tag{2.111}$$

По определению присоединенных и свободных вихрей в связанной с винтом системе координат присоединенные вихри остаются неподвижными, а свободные — сносятся набегающим потоком вниз по течению. Поэтому

$$\frac{\partial' \Gamma_b}{\partial t} = \frac{d\Gamma_b}{dt}; \quad \frac{\partial' \Gamma_f}{\partial t} - \left(\vec{n} \times \vec{\gamma}_f\right)\vec{V}_0 = \frac{d\Gamma_f}{dt}. \tag{2.112}$$

Учитывая (2.111) и (2.112), получим для скачка давлений формулу

$$\frac{[p]}{\rho} = \left(\vec{n} \times \vec{\gamma}_b\right)\vec{V}_0. \tag{2.113}$$

Аналогичная формула в линеаризованной постановке была получена выше [см. (2.34)].

Для того чтобы определить элементарную подъемную силу, помножим скалярно обе части равенства (2.113) на орт нормали $\vec{n}$:

$$\vec{n}\frac{[p]}{\rho}=\vec{n}\left[\left(\vec{n}\times\vec{\gamma}_b\right)\vec{V}_0\right]=\vec{V}_0\times\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{\gamma}_b\right)\right]+\left(\vec{n}\times\vec{\gamma}_b\right)\left(\vec{V}_0\vec{n}\right).$$

Учитывая, что $\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\gamma}_b)=\vec{\gamma}_b$, а $\vec{V}_0\vec{n}=0$ в силу условия непротекания, получим для элементарной подъемной силы на элементе dA:

$$\vec{dL}_I=\vec{n}[p]\,dA=\rho\left(\vec{V}_0\times\vec{\gamma}_b\right)dA. \tag{2.114}$$

Формула (2.114) выражает теорему Н. Е. Жуковского «в малом» для общего случая нестационарного обтекания лопастей винта. При этом $\vec{V}_0$ — прямое значение относительной скорости в точке на несущей поверхности, а $\vec{\gamma}_b$ — интенсивность присоединенных вихрей. Обе эти величины зависят от времени.

Проводя аналогичные выкладки для элементарного момента сил относительно начала координат, получим

$$d\vec{M}_I=\rho\left[\vec{r}_P\times\left(\vec{V}_0\times\vec{\gamma}_b\right)\right]dA, \tag{2.115}$$

где r_P — радиус-вектор точки P с координатами $(x,\ r,\ \theta)$.

Величины главного вектора сил и момента относительно начала координат для гребного винта в целом определяются формулами:

$$\vec{R}_I=\rho\sum_{j=0}^{Z-1}\iint\limits_{A_1}\left(\vec{V}_0^{(j)}\times\vec{\gamma}_b^{(j)}\right)dA; \tag{2.116}$$

$$\vec{Q}_I=\rho\sum_{j=0}^{Z-1}\iint\limits_{A_1}\left[\vec{r}_P^{(j)}\times\left(\vec{V}_0^{(j)}\times\vec{\gamma}_b^{(j)}\right)\right]dA. \tag{2.117}$$

В соответствии с разделением сил и моментов на составляющие, которое принято в нестационарной теории крыла [76] и винта [56], каждый из векторов $\vec{R}_I$ и $\vec{Q}_I$ можно представить в виде суммы трех составляющих: квазистационарной, инерционной и обусловленной влиянием вихревого следа. При вычислении сил и моментов по формулам (2.116) и (2.117) в них будут входить все три составляющие. Однако поскольку указанные формулы получены для тонких несущих поверхностей, в них отсутствуют компоненты, связанные с нестационарным продольным обтеканием сечений лопастей как тел конечной толщины, вращающихся в неоднородном потоке. Для приближенного

вычисления этих компонентов воспользуемся формулами М. Д. Хаскинда,* справедливыми для движения тела в потоке жидкости, скорость $\vec{V}$ которого есть функция времени [81, 98]:

$$\vec{R}_V = \rho \mathscr{V}^\circ \frac{d\vec{V}}{dt}; \quad \vec{Q}_V = \rho \mathscr{V}^\circ \left(\vec{r}_c \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right), \tag{2.118}$$

где $\mathscr{V}^\circ$ — объем тела; $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра тяжести этого объема. Применим формулы (2.118) к элементу лопасти, имеющему площадь цилиндрического сечения $A_S(r)$ и размах dr. Поскольку $(\vec{V}_0 \vec{n}) = 0$, будем считать, что $\vec{V} = V_0 \vec{e}_\xi \equiv \vec{V}_\xi$ и что производная $d\vec{V}/dt$, обусловленная в нашем случае влиянием окружной неоднородности потока, одинакова для всех точек сечения на радиусе r. Тогда для $\vec{R}_V$ и $\vec{Q}_V$ получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}_V &= \rho \sum_{j=0}^{Z-1} \int_{r_H}^{R} A_S(r) \frac{d\vec{V}_\xi}{dt} dr; \\ \vec{Q}_V &= \rho \sum_{j=0}^{Z-1} \int_{r_H}^{R} A_S(r) \left(\vec{r}_c^{(j)} \times \frac{d\vec{V}_\xi}{dt} \right) dr. \end{aligned}\right\} \tag{2.119}$$

Формулы (2.116) и (2.117) справедливы при любой нагрузке (величине вызванной скорости). Для слабонагруженного гребного винта в формулах (2.116) и (2.117) вместо V_0 следует принимать V_E.

При работе гребного винта в осесимметричном набегающем потоке силы и моменты на каждой из лопастей равны по величине, и формулы (2.116) и (2.117) принимают вид:

$$T_I = \rho Z \iint_{A_1} \vec{e}_x \left(\vec{V}_0 \times \vec{\gamma}_b \right) dA; \tag{2.120}$$

$$Q_I = \rho Z \iint_{A_1} \vec{e}_\theta \left[\vec{R}_Q \times \left(\vec{V}_0 \times \vec{\gamma}_b \right) \right] dA, \tag{2.121}$$

где T_I — упор гребного винта, направленный вдоль его оси; Q_I — крутящий момент относительно оси вращения; $\vec{e}_x$, $\vec{e}_\theta$ — орты соответствующих осей.

Для узкополостного гребного винта можно считать, что величина скорости $\vec{V}_0$ не зависит от положения точки вдоль се-

* Впервые формулы М. Д. Хаскинда [98] были использованы для решения задач гидродинамики гребного винта В. Б. Липисом [56].

чения лопасти. В случае умеренно нагруженного винта можно положить

$$|\vec{V}_0| \simeq |\vec{V}_R^*| = \sqrt{\left(V_x + \frac{1}{2} w_{x\infty}\right)^2 + \left(\Omega r - V_\theta - \frac{1}{2} w_{\theta\infty}\right)^2},$$

где $w_{x\infty}$, $w_{\theta\infty}$ — соответственно осевая и окружная вызванные скорости на бесконечности за винтом. Вектор $\vec{V}_R^*$ принимается лежащим в плоскости, касательной к цилиндру, соосному с винтом. Вектор плотности присоединенных вихрей $\vec{\gamma}_b$ направлен в этом случае строго вдоль радиальной координаты.

В результате имеем для векторов силы и момента, действующих со стороны жидкости на умеренно нагруженный гребной винт в осесимметричном потоке:

$$T_I = \rho Z \iint\limits_{A_1} V_R^* \gamma_b \cos\beta_I \, dA = \rho Z \int\limits_{r_H}^{R} \Gamma V_R^* \cos\beta_I \, dr; \qquad (2.122)$$

$$Q_I = \rho Z \iint\limits_{A_1} r V_R^* \gamma_b \sin\beta_I \, dA = \rho Z \int\limits_{r_H}^{R} \Gamma r V_R^* \sin\beta_I \, dr, \qquad (2.123)$$

где β_I — угол индуктивной поступи:

$$\beta_I = \operatorname{arctg} \frac{V_x + \frac{1}{2} w_{x\infty}}{\Omega r - V_\theta - \frac{1}{2} w_{\theta\infty}};$$

$\Gamma(r) = \int\limits_{-c/2}^{c/2} \gamma_b \, d\xi$ — циркуляция скорости около сечения лопасти на радиусе r.

Формулы (2.122) и (2.123) справедливы и для широколопастного гребного винта в осесимметричном потоке, если считать, что относительная скорость натекания не зависит от положения точки на хорде.

Теорема Н. Е. Жуковского «в малом» и вытекающие из нее формулы для сил и моментов на гребном винте соответствуют, как легко видеть из формул (2.116) и (2.117), элементарным силам, перпендикулярным несущей поверхности в каждой ее точке. Ясно, что на тонкой несущей поверхности, произвольно движущейся в потоке идеальной жидкости, всюду вне кромок никаких других сил возникнуть не может. Что касается течения непосредственно около кромок, то там могут возникнуть бесконечно большие нагрузки и соответственно неограниченные вызванные скорости. Такой режим течения возникает на тех границах несущей поверхности, где при решении задачи не выполняется условие Чаплыгина—Жуковского о конечности скорости, т. е. на входящих кромках лопастей. Наличие бесконечно боль-

ших нагрузок на кромке является следствием принятия допущения об исчезающе малой толщине несущей поверхности. Существование кромок, обтекаемых с бесконечно большими скоростями, является характерным атрибутом теории тонких несущих поверхностей.

Важным следствием, которое вытекает из наличия неограниченных нагрузок на передних кромках, является появление на них касательной силы, которую называют «подсасывающей». Эту силу конечной величины, возникающую на кромке, имеющей нулевую толщину, с физической точки зрения следует рассматривать как результат произведения бесконечно большого разрежения на бесконечно малую площадь носовой части профиля. Наличие подсасывающей силы имеет принципиальное значение, так как только с ее учетом вектор результирующей силы оказывается перпендикулярным вектору скорости набегающего потока, как этого требует теорема Н. Е. Жуковского. Это свойство хорошо иллюстрируется в задаче обтекания плоской пластинки [46].

Величину подсасывающей силы можно вычислить по формуле, выражающей теорему Н. Е. Жуковского «в малом», надлежащим образом применив ее [26] для участка профиля в непосредственной близости от передней кромки, где интенсивность вихрей в общем случае обращается в бесконечность.

Однако для лопасти гребного винта удобнее вычислять ее, исследуя поведение вызванных скоростей вблизи входящей кромки. Естественно предположить, что оно сохраняет такой же характер, как и в плоской задаче обтекания тонкой несущей поверхности. Действительно, при подходе к передней кромке на расстояние, значительно меньшее характерного размера лопасти, локальное течение можно рассматривать как плоское, причем направление этого местного течения определяется скоростями от всей остальной части лопасти и от других лопастей.

Можно показать [13], что составляющие вызванной скорости, направленные вдоль передней кромки, остаются конечными, и следовательно, вблизи передней кромки плоскость, в которой течение оказывается «плоскопараллельным», нормальна к ней. Это позволяет считать, что плотность вихревого слоя вблизи передней кромки имеет вид

$$\gamma_S(r,\ \xi_S,\ t) = \frac{A_{\gamma S}(r,\ t)}{\sqrt{\xi_S}} + \ldots,$$

где ξ_S — координата, отсчитываемая по нормали к кромке; $A_{\gamma S}(r,\ t)$ — некоторая размерная величина. Вектор $\vec{\gamma}_S$ направлен по касательной к передней кромке лопасти.

Введем в рассмотрение угол стреловидности передней кромки лопасти χ:

$$\cos\chi = \left(\vec{n}_S \vec{e}_\xi\right),$$

где $\vec{n}_S$ — вектор единичной нормали к линии передней кромки, касательный несущей поверхности, а $\vec{e}_\xi$ — орт, направленный вдоль хорды цилиндрического сечения лопасти (рис. 2.8).

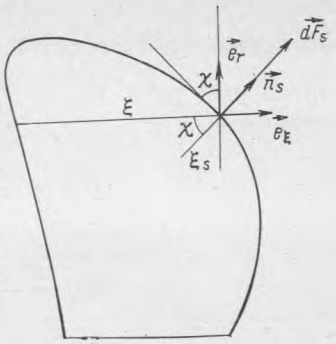


Рис. 2.8. К определению подсасывающей силы.

Подсасывающая сила может быть вычислена с использованием той же формулы, что и в плоской задаче обтекания пластины [46]

$$d\vec{F}_S = \frac{\pi}{4}\rho A_{\gamma S}^2\, dl\vec{n}_S,$$

где dl — дифференциал дуги передней кромки.

Учитывая структуру формулы для γ_S, запишем выражение для интенсивности слоя присоединенных вихрей вблизи передней кромки:

$$\gamma_b(r,\ \xi,\ t) = \frac{A_{\gamma b}(r,\ t)}{\sqrt{\xi_L - \xi}} + \ \ldots\ = \frac{A_\gamma(r,\ t)}{\sqrt{(\xi_L - \xi)/c}} + \ \ldots, \qquad (2.124)$$

где A_γ — величина, определяемая при поверочном расчете гребного винта (см. гл. 4). Структура представления (2.124) является традиционной для теории тонкой несущей поверхности [12, 13, 61, 101, 116].

Учитывая, что вблизи кромки $\gamma_b = \gamma_S \cos\chi$; $\xi_S = \xi\cos\chi$, и используя (2.124), преобразуем формулу для подсасывающей силы к виду

$$d\vec{F}_S = \frac{\pi}{4}\rho c A_\gamma^2 \frac{dl}{\cos\chi}\vec{n}_S. \qquad (2.125)$$

Из анализа формулы (2.125) можно сделать следующие выводы. Во-первых, подсасывающая сила на элементе передней кромки всегда ей перпендикулярна и направлена навстречу набегающему потоку. Во-вторых, ее величина имеет второй порядок малости по сравнению с нагрузкой в сечении.

Полная величина подсасывающей силы на всех лопастях вычисляется по формуле

$$\vec{R}_S = \frac{1}{4}\pi\rho\sum_{j=0}^{Z-1}\int_{l_j} cA_{\gamma j}^2\vec{n}_{Sj}\frac{dl}{\cos\chi} = \frac{1}{4}\pi\rho\sum_{j=0}^{Z-1}\int_{r_H}^{R} cA_{\gamma j}^2\vec{n}_{Sj}\frac{dr}{\cos^2\chi}. \qquad (2.126)$$

Наличие подсасывающей силы приводит к появлению момента на гребном винте, равного

$$\vec{Q}_S = \frac{1}{4}\pi\rho\sum_{j=0}^{Z-1}\int_{r_H}^{R} cA_{\gamma j}^2\left(\vec{r}_{Pj}\times\vec{n}_{Sj}\right)\frac{dr}{\cos^2\chi}. \qquad (2.127)$$

Очевидно, что в однородном по окружности потоке, когда обтекание всех лопастей одинаково, сила $\vec{R}_S$ дает только дополнительный упор ΔT_S, а $\vec{Q}_S$ — уменьшает крутящий момент на величину ΔQ_S:

$$\left.\begin{aligned}\Delta T_S &= \frac{Z}{4}\pi\rho\int\limits_{r_H}^{R} cA_\gamma^2\,\frac{\sin\beta_I}{\cos\chi}\,dr;\\ \Delta Q_S &= \frac{Z}{4}\pi\rho\int\limits_{r_H}^{R} cA_\gamma^2 r\,\frac{\cos\beta_I}{\cos\chi}\,dr.\end{aligned}\right\} \qquad (2.128)$$

Силы и моменты в вязкой жидкости. Все приведенные до сих пор в настоящем параграфе формулы для сил и моментов получены в предположении о том, что жидкость идеальная. Влияние вязкости жидкости при этом учитывалось лишь косвенно путем выбора такого решения, которое удовлетворяет постулату Чаплыгина—Жуковского о конечности скорости на задней кромке лопасти.

При переходе от идеальной жидкости к вязкой необходимо учесть появление касательных к поверхности лопасти напряжений и изменение распределения давлений по лопасти. Изменение распределения давлений приводит к изменению (как правило, к уменьшению) интенсивности присоединенных вихрей, циркуляции скорости и вызванных скоростей.* Будем также считать, что формулы (2.116), (2.117), при выводе которых предполагалось, что набегающий на винт внешний поток потенциален, остаются справедливыми и в том случае, когда вектор местной относительной скорости содержит составляющую внешнего потока, обусловленную влиянием вязкости (пограничным слоем или следом корпуса судна). Косвенным подтверждением допустимости такого предположения могут являться результаты, полученные в работах И. Вайсзингера (см., например, [166]). В них исследовалось обтекание тонкого профиля плоскопараллельными неоднородным вихревым потоком, скорость которого изменяется в поперечном направлении. При этом получено, что сила, действующая на вихревой слой, заменяющий профиль, также определяется формулой теоремы Н. Е. Жуковского «в малом», причем в качестве скорости в нее входит местное значение скорости внешнего потока.

На рис. 2.9 приведен план скоростей и сил на элементе лопасти в идеальной и вязкой жидкости.

Наличие силы сопротивления D_S будем, как обычно, учиты-

* Строго говоря, в вязкой жидкости вихри распределены не в виде тонких слоев, а диффундируют в окружающее пространство. В этом случае при вычислении скоростей формулу Био—Савара следует применять ко всему объему жидкости, занятому вихрями [11].

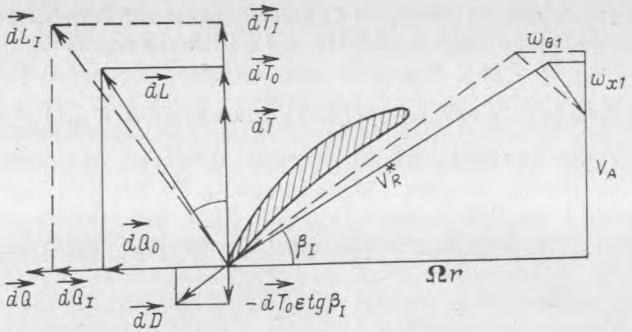


Рис. 2.9. Силы, действующие на элемент лопасти гребного винта в идеальной (пунктир) и вязкой (сплошные линии) жидкости.

вать, вводя множители $(1-\varepsilon \operatorname{tg}\beta_I)$ и $(1+\varepsilon \operatorname{ctg}\beta_I)$ в соответствующие проекции сил.

В случае, если величину V_0 считать независящей от положения точки на хорде, для гребного винта, работающего в осесимметричном потоке, вместо формул (2.122) и (2.123) получим следующие выражения для упора и момента [10, 48]:

$$T=\rho Z\int_{r_H}^{R}\Gamma V_R^*(1-\varepsilon \operatorname{tg}\beta_I)\cos\beta_I\,dr; \tag{2.129}$$

$$Q=\rho Z\int_{r_H}^{R}\Gamma r V_R^*(1+\varepsilon \operatorname{ctg}\beta_I)\sin\beta_I\,dr. \tag{2.130}$$

Для случая работы винта в неоднородном по окружности потоке соответствующие формулы приведены в § 4.2.

Из анализа формул (2.129) и (2.130) видно, что и уменьшение циркуляции вокруг сечений Г и появление силы сопротивления действуют в одну сторону и уменьшают упор гребного винта, в то время как на величину момента они влияют в противоположных направлениях. Кроме того, из-за уменьшения Г уменьшаются и величины вызванных скоростей, входящие в относительную скорость V_R^*, что также влияет на величины упора и момента.

Отнеся упор к $\rho n^2 D^4$, а момент к $\rho n^2 D^5$, получим соответственно коэффициенты упора K_T и моменты K_Q:

$$K_T=\frac{\pi}{2}ZJ_V^2\int_{\bar{r}_H}^{1}G(\bar{r})\bar{V}_R^*\cos\beta_I(1-\varepsilon \operatorname{tg}\beta_I)\,d\bar{r}; \tag{2.131}$$

$$K_Q=\frac{\pi}{4}ZJ_V^2\int_{\bar{r}_H}^{1}\bar{r}G(\bar{r})\bar{V}_R^*\sin\beta_I(1+\varepsilon \operatorname{ctg}\beta_I)\,d\bar{r}. \tag{2.132}$$

Воспользуемся теоремой о среднем интегрального исчисления и представим выражения (2.131) и (2.132) в виде:

$$K_T = \frac{\pi}{2} Z J_V^2 (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_I)_{\bar{r}_1} \int_{\bar{r}_H}^{1} G(\bar{r}) \overline{V}_R^* \cos \beta_I \, d\bar{r} = K_{T0} (1 - \varepsilon_1 \operatorname{tg} \beta_{I1}); \tag{2.133}$$

$$K_Q = \frac{\pi}{4} Z J_V^2 (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_I)_{\bar{r}_2} \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} G(\bar{r}) \overline{V}_R^* \sin \beta_I \, d\bar{r} =$$

$$= K_{Q0} (1 + \varepsilon_2 \operatorname{ctg} \beta_{I2}), \tag{2.134}$$

где

$$K_{T0} = \frac{\pi}{2} Z J_V^2 \int_{\bar{r}_H}^{1} G(\bar{r}) \overline{V}_R^* \cos \beta_I \, d\bar{r}; \tag{2.135}$$

$$K_{Q0} = \frac{\pi}{4} Z J_V^2 \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} G(\bar{r}) \overline{V}_R^* \sin \beta_I \, d\bar{r} \tag{2.136}$$

— коэффициенты упора и момента без учета профильного сопротивления; ε_1, ε_2 — некоторые средние по радиусу значения коэффициентов обратного качества для упора и момента соответственно; можно принимать: для ε_1 — на $\bar{r} = 0{,}6 \div 0{,}8$, для ε_2 — $\bar{r} = 0{,}75$.

Структура зависимостей (2.133)—(2.136) позволяет представить КПД гребного винта η_0 в виде двух сомножителей: индуктивного КПД η_I и конструктивного КПД винта η_ε:

$$\eta_0 = \frac{TV_A}{P_D} = \frac{J}{2\pi} \frac{K_T}{K_Q} = \eta_I \eta_\varepsilon, \tag{2.137}$$

где

$$\eta_I = \frac{J}{2\pi} \frac{K_{T0}}{K_{Q0}}; \quad \eta_\varepsilon = \frac{1 - \varepsilon_1 \operatorname{tg} \beta_{I1}}{1 + \varepsilon_2 \operatorname{ctg} \beta_{I2}}.$$

При переходе к идеальной жидкости $\varepsilon \to 0$, а циркуляция $G(r)$ изменяет свою величину.

2.6. Условия оптимума для гребного винта в свободной воде и за корпусом судна

В настоящем параграфе рассматриваются условия оптимума для гребного винта, работающего в различных условиях (в свободной воде и за корпусом судна). Под оптимальным гребным винтом будем понимать, как обычно, винт, обеспечивающий по-

лучение заданной полезной работы при минимальных индуктивных потерях. В свободной воде оптимальный гребной винт будет обеспечивать наивысший индуктивный КПД, а за корпусом судна — наивысший пропульсивный коэффициент комплекса корпус—движитель.

Оптимальный гребной винт в однородном потоке. Рассмотрим вначале задачу об оптимальном гребном винте в однородном потоке. Решение этой классической задачи представляет большой интерес, поскольку оно является эталоном численных методов в гидродинамике винта и дает наивысшее достижимое значение его индуктивного КПД. Кроме того, гидродинамические характеристики оптимального гребного винта широко используются при проектировочных и поверочных расчетах винтов, близких к оптимальным.

Постановке и решению задачи об оптимальном винте посвящены работы А. Бетца *, Л. Прандтля, С. Гольдштейна, Н. Н. Поляхова, А. И. Слуцкого. Как известно, эта задача может быть условно разделена на задачу о нахождении условия оптимума (теорема А. Бетца) и на задачу определения, исходя из этого условия, поля скоростей, циркуляции и других гидродинамических характеристик оптимального винта. В работах упомянутых авторов условие оптимума рассматривалось для гребного винта без учета влияния ступицы. Обобщенная теорема А. Бетца для винта в цилиндрической трубе без учета ступицы доказана В. В. Копеецким [44]. Ниже дано дальнейшее обобщение этой теоремы на случай гребного винта, работающего в цилиндрической трубе с учетом наличия ступицы. Последняя, как и ранее (см. § 2.4), приближенно учитывается введением бесконечного цилиндра радиуса, равного радиусу ступицы винта.

Будем считать гребной винт слабонагруженным, а жидкость — идеальной и несжимаемой. Полезная мощность $T_I V_A$ и потерянная энергия E_I гребного винта соответственно [10]:

$$T_I V_A = \rho V_A Z \Omega \int_{r_H}^{R} \Gamma r \, dr = \frac{\rho V_A Z \Omega}{2\pi} \int_{F_p} \int \Gamma \, dF_p; \qquad (2.138)$$

$$E_I = Q_I \Omega - T_I V_A = \frac{\rho}{2} Z \int_{r_H}^{R} \Gamma V_E w_{n\infty} \, dr, \qquad (2.139)$$

где $w_{n\infty}$ — вызванная скорость, нормальная к вихревой винтовой поверхности на бесконечности, а F_p — поверхность, ометаемая лопастями винта.

---

* Доказательство теоремы об условии оптимума проведено А. Бетцем с ошибками, не повлиявшими, правда, на конечный результат. Полное и строгое доказательство теоремы дано Н. Н. Поляховым.

Будем искать теперь такое условие для функции распределения циркуляции $\Gamma(r)$, которое для заданной полезной мощности (2.138) обеспечивало бы минимум потерянной энергии (2.139). Поставленная задача является изопериметрической задачей вариационного исчисления, необходимое условие экстремума для которой имеет вид [91]:

$$\delta E_I - \lambda\delta(T_I V_A) = 0, \tag{2.140}$$

где δ — знак вариации; λ — постоянная Лагранжа.

При постановке классической изопериметрической задачи гребного винта обычно предполагается, что искомая функция обращается на концах промежутка в ноль, т. е. имеет закрепленные концы. В частности, в задаче об оптимальном винте без ступицы в безграничной жидкости это условие действительно выполняется. Однако в случаях наличия ступицы и (или) нулевого зазора между концами лопастей и трубой [44] искомая функция распределения циркуляции имеет ненулевые значения при $\bar{r} = \bar{r}_H$ и (или) $\bar{r} = 1$, т. е. незакрепленные концы. В этом случае при решении изопериметрической задачи должно выполняться условие трансверсальности, которое в нашем случае вырождается в более простое естественное граничное условие [91]:

$$\frac{\partial}{\partial\left(\frac{d\Gamma}{dr}\right)}(\Gamma V w_{n\infty}) = 0 \text{ при } \bar{r} = \bar{r}_H \text{ и (или) } \bar{r} = 1.$$

Здесь производная берется от подынтегральной функции выражения для потерянной энергии (2.139). Проверка выполнения естественного граничного условия, записанного в таком виде, достаточно громоздка, так как $d\Gamma/dr$ входит в него сложным образом, через интеграл в выражении для $w_{n\infty}$. Поэтому с целью упрощения выкладок преобразуем формулу для потерянной энергии (2.139) к виду, содержащему в подынтегральной функции только потенциал вызванных скоростей Φ. Тогда из-за равенства нулю производной потенциала Φ по $d\Gamma/dr$ естественное граничное условие будет выполнено.

С этой целью преобразуем выражение для потерянной энергии (2.139), воспользовавшись формулой Грина для потенциала вызванной скорости на бесконечности Φ:

$$\iiint\limits_{\tau} (\nabla\Phi)^2\, d\tau = -\iiint\limits_{\tau} \Phi\,\Delta\Phi\, d\tau + \iint\limits_{\sigma} \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\, d\sigma, \tag{2.141}$$

где τ — объем, ограниченный поверхностью σ, состоящей из поверхности трубы S_1, ступицы S_H, Z вихревых винтовых пелен σ_S и торцовых поверхностей σ_1 и σ_2, ограничивающих вырезанный объем (рис. 2.10). Расстояние между торцами равно H/Z (H — шаг винтовой вихревой поверхности), т. е. равно пути, который должна пройти каждая лопасть, для того чтобы занять положение соседней.

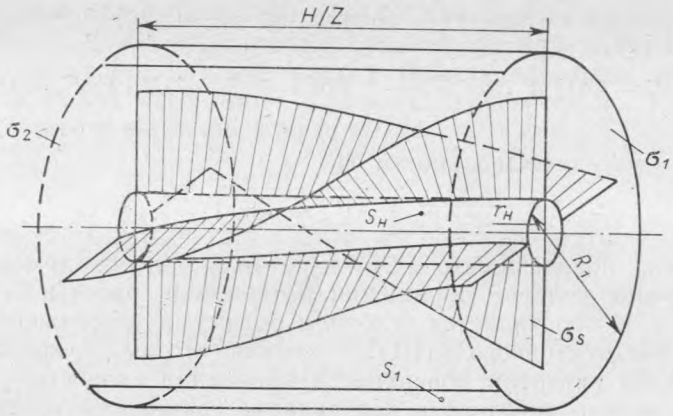


Рис. 2.10. К доказательству теоремы А. Бетца.

Учитывая, что в рассматриваемом объеме $\Delta\Phi = 0$, и используя условия непротекания и симметрии, можно получить после преобразований

$$\int\limits_{\tau}\int\int (\nabla\Phi)^2\, d\tau = \int\limits_{\sigma}\int\limits_{S} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{2\pi}{\Omega}\int\limits_{r_H}^{R} \Gamma V_E w_{n\infty}\, dr. \qquad (2.142)$$

С учетом (2.142) получим для потерянной энергии выражение

$$E_I = \frac{\rho Z\Omega}{4\pi}\int\limits_{\tau}\int\int (\nabla\Phi)^2\, d\tau. \qquad (2.143)$$

Формула (2.143) совпадает по форме с аналогичными выражениями для винта без ступицы [10] и в трубе [44]. Это обусловлено тем, что на поверхностях трубы и ступицы выполняется условие непротекания.

Составим вариации δT_I и δE_I:

$$\delta T_I = \frac{Z\rho\Omega}{2\pi}\int\limits_{F_p}\int \delta\Gamma\, dF_p; \qquad (2.144)$$

$$\delta E_I = \frac{Z\rho\Omega}{2\pi}\int\limits_{\tau}\int\int (\nabla\Phi)\,(\nabla\delta\Phi)\, d\tau. \qquad (2.145)$$

Преобразуя интеграл в (2.145) по формуле Грина и переходя к интегрированию по поверхности, ометаемой лопастями, получим для вариации

$$\delta E_I = \frac{Z\rho\Omega}{2\pi}\int\limits_{F_p}\int \delta\Gamma \frac{w_{n\infty}}{\cos\beta}\, dF_p. \qquad (2.146)$$

Подставим выражения (2.144) и (2.146) в условие экстремума (2.140)

$$\delta E_I - \lambda\delta(T_I V_A) = \frac{Z\rho\Omega}{2\pi}\int\limits_{F_p}\int \delta\Gamma\left(\frac{w_{n\infty}}{\cos\beta} - \lambda V_A\right) dF_p = 0,$$

откуда в силу произвольности $\delta\Gamma$:

$$\frac{w_{n\infty}}{\cos\beta} = \lambda V_A = \text{const}. \qquad (2.147)$$

Можно показать, что (2.147) не только необходимое, но и достаточное условие обращения потерянной работы E_I в минимум, т. е. оно является условием оптимума (достижения наивысшего индуктивного КПД). Учитывая, что $w_{n\infty}$ — нормальная к вихревой винтовой поверхности вызванная скорость, условие (2.147) можно трактовать как задание граничного условия непротекания через эту поверхность при ее поступательном перемещении со скоростью $-w^*$, где $w^* = w_{n\infty}/\cos\beta$. Таким образом, условие оптимума можно сформулировать следующим образом: поле скоростей на бесконечности за оптимальным гребным винтом совпадает с полем скоростей, вызванным смещением затвердевших винтовых вихревых пелен со скоростью w^* в сторону, противоположную движению винта. Таким образом, условие оптимума для винта в цилиндрической трубе с учетом ступицы формулируется так же, как и в известной теореме А. Бетца для изолированного винта без учета ступицы [10].

Следуя Л. Прандтлю, можно распространить условие оптимума (2.147) на случай умеренно нагруженного гребного винта. Для этого следует считать, что шаговый угол винтовых вихрей пелены равен углу индуктивной поступи, вычисленному с учетом вызванных скоростей в диске гребного винта. В этом случае скорость смещения

$$w^* = \frac{w_{n\infty}}{\cos\beta_I} = \text{const}. \qquad (2.148)$$

План скоростей оптимального умеренно нагруженного гребного винта приведен на рис. 2.11.

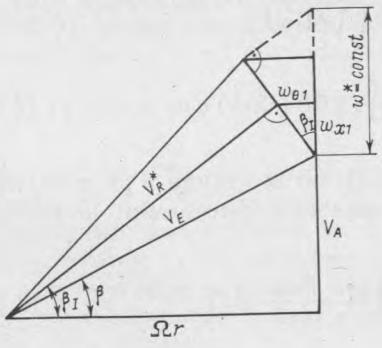


Рис. 2.11. План скоростей оптимального умеренно нагруженного гребного винта.

Можно показать, что у оптимального гребного винта индуктивный КПД (или, поскольку предполагается, что жидкость идеальна, просто КПД) элемента лопасти постоянен вдоль радиуса и равен КПД винта в целом. Действительно, КПД элемента лопасти вычисляют по формуле

$$\eta_{Ir} = \frac{dT_I V_A}{dQ_I \Omega} = \frac{V_A}{V_A + \frac{w_{x\infty}}{2}} \frac{\Omega r - \frac{w_{\theta\infty}}{2}}{\Omega r} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_I}. \qquad (2.149)$$

Учитывая свойство плана скоростей оптимального винта (см. рис. 2.11) и преобразуя выражение (2.149), получим искомый результат

$$\eta_{Ir} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_I} = \frac{V_A}{V_A + \frac{w^*}{2}} = \eta_I = \text{const}. \qquad (2.150)$$

Условие оптимума (2.147) является обобщением известного условия Мунка [3], справедливого для оптимального (имеющего минимальное индуктивное сопротивление) крыла конечного размаха, на случай винта. Оба эти условия являются кинематическими, так как они указывают лишь на свойства поля скоростей оптимального винта (крыла), но ничего не говорят о распределении циркуляции или других гидродинамических характеристиках. Величина скорости смещения пелен w^*, фигурирующая в теореме, также заранее неизвестна, ясно лишь, что она зависит от режима работы и коэффициента нагрузки гребного винта.

А. Ш. Ачкинадзе и В. М. Дубицким показано, что если на части длины лопасти величина w^* зависит от радиуса, то для обеспечения максимума индуктивного КПД необходимо на остальной части лопасти величину w^* сохранять постоянной. Таким образом, получено обобщение теоремы Бетца на случай, когда условие оптимума выполняется лишь на части лопасти. Использование этого обобщения при проектировании гребного винта подробно описано в § 3.2.

Следует обратить внимание на то, что теорема А. Бетца сформулирована для поля скоростей далеко за винтом (теоретически на бесконечности). Переход к лопастям гребного винта может быть осуществлен лишь в схеме несущей линии с использованием теоремы Фруда—Финстервальдера об удвоении скоростей при переходе от диска винта на бесконечность. По этой причине все гидродинамические характеристики, связанные с полем скоростей оптимального гребного винта, обычно рассматривают в рамках теории несущей линии. В то же время представляется очевидным, что циркуляция, найденная из условия

оптимума, не зависит от распределения вихрей в пределах лопастей, и поэтому может быть использована в расчетах по схеме несущей поверхности.

Метод определения гидродинамических характеристик оптимального гребного винта изложен в § 3.2, характеристики приведены в прилож. 1.

Оптимальный движительный комплекс корпус—движитель. Одной из важнейших проблем, возникающих при проектировании гребных винтов, приспособленных к попутному корпусу судна потоку, является проблема обеспечения наивысшего пропульсивного коэффициента движительного комплекса. Если сравнивать эту задачу с задачей об оптимальном изолированном гребном винте, рассмотренной выше, то здесь новым элементом является взаимодействие винта с корпусом судна и гидродинамический след, энергию которого можно использовать.

Наивысший пропульсивный коэффициент комплекса корпус—движитель может быть достигнут при выполнении условия оптимума, накладываемого на распределение гидродинамической нагрузки вдоль радиуса гребного винта. Вид этого распределения зависит от поля скоростей жидкости около корпуса в районе расположения движителя. Оценки показывают, что использование условия оптимума для системы корпус—движитель при проектировании гребного винта приводит к выигрышу в величине пропульсивного коэффициента порядка 2—3 % [38].

Исследованию взаимодействия винта с корпусом и получению условия оптимума для движительного комплекса посвящены работы В. М. Лаврентьева, А. М. Басина, В. М. Ивченко, С. Д. Стоянова, Ван-Манена, Балхана и других авторов. Ввиду большой сложности, задача об оптимальном комплексе корпус—движитель не решена в общем виде до сих пор. Как правило, вводятся упрощающие предположения о малости нагрузки гребного винта, бесконечном числе его лопастей, осесимметричности следа корпуса судна. Для нахождения условия оптимума рассматривается течение на бесконечном удалении вниз по потоку за комплексом.

В случае, если вязкость жидкости не учитывается, и следовательно, вязкостный след корпуса отсутствует, условие оптимума оказывается таким же, как у изолированного гребного винта:

$$\frac{w_{n\infty}}{\cos\beta} = \text{const} \quad \text{или} \quad \eta_{Dr} = \text{const}, \tag{2.151}$$

где $\eta_{Dr} = dT_E/dQ\Omega$ — пропульсивный коэффициент элемента движителя на радиусе r; V — скорость судна. Это следствие того, что на бесконечном удалении вниз по потоку потенциальное поле скоростей, вызванное корпусом судна, отсутствует. Влияние поля скоростей корпуса проявляется лишь в диске гребного винта.

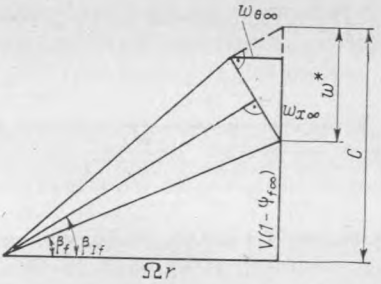


Рис. 2.12. План скоростей на бесконечном удалении за оптимальным комплексом корпус—движитель в вязкой жидкости.

Условие оптимума для комплекса корпус—движитель в вязкой жидкости было получено В. М. Ивченко [38]. При этом им были введены дополнительные допущения о постоянстве площади поперечного сечения следа корпуса вниз по потоку и о независимости характеристик взаимодействия винта с корпусом от вариации распределения нагрузки по диску движителя.

Условие оптимума, при котором потребляемая мощность P_D достигает своего минимума при неизменной полезной работе $T_E V$, находится так же, как и для изолированного гребного винта, в результате решения изопериметрической задачи вариационного исчисления. Это условие для осредненных по окружности скоростей имеет вид

$$V_{f\infty} + w_{x\infty} + w_{\theta\infty} \operatorname{tg} \beta_{If} = \lambda V = C = \text{const}, \qquad (2.152)$$

где β_{If} — угол индуктивной поступи на бесконечности (рис. 2.12); $w_{x\infty}$, $w_{\theta\infty}$ — средние по окружности осевая и окружная скорости, вызванные гребным винтом на бесконечности; $V_{f\infty} = V(1-\psi_{f\infty})$; $\psi_{f\infty}(r)$ — коэффициент попутного потока трения на бесконечности, характеризующий потерю полного напора в потоке жидкости, обтекающей корпус [10]:

$$1 - \psi_{f\infty} = \sqrt{1 - \frac{2\Delta p_g}{\rho V^2}} = \sqrt{(1-\psi_f)^2 + 2\psi_p\psi_f}, \qquad (2.153)$$

где Δp_g — потеря полного напора; ψ_f и ψ_p — вязкостная и потенциальная составляющая номинального попутного потока в диске гребного винта.

Величина

$$w_{x\infty} + w_{\theta\infty} \operatorname{tg} \beta_{If} = w^* \qquad (2.154)$$

оказывается в отличие от оптимального изолированного гребного винта переменной вдоль радиуса и зависящей от распределения коэффициента попутного потока $\psi_{f\infty}(r)$.

Пропульсивный коэффициент элемента движителя на радиусе r

$$\eta_{Dr} = \frac{V}{V_{f\infty} + \frac{w_{x\infty}}{2}} \frac{\Omega r - \frac{w_{\theta\infty}}{2}}{\Omega r} = \frac{1}{1 - \frac{\psi_{f\infty}}{2} + \text{const}_1} \qquad (2.155)$$

изменяется вдоль радиуса.

Подобно тому, как условие А. Бетца для оптимального изолированного гребного винта — аналог условия Мунка для крыла конечного размаха минимального индуктивного сопротивления, так и условие (2.152) — аналог условия постоянства угла индуктивного скоса в теории крыла в неоднородном по размаху потоке [129]. При отсутствии попутного потока трения ($\psi_{f\infty} = 0$) из условия (2.152) можно легко получить условие оптимума для изолированного гребного винта [формула (2.148)] или для оптимального комплекса корпус—движитель в идеальной жидкости.

Условие оптимума (2.152) получено для средних по окружности вызванных скоростей; предполагается тем не менее, что оно может быть использовано и при проектировании конечнолопастного гребного винта (см. § 3.2).

Глава 3

ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ ГРЕБНОГО ВИНТА ПО ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ

Развитие современного судостроения характеризуется достижением больших скоростей судов и перерабатываемой гребными винтами мощности. При этом предъявляются жесткие требования к экономичности флота (затраты на топливо), уровню шумов и вибрации, создаваемых движителями, и их эксплуатационной надежности. Все это в сочетании с реальными условиями работы гребных винтов в неравномерном попутном потоке корпуса обусловливает высокий уровень требований, предъявляемых к конструкции движителей. Проектировщик должен обеспечить:

— высокий пропульсивный коэффициент;

— статическую и циклическую прочность лопастей;

— отдаление кавитации в область бóльших скоростей;

— низкий уровень возмущающих нагрузок, передаваемых конструкциям корпуса через валопровод и воду.

Проектированием гребного винта называется совокупность работ, в результате которых определяется геометрия лопастей гребного винта, подлежащего изготовлению и установке на судно.

Проектирование гребного винта осуществляется в несколько этапов. На первом этапе производят расчеты ходкости судна и определение основных элементов гребного винта при помощи диаграмм систематических испытаний моделей. При этом некоторые элементы гребного винта назначают предварительно исходя из общих конструктивных соображений, а затем уточняют в ходе проектирования. Так, например, число лопастей Z первоначально задают с учетом опыта проектирования и данных о резонансных частотах колебаний гребного вала и корпусных конструкций, а затем уточняют на основании расчета периодических сил и давлений. Величина дискового отношения гребного винта A_E/A_0 может быть в первом приближении определена по формуле, полученной из условия отсутствия развитой кавитации:

$$A_E/A_0 = \frac{(1{,}5 + 0{,}35Z)\,T}{(p_0 - p_v)\,D^2} + \frac{0{,}2}{Z_P}, \qquad (3.1)$$

где T — упор винта в режиме наибольшей нагрузки; p_0, p_v — соответственно давление на оси гребного винта и насыщенных паров жидкости; Z_P — число винтов на судне.

По найденным таким образом Z и A_E/A_0 подбирают диаграмму серийных испытаний и производят расчеты ходкости судна при заданных сопротивлении корпуса, коэффициентах взаимодействия и данных об энергетической установке. В результате этих расчетов определяют диаметр гребного винта D, частоту его вращения n, достижимую скорость судна V_S и шаговое отношение гребного винта. Необходимо отметить, что расчет ходкости должен удовлетворять условиям полной загрузки судна (полный груз) и номинальной мощности двигателя. Для исключения перегрузки двигателя в процессе эксплуатации судна принято расчетную частоту вращения гребного винта задавать несколько большей ее номинального значения, осуществляя так называемое предварительное «облегчение» гребного винта.

Для судов, имеющих несколько режимов эксплуатации (буксировка, траление и т. п.), расчетный режим выбирают путем компромиссного решения. При этом прочные размеры лопастей и дисковое отношение находят, как правило, по режиму наибольшей нагрузки гребного винта.

Гребной винт, элементы которого определены по диаграммам систематических испытаний, может обеспечить судну удовлетворительные пропульсивные качества, но в остальном перечисленным требованиям, как правило, не отвечает. С тем чтобы наиболее полно выполнить предъявляемые к винту требования, необходимо после проведения первого этапа расчетов с использо-

ванием диаграмм перейти ко второму этапу и произвести проектировочный расчет гребного винта по вихревой теории с одновременным удовлетворением требований обеспечения прочности и отдаления кавитации. Естественно, что такой расчет следует производить с учетом неоднородного попутного потока. Следует принять во внимание, что в настоящее время при выполнении проектировочного расчета по вихревой теории (т. е. при решении обратной задачи) требования обеспечения прочности и отдаления кавитации удовлетворяются не полностью. Дело в том, что расчет по вихревой теории производится для условий работы в осредненном по окружности (но не по радиусу) поле скоростей, а совместное удовлетворение требований прочности и отдаления кавитации — по известному методу В. М. Лаврентьева. В этом методе используются соотношения балочной теории прочности и данные о коэффициентах давления на профилях в расчетном режиме безударного входа. При этом учет требований циклической прочности и отдаления кавитации в неравномерном по окружности попутном потоке производят приближенно, с использованием расчетных коэффициентов запаса.

По этой причине после завершения проектировочных расчетов второго этапа, выполненных по вихревой теории, возникает необходимость в производстве контрольных поверочных расчетов (т. е. решении прямой задачи) и определении действительных коэффициентов запаса по прочности и кавитации. Кроме того, можно произвести оценку величин периодических давлений и сил, возбуждаемых движителем, а также его модельные испытания. Эти контрольные расчеты и испытания выполняют на третьем этапе проектирования. Если в ходе работ на третьем этапе окажется, что какое-либо из требований к проектируемому гребному винту не удовлетворено, производят соответствующую коррекцию исходной информации и расчеты заново.

Таким образом, проектирование гребного винта и удовлетворение предъявляемым к нему требованиям осуществляют путем последовательного решения обратной и прямой задач.

В настоящей главе рассмотрен относящийся ко второму этапу проектирования расчет гребного винта по вихревой теории. Расчеты ходкости, выполняемые на первом этапе, подробно описаны в книге [10], а поверочные расчеты третьего этапа — ниже в гл. 4 и 5.

3.1. Исходная информация и общая последовательность проектировочного расчета гребного винта

Исходной информацией для проведения проектировочного расчета гребного винта служат результаты расчетов ходкости и основных элементов движителя по диаграммам серийных ис-

пытаний моделей. При этом проектирование гребного винта по вихревой теории осуществляют, исходя из условий обеспечения заданного упора или потребления заданной мощности. На практике предпочтение отдают первому варианту, так как расчет коэффициента момента характеризуется большей погрешностью вследствие приближенности учета вязкости. Рассмотрим существующие варианты задания на проектирование гребного винта.

Проектирование гребного винта из условия обеспечения наивысшего пропульсивного коэффициена с одновременным удовлетворением условиям прочности и отдаления кавитации. Исходной информацией для проектирования гребного винта в этом случае служат следующие величины:

— основные элементы гребного винта (D, d, Z) и заглубление его оси h_0;

— скорость судна V_S и частота вращения вала n;

— упор гребного винта T;

— данные по распределению среднего по окружности попутного потока вдоль радиуса;

— временное сопротивление материала лопасти и категория ледовых усилений по Правилам Регистра СССР.

Проектировочный расчет можно условно разделить на два этапа: *1* — расчет по теории несущей линии, *2* — расчет по теории несущей поверхности. Предварительный расчет по теории несущей линии выполняют с целью сокращения объема требуемых вычислений. На его первом этапе находят распределение циркуляции и определяют угол индуктивной поступи вдоль лопасти гребного винта, обеспечивающие наивысший пропульсивный коэффициент с учетом условий эксплуатации. Затем находят ширину и максимальную толщину сечений лопастей исходя из условий одновременного удовлетворения требований прочности и отдаления кавитации. Далее определяют тип распределения гидродинамической нагрузки вдоль хорд сечений и переходят к расчетам второго этапа.

В ходе расчета по теории несущей поверхности определяют распределения шагового отношения и относительной кривизны сечений вдоль радиуса, обеспечивающие требуемые распределения гидродинамических характеристик по всей поверхности лопасти.

В ряде случаев законы распределения толщины и ширины сечений лопастей выбирают заранее исходя из каких-либо практических соображений. Тогда сразу же после завершения расчета по теории несущей линии осуществляют переход к расчетам по теории несущей поверхности.

Проектирование гребного винта с произвольным распределением циркуляции вдоль радиуса. В этом варианте задания исходной информацией, помимо перечисленных в предыдущем пункте величин, служит нормированное распределение циркуляции вдоль радиуса $G^*(\bar{r}) = G(\bar{r})/G(\bar{r} = 0{,}6)$.

В этом случае процедура проектирования отличается от описанной выше только тем, что на первом этапе при расчете по схеме несущей линии определяют величину G ($\bar{r} = 0{,}6$), обеспечивающую заданное значение упора гребного винта. Попутно находят распределение угла индуктивной поступи вдоль радиуса лопасти.

3.2. Расчет гребного винта по теории несущей линии при различных условиях оптимума

Рассмотрим методы определения гидродинамических характеристик гребного винта при различных условиях оптимума (в § 2.6 эти условия были сформулированы для винта в однородном потоке и за корпусом судна).

Расчет гребного винта при заданных режиме его работы и поле скоростей попутного потока будем производить в следующей последовательности. Вначале из условия обеспечения заданного упора (или тяги) винта определим в первом приближении скорость смещения пелены w^* далеко за винтом в условиях оптимума (см. § 2.6) и тем самым план скоростей оптимального винта (или комплекса) и вызванные скорости $w_{x\infty}$, $w_{\theta\infty}$. Далее путем решения интегродифференциального уравнения [71] теории несущей линии [см. формулу (2.73)]:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{r_H}^{R}\frac{d\Gamma}{dr'}\frac{i_t'}{r'-r}\,dr' - \frac{Z\Gamma(r_H)}{4\pi r} = \frac{w_{\theta\infty}}{2} \tag{3.2}$$

найдем распределение циркуляции вдоль лопасти *. Затем по формуле (2.131) определим упор гребного винта, величину которого сравним с заданной. При достаточной близости этих величин расчет считают завершенным; в противном случае уточняют величину w^* и вычисления повторяют заново.

Рассмотрим подробнее основные этапы расчета. В безразмерном виде уравнение (3.2) имеет вид

$$\frac{1}{1-\bar{r}_H}\int_{-1}^{+1}\frac{dG}{dx'}\frac{i_t'}{x'-x}\,dx' - \frac{ZG(-1)}{2\bar{r}} = \frac{w_{\theta\infty}(\bar{r})}{2V}, \tag{3.3}$$

где $G = \Gamma/(\pi DV)$; $x = (2\bar{r} - 1 - \bar{r}_H)/(1-\bar{r}_H)$.

Представим производную циркуляции в виде ряда (2.101) по полиномам Якоби

$$\frac{dG}{dx} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sum_{n=0}^{M} a_n P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{3.4}$$

---

* Иногда этот метод называют методом факторов индукции.

Выбор такого класса функций для dG/dx обусловлен необходимостью удовлетворения граничного условия непротекания через поверхность ступицы и структурой течения вблизи концов лопастей оптимального или близкого к нему гребного винта. Подстановка выражения (3.4) в интегродифференциальное уравнение (3.3) дает систему $(M+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n $(n = 0,1, \ldots, M)$:

$$\sum_{n=0}^{M} a_n S_{in} + \frac{\pi Z a_0}{2\bar{r}_i} = \frac{w_{\theta\infty}(\bar{r}_i)}{2V}, \tag{3.5}$$

где

$$S_{in} = \frac{1}{1-\bar{r}_H} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+x'}{1-x'}}\, P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x') \frac{i_t' \, dx'}{x' - x_i};$$

$\bar{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, M+1)$ — значения относительных радиусов для которых решается уравнение.

Для вычисления сингулярного интеграла (3.5) воспользуемся квадратурной формулой А. А. Корнейчука [43], записанной для весовой функции $\sqrt{\frac{1+x'}{1-x'}}$ [73] (см. прилож. 4):

$$S_{in} \approx \frac{1}{1-\bar{r}_H} \frac{4\pi}{2N+1} \sum_{k=1}^{N} \cos^2 \frac{\theta_k}{2} P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x_k) \frac{i_t'(\bar{r}_i, \bar{r}_k)}{x_k - x_i}, \tag{3.6}$$

где $x_k = \cos\theta_k = \cos\dfrac{\pi(2k-1)}{2N+1}$, $k = 1, 2, \ldots, N$ — узлы квадратурной формулы; $x_i = \cos\dfrac{2\pi i}{2N+1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ — расчетные точки. Величины $\bar{r}_k$ и $\bar{r}_i$ соответствуют x_k и x_i. Число узлов квадратурной формулы N связано с числом уравнений $(M+1)$ соотношением $N \geqslant M+1$.

Решение системы (3.5) можно осуществить одним из известных численных методов линейной алгебры. После нахождения коэффициентов a_n циркуляцию вычисляют по формуле

$$G(x) = -a_0\left(\arccos x + \sqrt{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(1+x)^{3/2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{M} \frac{a_n}{n} P_{n-1}^{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}(x). \tag{3.7}$$

Анализ и сопоставление распределений циркуляции, полученных при различных значениях числа уравнений системы (3.5), с точным аналитическим решением [121] для оптимального винта в однородном потоке показали, что приемлемая точность численного решения достигается при $M = 5 \div 7$.

Как указывалось выше, вызванную скорость $w_{\theta\infty}$, составляющую правую часть уравнения (3.3), считают известной из плана скоростей оптимального винта (или комплекса). Поскольку формулировка условия оптимума зависит от условий работы винта, обратимся к частным случаям.

Оптимальный винт в однородном потоке. Рассмотрим гребной винт, у которого условие оптимума выполняется на всей длине лопасти, т. е. винт, обладающий наивысшим индуктивным КПД. Из плана скоростей оптимального умеренно нагруженного гребного винта (см. рис. 2.11) можно получить следующее выражение для окружной вызванной скорости:

$$\frac{w_{\theta\infty}}{V_A} = \frac{w^*}{V_A} \cos\beta_I \sin\beta_I = 2\,\frac{\lambda_I - \lambda_t}{\lambda_t}\,\frac{\bar{r}\lambda_I}{\bar{r}^2 + \lambda_I^2}, \qquad (3.8)$$

где

$$\frac{w^*}{V_A} = 2\,\frac{\Omega r}{V_A}\,(\operatorname{tg}\beta_I - \operatorname{tg}\beta) = 2\left(\frac{\operatorname{tg}\beta_I}{\operatorname{tg}\beta} - 1\right) = 2\left(\frac{\lambda_I}{\lambda_t} - 1\right);$$

$$\operatorname{tg}\beta_I = \frac{V_A + \frac{w_{x\infty}}{2}}{\Omega r - \frac{w_{\theta\infty}}{2}} = \frac{\lambda_I}{\bar{r}};\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{V_A}{\Omega r} = \frac{\lambda_t}{\bar{r}};$$

$$\cos\beta_I = \frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_I^2}};\quad \sin\beta_I = \frac{\lambda_I}{\sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_I^2}}.$$

Здесь и в дальнейшем принято, что скорость однородного потока, набегающего на винт, равна V_A.

После подстановки выражения (3.8) в правую часть уравнения (3.3) и нахождения описанным выше методом коэффициентов a_n определяют гидродинамические характеристики оптимальных по А. Бетцу винтов. В частности, можно найти поправку на конечное число лопастей

$$\varkappa = \frac{Z\Gamma}{4\pi r w_{\theta 1}} = \frac{ZG_A}{2\bar{r} w_{\theta 1}/V_A}, \qquad (3.9)$$

равную отношению циркуляции винта с конечным числом лопастей к циркуляции бесконечнолопастного винта при одной и той же величине вызванной скорости на несущей линии.

Как известно, распределение циркуляции и поправку $\varkappa$ для оптимального винта можно определить также иным путем. Для этого необходимо решить краевую задачу теории потенциала, а именно: найти потенциал скоростей течения, вызванного поступательным движением твердых винтовых бесконечных поверхностей со скоростью w^* при заданных граничных условиях на бесконечном удалении от оси винта и на винтовой поверхности. При этом циркуляцию представляют как скачок потенци-

ала при переходе от одной стороны винтовой поверхности к другой.

Строгое решение упомянутой краевой задачи методом разделения переменных Фурье получил С. Гольдштейн в 1929 г. [44, 120]. Ранее Л. Прандтлем было проведено приближенное решение, основанное на замене течения около краев винтовой поверхности течением вблизи краев бесконечного ряда плоских пластин. Оба эти решения получены без учета влияния ступицы. Аналогичная задача об оптимальном гребном винте в цилиндрической трубе решена В. В. Копеецким [40] и А. Тачминджи [156]. В настоящее время известны два противоречащих друг другу решения задачи определения циркуляции оптимального гребного винта, учитывающих ступицу. Первое из них, опубликованное Мак-Кормиком в 1955 г., дает значение циркуляции на ступице, не равное нулю, но с равным нулю градиентом [138]. Второе решение, полученное в 1956 г. А. Тачминджи, дает нулевое значение циркуляции на ступице [154, 155]. Работы А. Тачминджи получили широкое распространение, поскольку содержали подробные таблицы и графики, охватывающие широкий диапазон параметров.

Однако анализ решения А. Тачминджи [154] показывает, что оно является неверным. Ошибочность этого решения очевидна при рассмотрении поведения потенциала и его производных на бесконечном удалении от оси винта и на поверхности ступицы. Дело в том, что принятие условия о равенстве нулю циркуляции на ступице привело к необходимости введения в выражение для потенциала скорости логарифмического члена вида $C \ln r$, где C — константа, определяемая из указанного условия. В решении [138] этого члена нет, поскольку условие о равенстве нулю циркуляции в него не вводилось. Более того, анализ результатов расчетов [155] показал, что производная циркуляции вдоль радиуса не обращается в нуль на ступице и тем самым граничное условие на ней не удовлетворено.

На рис. 3.1 сопоставлены рассчитанная величина поправки на конечное число лопастей и решения С. Гольдштейна [120]

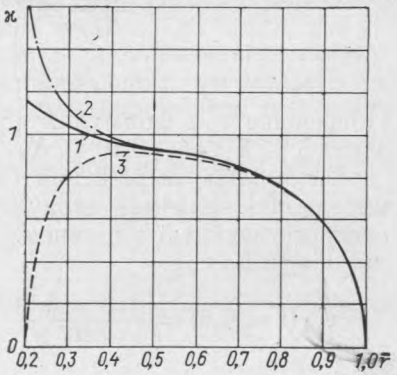


Рис. 3.1. Изменение поправки на конечное число лопастей вдоль радиуса по различным данным ($Z=4$, $1/\lambda_I = 2{,}66$, $\overline{R}_1=\infty$).

1 — по методу С. Гольдштейна ($\overline{r}_H=0$); *2* — по изложенному методу ($\overline{r}_H=0{,}2$); *3* — по способу А. Тачминджи ($\overline{r}_H=0{,}2$).

и А. Тачминджи [154]. Ясно видна существенная разница между результатами, полученными по изложенному методу и данным А. Тачминджи в области вблизи ступицы, в то же время с данными В. Мак-Кормика [138] они практически совпадают. Расчеты показали, что влияние ступицы на распределение оптимальной циркуляции тем больше, чем больше относительный радиус ступицы $\bar{r}_H$ и меньше число лопастей. При $\bar{r}_H \to 0$ $\varkappa(\bar{r}_H)$ ведет себя как $1/\sqrt{\bar{r}_H}$. Для обычных значений относительного радиуса ступицы ($0{,}18 \leqslant \bar{r}_H \leqslant 0{,}3$) ее влияние на распределение циркуляции заметно лишь до относительных радиусов $\bar{r} = 0{,}5 \div 0{,}6$. Ближе к концу лопасти полученные поправки практически совпадают с известными поправками С. Гольдштейна.

В прилож. 1 приведены графики поправок $\varkappa$ для $\bar{r}_H = 0{,}2$ ($Z = 3, 4, 5, 6$) и $\bar{r}_H = 0{,}3$ ($Z = 3, 4, 5$) при $\bar{R}_1 = \infty$ (винт с учетом ступицы в безграничной жидкости). При значениях относительных радиусов $\bar{r} \geqslant \bar{r}_H + 0{,}3$ величины $\varkappa$ можно определять с помощью универсальной диаграммы, справедливой для любых $Z \geqslant 2$, $\lambda_I \leqslant 1$ при $\bar{R}_1 = \infty$ (рис. П. 1.8).

Гидродинамическую характеристику B вычисляют по формуле

$$B(\bar{r}) = C_L \frac{c}{D} = \frac{2\Gamma}{V_R^* D} = \frac{2\pi G_A(\bar{r})}{V_R^*/V_A}. \qquad (3.10)$$

Результаты систематических расчетов величины $B(\bar{r})$ приведены в прилож. 1. Анализ расчетов показал, что характеристика B достигает своего максимального значения на ступице либо вблизи нее, а величина ZB/K_{TI} практически зависит только от относительных радиусов $\bar{r}$ и $\bar{r}_H$. На внешних радиусах ($\bar{r} \geqslant \bar{r}_H + 0{,}3$) эта величина слабо зависит и от $\bar{r}_H$, что позволяет в тех случаях, когда можно ограничиться ее приближенным значением, принимать

$$\frac{ZB}{K_{TI}} \simeq \begin{Bmatrix} 1{,}93, & \bar{r} = 0{,}5 \\ 1{,}70, & \bar{r} = 0{,}6 \\ 1{,}47, & \bar{r} = 0{,}7 \\ 1{,}23, & \bar{r} = 0{,}8 \end{Bmatrix}. \qquad (3.11)$$

Погрешность в формулах (3.11) не превышает 10 % в диапазоне $3 \leqslant Z \leqslant 6$; $0{,}10 \leqslant K_{TI} \leqslant 0{,}3$; $0 \leqslant \bar{r}_H \leqslant 0{,}3$.

С помощью выражений (3.11) можно в первом приближении определить величину циркуляции G_A на $\bar{r} = 0{,}6$, ориентировочно соответствующую заданному коэффициенту упора в идеальной жидкости K_{TI}:

$$G_A(\bar{r} = 0{,}6) = \frac{\Gamma(\bar{r} = 0{,}6)}{\pi D V_A} \simeq 0{,}27 \frac{K_{TI}}{Z} \sqrt{1 + \frac{3{,}55}{J^2}}. \qquad (3.12)$$

Суммарные гидродинамические характеристики оптимальных гребных винтов приведены в диаграммах типа диаграмм В. М. Лаврентьева на рис. П.1.4. Эти диаграммы позволяют определить при известных K_{TI} и λ_t величину индуктивной поступи λ_I.

В случае если известна величина коэффициента упора гребного винта в вязкой жидкости K_T, под величиной K_{TI} на рис. П.1.3—П.1.4 и в формулах (3.11) и (3.12) следует понимать значение

$$K_{T0} = \frac{K_T}{1 - (\varepsilon \operatorname{tg} \beta_I)_{\bar{r}_1}}, \tag{3.13}$$

где коэффициент обратного качества ε и тангенс угла индуктивной поступи $\operatorname{tg} \beta_I$ приняты для радиуса $\bar{r}_1 = 0{,}6 \div 0{,}8$.

Оптимальный винт в однородном потоке, удовлетворяющий условию оптимума на части лопасти. На практике могут встретиться случаи, когда на части лопасти (обычно периферийной) распределение гидродинамической нагрузки полагают отличным от оптимального, найденного из условия А. Бетца *. Тогда, в соответствии с результатом, полученным Ачкинадзе и Дубицким (см. § 2.6), для достижения наивысшего (с учетом указанного ограничения) индуктивного КПД необходимо, чтобы на остальной части лопасти величина w^* (или величина $C = V_A + w^*$) оставалась постоянной. Естественно, что при этом индуктивный КПД оказывается меньше величины, соответствующей оптимальному по А. Бетцу винту, т. е. винту, у которого условие оптимума выполняется на всей лопасти.

Для оценки величины этого уменьшения были произведены расчеты гидродинамических характеристик гребного винта при следующей зависимости величины C от радиуса

$$\bar{C} = \frac{C}{\Omega r} = \begin{cases} \bar{C}_0, & \bar{r}_H \leqslant \bar{r} \leqslant \bar{r}_0; \\ \bar{C}_0 \left[1 - (1 - \bar{C}_R) \left(\dfrac{\bar{r} - \bar{r}_0}{1 - \bar{r}_0} \right)^m \right], & \bar{r}_0 < \bar{r} \leqslant 1, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $\bar{C}_0$ — величина, постоянная в промежутке между ступицей и некоторым радиусом $\bar{r}_0$; $\bar{C}_R = \bar{C}(\bar{r} = 1)/\bar{C}_0$ — величина, характеризующая уменьшение $\bar{C}(\bar{r})$ к концу лопасти; m — параметр (рекомендуется принимать $\bar{r}_0 = 0{,}6$; $m = 3$).

Величина $\bar{C}_R$ характеризует отличие распределения циркуляции около концов лопастей от оптимальной; чем меньше $\bar{C}_R$, тем меньше индуктивный КПД. Следует учесть, что при изменении величины $\bar{C}$ по формуле (3.14) характер поведения функции распределения циркуляции около конца лопасти остается таким же, как у оптимального винта, т. е. $\frac{d\Gamma}{dr} \sim 0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \bar{r}}}\right)$ при $\bar{r} \to 1$.

---

* Случай, когда при проектировании задается распределение циркуляции вдоль радиуса, рассмотрен в § 3.3.

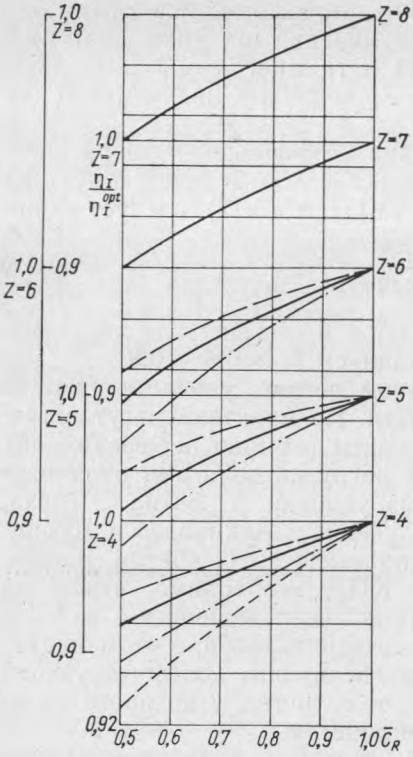


Рис. 3.2. Зависимость относительного уменьшения индуктивного КПД гребного винта.

— — — $C_{TI}=0{,}5$; ——— $C_{TI}=1$; –·–·– $C_{TI}=2$; – – – – $C_{TI}=3$.

На рис. 3.2 показана зависимость относительного снижения индуктивного КПД гребного винта η_I/η_I^{opt}, вычисленного по формуле (2.137) от числа лопастей Z, коэффициента нагрузки C_{TI} и величины $\bar{C}_R$, характеризующей разгрузку концов лопастей.

Следует отметить, что величина реального уменьшения КПД гребного винта несколько меньше величин, приведенных на рис. 3.6, поскольку снижение циркуляции сопровождается, как правило, уменьшением ширин сечений, и следовательно, снижением коэффициента обратного качества ε и некоторым ростом конструктивного КПД гребного винта [см. формулу (2.137)].

Оптимальный движительный комплекс корпус—винт. Из плана скоростей далеко за оптимальным комплексом корпус—винт можно получить (см. § 2.6 и [38]):

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_{\theta\infty}}{V}&=\frac{w^*}{V}\sin\beta_{If}\cos\beta_{If};\\ \frac{w_{x\infty}}{V}&=\frac{w^*}{V}\cos^2\beta_{If},\end{aligned}\right\}\qquad(3.15)$$

где

$$\frac{w^*}{V}=\frac{\pi\overline{C}}{J_V}-[1-\psi_{f\infty}(\bar{r})];$$

$$C=V[1-\psi_{f\infty}(\bar{r})]+w^*;\quad \overline{C}=\frac{C}{\Omega R};$$

$\psi_{f\infty}(\bar{r})$ — среднее по окружности радиуса $\bar{r}$ значение попутного потока трения далеко за корпусом.

Константу C назначают таким образом, чтобы обеспечить получение заданного коэффициента упора гребного винта. В первом приближении можно принять

$$\overline{C}=2\lambda_{If}-\frac{J_V}{\pi}(1-\psi_{f\infty}), \tag{3.16}$$

где λ_{If} — индуктивная поступь, определяемая по диаграммам В. М. Лаврентьева (см. прилож. 1) или аппроксимирующим их зависимостям [68] при заданных K_T и $\lambda_t'=\frac{J_V}{\pi}(1-\bar{\psi}_{f\infty})$; $\bar{\psi}_{f\infty}$ — среднее по сечению следа на бесконечности значение коэффициента $\psi_{f\infty}$. В дальнейшем величину $\overline{C}$ будем уточнять по формуле

$$\overline{C}^{(j)}=\overline{C}^{(j-1)}+0{,}456\,\frac{K_T-K_T^{(j-1)}}{(\bar{r}^2+\lambda_{If}^2)\cos^2(2\beta_{If}-\beta_f)}, \tag{3.17}$$

где индекс j соответствует текущему, $(j-1)$ — предыдущему приближению; $\bar{r}$ принят равным 0,6;

$$\operatorname{tg}\beta_{If}=\frac{\lambda_{If}}{\bar{r}};\quad \operatorname{tg}\beta_f=\frac{J_V}{\pi\bar{r}}[1-\psi_{f\infty}(\bar{r})].$$

При переходе в диск гребного винта следует принять во внимание, что осевая скорость на несущей линии равна $V(1-\psi_{эфф})$ [10], а окружная вызванная скорость составляет половину своего значения на бесконечности. Здесь $\psi_{эфф}(\bar{r})$ — коэффициент эффективного попутного потока. С учетом этого тангенс угла индуктивной поступи в диске гребного винта

$$\operatorname{tg}\beta_I=\frac{1-\psi_{эфф}+\frac{1}{2}\frac{w_{x\infty}}{V}}{\frac{\pi\bar{r}}{J_V}-\frac{1}{2}\frac{w_{\theta\infty}}{V}}, \tag{3.18}$$

величину скорости на несущей линии $V_R^*(\bar{r})$ определяют из выражения

$$\frac{V_R^*(\bar{r})}{V}=\frac{\frac{\pi\bar{r}}{J_V}-\frac{1}{2}\frac{w_{\theta\infty}}{V}}{\cos\beta_I}. \tag{3.19}$$

Величину коэффициента эффективного попутного потока $\psi_{эфф}$ находят по формуле [10]:

$$1 - \psi_{эфф}(\bar{r}) = 1 - \psi(\bar{r}) + \frac{1 - t_0(\bar{r})}{2} \frac{w_{x\infty}(\bar{r})}{V}, \qquad (3.20)$$

где $\psi(\bar{r})$ — коэффициент номинального попутного потока в месте расположения гребного винта; $t_0(\bar{r})$ — коэффициент засасывания на швартовах для элемента винта на относительном радиусе r, определяемый по данным работы [38].

Предпочтительнее находить коэффициент эффективного попутного потока $\psi_{эфф}$ при помощи специальных экспериментов, в которых скорости определяют с учетом работающего гребного винта (см., например, [58]).

На практике имеют место случаи, когда среднее по окружности значение тангенциальной скорости попутного потока в диске гребного винта не равно нулю (например, для бортовых винтов). Наличие тангенциальной скорости V_θ можно учесть, введя эквивалентный по углу натекания на элемент лопасти осевой попутный поток. Его коэффициент вычисляют по формуле

$$\psi'(\bar{r}) = \frac{\psi(\bar{r}) - \frac{J_V}{\pi \bar{r}} \bar{V}_\theta(\bar{r})}{1 - \frac{J_V}{\pi \bar{r}} \bar{V}_\theta(\bar{r})}. \qquad (3.21)$$

Как показано на рис. 3.3, у гребного винта, спроектированного с учетом условия оптимума комплекса (сплошные линии),

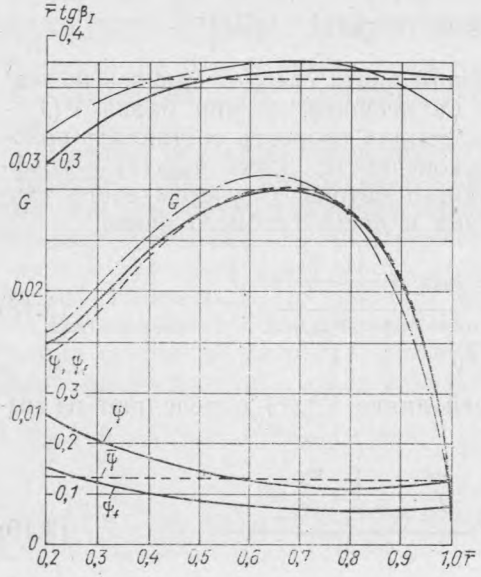


Рис. 3.3. Пример расчета распределения циркуляции $\bar{G}$ и индуктивной поступи $\bar{r}\,\mathrm{tg}\,\beta_I$ вдоль радиуса гребного винта двухвального быстроходного контейнерного судна ($Z=4$; $J_V=1{,}05$; $K_T=0{,}212$).

——— для винта, спроектированного на максимум пропульсивного коэффициента; — — — для оптимального винта, спроектированного с учетом условия однородного потока ($\bar{\psi}=0{,}133$); — · — для винта, спроектированного с учетом разгрузки концевых сечений ($C_R=0{,}9$).

внутренние сечения лопасти нагружены в большей степени, чем у оптимального изолированного винта (пунктирные линии).

Анализ расчетов показывает также, что распределения циркуляции на периферийных сечениях обоих винтов близки друг к другу. Поскольку у оптимальных гребных винтов гидродинамическая нагрузка вблизи концов лопастей относительно велика, при их работе в неравномерном по окружности попутном потоке может возникать кавитация, повышенные уровни вибрации и шума внутри корпуса. С целью уменьшения этих неблагоприятных последствий приходится идти на некоторое снижение нагрузки на периферийных участках лопастей [119], величина которого зависит в каждом конкретном случае от условий работы гребного винта и является результатом компромиссного выбора снижения пропульсивного коэффициента и уровня вибрации *.

Разгрузку периферийных сечений лопастей можно осуществить путем уменьшения на концевых сечениях величины $\bar{C}$ по формуле (3.14). При этом величина $\bar{C}_R$ косвенно определяет уменьшение циркуляции около концов лопастей: чем меньше $\bar{C}_R$, тем меньше опасность возникновения кавитации и ее неблагоприятных последствий. Однако одновременно с этим уменьшается индуктивный КПД винта и пропульсивный коэффициент движительного комплекса. Компромиссное решение можно принять, используя данные рис. 3.2, на котором показан график, построенный для изолированного гребного винта. Во всех случаях, кроме тех, в которых без существенной разгрузки концов лопастей невозможно избежать кавитации в развитых стадиях, рекомендуется при проектировании принимать такую величину $\bar{C}_R$, чтобы снижение индуктивного КПД не превышало 1 %.

На рис. 3.3 штрих-пунктирной линией показан пример расчета гребного винта по условию (3.14) при $\bar{r}_0 = 0{,}6$; $m = 3$; $\bar{C}_R = 0{,}9$. Из рисунка хорошо видно уменьшение циркуляции на периферийных сечениях гребного винта: оно сопровождается снижением индуктивного КПД на $\sim 0{,}4$ %.

В заключение параграфа отметим, что результатами расчетов по теории несущей линии является распределение циркуляции $G(\bar{r})$, гидродинамической характеристики $B(\bar{r})$, тангенса угла индуктивной поступи $\operatorname{tg}\beta_I$ и величины $V_R^*(\bar{r})/V$ в диске гребного винта вдоль радиуса. Эти данные можно использовать в дальнейшем для совместного удовлетворения условий прочности и отдаления кавитации, а также в расчетах по теории несущей поверхности.

---

* Вообще говоря, снижение гидродинамической нагрузки можно производить также вблизи ступицы.

3.3. Расчет гребного винта с произвольным распределением циркуляции по теории несущей линии

На практике встречаются случаи, когда необходимо произвести расчеты гидродинамических характеристик гребного винта для заданного закона распределения циркуляции.

Рассмотрим метод расчета гребного винта по теории несущей линии в случае, когда заданы режим работы, поле скоростей и нормированное распределение циркуляции $G^*(\bar{r}) = G(\bar{r})/G(\bar{r}=0{,}6)$. Последовательность проведения расчетов по этому методу соответствует известной схеме Г. Лербса [133], усовершенствованной С. В. Куликовым и С. П. Чекаловым [10, 47]. Расчет заключается в итеративном уточнении величины $G(\bar{r}=0{,}6)$ (в дальнейшем обозначена как $G_{0,6}$) и распределения угла индуктивной поступи β_I вдоль радиуса.

Нормированное распределение циркуляции $G^*(\bar{r})$ задают с учетом следующих требований (см. § 2.4). Во-первых, у конца лопасти ($\bar{r} \to 1$) производная циркуляции по радиусу должна вести себя как $(1-\bar{r})^{\nu}$, где $\nu = -1/2$ или $\nu > 0$. При других значениях параметра ν осевая и окружная вызванные скорости, связанные с $dG/d\bar{r}$ через интегралы типа Коши, будут неограниченно возрастать при приближении к концу лопасти [23]. Обычно принимают $\nu = -1/2$ (оптимальное или близкое к нему распределение циркуляции) или $\nu = 1/2$ (распределение с нулевой производной циркуляции).

Во-вторых, в силу условия непротекания через поверхность ступицы, производная циркуляции около ступицы должна равняться нулю, т. е. $dG/d\bar{r} \sim 0[(\bar{r}-\bar{r}_H)^{\mu}]$, где $\mu > 0$. Обычно принимают $\mu = 1/2$.

Всем перечисленным требованиям удовлетворяют следующие представления распределения нормированной циркуляции и ее производной [71]:

$$\frac{dG^*}{dx} = (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\sum_{n=0}^{M}\bar{a}_n P_n^{(\alpha-1,\,\beta-1)}(x); \qquad (3.22)$$

$$G^*(x) = -\bar{a}_0\Big[\frac{1}{2}(\beta-\alpha+1)\arccos x + (\beta-\alpha)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\beta-\alpha-1)\,x\sqrt{1-x^2}\Big] - \frac{1}{2}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\sum_{n=1}^{M}\frac{\bar{a}_n}{n}P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x), \qquad (3.23)$$

где $x = (2\bar{r}-1-\bar{r}_H)/(1-\bar{r}_H)$ — вспомогательная переменная, изменяющаяся в промежутке $[-1, 1]$, причем $x = -1$ соответ-

ствует $\bar{r} = \bar{r}_H$, а $\bar{r} = 1$ при $x = 1$. В формулах (3.22) и (3.23) в соответствии с изложенным $\alpha = \nu + 1 = {}^1/_2$ или ${}^3/_2$; $\beta = \mu + 1 = {}^3/_2$. При $\alpha = {}^1/_2$ и $\beta = {}^3/_2$ формулы (3.22) и (3.23) переходят соответственно в формулы (2.101) и (2.103), а при $\alpha = \beta = {}^3/_2$ — в формулы (2.104) и (2.105).

Значение циркуляции на ступице

$$G^*(-1) = -\frac{\pi}{2}\bar{a}_0(\beta - \alpha + 1). \qquad (3.24)$$

В отличие от распределения циркуляции (3.23) в методе Г. Лербса—С. В. Куликова циркуляция принимается в виде ряда по синусам вспомогательной угловой переменной $\theta = \arccos x$. На ступице винта такое распределение дает неограниченное значение производной $dG/d\bar{r}$. Граничное условие непротекания через поверхность ступицы в этом методе не учитывается. Это приводит к неточному определению характеристик винта на внутренних сечениях лопасти, а при большой величине коэффициента нагрузки — к расходимости процесса последовательных приближений, уточняющих распределение углов индуктивной поступи по радиусу. При использовании ряда по функциям $(1 - \cos\theta)\sin\theta$ [59] граничное условие непротекания через поверхность ступицы удовлетворяется, однако значение циркуляции на ступице во всех случаях оказывается равным нулю.

В большинстве практически важных случаев распределение циркуляции на внутренних радиусах ($\bar{r}_H \leqslant \bar{r} \leqslant 0{,}6$) принимается таким, каким оно было бы у оптимального на данном режиме гребного винта. При этом циркуляция на ступице оказывается не равной нулю (см. § 3.2). В принципе, однако, можно принимать (с учетом перечисленных требований) и иные законы $G^*(\bar{r})$, включая и случай, когда на ступице $G^*(\bar{r}_H) = 0$. Что касается внешней части лопасти ($0{,}6 \leqslant \bar{r} \leqslant 1$), то здесь обычно принимается распределение, отличное от оптимального. Как уже указывалось, выбор величины снижения циркуляции диктуется двумя обстоятельствами: допустимой величиной уменьшения индуктивного КПД и увеличением запаса против возникновения кавитации.

Задавая нормированную циркуляцию в $(M+1)$ точках (узлах) по радиусу лопасти, можно определить коэффициенты $\bar{a}_n$ ($n = 0, 1, \ldots, M$) из условия прохождения функции (3.23) через заданные точки. В этом случае формула (3.23) представляет собой интерполяционную функцию.

Коэффициенты $\bar{a}_n$ определяют путем решения системы из $M+1$ линейных уравнений:

$$\sum_{n=0}^{M} a_n S_{mn} = G^*(x_m), \quad m = 1, 2, \ldots, M+1, \qquad (3.25)$$

где коэффициент матрицы

$$S_{mn}=\begin{cases} -\frac{1}{2}(\beta-\alpha+1)\arccos x_m-(\beta-\alpha)\sqrt{1-x_m^2}- \\ -\frac{1}{2}(\beta-\alpha-1)\,x_m\sqrt{1-x_m^2}, \quad n=0; \\ -\frac{1}{2}(1-x_m)^{\alpha}(1+x_m)^{\beta}\frac{1}{n}P_{n-1}^{\alpha,\,\beta}(x_m), \quad n=1,\,2,\,\ldots,\,M. \end{cases}$$

Узлы $x_m(\bar{r}_m)$ целесообразно выбрать такими, чтобы в области наибольшего изменения циркуляции наблюдалось их сгущение. Этому условию удовлетворяет следующее распределение узлов x_m и соответственно $\bar{r}_m$:

$$x_m=2\cos\theta_m-1; \quad \bar{r}_m=\bar{r}_H+(1-\bar{r}_H)\cos\theta_m, \qquad (3.26)$$

где

$$\theta_m=\frac{\pi}{2(M+1)}(M+2-m), \quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ M+1.$$

Для верхнего предела суммы в формуле (3.23) $M=5$ (шесть узлов) и относительных радиусов ступицы $\bar{r}_H=0{,}2$; 0,3 расчет по формуле (3.26) дает распределение узлов, приведенное в табл. 3.1. Заметим, что при принятом законе распределения циркуляции (3.23) равенство $G(1)=0$ выполняется автоматически.

Таблица 3.1. **Распределение узлов для $M=5$ (шесть узлов)**

m	1	2	3	4	5	6
x_m	—1	—0,482 4	0	0,414 2	0,732 0	0,931 8
$\bar{r}_H=0{,}2$; $\bar{r}_m$	0,2	0,407	0,60	0,765 7	0,892 8	0,972 7
$\bar{r}_H=0{,}3$; $\bar{r}_m$	0,3	0,481 2	0,65	0,795 0	0,906 2	0,976 1

Из таблицы видно, что в районе наибольшего изменения циркуляции (между максимумом и концом лопасти) располагается больше точек, чем в области ее малого изменения (на внутренних радиусах).

Коэффициенты $\bar{a}_n$ можно определить иными методами, например, по способу наименьших квадратов. В этом случае число узлов превышает количество неизвестных коэффициентов $\bar{a}_n$, а значения суммы ряда (3.23) не совпадают с заданными в узлах значениями $G^*(\bar{r}_m)$.

Величину циркуляции на $\bar{r}=0{,}6$ $G_{0,6}$, определяемую вместе с нормированным распределением $G^*(\bar{r})$ значения циркуляции

вдоль лопасти, находят в процессе итераций из условия равенства коэффициента упора заданной величине. В первом приближении $G_{0,6}$ можно определить по формуле (3.12), полученной для оптимальных винтов:

$$G_{0,6} = 0{,}28\,\frac{K_T}{Z}\sqrt{(1-\bar{\psi})^2 + \frac{3{,}55}{f_V^2}}. \qquad (3.27)$$

В отличие от формулы (3.12) здесь значение численного коэффициента принято равным 0,28 вместо 0,27 для того, чтобы учесть разницу между K_{TI} и K_T.

После определения величины $G_{0,6}$ на каждом шаге можно найти вызванные скорости на несущей линии, использовав формулы (2.73) и (2.74) и заменив переменную $\bar{r}'$ на x':

$$\frac{w_{\theta 1}(x)}{V} = \frac{1}{1-\bar{r}_H}\int_{-1}^{+1}\frac{dG}{dx'}\,\frac{i_t'\,dx'}{x'-x} - \frac{ZG(\bar{r}_H)}{x(1-\bar{r}_H)+1+\bar{r}_H}; \qquad (3.28)$$

$$\frac{w_{x1}(x)}{V} = \frac{1}{1-\bar{r}_H}\int_{-1}^{+1}\frac{dG}{dx'}\cdot\frac{i_a'\,dx'}{x'-x}. \qquad (3.29)$$

Для вычисления вызванных скоростей воспользуемся квадратурными формулами для сингулярных интегралов (см. прилож. 4). В случае, когда $\alpha = {}^1/_2$; $\beta = {}^3/_2$ (производная циркуляции равна нулю на ступице и неограничена у конца лопасти), будем иметь

$$\frac{w_{\theta 1}(x_i)}{V} \simeq \frac{4\pi G_{0,6}}{(1-\bar{r}_H)(2N+1)}\sum_{m=1}^{N}\bar{S}_{1m}\times$$

$$\times\frac{\cos^2\frac{\theta_m}{2}\,i_t'(x_i, x_m)}{x_m - x_i} - \frac{ZG(\bar{r}_H)}{x_i(1-\bar{r}_H)+1+\bar{r}_H}; \qquad (3.30)$$

$$\frac{w_{x1}(x_i)}{V} \simeq \frac{4\pi G_{0,6}}{(1-\bar{r}_H)(2N+1)}\sum_{m=1}^{N}\bar{S}_{1m}\,\frac{\cos^2\frac{\theta_m}{2}\,i_a'(x_i, x_m)}{x_m - x_i}, \qquad (3.31)$$

где

$$x_i = \cos\frac{2\pi i}{2N+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, N) — \text{расчетные точки};$$

$$S_{1m} = \sum_{n=0}^{M} a_n P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x_m);$$

$$x_m = \cos\theta_m = \cos\frac{\pi(2m-1)}{2N+1}, \quad m = 1, 2, \ldots, N — \text{узлы}.$$

Если производная циркуляции равна нулю на ступице и конце лопасти ($\alpha = \beta = {}^3/_2$), то вызванные скорости можно вычислить по формулам:

$$\frac{w_{\theta 1}(x_i)}{V} \simeq \frac{\pi G_{0,6}}{(1-\bar{r}_H)(N+1)} \sum_{m=1}^{N} \bar{S}_{2m} i_t'(x_i, x_m) \times$$

$$\times \frac{1-x_m^2}{x_m - x_i} - \frac{ZG(\bar{r}_H)}{x_i(1-\bar{r}_H)+1+\bar{r}_H}; \qquad (3.32)$$

$$\frac{w_{x1}(x_i)}{V} \simeq \frac{\pi G_{0,6}}{(1-\bar{r}_H)(N+1)} \sum_{m=1}^{N} \bar{S}_{2m} i_a'(x_i, x_m) \frac{1-x_m^2}{x_m - x_i}, \qquad (3.33)$$

где

$x_i = \cos\frac{\pi(2i-1)}{2(N+1)}$, $i = 1, 2, \ldots, N+1$ — расчетные точки;

$$S_{2m} = \sum_{n=0}^{M} \bar{a}_n P_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x_m);$$

$x_m = \cos\theta_m = \cos\frac{\pi m}{N+1}$, $m = 1, 2, \ldots, N$ — узлы.

Число узлов N квадратурных формул (3.30)—(3.33) выбирают исходя из требования обеспечения практической точности вычислений; как правило, достаточно принять $N = 7 \div 10$.

Окружной и осевой факторы индукции, входящие в полученные формулы, зависят от тангенса шагового угла винтовых вихрей, распределение которого вдоль лопасти вначале неизвестно. В первом приближении можно принять

$$\operatorname{tg}\beta_I^{(1)} = \operatorname{tg}\beta = \frac{V[1-\psi(r)]}{\Omega r} = \frac{J_V}{\pi\bar{r}}[1-\psi(\bar{r})], \qquad (3.34)$$

где $\psi(\bar{r})$ — распределение коэффициента попутного потока в диске гребного винта.

В дальнейшем величину $\operatorname{tg}\beta_I$ последовательно уточняют по формуле (3.18) до тех пор, пока приближения на всех расчетных радиусах практически не сойдутся. Затем по формуле (2.131) вычисляют коэффициент упора гребного винта.

Величину коэффициента подъемной силы рассчитывают по формуле

$$C_L = \frac{B}{c/D} = \frac{2\pi G}{c/DV_R^*/V}, \qquad (3.35)$$

где

$$V_R^*/V = \left(\frac{\pi\bar{r}}{J_V} - \frac{w_{\theta 1}}{V}\right)\frac{1}{\cos\beta_I}$$

— результирующая скорость потока, набегающего на элемент лопасти. Величина относительной ширины лопасти может быть задана либо приближенно определена по формуле (3.1).

После вычисления коэффициента упора по формуле (2.131) производят сопоставление его величины с заданным K_T. Если

$$\left|K_T - K_T^{(j)}\right| \leqslant \Delta, \tag{3.36}$$

где $j = 1, 2, \ldots$ — номер приближения, Δ — малая величина, то последовательные приближения, уточняющие величину $G_{0,6}$, более не производят. В противном случае рассчитывают новую величину

$$G_{0,6}^{(j)} = G_{0,6}^{(j-1)} \frac{K_T}{K_T^{(j-1)}}. \tag{3.37}$$

Далее вновь уточняют величины углов индуктивной поступи β_I, а затем опять проверяют близость коэффициентов упора по формуле (3.36). Таким образом, алгоритм расчета гребного винта по теории несущей линии содержит два итерационных цикла: по величинам $\operatorname{tg}\beta_I$ на ряде расчетных относительных радиусов $\bar{r}_i$ и по величине $G_{0,6}$, причем первый цикл находится внутри второго.

На рис. 3.4 приведен пример расчета, иллюстрирующий влияние уменьшения нагрузки в области $0{,}6 \leqslant \bar{r} \leqslant 1$ на характери-

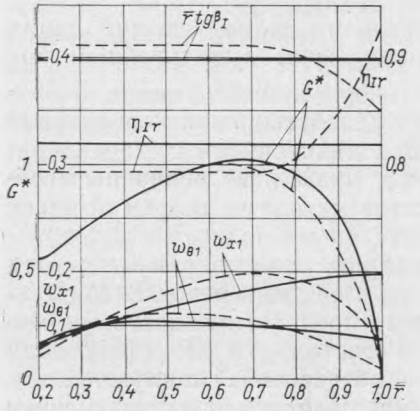


Рис. 3.4. Распределение нормированной циркуляции $G^*(\bar{r})$, вызванных скоростей на несущей линии, индуктивного КПД η_{Ir} и индуктивной поступи $\bar{r}\operatorname{tg}\beta_I$ вдоль радиуса лопасти ($Z=4$; $J_V=1{,}023$; $K_T=0{,}202$, однородный поток).

——— для оптимального гребного винта ($\eta_I=0{,}820$); — — — для гребного винта с уменьшенной (по сравнению с оптимальной) циркуляцией ($m=2$; $f_1=0{,}6$; $\eta_I=0{,}811$).

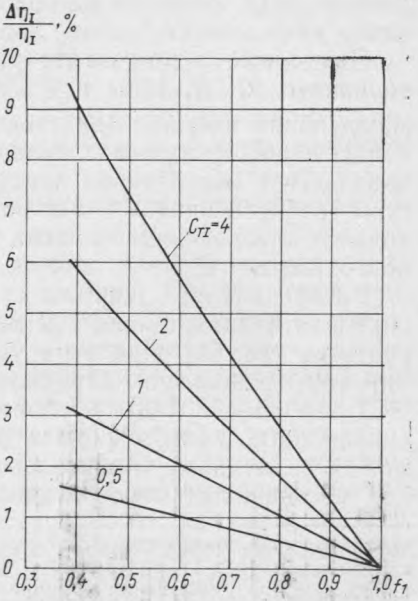


Рис. 3.5. Относительное уменьшение индуктивного КПД гребного винта $\Delta\eta_I/\eta_I^{opt}$ в зависимости от параметра f_1 и коэффициента нагрузки по упору C_{TJ} ($Z=4$).

стики проектируемого винта. Уменьшение нормированной циркуляции произведено по формуле

$$G^*(\bar{r}) = G^*_{\text{opt}}(\bar{r}) \cdot f_G(\bar{r}), \tag{3.38}$$

где $G^*_{\text{opt}}(\bar{r})$ — нормированное распределение циркуляции оптимального винта;

$$f_G(\bar{r}) = \begin{cases} 1, & \bar{r}_H \leqslant \bar{r} \leqslant \bar{r}_0; \\ 1 - (1 - f_1)\left(\dfrac{\bar{r} - \bar{r}_0}{1 - \bar{r}_0}\right)^m, & \bar{r}_0 < \bar{r} \leqslant 1; \end{cases} \tag{3.39}$$

f_1 — параметр, характеризующий уменьшение циркуляции ($0 \leqslant \leqslant f_1 \leqslant 1$); $\bar{r}_0 = 0{,}6$; $m > 1$.

Следует отметить, что производная циркуляции $dG^*/d\bar{r}$ при ее задании в виде (3.38) ведет себя около конца лопасти так же, как производная оптимальной циркуляции $dG^*_{\text{opt}}/d\bar{r}$.

Величину допустимого уменьшения циркуляции на внешних радиусах лопасти можно определить по графикам, приведенным на рис. 3.5, где даны результаты систематических расчетов относительного падения индуктивного КПД гребного винта в однородном потоке в функции от параметра f_1. Видно, что при отклонении распределения циркуляции от оптимального, индуктивный КПД сначала изменяется незначительно, а затем заметно уменьшается *.

Найденные в результате расчетов по схеме несущей линии величины G, B, $\operatorname{tg}\beta_I$ и V^*_R/V используют в дальнейшем при определении ширины лопастей и максимальной толщины профилей сечений исходя из условий удовлетворения требований прочности и обеспечения наилучших кавитационных характеристик гребного винта **. Кроме того, указанные величины необходимы для расчетов гребных винтов методами теории несущей поверхности.

Распределения ширины и толщины лопасти рекомендуется определять одновременно, используя известный метод В. М. Лаврентьева [48, 68]. При этом условие прочности лопасти формулируют, используя Правила Регистра СССР [87] или ОСТ 5.4050—72 [78]. Требование обеспечения наилучших кавитационных качеств может выдвигаться в виде соотношения между величинами минимального давления на лопасти и давления насыщенных паров жидкости. Это соотношение позволяет

---

* Расчеты показывают, что при превышении нормированной циркуляции оптимальной ($f_1 > 1$) индуктивный КПД уменьшается, однако менее интенсивно, чем при уменьшении нормированной циркуляции. Таким образом, график оптимума индуктивного КПД винта по распределению циркуляции весьма пологий. В случае $f_1 > 1$ ухудшаются кавитационные качества винта, поэтому он здесь не рассматривается.

** Как указывалось во введении, методы расчета прочности в данной книге не рассматриваются. Вопросы, связанные с расчетом влияния кавитации на характеристики гребных винтов, изложены в гл. 6.

косвенно учесть влияние окружной неоднородности попутного потока на кавитационные характеристики винта.

После того как распределение ширины вдоль радиуса найдено, следует определить положение середин хорд профилей или, иными словами, саблевидность (несимметрию) контура лопасти. Величина параметра саблевидности контура лопасти θ_s^* оказывает влияние на виброактивность движителя в неравномерном потоке, а также на его кавитационные качества [112]. Для гребных винтов транспортных судов величина θ_s^* обычно составляет 7—14°.

3.4. Профилирование лопастей винта на основе теории несущей поверхности

На последнем этапе проектирования гребного винта по вихревой теории производят расчет по схеме несущей поверхности. Определяют распределения шагового угла и стрелки прогиба (кривизны) средней линии сечений лопасти, обеспечивающие заданные распределенные и суммарные гидродинамические характеристики. Дело в том, что требуемую величину циркуляции скорости $G(\bar{r})$ в каждом сечении, найденную расчетом по схеме несущей линии, и распределение давлений вдоль профиля можно обеспечить без дополнительных расчетов только для слабо и умеренно нагруженных узколопастных винтов типа авиационных. У таких винтов течение жидкости в каждом цилиндрическом сечении * приближенно соответствует обтеканию плоского профиля плоскопараллельным потоком, и влияние трехмерности проявляется лишь в повороте этого плоского потока относительно профиля на угол $\beta_I - \beta$. Величину угла индуктивной поступи β_I определяют по схеме несущей линии, дальнейших расчетов с использованием вихревой теории здесь не требуется. Все проектирование далее сводится к подбору плоских профилей.

Анализ потока около лопастей слабо или умеренно нагруженного широколопастного гребного винта показывает, что течение жидкости в цилиндрических сечениях соответствует обтеканию профилей «искривленным» плоским потоком. Линии тока этого течения не только повернуты относительно профиля на некоторый угол, но и имеют стрелку прогиба. Это объясняется переменностью поля вызванных скоростей вдоль хорды сечения лопасти вследствие малого относительного размаха лопасти. В такой ситуации необходимо произвести расчет по схеме несущей поверхности и определить численно параметры этого «искривленного» потока. Учитывая, что размах лопастей невелик, а также то, что деление винтов на узко- и широколопастные весьма условно, рекомендуется во всех случаях проектиро-

* Исключая, конечно, концевую область лопасти.

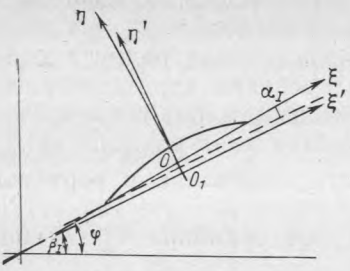


Рис. 3.6. Системы координат (0, ξ, η) и (0_1, ξ′, η′).

вания судовых гребных винтов по вихревой теории производить расчет по теории несущей поверхности.

Применению теории несущей поверхности к проектированию гребных винтов посвящено большое количество работ. Первой из них, по-видимому, была статья Людвига и Гинцеля [118]. В дальнейшем появились труды Дж. Кокса, Г. Лербса, Ван-Манена и Бакера, П. Пиена, В. М. Лаврентьева, Г. И. Майкапара, В. В. Копеецкого, В. Моргана и других. В настоящее время применение теории несущей поверхности — стандартная процедура при проектировании гребных винтов, во многих научно-исследовательских центрах судостроения у нас в стране и за рубежом имеются соответствующие программы для ЭВМ.

Рассмотрим две локальные системы координат, связанные с сечением лопасти на радиусе r: систему F, ось ξ которой совпадает с хордой профиля, и систему (0_1, ξ′, η′) с осью ξ′, лежащей на опорной винтовой поверхности, имеющей шаговый угол β_I (рис. 3.6). Предположим, что на этой поверхности расположены системы присоединенных и свободных вихрей гребного винта, а также источники и стоки, моделирующие толщину лопастей.

Для слабо или умеренно нагруженного гребного винта угол между осями ξ и ξ′ — малая величина и абсциссы проекции концов хорды профиля на ось ξ′ практически совпадают с абсциссами самих этих концов, т. е. $\xi_T \cong \xi'_T$, $\xi_L \cong \xi'_L$. По этой причине в дальнейшем при использовании обеих систем координат абсциссы входящей и выходящей кромок профиля будем считать равными ξ_L и ξ_T соответственно.

Линию тока течения в цилиндрическом сечении лопасти на радиусе r находят путем интегрирования соответствующего дифференциального уравнения

$$\frac{d\eta'}{V_{\eta'}} = \frac{d\xi'}{V_{\xi'}}, \qquad (3.40)$$

где $V_{\eta'}$ и $V_{\xi'}$ — соответственно проекции вектора скорости на оси системы координат (0_1, ξ′, η′). Будем считать, что набегающий на гребной винт поток не изменяется вдоль хорды сечения и его «искривление» обусловлено лишь скоростями, вызванными системами вихрей и источников. Примем также $V_{\xi'}(\xi', r) \cong V^*_R(r)$, где $V^*_R(r)$ — действующая скорость, определяемая по схеме несущей линии. Тогда ординату линии тока, проходящей через

точку с координатами ($\xi' = \xi_T$, $\eta' = 0$), вычисляют по формуле

$$\eta'(\xi', r) = \int_{\xi_T}^{\xi'} \frac{w_n(\xi'', r)}{V_R^*(r)} d\xi'', \tag{3.41}$$

где $w_n(\xi'', r)$ — нормальная к оси ξ' вызванная скорость. Величину этой скорости можно вычислить, используя формулы (2.59), причем

$$w_n(\xi'', r) = w_{Ln}(\xi'', r) + w_{Tn}(\xi'', r), \tag{3.42}$$

где $w_{Ln}(\xi'', r)$ — нормальная составляющая скорости, индуцированной системами присоединенных и свободных вихрей, вычисляемая по формуле

$$w_{Ln}(\xi, r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{Z-1} \left\{ \int_{r_H}^{R} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_b(r', \xi') \frac{f_{1j}}{S_j^3} d\xi' dr' + \right.$$

$$\left. + \int_{r_H}^{R} \int_{-\infty}^{c/2} \gamma_{f\xi}(r', \xi') \frac{f_{2j}}{S_j^3} \frac{\cos\beta_I'}{r'} dr' d\xi' \right\}; \tag{3.43}$$

w_{Tn} — нормальная составляющая скорости, индуцированной системой источников-стоков:

$$w_{Tn}(\xi, r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{Z-1} \int_{r_H}^{R} \int_{-c/2}^{c/2} q(r', \xi') \frac{f_{3j}}{S_j^3} dr' d\xi'. \tag{3.44}$$

В формулах (3.43) и (3.44) обозначено:

$$f_{1j} = r\cos\beta_I \sin(\theta - \theta' - \chi_j) + \sin\beta_I \cos(\theta - \theta' - \chi_j)(h\theta - h'\theta');$$

$$f_{2j} = r'\cos\beta_I [r' - r\cos(\theta - \theta' - \chi_j)] -$$
$$- h'\sin\beta_I [r - r'\cos(\theta - \theta' - \chi_j)] +$$
$$+ r'\sin\beta_I \sin(\theta - \theta' - \chi_j)(h\theta - h'\theta');$$

$$f_{3j} = \cos\beta_I (h\theta - h'\theta') - r'\sin\beta_I \sin(\theta - \theta' - \chi_j);$$

$$S_j = [r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta' - \chi_j) + (h\theta - h'\theta')^2]^{1/2};$$

$$h = r\,\mathrm{tg}\,\beta_I; \quad h' = r'\,\mathrm{tg}\,\beta_I(r').$$

Интенсивность источников-стоков q вычисляют по формуле (2.44). Присоединенные вихри распределены по несущей поверхности A_1, а свободные — по поверхности A_1 и полубесконечной поверхности A_2, начинающейся у контура задней кромки. Причем их интенсивность на A_2 не зависит от координаты ξ и равна $-d\Gamma/dr$. Ясно, что в величине скорости w_{Ln} содержится слагаемое, обусловленное этой полубесконечной вихревой системой. Ранее, на этапе расчета по схеме несущей линии, уже

была вычислена аналогичная скорость, вызванная полубесконечной вихревой системой интенсивности $-d\Gamma/dr$, имеющей шаг $2\pi r \operatorname{tg}\beta_I$. При этом индуктивная скорость определена в точках радиальной прямой, соответствующей присоединенному вихрю, а индуктивную скорость вычисляют в различных точках несущей поверхности, имеющей в общем случае радиально-переменный шаг. Очевидно, что только при постоянном шаге вихревой поверхности радиальный присоединенный вихрь совпадает с несущей поверхностью. Тем не менее в соответствии с предложением П. Пиена [146] при вычислении w_{Ln} для винтов с переменным шагом опорной поверхности будем использовать результаты расчетов по схеме несущей линии. С этой целью вычтем и прибавим к выражению для w_{Ln} величину скорости $w_{n1}^*(r)$, определенной по схеме несущей линии:

$$
\begin{aligned}
w_{Ln}(\xi, r) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\Bigg\{\iint\limits_{A_1}\gamma_b(r', \xi')\frac{f_{1j}}{S_j^3}\,d\xi'\,dr' + \\
+\iint\limits_{A_1+A_2}\gamma_{f\xi}(r', \xi')\frac{f_{2j}}{S_j^3}\frac{\cos\beta_I'}{r'}\,d\xi'\,dr'\Bigg\} - \\
-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\iint\limits_{A_3+A_2}\gamma_{f\xi}(r', \xi_T')\frac{f_{2j}}{S_j^3}\frac{\cos\beta_I'}{r'}\,d\xi'\,dr' + \\
+\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\iint\limits_{A_3+A_2}\gamma_{f\xi}(r', \xi_T')\frac{f_{2j}}{S_j^3}\frac{\cos\beta_I'}{r'}\,d\xi'\,dr' = \\
=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\Bigg\{\iint\limits_{A_1}\gamma_b(r', \xi')\frac{f_{1j}}{S_j^3}\,d\xi'\,dr' + \\
+\iint\limits_{A_1}\gamma_{f\xi}(r', \xi')\frac{f_{2j}}{S_j^3}\frac{\cos\beta_I'}{r'}\,d\xi'\,dr' - \\
-\iint\limits_{A_3}\gamma_{f\xi}(r', \xi_T')\frac{f_{2j}}{S_j^3}\frac{\cos\beta_j'}{r'}\,d\xi'\,dr'\Bigg\} + \\
+\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\iint\limits_{A_3+A_2}\gamma_{f\xi}(r', \xi_T')\frac{f_{2j}}{S_j^3}\frac{\cos\beta_I'}{r'}\,d\xi'\,dr' = \\
=\delta w_{Ln}(\xi, r) + w_{n1}^*(r), \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

где через $\delta w_{Ln}(\xi, r)$ обозначены первые три слагаемых, а область A_3 показана на рис. 3.7. Интенсивность свободных винтовых вихрей на задней кромке лопасти

$$\gamma_{f\xi}(r', \xi_T') = -d\Gamma(r')/dr'.$$

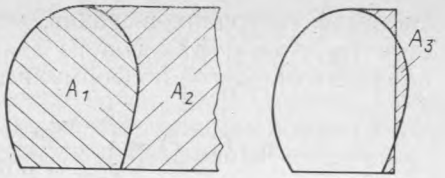


Рис. 3.7. Области интегрирования при определении екоса потока. Область A_3 ограничена выходящей кромкой лопасти и радиальной линией, проходящей через расчетную точку.

Составляющую скорости w^*_{n1} вычисляют, как это показано в § 2.4, с учетом граничного условия непротекания через поверхность ступицы. Приближенный учет этого условия при определении скорости δw_{Ln} можно произвести путем прибавления к w_{Ln} слагаемого, обусловленного вызванными скоростями от кольцевых вихрей, лежащих на ступице в пределах осевого размера корневого сечения лопасти.

Отметим ряд важных обстоятельств, связанных с использованием приема П. Пиена. Во-первых, величина $w^*_{n1}(r)$ постоянна вдоль хорды профиля, что определяет поворот потока в каждом сечении на угол $\beta_I - \beta$. Поэтому при использовании вместо w_{Ln} величины δw_{Ln} поворот потока следует отсчитывать от направления, характеризуемого углом β_I (а не β, как это было бы без применения приема П. Пиена). Во-вторых, области интегрирования в формуле для вычисления δw_{Ln} конечны, и следовательно, здесь не возникает трудностей, связанных с численным интегрированием на полубесконечном промежутке. Напомним, что в схеме несущей линии аналогичная трудность была обойдена путем использования факторов индукции.

Следует отметить, что интегралы, входящие в формулы (3.44) и (3.45), сингулярные и при их вычислении необходимо производить регуляризацию или пользоваться кубатурными формулами для сингулярных интегралов. На практике в ряде случаев используют квадратуры [43] (см. прилож. 4), применяя их к вычислению сингулярных двойных интегралов, понимая последние как повторные.

Ординату линии тока течения (а следовательно, и средней линии профиля) в системе F и поворот оси ξ относительно оси ξ', имеющей шаговый угол β_I, вычисляют по формулам:

$$\eta_c(\xi,\ r) = \int_{\xi_T}^{\xi} \frac{\delta w_{Ln}(\xi,\ r) + w_{Tn}(\xi,\ r)}{V^*_R(r)}\, d\xi - \alpha_I(\xi - \xi_T); \qquad (3.46)$$

$$\alpha_I(r) = \frac{1}{\xi_L - \xi_T} \int_{\xi_T}^{\xi_L} \frac{\delta w_{Ln}(\xi,\ r) + w_{Tn}(\xi,\ r)}{V^*_R(r)}\, . \qquad (3.47)$$

Разделим величины η_c и α_I на две составляющие, одна из которых обусловлена вихревой системой (η_{cL}, α_{IL}), другая —

системой источников-стоков, моделирующей телесность лопастей (η_{cT}, α_{IT}). Каждую из этих составляющих вычисляют независимо от другой по формулам:

$$\eta_{cL}(\xi, r) = \int_{\xi_T}^{\xi} \frac{\delta w_{Ln}(\xi, r)}{V_R^*(r)} d\xi - \alpha_{IL}(\xi - \xi_T); \tag{3.48}$$

$$\alpha_{IL}(r) = \frac{1}{\xi_L - \xi_T} \int_{\xi_T}^{\xi_L} \frac{\delta w_{Ln}(\xi, r)}{V_R^*(r)} d\xi; \tag{3.49}$$

$$\eta_{cT}(\xi, r) = \int_{\xi_T}^{\xi} \frac{w_{Tn}(\xi, r)}{V_R^*(r)} d\xi - \alpha_{IT}(\xi - \xi_T); \tag{3.50}$$

$$\alpha_{IT}(r) = \frac{1}{\xi_L - \xi_T} \int_{\xi_T}^{\xi_L} \frac{w_{Tn}(\xi, r)}{V_R^*(r)} d\xi. \tag{3.51}$$

Рассмотрим подробнее величины, соответствующие вихревой системе гребного винта (иными словами, его нагрузке). Из изложенного вытекает, что, с одной стороны, профиль со средней линией и углом атаки, вычисляемыми по формулам (3.48) и (3.49), имеет в «искривленном» потоке величину циркуляции

$$\Gamma(r) = \int_{\xi_T}^{\xi_L} \gamma_b(\xi, r) d\xi.$$

С другой стороны, в рамках линейной теории в плоскопараллельном набегающем потоке то же распределение присоединенных вихрей обеспечивает профиль со средней линией η_{cL2} и углом атаки α_{IL2}:

$$\eta_{cL2}(\xi) = \int_{\xi_T}^{\xi} \frac{w_{n2}(\xi)}{V_R^*(r)} d\xi - \alpha_{IL2}(\xi - \xi_T); \tag{3.52}$$

$$\alpha_{IL2} = \frac{1}{\xi_L - \xi_T} \int_{\xi_T}^{\xi_L} \frac{w_{n2}(\xi)}{V_R^*(r)} d\xi, \tag{3.53}$$

где

$$w_{n2}(\xi) = \int_{\xi_T}^{\xi_L} \frac{\gamma_b(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi'$$

— скос потока, обусловленный распределением присоединенных вихрей $\gamma_b(\xi')$.

Профиль, на котором в плоскопараллельном потоке возникают присоединенные вихри с той же интенсивностью, что и у профиля, работающего в составе лопасти в «искривленном» потоке, будем называть эквивалентным [33]. Отметим, что в рамках линейной теории распределение толщины эквивалентного плоского профиля такое же, как у профиля в составе лопасти.

Отнесем ординаты средней линии эквивалентного профиля к полухорде и представим результат в виде

$$\tilde{\eta}_{cL2}(\tilde{\xi}) = 2\delta_{C2} F_{c2}(\tilde{\xi}), \tag{3.54}$$

где $\delta_{c2} = B_1 C_L$ — относительная кривизна профиля; B_1 — коэффициент, связывающий коэффициент подъемной силы C_L с величиной δ_{c2} и зависящий от вида распределения присоединенных вихрей (нагрузки) вдоль хорды; $F_{C2}(\tilde{\xi})$ — нормированное распределение стрелки прогиба средней линии вдоль хорды. Аналогично можно представить угол атаки

$$\alpha_{IL2} = B_2 C_L, \tag{3.55}$$

где B_2 — коэффициент, зависящий от вида распределения нагрузки вдоль хорды (точнее, от степени несимметрии эпюры относительно середины хорды). Для симметричных относительно середины хорды распределений нагрузки $B_2 \equiv 0$. Функция $F_{C2}(\tilde{\xi})$ и коэффициенты B_1 и B_2 приведены в прилож. 3.

Для стрелки прогиба средней линии профиля в составе лопасти имеем

$$\tilde{\eta}_{cL}(\tilde{\xi}, \bar{r}) = 2\delta_c(\bar{r}) F_C(\tilde{\xi}, \bar{r}), \tag{3.56}$$

где $\delta_c(\bar{r})$ — относительная стрелка прогиба средней линии профиля в составе лопасти, а $F_C(\tilde{\xi}, \bar{r})$ — нормализованное распределение вдоль хорды.

Введем коэффициенты

$$K_{CL} = \frac{\tilde{\eta}_{cL}(\tilde{\xi}, \bar{r})}{\tilde{\eta}_{cL2}(\tilde{\xi})} = \frac{\delta_c(\bar{r}) F_C(\tilde{\xi}, \bar{r})}{\delta_{c2} F_{C2}(\tilde{\xi})}; \tag{3.57}$$

$$K_{\alpha L} = \frac{\alpha_{IL}(\bar{r})}{\alpha_{IL2}}, \tag{3.58}$$

которые будем называть в дальнейшем соответственно поправками на несущую поверхность для кривизны и угла атаки, обусловленными нагрузкой гребного винта [140]. Эти поправки характеризуют отличие стрелки прогиба средней линии и угла атаки эквивалентного плоского профиля и профиля в составе лопасти.

Рассмотрим теперь влияние телесности лопастей. Стрелка прогиба и угол атаки, вычисляемые по формулам (3.50) и

(3.51), обусловлены полностью специфической трехмерной структурой системы источников и стоков, расположенных на винтовой поверхности. Дело в том, что в линейной теории обтекания плоских профилей или крыльев конечного размаха соответствующие системы источников-стоков не индуцируют нормальных к несущей поверхности скоростей. В случае рассмотрения гребного винта наличие соседних лопастей и переменность угла установки профилей сечений приводят к появлению дополнительного скоса потока, который необходимо учитывать.

Принимая во внимание сказанное, отнесем $\widetilde{\eta}_{cT}$ и α_{IT} к величине e_0/D, характеризующей относительную толщину лопастей:

$$K_{CT} = \frac{\tilde{\eta}_{cT}(\tilde{\xi}, \bar{r})}{e_0/D}; \tag{3.59}$$

$$K_{\alpha T} = \frac{\alpha_{IT}(\bar{r})}{e_0/D}. \tag{3.60}$$

Коэффициенты K_{CT} и $K_{\alpha T}$ называются соответственно поправками на несущую поверхность для кривизны и угла атаки, обусловленными толщиной лопастей гребного винта [140].

Обширные систематические расчеты по теории несущей поверхности были произведены В. Морганом и его коллегами в работе [140]. Объектом исследований в этом фундаментальном труде стали оптимальные по А. Бетцу изолированные гребные винты, имеющие различное число лопастей, дисковое и шаговое отношение, а также контур лопастей. Было принято распределение нагрузки вдоль хорды сечений типа NACA $a = 0{,}8$. Анализ результатов расчетов позволил сделать ряд важных выводов.

1. Нормализованное распределение ординат средней линии профиля в составе лопасти $F_C(\widetilde{\xi}, \bar{r})$ практически не зависит от относительного радиуса $\bar{r}$ и совпадает с распределением $F_{C2}(\widetilde{\xi})$ эквивалентного плоского профиля. Таким образом, оказалось, что поправка на несущую поверхность K_{CL} — функция только относительного радиуса $\bar{r}$.

2. Наибольшее влияние на функцию $K_{CL}(\bar{r})$ оказывает ширина лопасти $c(\bar{r})/D$, а на функцию $K_{\alpha L}(\bar{r})$ — ширина и контур лопасти. С увеличением степени несимметрии распределения нагрузки и контура лопасти поправка $K_{\alpha L}$ все более отличается от единицы.

3. Влияние телесности лопастей проявляется практически лишь в повороте потока на угол α_{IT}, в то время как $\widetilde{\eta}_{cT} \approx 0$.

4. При конечной величине нагрузки на передней кромке (типа NACA a) функции скоса потока и производной средней линии имеют на этой кромке логарифмическую особенность. Нулевое значение нагрузки на передней кромке (например, типа

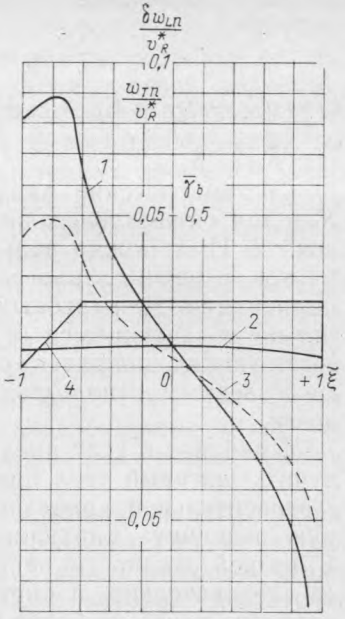


Рис. 3.8. Распределение скосов потока хорды сечения лопасти винта быстроходного контейнерного судна ($\bar{r}=0{,}7$; $Z=4$; $J_V=1{,}05$; $K_T=0{,}212$; профиль NACA-66 mod, $a=0{,}8$).

1 — в составе лопасти винта $\delta w_{Ln}/V_R^*$ (от вихревой системы); *2* — от системы источников-стоков w_{Tn}/V_R^*; *3* — в плоском потоке w_{n2}/V_R^*; *4* — распределение плотности присоединенных вихрей $\bar{\gamma}_b$.

ИК *a*, *b* [68]) обеспечивает конечные значения скосов потока и производной $\partial\eta_c/\partial\bar{\xi}$.

5. В случае, если коэффициент подъемной силы профиля сечения лопасти не стремится к нулю при $\bar{r}\to 1$, величины K_{cL} и $K_{\alpha L}$ остаются ограниченными величинами вблизи конца лопасти [68].

Аффинность функций $\widetilde{\eta}_{cL}$ и $\widetilde{\eta}_{cL2}$ указывает на то, что существует связь между функциями скоса потока δw_{Ln} и w_{n2}. Дифференцируя выражения (3.48) и (3.52) по $\widetilde{\bar{\xi}}$ и преобразуя результат, получим искомую связь:

$$\frac{\delta w_{Ln}(\bar{\xi},\ \bar{r})}{V_R^*(\bar{r})}=K_{CL}(\bar{r})\frac{w_{n2}(\bar{\xi})}{V_R^*(\bar{r})}-\alpha_{IL2}[K_{CL}(\bar{r})-K_{\alpha L}(\bar{r})]. \quad (3.61)$$

Выражение (3.61) можно использовать для определения неизвестных K_{CL} и $K_{\alpha L}$ по значениям δw_{Ln} и w_{n2} в ряде точек по хорде [130].

На рис. 3.8 приведен пример расчета скосов потока δw_{Ln} и w_{Tn} вдоль хорды профиля сечения лопасти гребного винта на $\bar{r}=0{,}7$ для распределения нагрузки типа NACA $a=0{,}8$ и толщины типа NACA-66 mod.

Учитывая перечисленные свойства поправок на несущую поверхность, получим следующие выражения для стрелки макси-

мальной кривизны профиля δ_c и его угла атаки α_I в составе лопасти:

$$\delta_c = K_C \delta_{c2} = K_C B_1 C_L; \tag{3.62}$$

$$\alpha_I = \alpha_{IL} + \alpha_{IT} = K_{\alpha L} \alpha_{IL2} + K_{\alpha T} e_0/D = K_{\alpha L} B_2 C_L + K_{\alpha T} e_0/D, \tag{3.63}$$

где $K_C = K_{CL}$.

Систематические данные о величинах поправок K_C, $K_{\alpha L}$, $K_{\alpha T}$ для оптимальных винтов приведены в работе [140] и прилож. 2. Ими можно пользоваться при проектировании гребных винтов с оптимальным или близким к нему распределением циркуляции. Для гребных винтов с распределением циркуляции сильно отличающимся от оптимального ввиду отсутствия соответствующих поправок следует производить расчеты с непосредственным использованием формул теории несущей поверхности.

Прибавив к углу индуктивной поступи β_I угол α_I, можно получить шаговый угол профиля φ, величина которого совместно с относительной кривизной средней линии δ_c обеспечит заданную величину циркуляции скорости в идеальной жидкости. В вязкой жидкости распределение скоростей вдоль профиля (а следовательно, и циркуляция) изменяется и заданный упор гребного винта не будет обеспечен. Для учета вязкости необходимо ввести соответствующие коррективы в величину шагового угла профилей сечений.

3.5. Поправки на влияние вязкости жидкости

Влияние вязкости жидкости на работу гребного винта проявляется двояко. Во-первых, в вязкой жидкости возникают касательные напряжения и соответствующая им сила сопротивления уменьшает (по сравнению с идеальной жидкостью) упор и увеличивает крутящий момент гребного винта. Во-вторых, изменяются распределения давлений по профилям сечений лопастей и циркуляции скорости вокруг них.

Ввиду сложности задачи определения течения жидкости в трехмерном пограничном слое лопастей учет влияния вязкости при расчетах гребных винтов производят в настоящее время на основе данных об обтекании плоских профилей. При этом вязкостное сопротивление обычно учитывают путем введения коэффициента обратного качества ε [10, 48]. Для его определения в отечественной практике долгое время применяли известную логарифмическую диаграмму В. М. Лаврентьева, построенную с учетом результатов М. А. Гречина по продувкам профилей в аэродинамической трубе. Что касается влияния вязкости на величину циркуляции около профилей сечений, то для гребного винта имеется ряд специфических особенностей.

Дело в том, что в проектировочных и поверочных расчетах гребных винтов используется линейная теория обтекания лопастей потоком идеальной жидкости, в рамках которой не рассматривается влияние на градиент и угол нулевой подъемной силы не только вязкости, но и толщины профиля. Известно, что эти факторы влияют на циркуляцию в противоположных направлениях, причем для относительно тонких профилей, каковыми обычно являются сечения лопастей на «рабочих» радиусах ($\bar{r} = 0{,}6 \div 0{,}8$), влияние вязкости и толщины на коэффициент подъемной силы C_L относительно невелико.

По этим причинам ряд специалистов придерживается мнения о том, что никаких поправок (помимо обычно вводимого коэффициента обратного качества ε) на влияние вязкости в геометрию спроектированного по линейной вихревой теории гребного винта вводить не требуется (см., например, [140]). По мнению других исследователей, такие поправки необходимы, и соответствующие коррективы вносились на основе расчетов по приближенным методам и экспериментов [144].

Длительное время применение обоснованной системы поправок на влияние вязкости сдерживалось из-за отсутствия надежных экспериментальных данных и расчетных методов. Лишь в последнее время появились работы, в которых достаточно строго поставлена и решена задача об обтекании плоских профилей потоком вязкой жидкости [19, 30].

При решении такой задачи течение жидкости около профиля подразделяют на три зоны: пограничного слоя, следа и потенциальной области вне слоя и следа [30]. Параметры течения жидкости в каждой зоне определяют из условия обеспечения непрерывности на их общих границах, причем учитывается взаимное влияние зон друг на друга. Расчет течения вязкой жидкости производят в данном случае на основе уравнений теории смешанного пограничного слоя и турбулентного следа, а в зоне потенциального потока — теории конформных отображений. Расчет характеристик обтекания профилей потоком вязкой жидкости осуществляют по программе, описанной в работе [30]. При этом для расчетов потенциального обтекания и описания поверхности профилей используют метод и программу, описанные в работе [33]. Сопоставление результатов расчетов с известными экспериментальными данными по профилям типа НЕЖ и NACA продемонстрировало удовлетворительную точность использованных методов и программы.

Результаты систематических расчетов обтекания профилей по указанной программе приведены в работе [74]. Были выбраны широкие диапазоны изменения параметров, характеризующих геометрию профиля и набегающий поток: $0{,}03 \leqslant \delta \leqslant 0{,}20$; $0 \leqslant \delta_c \leqslant 0{,}03$; $10^5 \leqslant R_{nS} \leqslant 3 \cdot 10^7$. Здесь число Рейнольдса вычисляется по формуле $R_{nS} = V_R^* c/\nu$. Степень турбулентности набегающего потока принята равной 2 %, поверх-

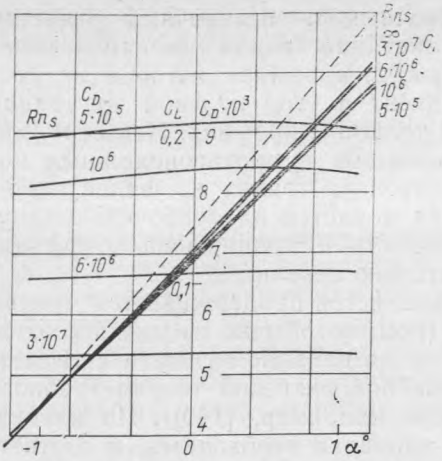


Рис. 3.9. Зависимость коэффициента подъемной силы C_L и сопротивления C_D профиля NACA-66, $a=0{,}8$ ($\delta=0{,}05$; $\delta_c=0{,}01$) от угла атаки α (по данным В. В. Дробленкова и Г. И. Каневского [30]).

— — — — в идеальной жидкости.

ность профиля — гидродинамически гладкой, а его геометрия — близкой к широко используемому профилю со средней линией NACA $a=0{,}8$ и распределением толщин типа NACA-66. При $\delta \leqslant 0{,}06$ толщина профилей около кромок несколько увеличена, причем тем в большей степени, чем меньше δ. Ординаты исследованных профилей приведены в работе [74] и прилож. 3.

Пример зависимости коэффициентов подъемной силы C_L и сопротивления C_D от угла атаки α^0 и числа Рейнольдса R_{nS} приведен на рис. 3.9.

Рассмотрим зависимость коэффициента подъемной силы профиля от угла атаки в идеальной жидкости:

$$C_{LI} = \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_I (\alpha - \alpha_{0I}), \tag{3.64}$$

где $\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_I$ и α_{0I} — градиент и угол нулевой подъемной силы профиля в идеальной жидкости. В соответствии с линейной теорией потенциального обтекания тонкого профиля

$$C_{LI}^{(0)} = 2\pi(\alpha + 2\delta_c), \tag{3.65}$$

где 2π и $-2\delta_c$ — градиент и угол нулевой подъемной силы. С учетом равенства (3.65) формулу (3.64) можно переписать в виде

$$C_{LI} = 2\pi\mu_2(\alpha + 2\varkappa_2\delta_c), \tag{3.66}$$

где $\mu_2 = \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_I \Big/ 2\pi$ — коэффициент влияния толщины профиля на величину градиента подъемной силы при потенциальном обтекании профиля; $\varkappa_2 = \alpha_{0I}/(-2\delta_c)$ — аналогичный коэффициент для угла нулевой подъемной силы.

В вязкой жидкости имеем для коэффициента подъемной силы при том же угле атаки α

$$C_L = \frac{dC_L}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0) = 2\pi\mu(\alpha + 2\varkappa\delta_c), \tag{3.67}$$

где $\mu = \mu_1\mu_2$ — коэффициент влияния толщины профиля и вязкости жидкости на градиент подъемной силы профиля в вязкой жидкости; $\varkappa = \varkappa_1\varkappa_2$ — аналогичный коэффициент для угла нулевой подъемной силы;

$$\mu_1 = \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)\Big/\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_I, \quad \varkappa_1 = \frac{\alpha_0}{\alpha_{0I}}$$

— коэффициенты влияния вязкости на градиент и угол нулевой подъемной силы телесного профиля.

Таким образом, коэффициенты μ_2 и $\varkappa_2$ зависят лишь от формы и относительной толщины профиля; для исследованных профилей

$$\mu_2 = 1 + 0{,}87\delta; \quad \varkappa_2 = 1{,}015. \tag{3.68}$$

Аппроксимация результатов систематических расчетов обтекания профилей дает для коэффициентов μ_1 и $\varkappa_1$ следующие зависимости

$$\mu_1 = 1 - \exp(-0{,}0691 + 12{,}46\delta - 0{,}1855\ln \mathrm{R}_{nS}); \tag{3.69}$$

$$\varkappa_1 = 1 + \frac{\delta(\delta - 0{,}05)}{(0{,}046\,64\ln \mathrm{R}_{nS} - 0{,}4378)^2}. \tag{3.70}$$

Аппроксимации (3.68)—(3.70) справедливы в диапазонах: $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}10$; $0 \leqslant \delta_c \leqslant 0{,}03$; $-0{,}1 \leqslant C_L \leqslant 0{,}3$; $\mathrm{R}_{nS} \geqslant 10^5$.

Анализ результатов расчетов и их сопоставление с известными данными экспериментов [102] позволяет сделать следующие выводы.

1. Градиент подъемной силы профиля в вязкой жидкости всегда меньше, чем в идеальной ($\mu_1 < 1$). В то же время влияние вязкости на угол нулевой подъемной силы не однозначно: для относительно тонких профилей ($\delta \leqslant 0{,}05$) $\alpha_0 < \alpha_{0I}$, а при $\delta > 0{,}05 - \alpha_0 > \alpha_{0I}$. В силу этого обстоятельства коэффициент подъемной силы толстых профилей при угле атаки вблизи α_0 может оказаться в вязкой жидкости бо́льшим, чем в идеальной.

2. В диапазоне углов атаки, характерных для «рабочих» сечений лопасти на расчетном или близком к нему режиме работы гребного винта, коэффициент подъемной силы профиля в вязкой жидкости меньше соответствующей величины для тонкого профиля в идеальной жидкости. Это означает, что профиль, средняя линия и угол атаки которого определены по линейной теории из условия обеспечения заданного коэффициента подъемной силы, не обеспечит при работе в вязкой жидкости необходимой величины C_L. Для выхода на расчетный режим

по подъемной силе необходимо увеличить угол атаки и(или) относительную кривизну профиля.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Пусть C_{L0} — расчетное значение коэффициента подъемной силы профиля, имеющего относительную толщину δ и кривизну δ_c. Из формулы (3.65), соответствующей линейной теории обтекания тонкого профиля, следует, что заданное значение C_{L0} будет обеспечено в идеальной жидкости при угле атаки

$$\alpha_I = \frac{C_{L0}}{2\pi} - 2\delta_c,$$

а в вязкой жидкости — при угле атаки

$$\alpha = \frac{C_{L0}}{2\pi\mu} - 2\varkappa\delta_c.$$

Разность этих углов дает величину, которую необходимо прибавить к величине α_I, чтобы получить в вязкой жидкости расчетное значение коэффициента подъемной силы C_{L0}*:

$$\Delta\alpha_f \equiv \alpha - \alpha_I = \frac{C_{L0}}{2\pi}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) - 2\delta_c(\varkappa - 1) =$$

$$= \alpha_I\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) - 2\delta_c\left(\varkappa - \frac{1}{\mu}\right). \qquad (3.71)$$

Если при заданном коэффициенте C_{L0} необходимо обеспечить безударный режим обтекания профиля, то между α_I, δ_c и C_{L0} существует определенная связь [см. выражения (3.54) и (3.55)], и формулу (3.71) можно преобразовать к виду

$$\Delta\alpha_f = C_{L0}\left[B_2\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) - 2B_1\left(\varkappa - \frac{1}{\mu}\right)\right] \qquad (3.72)$$

или

$$\Delta\alpha_f = C_{L0}K_f(\delta,\ \mathrm{R}_{nS}),$$

где

$$K_f = B_2\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) - 2B_1\left(\varkappa - \frac{1}{\mu}\right).$$

Подстановка в функцию K_f коэффициентов μ и $\varkappa$ и анализ полученных значений показали, что K_f практически не зависит от относительной толщины профиля δ, а является функцией только числа Рейнольдса R_{nS}. Соответствующая аппроксимация имеет вид

$$K_f = \frac{5{,}364}{\mathrm{R}_{nS}^{0{,}4249}}\ \text{рад} = \frac{307{,}4}{\mathrm{R}_{nS}^{0{,}4249}}\ \text{град}. \qquad (3.73)$$

---

* В принципе можно было бы увеличить относительную кривизну профиля δ_c, но учитывая малое влияние вязкости на угол нулевой подъемной силы в практически интересном диапазоне $0{,}03 \leqslant \delta \leqslant 0{,}07$, целесообразно изменять лишь угол атаки профиля.

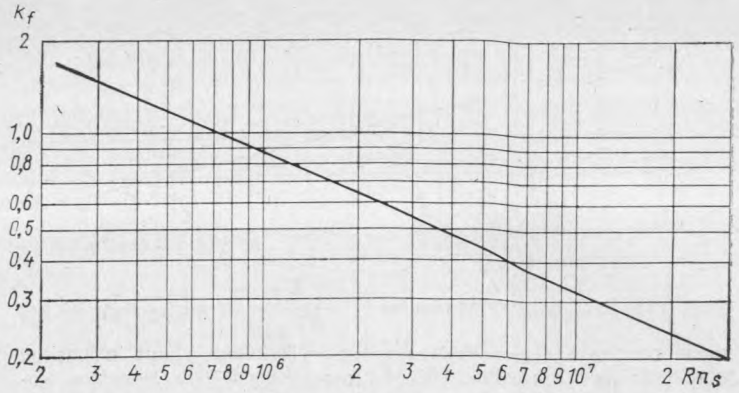


Рис. 3.10. Зависимость функции K_f, учитывающей влияние вязкости на дополнительный угол атаки профиля в градусах, от числа Рейнольдса.

На рис. 3.10 приведена зависимость функции K_f от числа Рейнольдса.

Теперь рассмотрим профиль в составе лопасти гребного винта. Шаговый угол сечения можно представить в виде

$$\varphi = \beta_I + \alpha_I + \Delta\alpha_f, \tag{3.74}$$

где β_I — угол индуктивной поступи, рассчитываемый по теории несущей линии; $\alpha_I = \alpha_{IL} + \alpha_{IT}$ — угол, обусловленный влиянием несущей поверхности [определяется по формуле (3.63)].

В случае, если поправка на вязкость $\Delta\alpha_f$ при проектировании по линейной теории несущей поверхности не вводится, гребной винт оказывается заведомо гидродинамически «легким». В этом случае величину коэффициента упора гребного винта в вязкой жидкости на расчетном режиме K_T при числе Рейнольдса R_{nP} можно определить по формуле

$$K_T = K_{T\,\text{расч}}\left(1 - R_{nP}^{-0{,}220}\right)$$

или графику, приведенному на рис. 3.11.

Число Рейнольдса гребного винта

$$R_{nP} = 5\,\frac{nD^2 A_E/A_0}{Z\nu}.$$

График получен в результате поверочных расчетов гребных винтов; допустимые диапазоны параметров $4 \leqslant Z \leqslant 6$; $0{,}1 \leqslant K_T \leqslant 0{,}3$.

Обратимся теперь к результатам расчетов коэффициента сопротивления профилей C_D. Как и следовало ожидать, наибольшее влияние на величину C_D оказывают число Рейнольдса R_{nS} и относительная толщина. Формула, аппроксимирующая результаты расчетов, имеет вид [74]

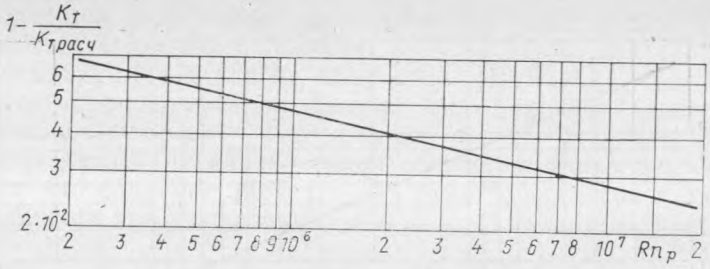


Рис. 3.11. Зависимость величины $1 - \dfrac{K_T}{K_{T\ \text{расч}}}$ от числа Рейнольдса гребного винта R_{nP}. Здесь K_T — коэффициент упора в вязкой жидкости без введения $\Delta\alpha_i$; $K_{T\ \text{расч}}$ — расчетное значение коэффициента упора в вязкой жидкости.

$$C_D = \frac{0{,}058\,08\,(1 + 2{,}3\delta)}{R_{nS}^{\,0{,}1458}}. \tag{3.75}$$

Структура формулы (3.75) и численные значения, получаемые при ее использовании, соответствуют экспериментальным данным по профилям типа NACA [102].

Отметим, что формула (3.75) справедлива в диапазонах: $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}20$; $R_{nS} \geqslant 10^5$; $-0{,}1 \leqslant C_L \leqslant 0{,}3$.

Коэффициент обратного качества

$$\varepsilon \equiv \frac{C_D}{C_L} = \frac{0{,}058\,08\,(1 + 2{,}3\delta)}{C_L\, R_{nS}^{\,0{,}1458}}. \tag{3.76}$$

На рис. 3.12 показана зависимость коэффициента обратного качества ε от коэффициента подъемной силы C_L и относительной толщины δ для ряда значений числа Рейнольдса R_{nS}. На этом же графике для сопоставления приведена аналогичная зависимость, полученная по известной диаграмме В. М. Лаврентьева — М. А. Гречина [48].

В заключение отметим, что гребной винт, спроектированный с использованием теории несущей поверхности и поправок на вязкость, должен в принципе развивать в реальной жидкости заданный упор. Возможные несоответствия между заданными и фактическими гидродинамическими характеристиками винта обусловлены отличием реального потока от принятой модели течения. Анализ результатов экспериментов с моделями гребных винтов, спроектированных с использованием теории несущей поверхности, показывает, что несоответствие расчетных и опытных данных по коэффициенту упора лежит, как правило, в пределах $\pm 5\,\%$. В связи с этим рекомендуется производить проверку спроектированного гребного винта путем испытаний модели или сопоставлением его характеристик с данными серийных испытаний.

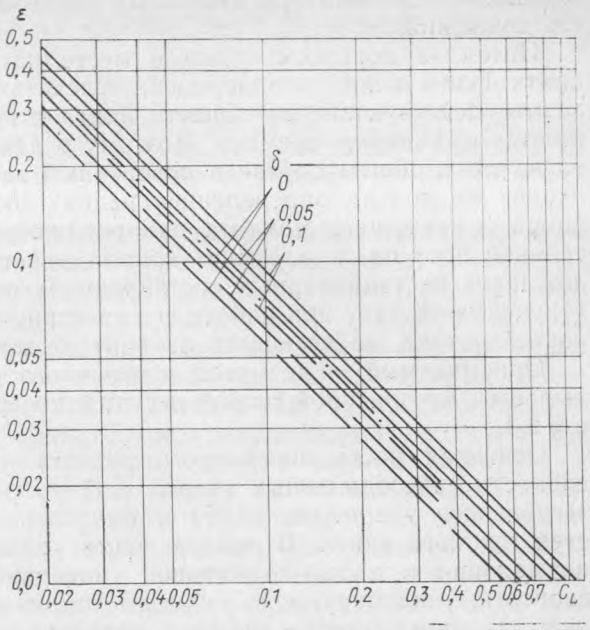


Рис. 3.12. Зависимость коэффициента обратного качества ε профилей типа NACA-66 mod $a=0{,}8$ от коэффициента подъемной силы C_L, относительной толщины δ и числа Рейнольдса R_{nS}.

——— $R_{nS}=10^6$;
— — — $R_{nS}=10^7$;
— · — по диаграмме Лаврентьева—Гречина.

В изложенной выше схеме проектирования гребного винта не учтен целый ряд факторов, влияние которых на гидродинамические характеристики движителя проявляется в реальных условиях эксплуатации судна. К таким факторам относятся шероховатость лопастей винта и корпуса судна, волнение моря и т. д. (см., например, работы [39, 56]).

Глава 4

ПОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ ГРЕБНОГО ВИНТА

4.1. Постановка задачи. Определение интенсивности присоединенных вихрей

Под поверочным расчетом гребного винта обычно понимают определение гидродинамических характеристик (кривых действия) винта, работающего в свободной воде или за корпусом судна, по известным его геометрическим элементам. Для выполнения поверочного расчета необходимо, следовательно, решить так называемую прямую задачу — определить вызванные скорости, давления и силы, действующие на гребной винт

заданной геометрии при известных кинематических параметрах его движения.

Поток за корпусом судна в месте расположения гребного винта существенно неоднороден, вследствие чего силы и моменты, действующие на лопасти винта и на винт в целом, являются функциями времени. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в общем случае в поверочный расчет гребного винта входит не только определение средних во времени величин упора и крутящего момента при различных значениях относительной поступи, т. е. расчет кривых действия винта, но и нахождение нестационарных составляющих сил и моментов, действующих на винт при работе его за корпусом судна. Поле скоростей потока, набегающего на винт, будем считать заданным.

Описываемый ниже метод поверочного расчета винта основывается на линейной теории несущей поверхности, изложенной в § 2.3.

Основная часть поверочного расчета — определение интенсивности присоединенных вихрей $\gamma_b(\xi, r, t)$ путем решения интегрального уравнения (2.55) и вычисление вызванных скоростей гребного винта. В правую часть уравнения (2.55) входит нормальная к опорной винтовой поверхности составляющая скорости, индуцируемой слоем источников интенсивности $q(\xi, r)$, имитирующих влияние толщины лопасти винта. Поэтому задача поверочного расчета включает также определение функции $q(\xi, r)$ из граничного условия (2.44).

Вид интегрального уравнения для нахождения γ_b зависит от способа вычисления нормальной скорости $w_{\gamma n}$, индуцируемой в точках опорной поверхности A_1 (см. рис. 3.7) вихревой системой винта. Рассмотрим вначале случай, когда эта скорость вычисляется как предельное значение (2.56) нормальной производной потенциала двойного слоя (2.53). Используя метод вычисления, данный в работах [61, 137], запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{A_1}\left[d_1^{(0)}(Q,\ t)-d_1^{(0)}(Q_1,\ t)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial n_I}\frac{\partial}{\partial n_I'}\left(\frac{1}{S_{Q_1Q}^{(0)}}\right)dA-\frac{1}{4\pi}d_1^{(0)}(Q_1,\ t)\int\limits_{A_1}\int\frac{\partial}{\partial n_I}\frac{\partial}{\partial n_I'}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{S_{Q_1Q}^{(0)}}\right)dA-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{Z-1}\int\limits_{A_1}\int d_1^{(j)}(Q,\ t)\frac{\partial}{\partial n_I}\frac{\partial}{\partial n_I'}\left(\frac{1}{S_{Q_1Q}^{(j)}}\right)dA-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\int\limits_{A_2}\int d_2^{(j)}(Q,\ t)\frac{\partial}{\partial n_I}\frac{\partial}{\partial n_I'}\left(\frac{1}{S_{Q_1Q}^{(j)}}\right)dA=$$

$$=-V_n(Q_1,\ t)+\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\int\limits_{A_1}\int\frac{\partial}{\partial n_I}\left(\frac{1}{S_{Q_1Q}^{(j)}}\right)q(Q)\,dA, \qquad (4.1)$$

где $Q_1(\xi_1,\ r_1)$ — точка на лопасти $j=0$, в которой удовлетворяется граничное условие.

В этом уравнении первый интеграл левой части — сингулярный, так как при $Q\to Q_1$ $S^{(0)}_{Q_1Q}\to 0$, причем введение разности $[d_1(Q)-d_1(Q_1)]$ приводит к тому, что порядок особенности подынтегральной функции становится равным кратности интеграла, и последний, следовательно, существует в смысле Коши. Интеграл во втором слагаемом левой части уравнения есть нормальная составляющая скорости, индуцируемой в точке Q_1 слоем диполей единичной плотности. По теореме Ампера она равна нормальной скорости, индуцируемой в той же точке вихрем единичной интенсивности, расположенным на контуре лопасти, и поэтому ее можно вычислить, используя формулы Био—Савара. Остальные интегралы в левой части уравнения не сингулярные, поскольку точка Q_1 не принадлежит поверхности A_2, если она не лежит на выходящей кромке лопасти. Однако при приближении Q_1 к выходящей кромке первое слагаемое $(j=0)$ в последней сумме левой части уравнения, т. е. нормальная скорость, обусловленная свободной вихревой пеленой рассматриваемой лопасти, достигает весьма больших величин. Для удобства вычислений целесообразно поэтому записать его в том же виде, что и первое слагаемое, т. е. интегралы в первом и втором слагаемых левой части уравнения следует вычислять по поверхности (A_1+A_2). Контурный вихрь при определении второго слагаемого будет тогда состоять из вихря, расположенного на входящей кромке лопасти, и двух полубесконечных вихрей — свободного концевого и осевого.

Первый интеграл $(j=0)$ во втором слагаемом правой части уравнения (4.1) есть взятое с обратным знаком прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя плотности q, расположенного на поверхности A_1. Этот несобственный интеграл является сходящимся, поскольку его ядро имеет интегрируемую особенность.

Проекция скорости внешнего потока на нормаль к срединной поверхности лопасти определяется выражением

$$V_n(Q_1,\ t)=\left[\vec{V}\,(r_1,\ \theta_p+\theta_1)-\vec{\Omega}\times\vec{r}_1\right]\vec{n}_C, \qquad (4.2)$$

где $\vec{V}\,(r_0,\ \theta_0)$ — вектор скорости натекающего на винт внешнего потока, который будем считать заданным в системе координат C и не зависящим от осевой координаты x_0; $\theta_1(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1)=\theta_{SI}(\bar{r}_1)+a(\bar{r}_1)\tilde{\xi}_1$; $\vec{n}_c$ — вектор нормали к срединной поверхности лопасти [формула (1.20)].

Приведем окончательный вид уравнения (4.1) для случая, когда образующая вихревых пелен не имеет откидки, а их шаг H_I принят постоянным и равным (как это обычно предпола-

гается в случае умеренно нагруженных винтов) $H_I = 2\pi R\lambda_{I0}$, где λ_{I0} — некоторое среднее значение индуктивной поступи. Входящие в уравнение нормальные вызванные скорости $w_{\gamma n}$ и w_{qn} выразим через осевую и окружную составляющие. В результате получим

$$-\frac{\lambda_{I0}}{\sqrt{\bar{r}_1^2+\lambda_{I0}^2}}\,\bar{w}_{\gamma\theta}+\frac{\bar{r}_1}{\sqrt{\bar{r}_1^2+\lambda_{I0}^2}}\,\bar{w}_{\gamma x}=-\overline{V}_n(\bar{r}_1,\ \theta_p+\theta_1)+$$

$$+\frac{\lambda_{I0}}{\sqrt{\bar{r}_1^2+\lambda_{I0}^2}}\,\bar{w}_{q\theta}-\frac{\bar{r}_1}{\sqrt{\bar{r}_1^2+\lambda_{I0}^2}}\,\bar{w}_{qx}, \tag{4.3}$$

где

$$\bar{w}_{\gamma x,\,\theta}=\frac{1}{4\pi}\left\{\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}a(\bar{r})\left[d_1^{(0)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p)-d_1^{(0)}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1,\ \theta_p)\right]\times\right.$$

$$\times f_{1x,\,\theta}^{(0)}\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}+\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-\infty}^{-1}a(\bar{r})\left[d_2^{(0)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p)-d_1^{(0)}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1,\ \theta_p)\right]f_{1x,\,\theta}^{(0)}d\tilde{\xi}d\bar{r}+$$

$$+d_1^{(0)}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1,\ \theta_p)\,\hat{f}_{3x,\,\theta}+\sum_{j=1}^{Z-1}\left[\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}a(\bar{r})\,d_1^{(j)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p)\,f_{1x,\,\theta}^{(j)}\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}+\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-\infty}^{-1}a(\bar{r})\,d_2^{(j)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p)\,f_{1x,\,\theta}^{(j)}\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}\right]\right\}; \tag{4.4}$$

$$\bar{w}_{qx,\,\theta}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{Z-1}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}b(\bar{r})\,\bar{q}(\tilde{\xi},\ \bar{r})\,f_{2x,\,\theta}^{(j)}\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}; \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{aligned}d_1^{(j)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p)&=b(\bar{r})\int\limits_{\tilde{\xi}}^{1}\bar{\gamma}_b\left(\tilde{\xi}'',\ \bar{r},\ \theta_p+a\cdot(\tilde{\xi}-\tilde{\xi}'')+\chi_j\right)d\tilde{\xi}'';\\ d_2^{(j)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p)&=b(\bar{r})\int\limits_{-1}^{1}\bar{\gamma}_b\left(\tilde{\xi}'',\ \bar{r},\ \theta_p+a\cdot(\tilde{\xi}-\tilde{\xi}'')+\chi_j\right)d\tilde{\xi}'';\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

$$b(\bar{r})=a(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_{I0}^2};$$

$$a=\frac{\bar{c}\cos\varphi}{2\bar{r}};$$

$$f_{1x}^{(j)} = -\frac{\bar{r}}{\bar{S}_j^3} - 3\lambda_{I0}^2 \frac{\bar{r}_1 (\theta_1 - \theta) \sin (\theta_1 - \theta - \chi_j) - \bar{r} (\theta_1 - \theta)^2}{\bar{S}_j^5};$$

$$f_{1\theta}^{(j)} = \frac{\lambda_{I0} \cos (\theta_1 - \theta - \chi_j)}{\bar{S}_j^3} - 3\lambda_{I0}^2 \times$$

$$\times \frac{\bar{r}_1 \bar{r} \sin^2 (\theta_1 - \theta - \chi_j) - \bar{r}^2 (\theta_1 - \theta) \sin (\theta_1 - \theta - \chi_j)}{\bar{S}_j^5};$$

$$f_{2x}^{(j)} = \frac{\lambda_{I0} \cdot (\theta_1 - \theta)}{\bar{S}_j^3};$$

$$f_{2\theta}^{(j)} = \frac{\bar{r} \sin (\theta_1 - \theta - \chi_j)}{\bar{S}_j^3};$$

$$\bar{S}_j = \bar{S}_j (\bar{r}_1, \theta_1; \bar{r}, \theta) = \left[\lambda_{I0}^2 \cdot (\theta_1 - \theta)^2 + \bar{r}_1^2 + \bar{r}^2 - \right.$$

$$\left. - 2\bar{r}_1 \bar{r} \cos (\theta_1 - \theta - \chi_j)\right]^{1/2};$$

$$\theta = \theta_{SI} (\bar{r}) + a (\bar{r}) \tilde{\xi};$$

$$f_{3x} = \int_{\bar{r}_H}^{1} \frac{-\bar{r}^2 \theta_L' (\bar{r}) - r_1 \sin \vartheta_2 + \theta_L' (\bar{r}) \bar{r}_1 \bar{r} \cos \vartheta_2}{\bar{S}_0^3 (\bar{r}_1, \theta_1; \bar{r}, \theta_L)} d\bar{r} -$$

$$- \bar{r}_H \int_{-\infty}^{\theta_L (\bar{r}_H)} \frac{\bar{r}_H - r_1 \cos (\theta_1 - \theta)}{\bar{S}_0^3 (\bar{r}_1, \theta_1; \bar{r}_H, \theta)} d\theta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\theta_L (1)} \frac{1 - \bar{r}_1 \cos (\theta_1 - \theta)}{\bar{S}_0^3 (\bar{r}_1, \theta_1; 1, \theta)} d\theta;$$

$$f_{3\theta} = -\lambda_{I0} \int_{\bar{r}_H}^{1} \frac{\bar{r}_1 \theta_L^1 (\bar{r}) - \bar{r} \theta_L' (\bar{r}) \vartheta_2 \sin \vartheta_2 - \left[\bar{r} \theta_L' (\bar{r}) + \vartheta_2\right] \cos \vartheta_2}{\bar{S}_0^3 (\bar{r}_1, \theta_1; \bar{r}, \theta_L)} d\bar{r} -$$

$$- \lambda_{I0} \int_{-\infty}^{\theta_L (\bar{r}_H)} \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_H \left[\cos (\theta_1 - \theta) + (\theta_1 - \theta) \sin (\theta_1 - \theta)\right.}{\bar{S}_0^3 (\bar{r}_1, \theta_1; \bar{r}_H, \theta)} d\theta +$$

$$+ \lambda_{I0} \int_{-\infty}^{\theta_L (1)} \frac{\bar{r}_1 - \cos (\theta_1 - \theta) - (\theta_1 - \theta) \sin (\theta_1 - \theta)}{\bar{S}_0^3 (\bar{r}_1, \theta_1; 1, \theta)} d\theta;$$

$$\theta_L (\bar{r}) = \theta_{SI} (\bar{r}) + a (\bar{r});$$

$$\theta_L' = \frac{d\theta_L}{d\bar{r}}; \quad \vartheta_2 = \theta_1 - \theta_L.$$

В случае, если нормальную скорость, индуцированную вихревой системой винта, вычисляют, используя формулы (2.54) и (2.56), входящие в левую часть уравнения (2.55) несобственные интегралы, невозможно преобразовать (как это было сделано выше) в интегралы типа Коши. Используя разложения функции $1/\bar{S}$ в ряды по специальным функциям и некоторые другие преобразования, их удается свести к интегралам типа Адамара [1, 161, 169].

Входящую в левую часть уравнения нормальную вызванную скорость можно также вычислить с помощью формулы Био-Савара. В этом случае представим ее в виде

$$\bar{w}_{\gamma n} = \bar{w}^{(1)}_{\gamma n} + \bar{w}^{(2)}_{\gamma n} + \bar{w}^{(3)}_{\gamma n}; \tag{4.7}$$

где $\bar{w}^{(1)}_{\gamma n}$ — скорость, вызванная присоединенными вихрями; $\bar{w}^{(2)}_{\gamma n}$ — скорость, вызванная свободными вихрями радиального направления; $\bar{w}^{(3)}_{\gamma n}$ — скорость, вызванная винтовыми свободными вихрями.

Слагаемые в уравнении (4.7) вычисляют по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{w}^{(1)}_{\gamma n}(Q_1,\ \theta_p) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\frac{\bar{r}}{\cos\beta_I}\times \\
&\times\int\limits_{\theta_T}^{\theta_L}\left[\sum_{j=0}^{Z-1}\bar{\gamma}^{(j)}_b(Q,\ \theta_p)\,T^{(j)}_{rn}(Q_1,\ Q)\right]d\theta\,d\bar{r}; \\
\bar{w}^{(2)}_{\gamma n}(Q_1,\ \theta_p) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\frac{\bar{r}}{\cos\beta_I}\times \\
&\times\int\limits_{-\infty}^{\theta_L}\left[\sum_{j=0}^{Z-1}\bar{\gamma}^{(j)}_{fr}(Q,\ \theta_p)\,T^{(j)}_{rn}(Q_1,\ Q)\right]d\theta\,d\bar{r}; \\
\bar{w}^{(3)}_{\gamma n}(Q_1,\ \theta_p) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\frac{\bar{r}}{\cos\beta_I}\times \\
&\times\int\limits_{-\infty}^{\theta_L}\left[\sum_{j=0}^{Z-1}\bar{\gamma}^{(j)}_{f\xi}(Q,\ \theta_p)\,T^{(j)}_{\xi n}(Q_1,\ Q)\right]d\theta\,d\bar{r},
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

причем

$$T^{(j)}_{rn}(Q_1,\ Q) = \left[\vec{n}_I,\ \vec{\bar{S}}_j,\ \vec{e}_r\right]\bar{S}_j^{-3};$$
$$T^{(j)}_{\xi n}(Q_1,\ Q) = \left[\vec{n}_I,\ \vec{\bar{S}}_j,\ \vec{e}_\xi\right]\bar{S}_j^{-3},$$

где $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$ — смешанное векторное произведение; $\vec{n}_I$ — нор-

маль в точке Q_1 к опорной вихревой поверхности с шаговым углом β_{I1}; $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\xi$ — единичные векторы координатных линий r и ξ, вычисленные в точке Q; связь между $\overline{\gamma}_{f\xi}$, $\overline{\gamma}_{fr}$ и $\overline{\gamma}_b$ определяется соотношениями (2.37)—(2.39).

Заметим, что практической необходимости в более подробной записи выражений для функций T_{rn} и $T_{\xi n}$ нет, поскольку величину смешанного векторного произведения можно определить в процессе расчетов на ЭВМ по известным составляющим векторов-сомножителей с помощью специальной подпрограммы.

Интегралы, определяющие вызванные скорости, являются в данном случае сингулярными, поскольку их ядра имеют особенность порядка квадрата расстояния между точками Q_1 и Q. Легко проверить, что характеристики этих интегралов

$$\left[\vec{n}_I, \vec{\bar{S}}_0, \vec{e}_r\right]\bar{S}_0^{-1} \text{ и } \left[\vec{n}_I, \vec{\bar{S}}_0, \vec{e}_\xi\right]\bar{S}_0^{-1}$$

удовлетворяют условию существования интегралов в смысле Коши.

Прежде чем переходить к изложению методов решения полученных интегральных уравнений, остановимся несколько подробнее на анализе их правых частей.

Как правило, поле скоростей внешнего потока задают в безразмерном виде тремя проекциями на оси координат системы C ($\overline{V}_{x_0}$ $\overline{V}_{r_0}$, $\overline{V}_{\theta_0}$), представленными как функции координат $\bar{r}$ и θ_0. В силу периодичности этих функций по углу θ_0 их можно представить в виде отрезков рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{V}_{x_0}(\bar{r},\ \theta_0) &= \sum_{k=-N}^{N} \overline{V}_{x_0 k}(\bar{r})\, e^{ik\theta_0};\\
\overline{V}_{r_0}(\bar{r},\ \theta_0) &= \sum_{k=-N}^{N} \overline{V}_{r_0 k}(\bar{r})\, e^{ik\theta_0};\\
\overline{V}_{\theta_0}(\bar{r},\ \theta_0) &= \sum_{k=-N}^{N} \overline{V}_{\theta_0 k}(\bar{r})\, e^{ik\theta_0}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Симметричные коэффициенты здесь комплексно сопряженные:

$$\overline{V}_k = \overline{V}^c_{|k|} \mp i\overline{V}^s_{|k|} \text{ при } k \gtrless 0.$$

Поскольку вызванные скорости $\vec{w}$ находят в системах координат D или E, связанных с гребным винтом, то и нормальную проекцию внешнего потока, входящую в правую часть интегрального уравнения задачи, вычисляют в связанной системе.

Переход к системе D осуществляют с учетом угловой скорости ее вращения по формулам:

$$\overline{V}_x = \overline{V}_{x_0}(\bar{r},\ \theta_0);$$

$$\overline{V}_y = \overline{V}_{r_0}(\bar{r},\ \theta_0)\cos\theta - \left[\overline{V}_{\theta_0}(\bar{r},\ \theta_0) - \frac{\bar{r}}{\lambda_t}\right]\sin\theta;$$

$$\overline{V}_z = \overline{V}_{\bar{r}_0}(\bar{r},\ \theta_0)\sin\theta + \left[\overline{V}_{\theta_0}(\bar{r},\ \theta_0) - \frac{\bar{r}}{\lambda_t}\right]\cos\theta,$$

причем в рассматриваемом случае $\theta_0 = \theta_p + \theta_1$.

Подставляя в эти выражения аппроксимацию Фурье поля скоростей, получим связь между амплитудами исходных гармоник по углу θ_0 и гармоник по углу поворота гребного винта θ_p:

$$\overline{V}_{xk}(\bar{r}_1,\ \theta_1) = \overline{V}_{x_0k}(\bar{r}_1)\, e^{ik\theta_1};$$

$$\overline{V}_{yk}(\bar{r}_1,\ \theta_1) = \left\{\overline{V}_{r_0k}(\bar{r}_1)\cos\theta_1 - \left[\overline{V}_{\theta_0k}(\bar{r}_1) - \frac{\bar{r}_1}{\lambda_t}\delta_{k0}\right]\sin\theta_1\right\} e^{ik\theta_1};$$

$$\overline{V}_{zk}(\bar{r}_1,\ \theta_1) = \left\{\overline{V}_{r_0k}(\bar{r}_1)\sin\theta_1 + \left[\overline{V}_{\theta_0k}(\bar{r}_1) - \frac{\bar{r}_1}{\lambda_t}\delta_{k0}\right]\cos\theta_1\right\} e^{ik\theta_1},$$

где $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$; $\delta_{k0} = 1$ при $k = 0$ и $\delta_{k0} = 0$ при $k \neq 0$.

Окончательное выражение для амплитуд гармоник (по углу θ_p) проекции скорости внешнего потока на нормаль к срединной поверхности лопасти в точке $(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1)$ следует из общей формулы (4.2):

$$\overline{V}_{nk}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) = \overline{V}_{xk}(\bar{r}_1,\ \theta_c)\, n_{cx}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) + \overline{V}_{yk}(\bar{r}_1,\ \theta_c)\, n_{cy}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) + \\ + \overline{V}_{zk}(\bar{r}_1,\ \theta_c)\, n_{cz}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1), \qquad (4.10)$$

где

$$\theta_c = \frac{1}{\bar{r}_1}\left[\left(\bar{c}_{S1} + \frac{1}{2}\,\bar{c}_1\tilde{\xi}_1\right)\cos\varphi_1 - \bar{f}_{M1}F_{c1}\right];$$

индекс «1» приписан величинам, вычисленным при $\xi = \xi_1$ и $r = r_1$; n_{cx}, n_{cy}, n_{cz} — направляющие косинусы нормали, определяемые соотношениями (1.20).

Если полагать, что $\cos\widehat{(\vec{n}_c,\ \vec{r})} \approx 0$, выражение (4.10) можно записать в виде

$$\overline{V}_{nk}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) = e^{ik\theta_1}\left\{\overline{V}_{x_0k}(\bar{r}_1)\cos\alpha - \left[\overline{V}_{\theta_0k}(\bar{r}_1) - \frac{\bar{r}_1}{\lambda_t}\delta_{k0}\right]\sin\alpha\right\}, \qquad (4.11)$$

где $\alpha = \varphi + 2\delta_c\dfrac{dF_c}{d\tilde{\xi}}$ — угол наклона касательной к средней линии профиля сечения $\bar{r} = \bar{r}_1$ по отношению к плоскости yz.

Отметим, что наличие множителя $e^{ik\theta_1}$ в выражении для $\overline{V}_{nk}$ показывает, что для каждой гармоники скорость внешнего потока распространяется вдоль хорды в виде «бегущей волны»

$$\overline{V}_{nk}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1)\, e^{ik\theta_p} = B(\bar{r}_1)\, e^{ik\ (\theta_p + a\xi_1)}, \qquad (4.12)$$

Физически это объясняется тем, что лопасть гребного винта вращается в неоднородном (предположительно стационарном) внешнем потоке, распределение скоростей в котором принято не зависящим от осевой координаты x.

Таким образом, двумерным аналогом рассматриваемой задачи является так называемая задача Сирса [76] о нестационарном обтекании профиля синусоидальным вертикальным порывом.

Для k-й гармоники в сечении лопасти на радиусе r число Струхаля

$$S_{ns} = \frac{k\Omega\,(c/2)}{V_E} = \frac{k\bar{c}}{\sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_t^2}} \approx ka\,(\bar{r}), \qquad (4.13)$$

что следует также и из равенства (4.12). Напомним, что величина $a\,(\bar{r})$ — «угловая полухорда» сечения лопасти:

$$a = \frac{(c/2)\cos\varphi}{r}.$$

Представив правую часть интегрального уравнения в виде суммы $\sum\limits_{k=-N}^{N} B_k(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1)\, e^{ik\theta_p}$, получим

$$B_k(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) = -\left[\overline{V}_{nk}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) + \overline{w}_{qn}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1)\,\delta_{k0}\right]. \qquad (4.14)$$

Решение интегрального уравнения также будет периодической функцией угла θ_p, поэтому его можно представить в виде суммы гармоник

$$\bar{\gamma}_b(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p) = \sum_{k=-N}^{N} \bar{\gamma}_{bk}(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, e^{ik\theta_p}. \qquad (4.15)$$

Подставив это выражение в левую часть интегрального уравнения и приравняв коэффициенты Фурье левой и правой частей, получим $(2N+1)$ независимых интегральных уравнений для нахождения комплексных амплитуд гармоник искомой функции $\gamma_{bk}(\tilde{\xi}, \bar{r})$:

$$\bar{w}_{\gamma nk}(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1) = B_k(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1). \qquad (4.16)$$

Вид функции $\overline{w}_{\gamma nk}$ зависит от вида левой части исходного интегрального уравнения. В случае, если вызванную вихрями скорость вычисляют по формулам (4.8), соотношение между

гармониками интенсивности присоединенных вихрей γ_b и интенсивностей свободных вихрей γ_{fr} и $\gamma_{f\xi}$ следует принимать в виде

$$\bar{\gamma}_{frk}(\bar{r},\ \theta) = -ik \int_{\theta}^{\theta_L} \gamma_{bk}(\bar{r},\ \theta_2)\, e^{-ik(\theta-\theta_2)}\, d\theta_2;$$

$$\bar{\gamma}_{f\xi k}(\bar{r},\ \theta) = \int_{\theta}^{\theta_L} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\frac{\bar{r}}{\cos \beta_I}\, \bar{\gamma}_{bk}(\bar{r},\ \theta_2) \right] e^{-ik(\theta-\theta_2)}\, d\theta_2.$$

Методы решения уравнения (4.16) делятся на две группы. В одной из них [6, 161, 169] неизвестную функцию γ_{bk} ищут в виде конечной суммы членов двойного ряда по некоторым заранее выбранным линейно-независимым функциям, удовлетворяющим граничным условиям на кромках лопасти (2.60):

$$\bar{\gamma}_{bk}(\tilde{\xi},\ \bar{r}) = \sum_m \sum_l C^k_{ml} \chi_m(\bar{r})\, \varphi_l(\tilde{\xi}), \tag{4.17}$$

где C^k_{ml} — неизвестные комплексные коэффициенты.

В методах другой группы [14, 57] непрерывное распределение присоединенных вихрей заменяется системой элементарных дискретных вихрей постоянной по длине интенсивности $\Gamma^{(k)}_i$, соответствующим образом расположенных на участках опорных поверхностей. В обоих случаях интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C^k_{ml} или постоянных $\Gamma^{(k)}_i$. Для составления системы в первом случае используют либо так называемый метод коллокаций, в котором исходное уравнение (граничное условие) удовлетворяется в необходимом числе точек $(\tilde{\xi}_1,\ \bar{r}_1)$, либо метод наименьших квадратов, в котором граничное условие приближенно удовлетворяется в среднем по поверхности лопасти таким образом, чтобы интеграл от квадрата ошибки являлся минимальной величиной. Во втором случае граничное условие удовлетворяется в точках, расположенных между присоединенными вихрями Γ_i.

Обе упомянутые группы методов решения интегрального уравнения (4.16) не имеют строгого математического обоснования и являются аналогами соответствующих методов решения уравнений теории крыла. Так, в первой группе методов распределение вихрей вдоль хорды профиля обычно задается в виде ряда Бирнбаума [76], т. е. ряда по функциям

$$\varphi_0 = \frac{1-\cos\mu}{\sin\mu} = \sqrt{\frac{1+\tilde{\xi}}{1-\tilde{\xi}}}, \tag{4.18}$$

$$\varphi_l = \sin l\mu \quad (l > 0),$$

где $\cos\mu = -\tilde{\xi}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \pi$, позволяющего удовлетворить условию Чаплыгина—Жуковского на задней кромке профиля

$$\gamma_b(-1, \bar{r}) = 0$$

и одному из следующих двух условий на входящей кромке

$$\lim_{\tilde{\xi} \to 1} \gamma_b(\tilde{\xi}, \bar{r}) = \begin{cases} 0 \\ \infty. \end{cases}$$

Заметим, что в последнем случае порядок бесконечности $\left(1/\sqrt{1-\tilde{\xi}^2}\right)$ сохраняется таким же, как в двумерной задаче.

Первый член ряда Бирнбаума (функция φ_0) в стационарной задаче об обтекании тонкого профиля дает, как известно, распределение нагрузки вдоль хорды, обусловленное наличием угла атаки профиля; при «безударном» обтекании этот член в разложении отсутствует (соответствующий коэффициент ряда равен нулю). Второй член ряда (4.18) $\varphi_1 = \sin\mu = \sqrt{1-\tilde{\xi}^2}$ соответствует распределению нагрузки для дужки квадратичной параболы при «безударном» обтекании ее вдоль хорды. Лишь эти два члена ряда Бирнбаума дают вклад в суммарную циркуляцию скорости вокруг профиля; остальные позволяют учесть особенности формы средней линии при расчете распределения нагрузки вдоль хорды и соответствуют бесциркуляционному обтеканию профиля. В нестационарной двумерной задаче Сирса о движении профиля при наличии синусоидального распределения поперечных скоростей вдоль хорды распределение амплитуд нестационарной нагрузки описывается в точности функцией φ_0 (коэффициенты при остальных членах ряда равны нулю). Указанные особенности ряда Бирнбаума позволяют рассчитывать на хорошую сходимость его и в случае рассматриваемой задачи об обтекании лопастей гребного винта.

Распределение интенсивности вихрей по радиусу задают в виде ряда по синусам кратных углов, если принято $\Gamma_b(r_H) = \Gamma_b(R) = 0$:

$$\chi_m = \sin m\sigma, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{4.19}$$

где $\cos\sigma = \dfrac{1 + \bar{r}_H - 2\bar{r}}{1 - \bar{r}_H}$ или [при $\Gamma_b(r_H) \neq 0$] ряда

$$\chi_0 = 1 + \cos\sigma, \quad \chi_m = \sin m\sigma,$$

$$m = 1, 2, \ldots, \tag{4.19а}$$

Функцию распределения вихрей как вдоль хорды, так и по радиусу можно также принять в виде произведения некоторой

функции, удовлетворяющей условиям на концах промежутка, на степенной полином, например:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_l &= \bar{\xi}^l \sqrt{\frac{1+\bar{\xi}}{1-\bar{\xi}}}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \\ \chi_m &= u^{m-1}\sqrt{u-u^2}, \quad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

где

$$u = \frac{\bar{r} - \bar{r}_H}{1 - \bar{r}_H}.$$

Наконец, функцию распределения интенсивности вихрей по радиусу можно представить в виде кусочно-постоянной или кусочно-линейной функции.

Во второй группе методов поверхность A_1 разбивают на ряд четырехугольных панелей, на каждой из которых присоединенный вихрь размещается на линии, расположенной на расстоянии $^1/_4$ хорды панели от ее передней кромки, а граничное условие удовлетворяется в точках линии, расположенной на расстоянии $^3/_4$ хорды панели [12]. В простейшем случае лопасть заменяют одним присоединенным вихрем, расположенным на расстоянии $^1/_4$ хорды от входящей кромки, а граничное условие удовлетворяется соответственно в точках линии $^3/_4$ [6, 153, 171] (в дальнейшем этот метод сокращенно будем называть «метод $^3/_4$»).

Проиллюстрируем сказанное на примере решения интегрального уравнения в форме (4.1), (4.3).

Зададим функцию распределения вихрей в виде (4.17)—(4.19):

$$\gamma_{bk} = \sum_{m=1}^{M} \sin m\sigma \left[\frac{1-\cos\mu}{\sin\mu} C_{m0}^k + \sum_{l=1}^{L} C_{ml}^k \sin l\mu \right]. \tag{4.21}$$

Тогда в соответствии с формулами (4.6) и (4.15) комплексная амплитуда k-й гармоники плотности диполей $d_k^{(j)}$ будет определяться выражением

$$\left(d_{1,2}^{(j)}\right)_k = b(\bar{r})\, e^{ik\chi_j} e^{-ika\cos\mu} \sum_{m=1}^{\pi} \sin m\sigma \int_{\alpha_{1,2}}^{\pi} e^{ika\cos\mu''} \times$$

$$\times \left[C_{m0}^k (1 - \cos\mu'') + \sum_{l=1}^{L} C_{ml}^k \sin l\mu'' \sin\mu'' \right] d\mu'', \tag{4.22}$$

где $\alpha_1(\mu) = -\arccos\mu$, $\alpha_2 = 0$.

Подставив эти выражения в уравнение (4.4) вместо функций $d_{1,2}(\theta_p)$, можно определить амплитуды гармоник вызван-

ных скоростей $\bar{w}_{\gamma nk}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1)$ и с учетом формулы (4.3) представить уравнение (4.16) в виде

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{L} C_{ml}^{k} F_{ml}^{k}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1) = B_k(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1). \tag{4.23}$$

В этом уравнении каждая из функций $F_{ml}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1)$ представляет собой комплексную амплитуду нормальной скорости, индуцируемой в точках лопасти l-м членом распределения нагрузки по хорде (φ_l) и m-м членом распределения по размаху (χ_m). Таким образом, решение уравнения (4.23) фактически сводится к аппроксимации распределения амплитуд нормальных скоростей, характеризуемого правой частью уравнения, системой элементарных распределений, соответствующих отдельным членам разложения (4.17).

Приняв

$$\left.\begin{aligned} B_k &= B^c_{|k|} \pm iB^s_{|k|} \\ C_k &= C^c_{|k|} \pm iC^s_{|k|} \\ F_k &= F^c_{|k|} \mp iF^s_{|k|} \end{aligned}\right\} \text{ при } k \leqslant 0,$$

из уравнения (4.21) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вещественных коэффициентов C^c и C^s:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{L}\left[C_{ml}^{k,c}F_{ml}^{k,c}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1) + C_{ml}^{k,s}F_{ml}^{k,s}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1)\right] = B_k^c(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1); \\ &\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{L}\left[-C_{ml}^{k,c}F_{ml}^{k,s}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1) + C_{ml}^{k,s}F_{ml}^{k,c}(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1)\right] = B_k^s(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1). \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Для $k=0$ остается лишь одно уравнение, ибо $C_{ml}^{0,s}=0$ и $F_{ml}^{0,s}=0$.

При использовании метода коллокаций для доопределения системы каждое ее уравнение необходимо удовлетворить в $M(L+1)$ точках лопасти. В результате при каждом $k \neq 0$ получим систему из $2M(L+1)$ уравнений для нахождения коэффициентов $C_{ml}^{k,c}$ и $C_{ml}^{k,s}$. Система для $k=0$ содержит $M(L+1)$ уравнений. При практических расчетах можно принимать $M=5$; $L=2$.

Недостатки метода коллокаций — отсутствие в рассматриваемом случае определенного способа выбора точек, в которых удовлетворены исходные уравнения (в особенности, когда коэффициенты системы F_{ml} становятся быстро осциллирующими функциями координат), а также ограниченность числа точек коллокаций при ограниченном числе членов разложения (4.22).

Для устранения второго из указанных недостатков систему (4.24) следует удовлетворять в достаточном [большем, чем $2M(L+1)$] числе точек, а нормальную систему получать методом наименьших квадратов.

Уравнение (4.23) можно также решать методом наименьших квадратов в его интегральном виде. При этом основное граничное условие задачи удовлетворяется в среднем по лопасти таким образом, чтобы интеграл от квадрата ошибки являлся минимальной величиной. Условие обеспечения минимума интеграла

$$I_\delta = \int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sum_m\sum_l C_{ml}^k F_{ml}^k - B_k\right)\left(\sum_m\sum_l \overline{C}_{ml}^k \overline{F}_{ml}^k - \overline{B}_k\right) d\tilde\xi_1\, d\bar r_1,$$

где черта сверху обозначает комплексно сопряженную величину, приводит для каждого $k = 1, 2, \ldots, N$ к следующей системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m\sum_l\left[C_{ml}^{k,\,c}\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(F_{ml}^{k,\,c}F_{pq}^{k,\,c}+F_{ml}^{k,\,s}F_{pq}^{k,\,s}\right)d\tilde\xi_1\,d\bar r_1+\right.\\
&\left.+C_{ml}^{k,\,s}\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(F_{ml}^{k,\,s}F_{pq}^{k,\,c}-F_{ml}^{k,\,c}F_{pq}^{k,\,s}\right)d\tilde\xi_1\,d\bar r_1\right]=\\
&=\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(B_k^c F_{pq}^{k,\,c}-B_k^s F_{pq}^{k,\,s}\right)d\tilde\xi_1\,d\bar r_1;\\
&\sum_m\sum_l\left[C_{ml}^{k,\,c}\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(F_{ml}^{k,\,c}F_{pq}^{k,\,s}-F_{ml}^{k,\,s}F_{pq}^{k,\,c}\right)d\tilde\xi_1\,d\bar r_1+\right.\\
&\left.+C_{ml}^{k,\,s}\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(F_{ml}^{k,\,c}F_{pq}^{k,\,c}+F_{ml}^{k,\,s}F_{pq}^{k,\,s}\right)d\tilde\xi_1\,d\bar r_1\right]=\\
&=\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}\left(B_k^c F_{pq}^{k,\,s}+B_k^s F_{pq}^{k,\,c}\right)d\tilde\xi_1\,d\bar r_1.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.25)$$

$p = 1, 2, \ldots, M$; $q = 0, 1, \ldots, L$.

Для $k = 0$ система имеет вид

$$\sum_m\sum_l C_{ml}^0\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}F_{ml}^0F_{pq}^0\,d\tilde\xi_1\,d\bar r_1=\int_{\bar r_H}^{1}\int_{-1}^{1}B_0F_{pq}^0\,d\tilde\xi_1\,d\bar r_1.\qquad(4.25а)$$

В соответствии со сказанным выше относительно первого члена левой части уравнения (4.1), некоторые из входящих в $F(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1)$ интегралов являются сингулярными. При их вычислении целесообразно выделять малую область в виде квадрата со стороной 2ε вокруг точки $(\tilde{\xi}_1, \bar{r}_1)$ и интеграл по этой области определять аналитически, разложив его ядро и функцию $d_1^{(0)}(\tilde{\xi}, \bar{r})$ в степенные ряды по ε и сохранив в результате интегрирования члены порядка не выше ε.

Найденные в результате решения системы (4.24) или (4.25) коэффициенты C_{ml}^k дают возможность с учетом уравнений (4.15) и (4.22) определить функцию $\gamma_b(\tilde{\xi}, \bar{r}, \theta_p)$. Для улучшения сходимости рядов по синусам кратных углов целесообразно вместо обычных сумм вычислять частичные суммы Чезаро [96], т. е. определять $\bar{\gamma}_b$ по формуле

$$\bar{\gamma}_b = \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{M} \sin m\sigma \left[\frac{1-\cos\mu}{\sin\mu} C_{m0}^0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{L} \frac{L-l+1}{L} C_{ml}^0 \sin l\mu \right] + 2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=0}^{L} \left(C_{ml}^{k,\,c} \cos k\theta_p + \right.$$

$$\left. + C_{ml}^{k,\,s} \sin k\theta_p \right) \frac{M-m+1}{M} \sin m\sigma \frac{L-l+1}{L} \varphi_l =$$

$$= \bar{\gamma}_{b0} + 2 \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{\gamma}_{bk}^{c} \cos k\theta_p + \overset{s}{\bar{\gamma}}_{bk} \sin k\theta_p \right). \qquad (4.26)$$

Суммарная интенсивность присоединенных вихрей в рассматриваемом сечении лопасти определяется зависимостью

$$\bar{\Gamma}_b(\bar{r}, \theta_p) = \int_{-1}^{1} b\bar{\gamma}_b \, d\tilde{\xi} = b(\bar{r}) \int_0^{\pi} \bar{\gamma}_b \sin\mu \, d\mu =$$

$$= \pi b(\bar{r}) \left\{ \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{M} \left(C_{m0}^0 + \frac{1}{2} C_{m1}^0 \right) \sin m\sigma + \right.$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{M-m+1}{M} \left[\left(C_{m0}^{k,\,c} + \frac{1}{2} C_{m1}^{k,\,c} \right) \cos k\theta_p + \right.$$

$$\left. \left. + \left(C_{m0}^{k,\,s} + \frac{1}{2} C_{m1}^{k,\,s} \right) \sin k\theta_p \right] \sin m\sigma \right\}. \qquad (4.27)$$

В дальнейшем опустим индекс «b», означающий «присоединенный» и величину $\Gamma(\bar{r}, \theta_p)$ будем именовать просто «цирку-

ляцией скорости вокруг сечения лопасти». При этом нужно помнить, что она не включает в себя интенсивность свободных радиальных вихрей, находящихся в потоке в пределах хорды сечения лопасти.

Распределение вызванных скоростей вдоль хорды можно найти с помощью выражений (4.4) и (4.22). При этом следует иметь в виду, что формулы (4.4) определяют суммарные вызванные скорости в точках хорды, т. е. скорости, индуцированные как свободными, так и присоединенными вихрями.

Сделаем замечание относительно определения константы λ_{I0}, характеризующей шаг винтовых вихревых поверхностей, в случае если он принимается постоянным. Для умеренно нагруженного гребного винта, работающего в однородном потоке (винт в свободной воде), этот шаг принято определять по геометрической полусумме относительных скоростей на бесконечности перед и за винтом. Определенный таким образом шаг является постоянной по радиусу величиной лишь для винта с оптимальным распределением циркуляции. При другом законе распределения циркуляции, а также для оптимального винта, приспособленного к попутному потоку (см. § 3.2), шаг вихревых пелен при указанном способе его определения будет изменяться вдоль радиуса. Принимая его в поверочном расчете винта постоянным, мы при вычислении вызванных скоростей совершаем некоторую ошибку, которая, однако, вряд ли будет значительной, поскольку вызванные скорости, как показывает расчет, сравнительно слабо меняются при небольших изменениях шага вихревых поверхностей. Ошибка будет, по-видимому, величиной того же порядка малости, что и ошибки, к которым приводит линеаризация задачи (в частности, вычисление вызванных скоростей, входящих в граничное условие, не в точках лопасти, а в точках вихревой пелены). При выполнении поверочного расчета примем

$$\lambda_{I0}^{*} \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{H}{D}\right)_{\bar{r}=0,7}$$

Перейдем к изложению способа определения циркуляции, основанного на использовании «метода $^3/_4$». В соответствии с данным выше определением этого метода будем считать, что присоединенный вихрь (несущая линия) находится на расстоянии $c(r)/4$ от входящей кромки лопасти. Тогда можно перейти к формулам «метода $^3/_4$», приняв в общих формулах

$$\bar{\gamma}_{bk}(\bar{\xi},\ \bar{r}) = \frac{\bar{\Gamma}_k(\bar{r})\,\delta(\bar{\xi}-\bar{\xi}_\Gamma)}{a\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_{I0}^2}} = \frac{\bar{\Gamma}_k(\bar{r})\,\delta(\theta-\theta_\Gamma)}{b(\bar{r})}, \qquad (4.28)$$

* Величину λ_{I0} можно, вообще говоря, уточнить в процессе расчета методом последовательных приближений, однако в связи со сказанным выше, а также вследствие большой трудоемкости поверочного расчета делать это вряд ли целесообразно.

где $\overline{\Gamma}_k(\bar{r})$ — безразмерная комплексная амплитуда k-й гармоники циркуляции на радиусе $\bar{r}$;

$$\tilde{\xi}_\Gamma = \frac{1}{2}, \quad \theta_\Gamma(\bar{r}) = \theta_{SI}(\bar{r}) + \frac{1}{2} a(\bar{r}); \tag{4.29}$$

$\delta(\theta)$ — дельта-функция.

Учитывая, что

$$\int_{\tilde{\xi}''}^{1} e^{-ika\tilde{\xi}''} \delta(\tilde{\xi}'' - \tilde{\xi}_\Gamma)\, d\tilde{\xi}'' = \begin{cases} 0 & \text{при } \tilde{\xi}_\Gamma < \tilde{\xi} < 1 \\ e^{-ika\tilde{\xi}_\Gamma} & \text{при } -1 \leqslant \tilde{\xi} \leqslant \tilde{\xi}_\Gamma, \end{cases}$$

из равенств (4.6) получим

$$d_1^{(j)} = d_2^{(j)} = \Gamma(\bar{r},\ \theta_p + \theta - \theta_\Gamma + \chi_j).$$

Интегральное уравнение (4.16), которое в данном случае должно выражать граничное условие непротекания в точках линии

$$\vartheta_1(\bar{r}_1) = \theta_1(-\tilde{\xi}_\Gamma,\ \bar{r}_1) = \theta_{SI}(\bar{r}_1) - \frac{1}{2} a(\bar{r}_1), \tag{4.30}$$

с учетом формул (4.3) и (4.4) можно записать в следующем виде:

$$-\int_{\bar{r}_H}^{1}\int_{0}^{\infty} \left[\overline{\Gamma}_k(\bar{r})\, e^{-ik(\tau+\vartheta_1)} - \overline{\Gamma}_k(\bar{r}_1)\, e^{-ik\theta_\Gamma(\bar{r}_1)}\right] f_1^{(0)}\, d\tau\, d\bar{r} -$$

$$-\sum_{j=1}^{Z-1}\int_{\bar{r}_H}^{1}\int_{0}^{\infty} \overline{\Gamma}_k(\bar{r})\, e^{-ik(\tau+\vartheta_1-\chi_j)} f_1^{(j)}\, d\tau\, d\bar{r} - \overline{\Gamma}_k(\bar{r}_1)\, e^{-ik\theta_\Gamma(\bar{r}_1)} f_3 =$$

$$= 4\pi\sqrt{\bar{r}_1^2 + \lambda_{I0}^2}\, B_k(\bar{r}_1). \tag{4.31}$$

Влиянием толщины лопастей на величину циркуляции в данном случае можно пренебречь. Тогда в соответствии с формулами (4.11) и (4.14) получим

$$B_k(\bar{r}_1) = -\overline{V}_{xk}(\bar{r}_1)\cos\alpha_1 + \overline{V}_{\theta k}(\bar{r}_1)\sin\alpha_1 \quad \text{при} \quad \bar{k} \neq 0;$$

$$B_0(\bar{r}_1) = [1 - \psi_{x0}(\bar{r}_1)]\cos\alpha_1 + \left[-\frac{\bar{r}_1}{\lambda_t} + \psi_{\theta 0}(\bar{r}_1)\right]\sin\alpha_1,$$

где $\alpha_1(\bar{r}_1) = \varphi + 2\delta_c \left.\dfrac{dF_c}{d\tilde{\xi}}\right|_{\tilde{\xi}=-\frac{1}{2}}$ — угол наклона касательной к средней линии профиля при $\theta = \vartheta_1$, ψ_{x0} и $\psi_{\theta 0}$ — коэффициенты

среднего попутного потока. Функции $f_1^{(j)}$ и f_3 определяются зависимостями

$$f_1^{(j)} = \frac{\bar{r}_1\bar{r} + \lambda_{I0}^2 \cos\psi_j}{\bar{S}_j^3(\bar{r},\ \tau - 2\beta_1)} -$$

$$- 3\lambda_{I0}^2 \frac{[\bar{r}\ (\tau - 2\beta_1) - \bar{r}_1 \sin\psi_j]\,[\bar{r}_1\ (\tau - 2\beta_1) - \bar{r}\sin\psi_j]}{\bar{S}_j^5(\bar{r},\ \tau - 2\beta_1)};$$

$$f_3 = f_3' - f_3''(\bar{r}_H) + f_3''(1);$$

$$f_3' = \int_{\bar{r}_H}^{1} \frac{1}{\bar{S}_0^3(\bar{r},\ 2\beta_1)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{d\theta_\Gamma}{d\bar{r}} \left[\bar{r}_1(\bar{r}^2 - \lambda_{I0}^2) - \bar{r}(\bar{r}_1^2 - \lambda_{I0}^2)\cos(2\beta_1) + 2\beta_1\lambda_{I0}^2\bar{r}\sin(2\beta_1)\right] - \right.$$

$$\left. - \bar{r}_1^2 \sin(2\beta_1) + 2\beta_1\lambda_{I0}^2\cos(2\beta_1)\right\} d\bar{r};$$

$$f_3'' = \int_{-\infty}^{\theta_\Gamma(\bar{r})} \frac{1}{\bar{S}_0^3(\bar{r},\ \vartheta_1 - \varphi_1)} \times$$

$$\times \left[\bar{r}(\bar{r}_1^2 - \lambda_{I0}^2)\cos(\vartheta_1 - \varphi_1) - \bar{r}_1(\bar{r}^2 - \lambda_{I0}^2) - \right.$$

$$\left. - \lambda_{I0}^2\bar{r}(\vartheta_1 - \varphi_1)\sin(\vartheta_1 - \varphi_1)\right] d\varphi_1;$$

$$\bar{S}_j(\bar{r},\ \Delta\theta) = \left[\lambda_{I0}^2(\Delta\theta)^2 + \bar{r}^2 + \bar{r}_1^2 - 2\bar{r}\bar{r}_1\cos(\Delta\theta - \chi_j)\right]^{1/2};$$

$$2\beta_1(\bar{r},\ \bar{r}_1) = \theta_\Gamma(\bar{r}) - \vartheta_1(\bar{r}_1);$$

$$\psi_j = \tau - 2\beta_1 - \chi_j.$$

Решение уравнения (4.31) будем искать в виде

$$\bar{\Gamma}_k(\bar{r}) = \sum_{m=1}^{M} C_m^k \chi_m(u), \tag{4.32}$$

где $\chi_m(u)$ определяется формулой (4.21),

$$C_m^k = C_m^{|k|,\,c} \pm iC_m^{|k|,\,s} \quad \text{при} \quad k \gtrless 0.$$

Тогда уравнение можно записать в форме, аналогичной (4.23):

$$\sum_{m=1}^{M} C_m^k F_m^k(\bar{r}_1) = B_k(\bar{r}_1) \tag{4.33}$$

и решать его одним из изложенных выше методов.

Полученные в результате решения системы алгебраических уравнений коэффициенты $C_m^{k,c}$ и $C_m^{k,s}$ позволяют найти циркуляцию вокруг сечений лопасти по формуле

$$\bar{\Gamma}(\bar{r},\ \theta_p) = \sum_{m=1}^{M} C_m^0 \chi_m(u) + \\ + 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{m_i=1}^{M}\left(C_m^{k,c}\cos k\theta_p + C_m^{k,s}\sin k\theta_p\right)\chi_m(u). \qquad (4.34)$$

Следует иметь в виду, что «метод $^3/_4$» является приближенным методом решения задачи о нахождении циркуляции. Он дает точные значения Γ [165] лишь в случае двумерной задачи о стационарном обтекании пластинки и дужки квадратичной параболы (распределение нагрузки вдоль хорды, соответствующее первым двум членам ряда Бирнбаума). В работе [169] произведена оценка точности «метода $^3/_4$» для случая задачи Сирса о нестационарном обтекании плоского профиля набегающим на него синусоидальным порывом и показано, что этот метод дает хорошее совпадение с точным решением при малых числах Струхаля (4.13) $S_{nS} < 1$. Поэтому есть основания полагать, что «метод $^3/_4$» должен давать достаточно точные значения амплитуд изменения циркуляции в случае узколопастных гребных винтов (a мало), по крайней мере, для не слишком высоких значений номера гармоники k. В то же время при использовании «метода $^3/_4$» значительно снижается время расчета на ЭВМ.

В изложенных выше методах определения интенсивности присоединенных вихрей и циркуляции не учтено влияние вязкости жидкости на гидродинамические характеристики профилей сечений лопасти. Это влияние (см. § 2.5 и 3.5) приводит к перераспределению давлений по поверхности профиля и, как следствие, к уменьшению величин γ_b и Γ. Изложенный в § 3.5 приближенный метод учета влияния вязкости можно распространить на случай поверочного расчета винта. Для этого в выражении (4.11) угол α следует определять по формуле

$$\alpha = \varphi - \Delta\alpha + 2\delta_c\varkappa\frac{dF_c}{d\bar{\xi}}, \qquad (4.35)$$

где

$$\Delta\alpha = (\varphi - \beta_{I0})\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + 2\delta_c\varkappa\left(\frac{1}{\mu} - 1\right), \qquad (4.36)$$

$\beta_{I0} = \operatorname{arctg}\lambda_{I0}/\bar{r}$ — угол индуктивной поступи; μ и $\varkappa$ — коэффициенты, учитывающие влияние вязкости на градиент и угол нулевой подъемной силы соответственно. При определении поправок μ и $\varkappa$ по формулам (3.68)—(3.70) число Рейнольдса в зависимости от цели поверочного расчета следует вычислять либо

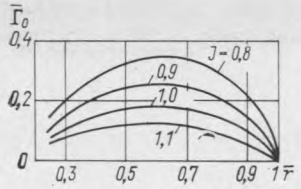


Рис. 4.1. Распределение циркуляции вдоль лопасти винта при различных режимах его работы.

для условий работы натурного винта, либо для условий испытаний его модели.

Приведем некоторые результаты расчетов по изложенным в данном параграфе методам. Расчеты выполнены по программам, составленным Л. А. Мухиной. На рис. 4.1 представлены расчетные кривые распределения циркуляции* вдоль лопасти при различных значениях относительной поступи для случая работы винта в однородном набегающем потоке. Винт имел следующие геометрические элементы: $Z=4$; $(H/D)_{\bar{r}=0,7}=1,24$; $A_E/A_0=1$. При решении интегрального уравнения (4.3) использовано представление функции $\bar{\gamma}_{b0}(\tilde{\xi}, \bar{r})$ в виде (4.21), причем принято $M=7$, $L=2$. Коэффициенты C^0_{ml} определены путем решения системы уравнений (4.25а), составленной на основе метода наименьших квадратов в его интегральном виде и решения исходного интегрального уравнения методом коллокаций как в прямом виде, когда граничное условие удовлетворялось в $M(L+1)=21$ точке лопасти (расположенных в узлах Гаусса по $\tilde{\xi}$ и $\bar{r}$), так и при большем числе точек (75) и составлении системы алгебраических уравнений методом наименьших квадратов (табл. 4.1). Из рассмотрения таблицы видно, что метод коллокаций при числе точек 5×15 дает практически те же результаты, что и метод наименьших квадратов. В даль-

Таблица 4.1. **Значения $\bar{\Gamma}_0(\bar{r})$ для $J=0,9$, полученные при различных способах решения**

$\bar{r}$	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95
Метод: наименьших квадратов (интегральный)	0,112	0,148	0,210	0,243	0,252	0,249	0,219	0,154	0,110
коллокаций, 3×7 точек	0,109	0,150	0,209	0,243	0,257	0,255	0,229	0,182	0,139
коллокаций, 5×15 точек	0,110	0,146	0,210	0,243	0,252	0,249	0,220	0,156	0,114

* При расчете влияние вязкости на величины γ_b и Γ не учитывалось.

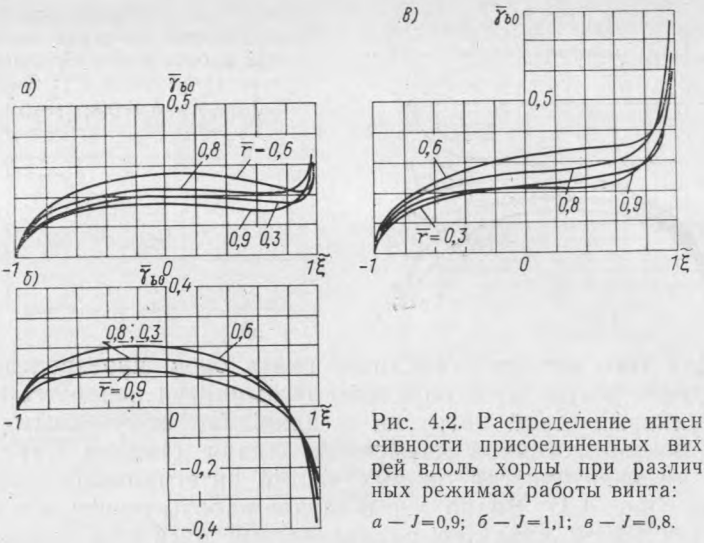


Рис. 4.2. Распределение интенсивности присоединенных вихрей вдоль хорды при различных режимах работы винта:
а — $J=0{,}9$; *б* — $J=1{,}1$; *в* — $J=0{,}8$.

нейшем всюду приведены результаты расчетов, при которых использован метод наименьших квадратов в интегральном виде.

Данные, приведенные в табл. 4.2, характеризуют сходимость решения интегрального уравнения (4.3) при увеличении числа членов разложения по хорде L в формуле (4.21).

Таблица 4.2. $\bar{\gamma}_{b0}(\tilde{\xi};\ 0{,}7)$ **при** $J=0{,}9$

$\tilde{\xi}$	−0,968	−0,836	−0,613	−0,324	0	0,324	0,613	0,836	0,968
$L=0$	0,0158	0,0371	0,0607	0,0886	0,1241	0,1737	0,2535	0,4153	0,9755
$L=1$	0,0585	0,1293	0,1897	0,2347	0,2624	0,2748	0,2806	0,3077	0,5110
$L=2$	0,0581	0,1287	0,1890	0,2343	0,2626	0,2755	0,2817	0,3091	0,5132

На рис. 4.2 для того же винта приведены кривые, характеризующие распределение интенсивности присоединенных вихрей $\bar{\gamma}_{b0}(\tilde{\xi},\ \bar{r})$ при различных значениях относительной поступи J. Видно, что наиболее «чувствительна» к изменению режима работы винта носовая часть профиля цилиндрического сечения лопасти. Это же следует и из рис. 4.3, на котором показано изменение распределения гидродинамической нагрузки (перепада давлений между нагнетающей и засасывающей сторонами лопасти) вдоль хорды в зависимости от угла поворота лопасти для трехлопастного винта, работающего в равномерно скошенном потоке.

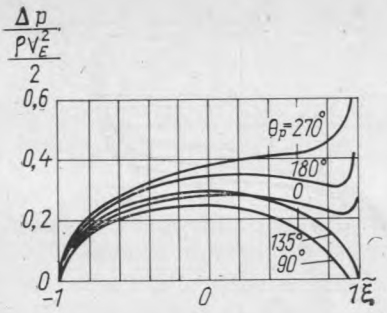


Рис. 4.3. Распределение гидродинамической нагрузки вдоль хорды при работе винта в скошенном потоке (угол скоса 8°): $Z=3$; $H/D=1{,}6$; $A_E/A_0=0{,}8$; $\bar{r}=0{,}4$; $J=1{,}2$.

Для того же трехлопастного винта было произведено сопоставление результатов определения амплитуд первой гармоники гидродинамической нагрузки с данными, полученными путем решения аналогичной двумерной задачи (задачи Сирса) при условии идентичности правых частей интегрального уравнения (4.16) (рис. 4.4). Видно, что в случае работы профиля в составе лопасти винта характер распределения нагрузки вдоль хорды сохраняется таким же, как и у изолированного плоского профиля, а амплитуды колебаний нагрузки уменьшаются.

При расчетах гидродинамической нагрузки и циркуляции вокруг сечений лопасти винта, работающего в неоднородном потоке, часто используют так называемую «гипотезу квазистационарности» [10], согласно которой нагрузка, действующая на сечение лопасти в рассматриваемом положении за оборот, считается равной нагрузке, которая действовала бы на это сечение, если бы весь гребной винт работал в однородном потоке при относительной поступи, равной мгновенному ее значению для рассматриваемого сечения, и вращался с частотой, соответствующей мгновенному значению окружной относительной скорости этого сечения. Заметим, что при использовании этой гипотезы не учитывается не только нестационарный характер

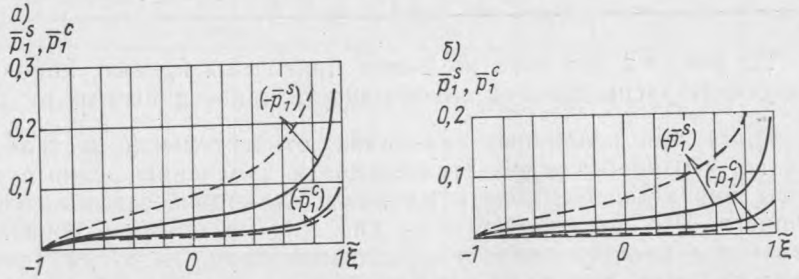


Рис. 4.4. Сопоставление результатов определения амплитуд первой гармоники гидродинамической нагрузки и решения двумерной задачи: *а* — $\bar{r}=0{,}6$; *б* — $\bar{r}=0{,}8$.

——— — профиль в составе лопасти винта; — — — — плоский профиль.

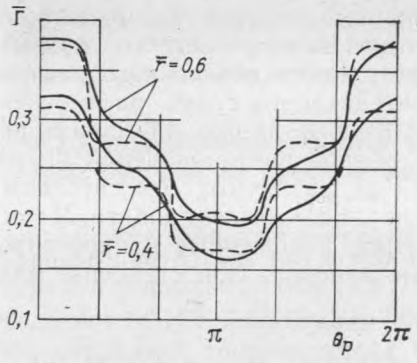


Рис. 4.5. Изменение циркуляции за оборот винта при работе модели в неоднородном потоке за экраном.

——— — расчет с учетом влияния нестационарности [см. формулы (4.31)]; — — — — расчет, основанный на «гипотезе квазистационарности».

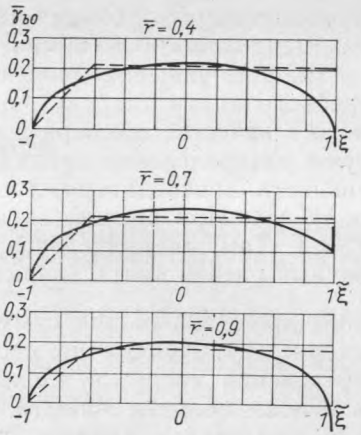


Рис. 4.6. Распределение средних за оборот значений интенсивности присоединенных вихрей.

— — — — проектные значения; ——— — поверочный расчет.

обтекания лопасти, но также и различие в нагрузке лопастей винта, работающего в неоднородном потоке.

Сравнение нестационарных и «квазистационарных» значений циркуляции (рис. 4.5) показывает, что вследствие влияния нестационарности процесса, как и следовало ожидать, сглаживаются резкие изменения циркуляции во времени; характер кривых при плавном изменении циркуляции в обоих случаях оказывается практически одинаковым. Что же касается влияния разной нагрузки лопастей, то оно различно для различных гармоник циркуляции (нагрузки). Так, например, для гармоник с номером, равным или кратным числу лопастей винта, это влияние, как легко заметить, вообще отсутствует. Для упомянутого выше трехлопастного винта, работающего в скошенном потоке, различие в нагрузке лопастей приводит к некоторому увеличению (на рабочих радиусах — до 10 %, на внутренних — до 25 %) амплитуд колебаний циркуляции. В целом расчет, основанный на «гипотезе квазистационарности», для встречающейся на практике неоднородности потока в месте расположения винта является достаточно хорошим «первым приближением» при оценке величины переменной за оборот нагрузки, действующей на лопасть винта, хотя величины отдельных гармоник циркуляции (в особенности при больших k) могут при этом заметно отличаться от точных значений. Следует отметить, что введение в результаты «квазистационарного» расчета поправок на влияние нестационарности, заимствованных из решения плоской задачи об обтекании одиночного профиля, приводит, как показывают расчеты [169], к существенному занижe-

нию амплитуд колебаний циркуляции, и поэтому не может быть рекомендовано в качестве практического расчетного приема.

На рис. 4.6—4.9 приведены результаты поверочного расчета гребного винта двухвального контейнерного судна, рассмотренного в качестве примера в гл. 3. Кривые на рис. 4.6 характеризуют распределение средних за оборот винта значений интенсивности присоединенных вихрей на различных относительных радиусах. При расчете в формуле (4.21) было принято $M = 5$, $L = 1$. Там же приведены значения, заложенные в проектировочный расчет винта (пунктирные кривые). Сопоставление аналогичных данных для суммарной циркуляции $\overline{\Gamma}_0(\bar{r})$ приведено на рис. 4.7. Кривые на рис. 4.8 характеризуют изменение распределения нагрузки вдоль хорды сечения на радиусе $\bar{r} = 0{,}7$ в течение оборота лопасти. На рис. 4.9 произведено сопоставление амплитуд различных гармоник циркуляции, рассчитанных на основе теории несущей поверхности (см. формулы 4.4) и по «методу $^3/_4$» (см. формулы 4.31). Как указывалось выше, с ро-

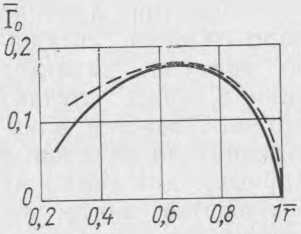


Рис. 4.7. Распределение вдоль лопасти средних за оборот винта значений циркуляции.

— — — проектные значения;
——— — поверочный расчет.

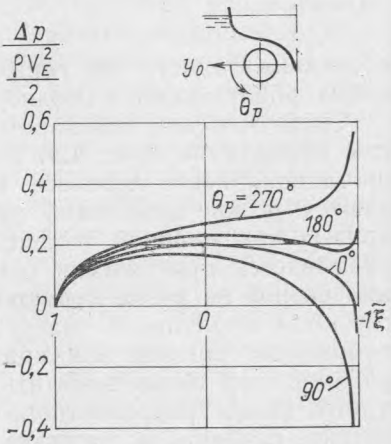


Рис. 4.8. Изменение распределения нагрузки вдоль хорды в течение оборота винта.

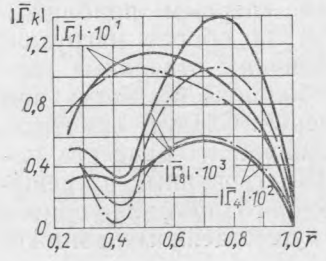


Рис. 4.9. Распределение амплитуд гармоник циркуляции вдоль лопасти винта.

——— по теории несущей поверхности [см. формулы (4.27)]; — · — · — по «методу 3/4» [см. формулы (4.34))].

стом числа Струхаля (номера гармоники) различие между точными и приближенными (основанными на использовании «метода $^3/_4$») значениями циркуляции увеличивается.

4.2. Периодические силы и моменты, действующие на гребной винт

Выражения для сил и моментов, возникающих на гребном винте при работе его в неоднородном потоке, получим на основании формул (2.116), (2.117) и (2.119).

В соответствии со сказанным в § 2.5 будем считать, что вектор относительной скорости $\vec{V}_R^{(j)}$ в точке j-й лопасти с координатами (ξ, r) определяется зависимостью

$$\vec{V}_R^{(j)}(\xi,\ r,\ \theta_p) = \vec{w}(\xi,\ r,\ \theta_p + \chi_j) + \vec{V}(r,\ \theta_p + \theta + \chi_j) - \vec{\Omega} \times \vec{r}, \tag{4.37}$$

где $\vec{w}$ — вызванная скорость, определяемая формулами, приведенными в § 4.1, а $\vec{V}(r_0, \theta_0)$ — заданная скорость внешнего потока, набегающего на винт.

Функции $\vec{w}(\theta_p)$ и $\vec{V}(\theta_p)$ являются периодическими с периодами 2π, поэтому проекции относительной скорости $\vec{V}_R^{(j)}$ можно представить в виде отрезков рядов Фурье

$$V_R^{(j)} = \sum_{k=-N}^{N} v_k e^{ik\ (\theta_p + \chi_j)},$$

где

$$v_k(\xi,\ r) = w_k(\xi,\ r) + V_k(r)\, e^{ik\theta\ (\xi,\ r)}, \tag{4.38}$$

а w_k и V_k — коэффициенты Фурье соответствующих проекций скоростей $\vec{w}$ и $\vec{V}$; $v_k = v^c_{|k|} \mp i v^s_{|k|}$ при $k \gtrless 0$.

Интенсивность присоединенных вихрей j-й лопасти в соответствии с уравнением (4.15) определяется зависимостью

$$\gamma_b^{(j)}(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p) = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_{bk}(\tilde{\xi},\ \bar{r})\, e^{ik\ (\theta_p + \chi_j)}.$$

При вычислении сил и моментов по формулам (2.116) и (2.117) будем считать, что вектор $\vec{\gamma}_b$ имеет радиальное направление.

Рассмотрим вначале силы и моменты, действующие на одну лопасть с номером $j = 0$. Их проекции на оси системы коорди-

нат B будут определяться выражениями:

$$\left.\begin{aligned} F_x^{(0)} &= \int\limits_{A_1}\int dF_{0x}; \quad F_y^{(0)} = -\int\limits_{A_1}\int \sin\theta_0\, dF_{0\theta}; \\ F_z^{(0)} &= \int\limits_{A_1}\int \cos\theta_0\, dF_{0\theta}; \quad M_x^{(0)} = \int\limits_{A_1}\int r\, dF_{0\theta}; \\ M_y^{(0)} &= \int\limits_{A_1}\int (r\sin\theta_0\, dF_{0x} - x\cos\theta_0\, dF_{0\theta}); \\ M_z^{(0)} &= -\int\limits_{A_1}\int (r\cos\theta_0\, dF_{0x} + x\sin\theta_0\, dF_{0\theta}), \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

где

$$dF_{0x} = -\rho\gamma_b^{(0)} V_{R\theta}^{(0)} (1 - \varepsilon \operatorname{tg}\beta_{I0})\, d\xi\, dr,$$
$$dF_{0\theta} = \rho\gamma_b^{(0)} V_{Rx}^{(0)} (1 + \varepsilon \operatorname{ctg}\beta_{I0})\, d\xi\, dr,$$
$$\theta_0 = \theta_p + \theta,$$

x, r, θ — координаты точки на опорной поверхности, связанные соотношениями (см. § 1.1)

$$\bar{x} = \bar{x}_R(\bar{r}) + \lambda_{I0}\theta(\tilde{\xi}, \bar{r}); \qquad \theta(\tilde{\xi}, \bar{r}) = \theta_{SI}(\bar{r}) + a(\bar{r})\,\tilde{\xi}.$$

Величину коэффициента обратного качества ε при расчете сил будем считать не зависящей от угла поворота лопасти.

Период изменения сил и моментов, действующих на винт в целом, равен $2\pi/Z$, и их проекции на оси координат (x_0, y_0, z_0) могут быть представлены в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} R(\theta_p) &= \frac{a_R^{(0)}}{2} + \sum_{q=1}^{q_{\max}} \left(a_R^{(q)} \cos qZ\,\theta_p + b_R^{(q)} \sin qZ\theta_p\right), \\ Q(\theta_p) &= \frac{a_Q^{(0)}}{2} + \sum_{q=1}^{q_{\max}} \left(a_Q^{(q)} \cos qZ\theta_p + b_Q^{(q)} \sin qZ\theta_p\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

где $q_{\max}$ — номер наивысшей гармоники силы или момента, подлежащей определению.

Для того чтобы получить выражения для коэффициентов a_R, b_R, a_Q и b_Q проекций сил и моментов на оси системы (x_0, y_0, z_0), воспользуемся правилом вычисления сумм гармонических функций, смещенных друг относительно друга по аргументу на $2\pi j/Z$, заключающимся в том, что q-й коэффициент Фурье функции

$$R(\theta_p) = \sum_{j=0}^{Z-1} F^{(j)}(\theta_p) = \sum_{j=0}^{Z-1} F^{(0)}(\theta_p + 2\pi j/Z)$$

равен увеличенному в Z раз коэффициенту Фурье функции $F^{(0)}(\theta_p)$ с номером qZ. Тогда с учетом зависимостей (4.39) для коэффициентов Фурье безразмерных (см. обозначения) сил и моментов можно получить следующие выражения:

$$a_{Rx}^{(0)} = -\frac{J_V^2 Z}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} (\bar{\gamma}_{b0} \bar{v}_{\theta 0} + 2\psi_{1,\theta})\, d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Rx}^{(q)} = -\frac{J_V^2 Z}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} \psi_{5,\theta}^{(qZ)}\, d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$b_{Rx}^{(q)} = -\frac{J_V^2 Z}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} \psi_{6,\theta}^{(qZ)}\, d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Ry}^{(0)} = -\frac{J_V^2 Z}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} A_{12,x}^{(1)}\, d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Ry}^{(q)} = -\frac{J_V^2 Z}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[A_{12,x}^{(qZ+1)} - A_{10,x}^{(qZ-1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$b_{Ry}^{(q)} = -\frac{J_V^2 Z}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[A_{9,x}^{(qZ-1)} - A_{11,x}^{(qZ+1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Rz}^{(0)} = \frac{J_V^2 Z}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(s + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} A_{11,x}^{(1)}\, d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Rz}^{(q)} = \frac{J_V^2 Z}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(s + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[A_{11,x}^{(qZ+1)} + A_{9,x}^{(qZ-1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$b_{Rz}^{(q)} = \frac{J_V^2 Z}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[A_{12,x}^{(qZ+1)} + A_{10,x}^{(qZ-1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$\bar{a}_{Qx}^{(0)} = \frac{J_V^2 Z}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r})(1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} (\bar{\gamma}_{b0} \bar{v}_{x0} + 2\psi_{1,x})\, d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Qx}^{(q)} = \frac{J_V^2 Z}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} \psi_{5,x}^{(qZ)} d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$b_{Qx}^{(q)} = \frac{J_V^2 Z}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} \psi_{6,x}^{(qZ)} d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Qy}^{(0)} = -\frac{J_V^2 Z}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} A_{12,\theta}^{(1)} d\tilde{\xi}\, d\bar{r} -$$

$$-\frac{J_V^2 Z}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r}) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} \bar{x}(\tilde{\xi}, \bar{r}) A_{11,x}^{(1)} d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Qy}^{(q)} = -\frac{J_V^2 Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \left[A_{12,\theta}^{(qZ+1)} - A_{10,\theta}^{(qZ-1)} \right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r} -$$

$$-\frac{J_V^2 Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r}) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} \bar{x}(\tilde{\xi}, \bar{r}) \left[A_{11,x}^{(qZ+1)} + \right. \tag{4.41}$$

$$\left. + A_{9,x}^{(qZ-1)} \right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$b_{Qy}^{(q)} = -\frac{J_V^2 Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \left[A_{9,\theta}^{(qZ-1)} - A_{11,\theta}^{(qZ+1)} \right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r} - \frac{J_V^2 Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r}) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \bar{x}(\tilde{\xi}, \bar{r}) \left[A_{12,x}^{(qZ+1)} + A_{10,x}^{(qZ-1)} \right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Qz}^{(0)} = \frac{J_V^2 Z}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} A_{11,\theta}^{(1)} d\tilde{\xi}\, d\bar{r} -$$

$$-\frac{J_V^2 Z}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r}) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int\limits_{-1}^{1} \bar{x}(\tilde{\xi}, \bar{r}) A_{12,x}^{(1)} d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$a_{Qz}^{(q)} = \frac{J_V^2 Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r}) (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[A_{11,\,\theta}^{(qZ+1)} + A_{9,\,\theta}^{(qZ-1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r} -$$

$$-\frac{J_V^2 Z}{8} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1+\varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \int_{-1}^{1} \bar{x}(\tilde{\xi},\ \bar{r}) \times$$

$$\times \left[A_{12,\,x}^{(qZ+1)} - A_{10,\,x}^{(qZ-1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$b_{Qz}^{(q)} = \frac{J_V^2 Z}{8} \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{r} b(\bar{r})(1-\varepsilon \operatorname{tg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[A_{12,\,\theta}^{(qZ+1)} + A_{10,\,\theta}^{(qZ-1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r} - \frac{J_V^2 Z}{8} \int_{\bar{r}_H}^{1} b(\bar{r})(1+\varepsilon \operatorname{ctg} \beta_{I0}) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \bar{x}(\tilde{\xi},\ \bar{r}) \left[A_{9,\,x}^{(qZ-1)} - A_{11,\,x}^{(qZ+1)}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r};$$

$$q = 1,\ 2,\ \ldots,\ q_{\max}.$$

В этих формулах обозначено:

$$\psi_1 = \bar{\gamma}_{b1}^{c} \bar{v}_1^{c} + \bar{\gamma}_{b1}^{s} \bar{v}_1^{s};$$

$$\psi_5^{(p)} = \bar{\gamma}_{b0} \bar{v}_p^{c} + \bar{v}_0 \bar{\gamma}_{bp}^{c};$$

$$\psi_6^{(p)} = \bar{\gamma}_{b0} \bar{v}_p^{s} + \bar{v}_0 \bar{\gamma}_{bp}^{s};$$

$$A_9^{(p)} = \psi_5^{(p)} \cos\theta + \psi_6^{(p)} \sin\theta;$$

$$A_{10}^{(p)} = \psi_6^{(p)} \cos\theta - \psi_5^{(p)} \sin\theta;$$

$$A_{11}^{(p)} = \psi_5^{(p)} \cos\theta - \psi_6^{(p)} \sin\theta;$$

$$A_{12}^{(p)} = \psi_6^{(p)} \cos\theta + \psi_5^{(p)} \sin\theta;$$

$$b(\bar{r}) = a(\bar{r}) \sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_{I0}^2};$$

$$\operatorname{tg} \beta_{I0} = \frac{\lambda_{I0}}{\bar{r}}.$$

В формулах (4.41) второй индекс у функций ψ и A означает, что в них входит коэффициент Фурье соответствующей проекции скорости V_R (т. е. v_{xn} или $v_{\theta n}$). Величины γ_{bk}^{c} и γ_{bk}^{s}, v_n^{c} и v_n^{s} представляют собой вещественные и мнимые части комплексных амплитуд γ_{bk} и v_n [см. формулы (4.26) и (4.38)].

Средние за оборот значения скоростей $\bar{v}_0(\bar{r})$ определяются зависимостями

$$\bar{v}_{x0} = \bar{w}_{x0} - (1 - \psi_{x0});$$

$$\bar{v}_{\theta 0} = \bar{w}_{\theta 0} - \left(\frac{\bar{r}}{\lambda_t} - \psi_{\theta 0}\right),$$

где ψ_{x0} и $\psi_{\theta 0}$ — коэффициенты средних на данном радиусе осевого и окружного попутных потоков.

Значения ε определяются формулой (П.6), где в качестве C_L можно принимать величину

$$C_L = \frac{\bar{\Gamma}_0(\bar{r})}{\bar{W}_0 \bar{c}} \quad \text{при} \quad \bar{W}_0(\bar{r}) = \left\{\left[\bar{w}_{x0}(0,\ \bar{r}) + \bar{V}_{x0}(\bar{r})\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\bar{w}_{\theta 0}(0,\ \bar{r}) - \frac{\bar{r}}{\lambda_t} + \psi_{\theta 0}\right]^2\right\}^{1/2}. \qquad (4.42)$$

В формулах (4.41), опущены произведения амплитуд гармоник относительной скорости и плотности присоединенных вихрей с номерами k, $n \geqslant 1$ (за исключением случая $k = n = 1$), поскольку величина их, как правило, существенно меньше, чем величина остальных слагаемых.

В предыдущем параграфе изложен приближенный метод определения нестационарной циркуляции вокруг сечений лопастей винта, основанный на замене лопасти одним присоединенным вихрем («метод $^3/_4$»). Полученные на его основе значения $\Gamma(r, \theta_p)$ можно использовать для приближенного расчета периодических сил и моментов, действующих на гребной винт. Поступим для этого следующим образом.

Подставим в формулы (4.41) значения γ_{bk}, определяемые зависимостями (4.28) и (4.32), и выполним интегрирование по переменной ξ. При этом в формулах (4.41) будем пренебрегать произведениями $\gamma_{bk} v_n$ при $n > 0$, т. е. заменим на каждом радиусе величины проекций относительной скорости их средними за оборот значениями v_{x0} и $v_{\theta 0}$. Поскольку величины вызванных скоростей в точках несущей линии в «методе $^3/_4$» не определяются, для их учета при расчете сил будем считать, что безразмерная величина средней относительной скорости

$$\bar{V}_{R0}(\bar{r}) \simeq \left[(1 - \psi_{x0})^2 + (\bar{r}/\lambda_t - \psi_{\theta 0})^2\right]^{1/2}, \qquad (4.43)$$

а направление ее приближенно совпадает с хордой сечения лопасти. Тогда

$$\bar{v}_{x0} \simeq -\bar{V}_{R0} \sin\varphi, \quad \bar{v}_{\theta 0} \simeq -\bar{V}_{R0} \cos\varphi. \qquad (4.44)$$

Влиянием вязкости жидкости на величину периодических сил будем пренебрегать.

С учетом сказанного для коэффициентов Фурье проекций безразмерных сил и моментов получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{Rx}^{(q)} &= -\frac{J_V^2 Z}{2}\sum_{m=1}^{M} C_m^{qZ,\,c}\int_{\bar r_H}^{1}\chi_m\bar v_{\theta 0}\,d\bar r;\\
b_{Rx}^{(q)} &= -\frac{J_V^2 Z}{2}\sum_{m=1}^{M} C_m^{qZ,\,s}\int_{\bar r_H}^{1}\chi_m\bar v_{\theta 0}\,d\bar r;\\
a_{Ry}^{(q)} &= -\frac{J_V^2 Z}{4}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{s-}F_{1m}+C_m^{c+}F_{2m}\right);\\
b_{Ry}^{(q)} &= -\frac{J_V^2 Z}{4}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{s+}F_{2m}-C_m^{c-}F_{1m}\right);\\
a_{Rz}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{4}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{c+}F_{1m}-C_m^{s-}F_{2m}\right);\\
b_{Rz}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{4}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{c-}F_{2m}+C_m^{s+}F_{1m}\right);\\
a_{Qx}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{4}\sum_{m=1}^{M} C_m^{qZ,\,c}\int_{\bar r_H}^{1}\chi_m\bar v_{x0}\bar r\,d\bar r;\\
b_{Qx}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{4}\sum_{m=1}^{M} C_m^{qZ,\,s}\int_{\bar r_H}^{1}\chi_m\bar v_{x0}\bar r\,d\bar r;\\
a_{Qy}^{(q)} &= -\frac{J_V^2 Z}{8}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{s-}D_{2m}+C_m^{c+}D_{1m}\right);\\
b_{Qy}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{8}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{c-}D_{2m}-C_m^{s+}D_{1m}\right);\\
a_{Qz}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{8}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{c+}D_{2m}-C_m^{s-}D_{1m}\right);\\
b_{Qz}^{(q)} &= \frac{J_V^2 Z}{8}\sum_{m=1}^{M}\left(C_m^{s+}D_{2m}-C_m^{c-}D_{1m}\right),\\
&\qquad q=1,\ 2,\ \ldots,\ q\,\max.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4.45)
$$

где обозначено

$$C_m^{c+}=C_m^{qZ+1,\,c}+C_m^{qZ-1,\,c};\quad C_m^{s+}=C_m^{qZ+1,\,s}+C_m^{qZ-1,\,s};$$
$$C_m^{c-}=C_m^{qZ+1,\,c}-C_m^{qZ-1,\,c};\quad C_m^{s-}=C_m^{qZ+1,\,s}-C_m^{qZ-1,\,s};$$

$$F_{1m} = \int\limits_{\bar r_H}^{1} \chi_m \bar v_{x0} \cos\theta_\Gamma \, d\bar r; \quad F_{2m} = \int\limits_{\bar r_H}^{1} \chi_m \bar v_{x0} \sin\theta_\Gamma \, d\bar r;$$

$$D_{1m} = \int\limits_{\bar r_H}^{1} \chi_m (\bar r \sin\theta_\Gamma \bar v_{\theta 0} + \bar x_\Gamma \cos\theta_\Gamma \bar v_{x0}) \, d\bar r;$$

$$D_{2m} = \int\limits_{\bar r_H}^{1} \chi_m (\bar r \cos\theta_\Gamma \bar v_{\theta 0} - \bar x_\Gamma \sin\theta_\Gamma \bar v_{x0}) \, d\bar r.$$

Функции χ_m определяются формулой (4.20), θ_Γ — формулой (4.29), $\bar x_\Gamma = \bar x_R(\bar r) + \lambda_{I0}\theta_\Gamma(\bar r)$. Коэффициенты $C_m^{k,c}$ и $C_m^{k,s}$ определяются в результате решения системы уравнений (4.33).

Зависимости, позволяющие оценить величину дополнительных периодических сил и моментов, возникающих на лопастях винта вследствие их конечной (ненулевой) толщины, получим на основе формул (2.119).

Проекции скорости $\vec V_\xi^{(j)}$ на оси системы координат B определяются зависимостями:

$$V_{\xi x}^{(j)} = V_\xi^{(0)}(r,\ \theta_p + \theta + \chi_j)\sin\beta_{I0};$$

$$V_{\xi y}^{(j)} = -V_\xi^{(0)}(r,\ \theta_p + \theta + \chi_j)\cos\beta_{I0}\sin(\theta_p + \theta + \chi_j);$$

$$V_{\xi z}^{(j)} = V_\xi^{(0)}(r,\ \theta_p + \theta + \chi_j)\cos\beta_{I0}\cos(\theta_p + \theta + \chi_j).$$

Тогда, учитывая соотношение $\frac{d}{dt} = \Omega \frac{d}{d\theta_p}$ и считая, что скорость V_ξ во всех точках сечения лопасти одинакова и равна $V_\xi|_{\xi=0}$, для проекций дополнительных сил и моментов, действующих на лопасть с номером $j = 0$, получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
F_{Vx}^{(0)} &= \int\limits_{r_H}^{R} dF_{Vx}; \quad F_{Vy}^{(0)} = \int\limits_{r_H}^{R} dF_{Vy}; \\
F_{Vz}^{(0)} &= \int\limits_{r_H}^{R} dF_{Vz}; \\
M_{Vx}^{(0)} &= \int\limits_{r_H}^{R} r(\sin\theta_{0S}\, dF_{Vy} - \cos\theta_{0S}\, dF_{Vz}); \\
M_{Vy}^{(0)} &= \int\limits_{r_H}^{R} (x_s\, dF_{Vz} - r\sin\theta_{0S}\, dF_{Vx}); \\
M_{Vz}^{(0)} &= \int\limits_{r_H}^{R} (r\cos\theta_{0S}\, dF_{Vx} - x_S\, dF_{Vy});
\end{aligned}\right\} \qquad (4.46)$$

где

$$\theta_{0S} = \theta_p + \theta_{SI}(\bar{r}); \quad x_S = x_R(\bar{r}) + R\lambda_{I0}\theta_{SI};$$

$$dF_{Vx} = \rho\Omega \frac{dV_\xi(r,\ \theta_{0S})}{d\theta_p} \sin\beta_{I0} A_s(r)\, dr;$$

$$dF_{Vy} = -\rho\Omega \frac{d}{d\theta_p}[V_\xi(r,\ \theta_{0S}) \sin\theta_{0S}] \cos\beta_{I0} A_s(r)\, dr;$$

$$dF_{Vz} = \rho\Omega \frac{d}{d\theta_p}[V_\xi(r,\ \theta_{0S}) \cos\theta_{0S}] \cos\beta_{I0} A_s(r)\, dr.$$

Считая, что прямые значения касательных к несущей поверхности вызванных скоростей пренебрежимо малы, для $\overline{V}_\xi(\bar{r},\ \theta_{0S})$ получим в соответствии с формулой (4.38) следующее соотношение:

$$\overline{V}_\xi(\bar{r},\ \theta_{0S}) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\theta_{SI}(\bar{r})}(\overline{V}_{xk} \sin\beta_{I0} + \overline{V}_{\theta k} \cos\beta_{I0})\, e^{ik\theta_p} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=-N}^{N} \overline{W}_k(\bar{r})\, e^{ik\theta_p}, \tag{4.47}$$

где $W_k = W^c_{|k|} \mp iW^s_{|k|}$ при $k \gtrless 0$.

Обусловленные влиянием толщины лопастей дополнительные периодические силы и моменты, действующие на винт в целом:

$$\vec{R}_V = \sum_{j=0}^{Z-1} \vec{F}^{(j)}_V = \sum_{j=0}^{Z-1} \vec{F}^{(0)}_V(\theta_p + \chi_j);\ \vec{Q}_V = \sum_{j=0}^{Z-1} \vec{M}^{(0)}_V(\theta_p + \chi_j).$$

Представляя их проекции в виде сумм (4.40), для безразмерных коэффициентов $a^{(q)}_{RV}, \ldots, b^{(q)}_{QV}$ получим следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned}
a^{(q)}_{RVx} &= \frac{\pi J_V q Z^2}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} \overline{W}^s_{qZ} \sin\beta_{I0} \bar{A}_s\, d\bar{r};\\
b^{(q)}_{RVx} &= -\frac{\pi J_V q Z^2}{2} \int_{\bar{r}_H}^{1} \overline{W}^c_{qZ} \sin\beta_{I0} \bar{A}_s\, d\bar{r};\\
a^{(q)}_{RVy} &= -\frac{\pi J_V q Z^2}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} \psi_1(\bar{r}) \cos\beta_{I0} \bar{A}_s\, d\bar{r};\\
b^{(q)}_{RVy} &= -\frac{\pi J_V q Z^2}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} \psi_2(\bar{r}) \cos\beta_{I0} \bar{A}_s\, d\bar{r};\\
a^{(q)}_{RVz} &= \frac{\pi J_V q Z^2}{4} \int_{\bar{r}_H}^{1} \psi_3(\bar{r}) \cos\beta_{I0} \bar{A}_s\, d\bar{r};
\end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

$$
\begin{aligned}
b_{RVz}^{(q)} &= -\frac{\pi J_V q Z^2}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \psi_4(\bar{r}) \cos\beta_{I0} \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
a_{QVx}^{(q)} &= -\frac{\pi J_V q Z^2}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \overline{W}_{qZ}^{s} \cos\beta_{I0} \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
b_{QVx}^{(q)} &= \frac{\pi J_V q Z^2}{4} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \overline{W}_{qZ}^{c} \cos\beta_{I0} \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
a_{QVy}^{(q)} &= \frac{\pi J_V Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} [qZ\bar{x}_s \psi_3 \cos\beta_{I0} -\\
&- (\varphi_1 \cos\theta_{SI} + \varphi_3 \sin\theta_{SI}) \bar{r} \sin\beta_{I0}] \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
b_{QVy}^{(q)} &= \frac{\pi J_V Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} [qZ\bar{x}_s \psi_4 \cos\beta_{I0} -\\
&- (\varphi_2 \cos\theta_{SI} - \varphi_4 \sin\theta_{SI}) \bar{r} \sin\beta_{I0}] \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
a_{QVz}^{(q)} &= \frac{\pi J_V Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} [-qZ\bar{x}_s \psi_1 \cos\beta_{I0} +\\
&+ (\varphi_3 \cos_{SI} + \varphi_1 \sin\theta_{SI}) \bar{r} \sin\beta_{I0}] \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
b_{QVz}^{(q)} &= \frac{\pi J_V Z}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} [-qZ\bar{x}_s \psi_2 \cos\beta_{I0} +\\
&+ (\varphi_4 \cos\theta_{SI} + \varphi_2 \sin\theta_{SI}) \bar{r} \sin\beta_{I0}] \bar{A}_s \, d\bar{r};\\
q &= 1, \; 2, \; \ldots, \; q_{\max}
\end{aligned}
\qquad (4.48)
$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= (\overline{W}_{qZ-1}^{c} - \overline{W}_{qZ+1}^{c}) \cos\theta_{SI} + (\overline{W}_{qZ-1}^{s} + \overline{W}_{qZ+1}^{s}) \sin\theta_{SI};\\
\psi_2 &= (\overline{W}_{qZ-1}^{s} - \overline{W}_{qZ+1}^{s}) \cos\theta_{SI} - (\overline{W}_{qZ-1}^{c} + \overline{W}_{qZ+1}^{c}) \sin\theta_{SI};\\
\psi_3 &= (\overline{W}_{qZ-1}^{s} + \overline{W}_{qZ+1}^{s}) \cos\theta_{SI} - (\overline{W}_{qZ-1}^{c} - \overline{W}_{qZ+1}^{c}) \sin\theta_{SI};\\
\psi_4 &= (\overline{W}_{qZ-1}^{c} + \overline{W}_{qZ+1}^{c}) \cos\theta_{SI} + (\overline{W}_{qZ-1}^{s} - \overline{W}_{qZ+1}^{s}) \sin\theta_{SI};\\
\varphi_1 &= (qZ-1) \overline{W}_{qZ-1}^{c} - (qZ+1) \overline{W}_{qZ+1}^{c};\\
\varphi_2 &= (qZ-1) \overline{W}_{qZ-1}^{s} - (qZ+1) \overline{W}_{qZ+1}^{c};\\
\varphi_3 &= (qZ-1) \overline{W}_{qZ-1}^{s} + (qZ+1) \overline{W}_{qZ+1}^{s};\\
\varphi_4 &= (qZ-1) \overline{W}_{qZ-1}^{c} + (qZ+1) \overline{W}_{qZ+1}^{c}.
\end{aligned}
$$

Полученные выше формулы (4.41), (4.45) и (4.48) показывают, что главный вклад в амплитуду q-й гармоники осевой

(направленной по оси винта) силы и осевого момента, возникающих на гребном винте, вносят гармоники поля скоростей набегающего на винт потока с номером (qZ), тогда как амплитуды боковых сил и моментов зависят главным образом от гармоник поля скоростей с номерами $(qZ-1)$ и $(qZ+1)$. Винт вследствие возникающих на нем периодических сил и моментов избирательно реагирует на неоднородность набегающего потока. В связи с этим не всякое уменьшение общей неоднородности поля скоростей приводит к снижению амплитуд периодических усилий на винте; необходимо, чтобы при этом уменьшались амплитуды указанных выше гармоник поля скоростей. Отмеченное обстоятельство влияет также и на характер зависимости амплитуд периодических сил и моментов от числа лопастей гребного винта при работе его в потоке с заданной неоднородностью: хотя в целом увеличение Z приводит к снижению амплитуд сил и моментов на винте, характер этой зависимости из-за особенностей спектра поля скоростей может быть немонотонным [10]. Вместе с тем периодические силы, действующие на одну лопасть винта, зависят от всех гармоник поля скоростей; характер их изменения за оборот сходен с характером изменения циркуляции вокруг сечений лопасти на относительных радиусах $\bar{r} > 0{,}6$ (см. формулы 4.39).

Приведем некоторые результаты расчетов перидических сил и моментов, возникающих на винте при его работе в неоднородном потоке за корпусом судна.

Таблица 4.3. **Расчетные значения амплитуд гармоник проекций периодических сил и моментов на гребном винте двухвального судна**

Номер гармоники	Номер формулы	R_x	R_y (горизонтально)	R_z (вертикально)	Q_x	Q_y	Q_z
$q=1$	(4.41)	3,15	1,60	2,40	0,50	0,90	1,48
	(4.45)	2,36	1,68	2,40	0,53	0,82	1,20
$q=2$	(4.41)	0,73	0,17	0,37	0,12	0,11	0,29
	(4.45)	0,42	0,16	0,31	0,09	0,08	0,18

В табл. 4.3 представлены расчетные значения амплитуд первых двух гармоник ($q=1$ и $q=2$) проекций периодических сил (в % от упора T) и моментов (в % от $T\cdot D$), возникающих на гребном винте быстроходного контейнерного судна (см. гл. 3). Расчеты выполнялись как по формулам теории несущей поверхности (4.41), так и по формулам (4.45), основанным на использовании результатов приближенного поверочного расчета винта по «методу $^3/_4$». Различие между соответствующими результатами расчетов для $q=1$ сравнительно невелико; для $q=2$ оно более заметно и обусловлено соответствующими

различиями в амплитудах гармоник циркуляции, рассчитанных двумя методами (см. § 4.1).

Таблица 4.4. **Расчетные значения амплитуд гармоник периодических сил и моментов для гребного винта одновального судна**

q	$\overline{R}_x$	$\overline{R}_y$	$\overline{R}_z$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_z$
1	0,0117	0,0208	0,0013	0,0040	0,030	0,013
	(0,0124)	(0,0165)	(0,0033)	(0,0039)	(0,030)	(0,013)
2	0,0079	0,0082	0,0031	0,0052	0,0055	0,0021
	(0,0086)	(0,0033)	(0,0019)	(0,0027)	(0,0057)	(0,0018)

В табл. 4.4 приведены результаты расчетов по формулам (4.45) и (4.48) амплитуд первых двух гармоник периодических сил и моментов для гребного винта, работающего за корпусом модели одновального судна с открытой кормой [159]. Элементы винта: $Z = 4$; $A_E/A_0 = 0{,}474$; $H/D = 1{,}025$; $e_0/D = 0{,}045$. Относительная поступь $J_V = 1$. Амплитуды сил отнесены к $(\rho V^2 R^2)$, моментов — к $(\rho V^2 R^3)$. В каждой графе табл. 4.4 указаны два значения: первое соответствует амплитудам, рассчитанным с учетом влияния толщины лопастей на величины сил и моментов, второе (в скобках) — без учета этого влияния. Рассмотрение данных табл. 4.4 показывает, что для некоторых составляющих влияние толщины оказывается достаточно заметным.

На рис. 4.10 приведена расчетная (по «методу $^3/_4$») кривая изменения за оборот осевой силы, действующей на одну лопасть гребного винта, работающего за корпусом модели танкера типа «Прага». Там же приведены результаты эксперимента, проведенного В. К. Турбалом и О. Н. Беззубиком. Совпадение между расчетными и экспериментальными данными следует признать достаточно хорошим.

Анализ результатов расчетов и сопоставление их с данными опытов показывает, что в большинстве встречающихся на практике случаев вычисление амплитуд периодических сил и моментов, возникающих на гребном винте, можно производить на основе «метода $^3/_4$». Более точный расчет по теории несущей

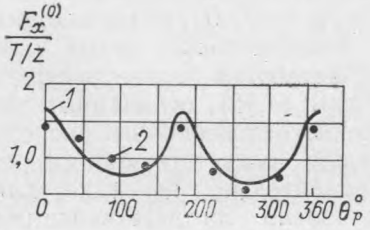


Рис. 4.10. Изменение осевой силы, действующей на лопасть в течение оборота. *1* — расчет по «методу $^3/_4$»; *2*—эксперимент.

поверхности необходим лишь для винтов с большой шириной лопастей ($A_E/A_0 > 0{,}2Z$). При выборе метода расчета периодических сил следует также иметь в виду, что экспериментальные данные о неоднородности поля скоростей в диске винта, являющиеся исходными для расчета, носят, как правило, достаточно условный характер: измерения проводятся на модели корпуса судна при отсутствии гребного винта, вследствие чего при расчетах, основанных на использовании этих данных, не учитывается влияние таких факторов, как изменение поля скоростей под действием работающего винта и масштабный эффект поля скоростей (в тех случаях, когда расчет сил выполняется для натурного гребного винта).

Периодические силы, возникающие на гребном винте вследствие влияния неоднородности набегающего потока, возбуждают колебания в системе валопровод—корпус судна. При этом колеблется и сам гребной винт, вследствие чего на нем возникают дополнительные периодические силы. Их влияние в расчетах вибрации валопровода и корпуса учитывают обычно через коэффициенты присоединенных масс винта. Однако величину этих дополнительных сил можно рассчитать и методом, основанным на вихревой теории несущей поверхности, если при удовлетворении граничного условия непротекания на поверхности лопасти учесть, что кроме равномерного вращения гребной винт совершает линейные и угловые колебания с малыми амплитудами в соответствующих направлениях. Интегральное уравнение для интенсивности дополнительных присоединенных вихрей в силу линеаризации задачи будет при этом иметь тот же вид, что и (4.1); изменится лишь правая часть этого уравнения. Оценки, основанные на использовании результатов решения плоских задач, показывают, что при частотах, соответствующих значениям числа Струхаля $S_{nS} > 0{,}5$, основная часть сил, возникающих на винте вследствие его колебаний, представляет собой силы инерционной природы. Это и позволяет приближенно определять их при расчетах вибрации, как указывалось выше, через коэффициенты присоединенных масс винта. Сказанное относится также и к расчетам сил, возникающих при упругих колебаниях лопастей гребного винта.

4.3. Расчет кривых действия гребного винта

Коэффициенты упора K_T и момента K_Q гребного винта, работающего в свободной воде или за корпусом судна, определяются постоянными коэффициентами разложения проекций силы $\overline{R}_x$ и момента $\overline{Q}_x$ в ряды (4.40). Из формулы (4.41) получим (изменив знак в выражении для $a^{(0)}_{Qx}$ с тем, чтобы получить, как это обычно принято, $K_Q > 0$):

для винта в свободной воде:

$$\left.\begin{aligned} K_T &= \frac{ZJ^2}{4}\int\limits_{\bar r_H}^{1} b(\bar r)(1-\varepsilon\operatorname{tg}\beta_{I0})\times \\ &\times\int\limits_{-1}^{1}\bar\gamma_{b0}(\tilde\xi,\ \bar r)\Big[\frac{\bar r}{\lambda_t}-\bar w_{\theta 0}(\tilde\xi,\ \bar r)\Big]d\tilde\xi\,d\bar r; \\ K_Q &= \frac{ZJ^2}{8}\int\limits_{\bar r_H}^{1}\bar r b(\bar r)(1+\varepsilon\operatorname{ctg}\beta_{I0})\times \\ &\times\int\limits_{-1}^{1}\bar\gamma_{b0}(\tilde\xi,\ \bar r)[1+\bar w_{x0}(\tilde\xi,\ \bar r)]\,d\tilde\xi\,d\bar r; \end{aligned}\right\} \qquad (4.49)$$

для винта за корпусом:

$$\left.\begin{aligned} K_T &= \frac{ZJ_V^2}{4}\int\limits_{\bar r_H}^{1} b(\bar r)(1-\varepsilon\operatorname{tg}\beta_{I0})\times \\ &\times\int\limits_{-1}^{1}\Big\{\bar\gamma_{b0}(\tilde\xi,\ \bar r)\Big[\frac{\bar r}{\lambda_t}-\psi_{\theta 0}(\bar r)-\bar w_{\theta 0}(\tilde\xi,\ \bar r)\Big]- \\ &\quad -2\left(\bar\gamma_{b1}^{c}\bar v_{\theta 1}^{c}+\bar\gamma_{b1}^{s}\bar v_{\theta 1}^{s}\right)\Big\}d\tilde\xi\,d\bar r; \\ K_Q &= \frac{ZJ_V^2}{8}\int\limits_{\bar r_H}^{1}\bar r b(\bar r)(1+\varepsilon\operatorname{ctg}\beta_{I0})\times \\ &\times\int\limits_{-1}^{1}\{\bar\gamma_{b0}(\tilde\xi,\ \bar r)[1-\psi_{x0}(\bar r)-\bar w_{x0}(\tilde\xi,\ \bar r)]- \\ &\quad -2\left(\bar\gamma_{b1}^{c}\bar v_{x1}^{c}+\bar\gamma_{b1}^{s}\bar v_{x1}^{s}\right)\}d\tilde\xi\,d\bar r. \end{aligned}\right\} \qquad (4.50)$$

Входящие в эти формулы величины интенсивности присоединенных вихрей $\bar\gamma_b$ и вызванных скоростей $\bar w$ для заданных значений относительной поступи J или J_V определяются расчетом по методу, изложенному в § 4.1 [формулы (4.4), (4.26)].

Слагаемое в виде удвоенной суммы в фигурных скобках в формулах (4.50) характеризует вклад первой гармоники скорости внешнего потока в величину средних за оборот значений упора и момента винта. Обычно это слагаемое невелико по сравнению с первым слагаемым в K_T или K_Q. Однако именно оно определяет, например, увеличение упора и момента гребного винта при работе его в скошенном потоке (факт, хорошо известный из экспериментов и расчетным путем впервые подтвержденный И. Я. Миниовичем [65]).

Выше в § 2.5 были получены выражения (2.128) для дополнительного упора и момента, возникающих из-за наличия подсасывающей силы на входящих кромках лопастей винта [наличие этой силы не учитывается формулами (4.49) и (4.50)]. Сопоставляя формулы (2.124) и (4.26), для коэффициентов дополнительного упора и момента можно получить следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned} K_{Ts} &= \frac{\pi Z J^2}{8} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \frac{b\,(\bar{r})\,\lambda_{I0}}{\cos\chi\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_{I0}^2}} \times \\ &\times \left(\sum_{m=1}^{M} C_{m0}^{(0)} \frac{M-m+1}{M} \sin m\sigma \right)^2 d\bar{r}, \\ K_{Qs} &= -\frac{\pi Z J^2}{16} \int\limits_{\bar{r}_H}^{1} \frac{b\,(\bar{r})\,\bar{r}^2}{\cos\chi\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_{I0}^2}} \times \\ &\times \left(\sum_{m=1}^{M} C_{m0}^{(0)} \frac{M-m+1}{M} \sin m\sigma \right)^2 d\bar{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

Коэффициенты C_{m0}, характеризующие величину первого члена в разложении интенсивности присоединенных вихрей в ряд Бирнбаума (4.26), для режимов работы винта, близких к проектному, весьма малы (напомним, что сечения лопасти проектируются на режим «безударного входа», при котором $C_{m0} = 0$). Поэтому величины K_{Ts} и K_{Qs}, содержащие квадраты этих коэффициентов, являются малыми добавками к основным величинам K_T и K_Q. Так, согласно расчету, при $K_T = 0{,}3$ и $C_T = 1{,}5$ $K_{Ts}/K_T = +1\ \%$; $K_{Qs}/K_Q = -1{,}5\ \%$; при $C_T = 3$ $K_{Ts}/K_T = 2\ \%$, $K_{Qs}/K_Q = -7\ \%$.

Формулы (4.49) и (4.50) получены на основе вихревой теории несущей поверхности. Значения коэффициентов упора и момента гребного винта в осесимметричном поле скоростей могут быть также рассчитаны и на базе теории несущей линии. Исходным для такого расчета является решение интегродифференциального уравнения теории несущей линии (2.100), записанного с учетом поправок на несущую поверхность и вязкость жидкости [74]:

$$G = \frac{1}{2}\mu\bar{c}\bar{V}_R\left(\frac{\varphi-\beta_I}{K_{\alpha L}} + \frac{2\delta_c\varkappa}{K_{cL}} - \frac{e_0}{D}K_{\alpha T}\right), \qquad (4.52)$$

где μ, $\varkappa$ — коэффициенты, учитывающие влияние вязкости на градиент подъемной силы и угол нулевой подъемной силы плоских профилей (см. § 3,5); K_{cL}, $K_{\alpha L}$, $K_{\alpha T}$ — поправки на влияние несущей поверхности (см. § 3.4). Поскольку уравнение (4.52)

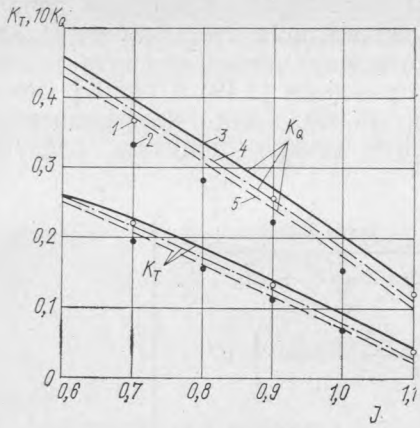


Рис. 4.11. Сравнение расчетных и экспериментальных кривых действия винта ($Z=3$; $A_E/A_0=0{,}6$; $H/D=1{,}08$).

1 — расчет по теории несущей поверхности; *2* — расчет по теории несущей линии; *3* — эксперимент в кавитационной трубе MIT [114]; *4* — эксперимент *NSRDC* [114]; *5* — эксперимент ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова.

решается для произвольного режима работы гребного винта (а не только для проектного режима «безударного» обтекания профилей сечений и оптимального распределения циркуляции по радиусу), входящие в него поправки на несущую поверхность должны, вообще говоря, принимать различные значения в зависимости от вида распределения нагрузки по поверхности лопасти [33]. Однако, как показывают расчеты винтов по теории несущей поверхности в однородном потоке [157], использование при поверочном расчете поправок на несущую поверхность, полученных для расчетного (проектного) режима работы гребного винта, приводит к удовлетворительным результатам.

Интегродифференциальное уравнение (4.52) решается методом последовательных приближений, в процессе которых уточняются величины углов индуктивной поступи β_I. При этом используется представление циркуляции G в виде ряда (2.103), а вызванная скорость w_{n1} вычисляется по формуле (2.100) с помощью квадратурной формулы для сингулярных интегралов [73]. После нахождения распределения циркуляции вдоль лопасти коэффициенты упора и момента гребного винта вычисляются по формулам (2.131) и (2.132).

Расчет кривых действия винта по теории несущей линии (как менее трудоемкий) удобно производить с целью различного рода приближенных оценок (например, при анализе влияния различных параметров на кривые действия гребного винта). Точность такого расчета характеризуется данными, приведенными на рис. 4.11: различие между приближенным расчетом по теории несущей линии и расчетом по теории несущей поверхности слабо зависит от поступи и составляет в данном случае около 0,02 для K_T и 0,0035 для K_Q. Это различие находится в пределах расхождения между экспериментальными кривыми действия, полученными при испытаниях модели гребного винта в различных экспериментальных установках (рис. 4.11).

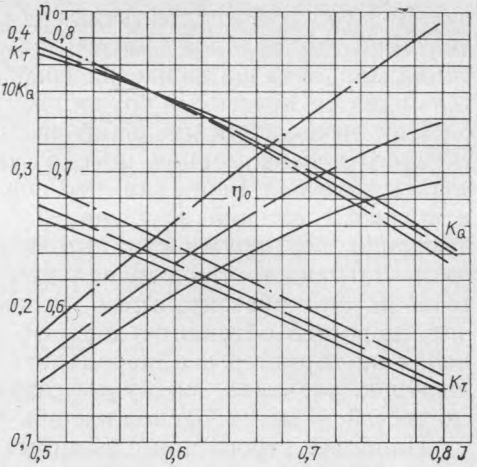


Рис. 4.12. Расчетная оценка влияния числа Рейнольдса на кривые действия винта. Гребной винт $B4.55$, $H/D=1{,}0$;

$$R_{nP}=\frac{5nD^2A_E/A_0}{Z\nu}.$$

——— $R_{nP}=2{,}5\cdot10^5$; — — — $R_{nP}=8{,}4\cdot10^6$; — · — — идеальная жидкость.

На рис. 4.12 в качестве примера приведены результаты расчета, позволяющего судить о величине масштабного эффекта гидродинамических характеристик винта [74]. Расчет (на базе теории несущей линии) выполнялся для гребного винта из серии «*B*» Вагенингенского опытового бассейна. Предполагалось, что лопасти винта гидродинамически гладкие.

Расчет показал, что влиянию числа Рейнольдса подвержен в основном лишь коэффициент упора K_T, а коэффициент K_Q изменяется незначительно. Увеличение K_T с ростом числа Рейнольдса R_{nP} объясняется тем, что при увеличении R_{nP} одновременно увеличиваются входящие в выражение для K_T циркуляция G и множитель $(1-\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta_I)$. В то же время величина $(1+\varepsilon\,\mathrm{ctg}\,\beta_I)$, входящая в выражение для коэффициента момента, с ростом R_{nP} уменьшается, что частично компенсирует увеличение циркуляции и приводит к слабой зависимости K_Q от R_{nP}. Результаты расчетов подтверждаются экспериментальными данными, полученными Ю. С. Базилевским в отечественном опытовом бассейне и Т. Ямазаки в Японии [170].

4.4. Расчет давлений на лопастях гребных винтов

Данные по распределению давлений на лопастях в первую очередь необходимы для оценки кавитационных характеристик спроектированного гребного винта. При проектировании всегда стремятся получить возможно более равномерное распределение давлений вдоль хорды сечения лопасти, с тем чтобы отдалить момент возникновения кавитации. Насколько это удалось и нельзя ли с этой точки зрения улучшить профилировку лопасти, может быть определено расчетным или экспериментальным

путем. Необходимо отметить, что расчетный путь имеет особое значение. Это обусловлено тем, что проведение модельных измерений давлений на лопастях гребного винта связано со значительными техническими трудностями.

При вычислении давлений на лопасти гребного винта, работающего в равномерном по окружности потоке, можно использовать интеграл Бернулли, что справедливо для потенциальных и вихревых течений. В случае работы гребного винта в неравномерном по окружности потоке приходится применять интеграл Лагранжа, что справедливо только для потенциальных течений. Это обстоятельство, независимо от способа определения скоростей обтекания лопасти, вынуждает налагать ограничения на характер неоднородности потока: так же, как и в предыдущих разделах, мы будем считать, что неоднородность поля скоростей в месте расположения гребного винта мала.

Наиболее строго при сделанных общих предположениях расчет давлений может быть осуществлен методом гидродинамических особенностей при выполнении граничного условия непротекания на поверхности лопасти без его линеаризации. Трудности, связанные с численной реализацией такого подхода, не позволили пока применить его к расчету давлений на гребном винте. Отдельные расчеты были выполнены подобным образом только для крыльев с относительно большой толщиной.

По указанной причине для построения практически реализуемого метода расчета давлений на лопасти приходится принимать те или иные упрощающие предположения, которые оправдывают соответствующий способ сведения исходной задачи к задачам, в настоящее время решаемым.

Расчет давлений на лопасти по теории несущей поверхности. Поверочный расчет по линейной теории несущей поверхности, изложенный в предыдущих параграфах, позволяет определить интенсивности вихревого слоя и слоя источников, воспроизводящих (с точностью, соответствующей линейной теории) воздействие лопасти на внешний поток. Вычислив скорости, вызванные этими особенностями, можно определить и соответствующие им давления.

В общем случае нестационарного обтекания лопасти давления на засасывающей и нагнетающей сторонах несущей поверхности определяются линеаризованным интегралом Лагранжа (2.10):

$$\tilde{p}^{\pm} \equiv \frac{p^{\pm} - p_0}{\rho V_E^2/2} = -\frac{2}{V_E^2}\,\overline{w}_{\xi}^{\pm}\overline{V}_{\xi} - \frac{2}{V_E^2\lambda_t}\,\frac{\partial \Phi^{\pm}}{\partial \theta_p}, \qquad (4.53)$$

где $\overline{\Phi} = \Phi/VR$ — потенциал вызванных скоростей.

Напомним следующие обозначения:

— индексы γ и q означают, что величины определяются интенсивностями соответствующих особенностей — вихрей и источников;

— индекс «0» означает прямое значение величины на несущей поверхности $[a^0=(a^++a^-)/2]$, а квадратные скобки — скачок величины при переходе через эту поверхность ($[a]=a^+-a^-$).

По теореме Н. Е. Жуковского в «малом»

$$[\tilde{p}]=2\overline{V}_\xi\bar{\gamma}_b/\overline{V}_E^2. \tag{4.54}$$

Сравнивая (4.53) и (4.54), с учетом того, что

$$w^{\pm}_{\gamma\xi}=w^0_{\gamma\xi}\pm(\gamma_b+\gamma_{fr})/2;$$

$$\Phi^{\pm}_{\gamma}=\Phi^0_{\gamma}\pm[\Phi_\gamma];$$

$$w^{\pm}_{q\xi}=w^0_{q\xi};\ \Phi^{\pm}_{q}=\Phi^0_{q},$$

можно получить

$$\tilde{p}^{\pm}=\frac{2}{\overline{V}_E^2}\left(-\overline{w}^0_{\gamma\xi}\overline{V}_\xi-\overline{w}^0_{q\xi}\overline{V}_\xi-\frac{1}{\lambda_t}\frac{\partial\Phi^0_\gamma}{\partial\theta_p}-\frac{1}{\lambda_t}\frac{\partial\Phi^0_q}{\partial\theta_p}\pm\overline{V}_\xi\bar{\gamma}_b/2\right). \tag{4.55}$$

Входящие в полученное выражение вызванные скорости и их потенциалы могут быть вычислены по соотношениям, приведенным в предыдущих параграфах.

Заметим, что в работе [160], посвященной расчету распределения давлений на лопастях по линейной теории несущей поверхности, в формуле, аналогичной (4.55), опущены члены со скоростью $w^0_{\gamma\xi}$ и производными $\partial\Phi^0_\gamma/\partial\theta_p$ и $\partial\Phi^0_q/\partial\theta_p$. Вместе с тем эти члены должны быть сохранены, поскольку имеют первый порядок малости и дают вклад в величины давлений.

В силу сделанного предположения относительно малой величины неоднородности внешнего потока, скорость V_ξ, входящую в формулу (4.55), будем считать не зависящей от угловой координаты; определяют ее путем осреднения внешнего потока на рассматриваемом радиусе. Если же неоднородность поля скоростей имеет потенциальную природу (например, если рассматривается задача обтекания идеальной жидкостью системы корпус—гребной винт), то указанное предположение становится излишним. В этом случае первые два слагаемых в уравнении (4.55) должны быть заменены на слагаемые, включающие произведения вызванных скоростей на скорости, обусловливающие окружную неоднородность внешнего потока:

$$-\overrightarrow{\overline{w}}^0_{\gamma\tau}\overrightarrow{\overline{V}}_\tau-\overrightarrow{\overline{w}}^0_{q\tau}\overrightarrow{\overline{V}}_\tau,$$

где индекс «τ» обозначает проекцию вектора на несущую поверхность.

Как указывалось в гл. 2, линейная теория принципиально не может давать достоверных результатов по распределению давлений вблизи кромок, поскольку производные $\partial\tilde{\eta}^{\pm}/\partial\tilde{\xi}$ в этой области не являются малыми величинами. Поэтому для уточнения линейной теории используются поправки, получаемые методом сращиваемых асимптотических разложений [88]. Здесь лишь приведем самую простую и поэтому распространенную поправку Лайтхилла, пригодную лишь для стационарного обтекания профилей с эллиптическим носиком:

$$\tilde{p}^* = \frac{\tilde{\xi}\cos^2\left(\vec{n}_E,\ \vec{e}_{\tilde{\xi}}\right)}{\tilde{\xi}+\rho_L/2}\,\tilde{p}, \qquad (4.56)$$

где $\tilde{p}^*$ — уточненное значение коэффициента давления; $\vec{n}_E$ — нормаль к кромке (см. § 1.1).

Множитель $\cos^2(\vec{n}_E, \vec{e}_{\tilde{\xi}})$ введен здесь для учета отклонения входящей кромки лопасти от радиальной прямой.

Метод эквивалентного профиля. Выше с помощью формулы (4.56) локальное решение линейной трехмерной задачи было уточнено в районе входящей кромки с помощью решения плоской задачи обтекания параболы. Другой способ уточнения решения линейной пространственной задачи основан на введении понятия двухмерного эквивалентного профиля и определении давлений путем точного расчета его обтекания. По существу, аналогичный прием используется в процедуре проектирования гребного винта. Там средняя линия и угол атаки заданного плоского профиля исправляются так, чтобы, будучи помещенным в состав лопасти, этот профиль сохранил подъемную силу.

При построении эквивалентного плоского профиля будем считать, что кривые распределения нагрузки вдоль хорды профиля, входящего в состав лопасти, и его плоского эквивалента с точностью, соответствующей линейной теории, должны быть одинаковы [33]. При таком переходе к плоскому профилю распределение толщины вдоль хорды не меняется. Не изменяется, естественно, и коэффициент подъемной силы.*

Используя сформулированное условие эквивалентности, по распределению $\bar{\gamma}_b$, полученному при поверочном расчете винта по теории несущей поверхности, можно вычислить ординаты $\tilde{\eta}_{CE}$ средней линии эквивалентного профиля и угол атаки α_E,

---

* В ряде работ (например, [136]) эквивалентный профиль строился из условия сохранения значения коэффициента C_L. При этом форма средней линии $F_C(\tilde{\xi})$ и распределение толщины вдоль хорды эквивалентного профиля принимались такими же, как и в исходном профиле сечения лопасти.

под которым его надо устанавливать при расчете давлений. В стационарном случае

$$\eta_{cE}(\tilde{\xi}) = \tilde{\eta}^{*}_{cE}(\tilde{\xi}) + (1 - \tilde{\xi})\,\alpha_E, \tag{4.57}$$

где

$$\tilde{\eta}^{*}_{cE}(\tilde{\xi}) = -\frac{1}{2\pi \overline{V}_E} \int\limits_{\tilde{\xi}}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\bar{\gamma}_b(\tilde{\xi}_2)\, d\tilde{\xi}_2}{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1}\, d\tilde{\xi}_1;$$

$$\alpha_E = -\tilde{\eta}^{*}_{cE}(-1)/2.$$

При расчете давлений по эквивалентному профилю со средней линией, определяемой уравнением (4.57) и распределением толщины, не измененным по отношению к фактическому профилю сечения лопасти, не учитываются, даже приближенно, скорости $w^0_{\nu\tilde{\xi}}$. С чем чтобы устранить этот недостаток, можно ввести эквивалентность не по нагрузке, а по вызванным скоростям: профиль крыла бесконечного размаха эквивалентен профилю сечения лопасти, если соответствующие линеаризованные задачи обтекания этих профилей определяют одинаковые предельные значения касательных скоростей $w^{\pm}_{\tilde{\xi}}$, а следовательно, и давлений.

Нетрудно видеть, что при новом определении эквивалентный профиль будет иметь прежнюю среднюю линию (4.57) и распределение толщины, отличающееся от исходного на добавку $\Delta\tilde{\eta}_e$, определяемую скоростью $w^0_{\nu\tilde{\xi}}$:

$$\Delta\tilde{\eta}_e(\tilde{\xi}) = \frac{1}{\pi \overline{V}_E} \int\limits_{\tilde{\xi}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}_2^2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \tilde{\xi}_1^2}\, \bar{w}^0_{\nu\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}_1)\, d\tilde{\xi}_1}{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2}\, d\tilde{\xi}_2. \tag{4.58}$$

Заметим, что $\Delta\tilde{\eta}_e(-1) = 0$, т. е. эквивалентный профиль, определяемый соотношениями (4.57) и (4.58), замкнут.

Вместо того чтобы вычислять давления на искаженном плоском профиле, обтекаемом однородным потоком, можно приближенно свести задачу определения давлений на лопасти к плоской задаче обтекания фактического профиля сечения некоторым неоднородным потоком. Указанная неоднородность должна, по крайней мере вблизи профиля, приближенно соответствовать потоку в рассматриваемом цилиндрическом сечении. Один из возможных вариантов подобной процедуры состоит в том, что в плоской задаче на контуре профиля распределяют дополнительные гидродинамические особенности. Интенсивность этих особенностей определяется так, чтобы на контуре имелись дополнительные касательные скорости, равные разности скоростей $w^{\pm}_{\tilde{\xi}\,(3)} - w^{\pm}_{\tilde{\xi}\,(2)}$, определенных из решений линейной пространственной задачи и линейной плоской задачи соответственно.

Таким образом, задача определения давлений на лопасти тем или иным путем может быть приближенно сведена к расчету давлений на плоском профиле. Как ни странно, но построить численный метод, позволяющий для произвольной формы контура решать эту давно уже ставшую классической задачу с необходимой высокой точностью, очень трудно. В связи с этим обстоятельством ниже приводится краткое описание алгоритма [33] решения указанной задачи с помощью построения конформного отображения внешности круга на внешность профиля методом тригонометрической интерполяции [95]. Имеющийся значительный опыт расчетов свидетельствует о высокой разрешающей способности этого алгоритма и о его преимуществах вычислительного характера по отношению к другим известным алгоритмам.

Считается, что профиль задан таблицей координат $\{\xi_k, \eta_k\}$, $k = 1, \ldots, K/2$, причем K кратно 4. Функция, отображающая внешность круга $z = e^{i\vartheta}$ на внешность профиля в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, ищется в виде отрезка ряда Лорана:

$$\zeta = \sum_{j=-1}^{K-2} (A_j + iB_j) z^{-j}.$$

На эту функцию накладываются условия нормировки $\zeta(\infty) = \infty$ и $\zeta(1) = \zeta_0$.

Для определения коэффициентов A_j и B_j единичная окружность разбивается на $2K$ равных частей двумя группами точек

$$\vartheta_{2k} = \frac{2k\pi}{K} \quad \text{и} \quad \vartheta_{2k-1} = \frac{(2k-1)\,\pi}{K},$$

$$k = 1, 2, \ldots, K.$$

Этим точкам соответствуют точки на профиле с координатами

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{j=-1}^{K-2} A_j \cos j\vartheta_k + B_j \sin \gamma\vartheta_k; \\ \eta_k &= \sum_{j=-1}^{K-2} -A_j \sin j\vartheta_k + B_j \cos j\vartheta_k. \end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

Использовав свойство ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента, эти уравнения можно обратить относительно коэффициентов A_j и B_j:

$$\left.\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \xi_k \cos j\vartheta_k - \eta_k \sin j\vartheta_k; \\ B_j &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \xi_k \sin j\vartheta_k + \eta_k \cos j\vartheta_k, \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

где $j = -1, 0, \ldots, K-2$.

Соотношения (4.59) и (4.60) являются основными в методе тригонометрической интерполяции и позволяют построить итерационный процесс для определения коэффициентов A_j и B_j. На каждом шаге этого процесса коэффициенты отображения известны лишь приблизительно, и соотношение (4.59) устанавливает связь между равномерно распределенными точками на окружности и точками в плоскости течения, вообще говоря, не лежащими на профиле. В связи с этим для сходимости итерационного процесса получающиеся по формулам (4.59) точки сносятся на профиль и в выражении (4.60) для определения следующего приближения к A_j и B_j подставляются координаты точек профиля.

Непосредственное применение метода [95] к тонким винтовым профилям затруднительно. В связи с этим необходимо внести в алгоритм ряд усовершенствований:

— предусмотреть предварительную аппроксимацию исходных точек профиля сплайном (см. гл. 1);

— ввести промежуточное отображение Кармана—Трефтца, позволяющее свести задачу к определению отображениям внешности круга на внешность области, близкой к круговой;

— снос точек на профиль (точнее, на его образ, полученный преобразованием Кармана—Трефтца) осуществлять по радиальному направлению;

— ввести процедуру исправления полученных коэффициентов отображения, обеспечивающую отсутствие отклонений на кромках профиля;

— предусмотреть контроль результатов по отклонениям контура, определяемого найденным отображением, от исходного профиля.

Расчеты показывают, что практически во всех случаях в ряде Лорана для отображающей функции достаточно сохранить 12 членов. На рис. 4.13 приведены результаты расчета стационарных давлений на профиле сечения лопасти гребного винта методом эквивалентного профиля.

Для учета влияния вязкости жидкости на распределение стационарных давлений по плоскому профилю рекомендуется использовать расчет пограничного слоя по методу, данному в работе [30]. Программа для ЭВМ, реализующая этот метод, согласована с программой алгоритма [33] определения отображающей функции. Существенным достоинством метода является учет обратного влияния пограничного слоя на внешний потенциальный поток. На рис. 4.14 приведены распределения давлений по профилю, вычисленные с учетом и без учета влияния вязкости. Заметим, что в данном примере снижение пика разрежения за счет влияния вязкости обусловлено в основном соответствующим уменьшением подъемной силы профиля.

Укажем в заключение, что методом эквивалентного профиля можно воспользоваться и для определения нестационарных дав-

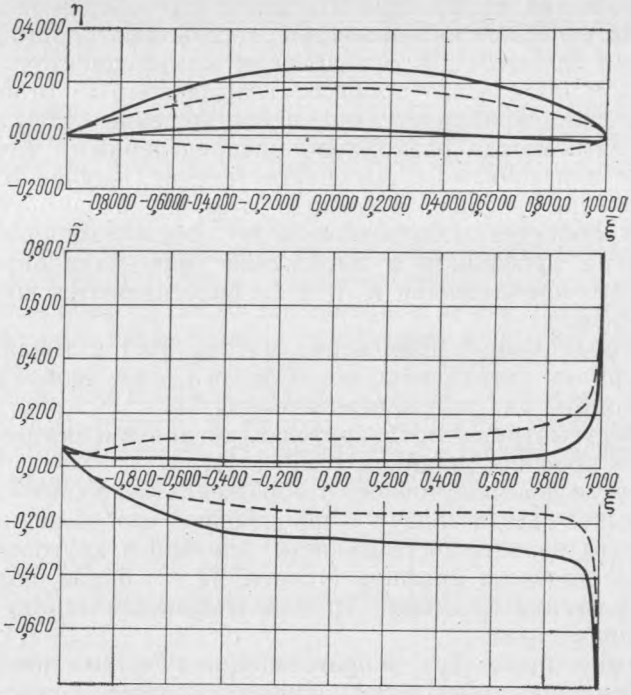


Рис. 4.13. Расчет распределения давлений по сечению лопасти гребного винта.

——— — фактический профиль сечения; — — — — эквивалентный профиль.

лений в случае работы гребного винта в неоднородном по окружности потоке. Условие равенства (с точностью линейной теории) распределений нагрузок профиля сечения лопасти и плоского эквивалентного профиля, обтекаемого однородным потоком, должно выполняться в каждой момент времени. Фактически это означает, что средняя линия эквивалентного профиля переменна во времени. Каждая гармоника этой средней

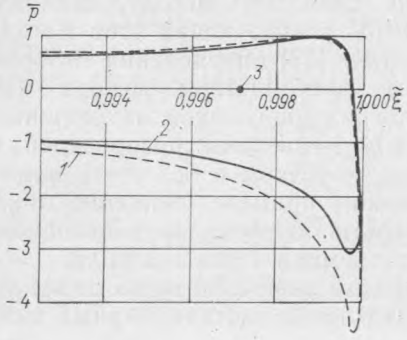


Рис. 4.14. Расчет распределения давлений по профилю NACA-66 mod при $\alpha=0°$ и $R_n=10^6$ (В. В. Дробленков, Г. И. Каневский [30]).

1 — в идеальной жидкости ($C_L=0{,}4737$); *2* — в вязкой жидкости на границе пограничного слоя ($C_L=0{,}4104$); *3* — точка отрыва ламинарного пограничного слоя.

линии определяется соответствующей гармоникой присоединенной завихренности:

$$\tilde{\eta}_{cE,\,n}(\tilde{\xi}) = \tilde{\eta}^{*}_{cE,\,n}(\tilde{\xi}) + (1 - \tilde{\xi})\,\alpha_{E,\,n}, \tag{4.61}$$

где

$$\tilde{\eta}^{*}_{cE,\,n}(\tilde{\xi}) = -\frac{1}{2\pi \overline{V}_E}\int\limits_{\tilde{\xi}}^{1}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{\bar{\gamma}_{b,\,n}(\tilde{\xi}_2)}{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1}\,d\tilde{\xi}_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{1}\frac{\bar{\gamma}^{(2)}_{f,\,n}(\tilde{\xi}_2)}{\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1}\,d\tilde{\xi}_2\right]d\tilde{\xi}_1;$$

$$\bar{\gamma}^{(2)}_{f,\,n}(\tilde{\xi}) = -in\int\limits_{\tilde{\xi}}^{1}\bar{\gamma}_{b,\,n}(\tilde{\xi}_1)\,e^{-in\cdot(\tilde{\xi}-\tilde{\xi}_1)}\,d\tilde{\xi}_1,$$

где индексом «n» отмечены комплексные амплитуды n-х гармоник соответствующих величин.

Чтобы произвести расчет нестационарных давлений на эквивалентном профиле, необходимо определить и просуммировать гармоники значений скорости в точках контура и затем воспользоваться интегралом Лагранжа. Задача об определении гармоник скоростей в точках профиля решается с помощью аппарата конформных отображений относительно просто. Зная отображение внешности круга на внешность профиля, с помощью дополнительного дробно-линейного преобразования можно определить отображение плоскости с разрезом [—1, 1] на область течения. С помощью такого отображения исходная задача сводится к известной задаче Сирса о движении в синусоидальном порыве дужки, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен модулю производной отображающей функции.

Глава 5

РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЙ И СИЛ, СОЗДАВАЕМЫХ ГРЕБНЫМ ВИНТОМ НА КОРПУСЕ СУДНА И ЕГО ВЫСТУПАЮЩИХ ЧАСТЯХ

Работающий гребной винт создает в жидкости возмущения, которые в силу конечности числа лопастей винта носят периодический характер. В случае полного соответствия геометрических элементов винта теоретическому чертежу и при условии стационарности набегающего на винт потока вызванные винтом скорости и давления в некоторой точке, неподвижной по от-

ношению к системе координат B, будут изменяться во времени с так называемой лопастной частотой n_Z, равной произведению частоты вращения винта на число его лопастей: $n_Z = nZ$. Соответствующая круговая частота $\omega_Z = \Omega Z$.

Периодические давления, создаваемые винтом, воздействуют на корпус судна и его выступающие части и могут явиться причиной повышенной общей или местной вибрации корпуса, руля и других конструкций. Поэтому в процессе проектирования необходимо уметь определять расчетным путем амплитуды пульсаций давления, а также амплитуды периодических сил, создаваемых гребным винтом на корпусе судна. Описание соответствующих методов расчета для некавитирующих винтов приводится в настоящей главе. Влияние кавитации, возникающей на лопастях винта, на амплитуды пульсаций давления рассмотрено в гл. 6.

5.1. Периодические давления, создаваемые гребным винтом в окружающей жидкости

Профили сечений лопасти гребного винта имеют малую относительную кривизну и толщину и работают, как правило, при малых углах атаки. Поэтому вызванные винтом скорости, и в особенности периодические составляющие этих скоростей, малы по сравнению со скоростью поступательного движения винта. Задача о расчете периодических возмущений, создаваемых винтом в окружающей жидкости, может, следовательно, решаться в линейной постановке. При этом индуцируемые винтом пульсирующие давления будут определяться линеаризованным уравнением Лагранжа—Коши и поэтому в соответствии с физическими причинами, их обусловливающими, они могут быть разделены на две составляющие: «силовую» и «объемную». Силовая составляющая давления p_L зависит от гидродинамической нагрузки, действующей на лопасти винта, объемная же составляющая p_T обусловлена влиянием телесности лопастей. Давление в любой точке пространства, занятого жидкостью, равно сумме указанных составляющих ($p = p_L + p_T$).

Интересно отметить, что в первых методах расчета периодических давлений, создаваемых судовым гребном винтом, разработанных в 50-х годах в нашей стране Н. Н. Бабаевым [4], а за рубежом — Д. Бреслиным [105] и К. Полем [147], объемная составляющая давления не учитывалась. В то же время применительно к воздушным винтам это было сделано еще в 30-е годы Е. А. Непомнящим [77] и Л. Я. Гутиным [28]. Эти работы, по всей вероятности, оставались неизвестными судостроителям, и на необходимость учета влияния толщины лопастей в случае судовых гребных винтов впервые указал в 1959 г. Д. Бреслин [106]. Формулы для силовой составляющей давления, содержа-

щиеся в упомянутых работах [4, 105, 147], также могли бы быть получены как частный случай из зависимостей работы Л. Я. Гутина «О звуковом поле вращающегося воздушного винта» [28] в предположении о несжимаемости жидкости. Таким образом, приоритет в разработке методов расчета периодических давлений, создаваемых винтом, безусловно принадлежит Л. Я. Гутину.

Общие выражения для амплитуд периодического давления, создаваемого широколопастным судовым гребным винтом, легко могут быть получены методом гидродинамических особенностей: силовая составляющая — как давление, индуцируемое вихревой системой винта, а объемная — как давление, индуцируемое источниками, имитирующими влияние толщины лопастей. Интенсивности вихрей и источников вследствие влияния неоднородности потока в месте расположения винта являются функциями времени.

В соответствии со сказанным выше о малости вызванных скоростей гребного винта давление будем определять с помощью линеаризованного уравнения Лагранжа—Коши:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho V \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \tag{5.1}$$

— в системе координат C, движущейся поступательно с винтом,

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi_a}{\partial t} \tag{5.2}$$

— в абсолютной системе координат (X_0, r_0, θ_0), с которой система C совпадает при $t = 0$. При определении силовой составляющей давления будем считать, что шаг вихревых пелен равен $2\pi V/\Omega$.

Найдем выражение для силовой составляющей давления, создаваемого элементарной вихревой системой, состоящей из одного присоединенного вихря интенсивностью $\gamma_b\, d\xi$ и соответствующих ему свободных вихрей — геликоидальных и радиальных. Потенциал вызванных скоростей такой вихревой системы в абсолютной системе координат имеет вид (см. § 2.3)

$$d\Phi_{aL} = -\frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\infty} \gamma_b(\xi,\ r;\ t-\tau)\, V_E \frac{\partial}{\partial n_I}\left(\frac{1}{S}\right) d\tau\, dr\xi,$$

где $S = [(X_0 - x' - Vt + V\tau)^2 + r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta_0 - \Omega t + \Omega\tau - \theta')]^{1/2}$ — расстояние между точкой пространства $P(X_0,\ r_0,\ \theta_0)$ и точкой винтовой поверхности Q с координатами $X'_0 = Vt + x' - V\tau$, r, $\theta'_0 = \Omega t + \theta' - \Omega\tau$; τ — время, в течение которого присоединенный вихрь переместился из точки Q в положение, которое он занимает в момент времени t; r_1 и r_2 — ради-

альные координаты начала и конца рассматриваемого присоединенного вихря; $V_E = \sqrt{V^2 + (\Omega r)^2}$.

Подставляя выражение для потенциала скоростей в формулу (5.2) и считая, что точка P находится вне струи винта, получим

$$dp_L = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\infty \gamma_b(\xi,\ r;\ t-\tau)\, V_E \frac{\partial}{\partial n_I} [S^{-1}(t-\tau)]\, d\tau\, dr\, d\xi =$$

$$= -\frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\infty V_E \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \gamma_b(t-\tau) \frac{\partial}{\partial n_I} [S^{-1}(t-\tau)] \right\} d\tau\, dr\, d\xi =$$

$$= \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} V_E \gamma_b(\xi,\ r;\ t) \frac{\partial}{\partial n_I} (S^{-1}|_{\tau=0})\, dr\, d\xi.$$

Это выражение представляет собой не что иное, как давление, создаваемое системой диполей, расположенных на рассматриваемой несущей линии. Оси диполей направлены по нормали к винтовой поверхности, а плотность равна $(-\rho\gamma_b V_E) = [p]$ — скачку давления на лопасти. Такой вывод, естественно, мог быть получен (также в линейной постановке) непосредственно методом потенциала ускорения [49, 106] исходя из того обстоятельства, что давление является гармонической функцией и может быть, следовательно, представлено в виде суммы потенциалов диполей и источников, распределенных по участкам опорных винтовых поверхностей A_1. Проведенные выше преобразования, однако, наглядно показывают, что существенным при линеаризации задачи является не только отбрасывание квадратов вызванных скоростей в уравнении Лагранжа—Коши, но и пренебрежение ими при определении шага вихревых поверхностей: в случае, если бы шаг вихревых пелен был принят отличающимся от величины $2\pi V/\Omega$ (например, равным $2\pi R\lambda_{I0}$, как это обычно предполагается для умеренно нагруженного винта), в выражении для dp_L сохранился бы интеграл по полубесконечной винтовой поверхности, что означало бы нарушение условия отсутствия скачка давления при переходе через свободную вихревую пелену. Следует также отметить, что в линейной постановке задачи связь между давлением и интенсивностью присоединенных вихрей носит «квазистационарный» характер: время входит в полученное выражение как параметр. Нестационарность процесса обтекания лопасти (при работе винта в неоднородном потоке) сказывается лишь на величине γ_b.

После интегрирования по поверхности лопасти (с переменной порядка интегрирования по r и ξ) и перехода к системе координат C получим следующее выражение для силовой соста-

вляющей давления, создаваемого одной лопастью винта с номером j:

$$\bar{p}_L^{(j)}(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0;\ \theta_p) = \frac{1}{2\pi\lambda_t}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}(\bar{r}^2+\lambda_t^2)\,\bar{\gamma}_b(\tilde{\xi},\ \bar{r};\ \theta_p+\chi_j)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\bar{S}_0}\right)d\tilde{\xi}\,d\bar{r}, \qquad (5.3)$$

где $\bar{S}_0(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0;\ \tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta_p+\theta+\chi_j) = [(\bar{x}_0-\lambda_t\theta)^2+\bar{r}_0^2+\bar{r}^2 - 2\bar{r}_0\bar{r}\cos(\theta_0-\theta_p-\theta-\chi_j)]^{1/2}$;

$$\theta = \theta_{Sl}(\bar{r})+\tilde{\xi}a(\bar{r});\quad \frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}}\left(\bar{r}\,\frac{\partial}{\partial\bar{x}_0}-\frac{\lambda_t}{\bar{r}}\,\frac{\partial}{\partial\theta_0}\right).$$

Функция $\bar{p}_L^{(j)}(\theta_p)$ имеет период 2π и может быть, следовательно, представлена в виде ряда Фурье: $\bar{p}_L^{(j)}(\theta_p) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}\bar{p}_{L\nu}e^{i\nu(\theta_p+\chi_j)}$.

Для винта в целом $\bar{p}_L(\theta_p) = \sum\limits_{j=0}^{Z-1}\bar{p}_L^{j}(\theta_p)$. Учитывая правило вычисления коэффициентов Фурье сумм $\sum\limits_{j=0}^{Z-1}$ периодических функций, смещенных друг относительно друга по аргументу на $2\pi j/Z$, заключающееся в том, что m-й коэффициент Фурье функции $\bar{p}_L(\theta_p)$ равен увеличенному в Z раз коэффициенту Фурье функции $\bar{p}_L^{(0)}(\theta_p)$ с номером (mZ), получим:

$$\bar{p}_L(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0;\ \theta_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{p}_{Lm}(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0)\,e^{imZ\theta_p}; \qquad (5.4)$$

$$\bar{p}_{Lm} = -\frac{Z}{4\pi^2\lambda_t}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}a(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\gamma}_{bn}(\tilde{\xi},\ \bar{r})\times$$

$$\times\frac{e^{i(n-mZ)\theta'}}{\bar{S}_0^3(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0;\ \tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta'+\theta)}[\bar{r}(\bar{x}_0-\lambda_t\theta) -$$

$$-\bar{r}_0\lambda_t\sin(\theta_0-\theta'-\theta)]\,d\theta'\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}, \qquad (5.5)$$

где функции $\bar{\gamma}_{bn}(\tilde{\xi},\ \bar{r})$ представляют собой коэффициенты Фурье интенсивности присоединенных вихрей и определяются в результате выполнения поверочного расчета гребного винта (см. § 4.1). Для винта, работающего в однородном потоке, отлична от нуля лишь функция $\bar{\gamma}_{b0}$, характеризующая распределение постоянной по времени нагрузки вдоль хорды сечения лопасти.

Несколько иное выражение для амплитуды m-й гармоники давления $\bar{p}_L$ можно получить, представив входящую в формулу

(5.3) функцию $1/\bar{S}_0$ с помощью одного из известных разложений в виде

$$\frac{1}{\bar{S}_0} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_l(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0;\ \tilde{\xi},\ \bar{r})\, e^{il\theta_0} e^{-il(\theta_p+\chi_j)}. \tag{5.6}$$

Тогда при вычислении коэффициентов Фурье интеграл по θ' будет отличен от нуля лишь при $l = n - mZ$, и формула для амплитуды m-й гармоники силовой составляющей давления примет вид

$$\bar{p}_{Lm} = \frac{Z}{2\pi\lambda_t} \int_{\bar{r}_H}^{1} \int_{-1}^{1} a(\bar{r})\left(\bar{r}^2 + \lambda_t^2\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{bn} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial n'} \left[R_{n-mZ} e^{i(n-mZ)\theta_0}\right] d\tilde{\xi}\, d\bar{r}.$$

Функции R_{n-mZ} определяются одной из зависимостей:

$$R_{n-mZ} = \frac{1}{\pi\sqrt{\bar{r}\bar{r}_0}}\, e^{-i(n-mZ)\theta} Q_{|n-mZ|-\frac{1}{2}}(Y), \tag{5.7}$$

где $Y = \frac{1}{2\bar{r}\bar{r}_0}\left[(x_0 - \lambda_t\theta)^2 + \bar{r}_0^2 + \bar{r}^2\right]$, $Q_m(Y)$ —функция Лежандра 2-го рода порядка m:

$$R_{n-mZ} = e^{-i(n-mZ)\theta} \int_0^{\infty} e^{-|x_0-\lambda_t\theta|\zeta} \times$$

$$\times J_{n-mZ}(\bar{r}_0\zeta)\, J_{n-mZ}(\bar{r}\zeta)\, d\zeta, \tag{5.8}$$

где J_m — функция Бесселя 1-го рода порядка m.

Если при вычислении силовой составляющей давления предположить, что лопасть винта может быть заменена одним несущим вихрем, расположенным на линии $\theta = \theta_\Gamma(\bar{r})$ (см. например, «метод $^3/_4$», по линии, отстоящей от входящей кромки лопасти на $^1/_4$ хорды), в выражении (5.5) следует принять (см. § 4.1).

$$\bar{\gamma}_{bn}(\tilde{\xi},\ \bar{r}) = \frac{\bar{\Gamma}_n(\bar{r})}{a(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_t^2}}\, \delta(\theta - \theta_\Gamma),$$

где δ — дельта-функция; $\bar{\Gamma}_n(\bar{r})$ — коэффициент Фурье присоединенной циркуляции сечения лопасти. В этом случае амплитуда силовой составляющей давления будет определяться выражением

$$\bar{p}_{Lm} = -\frac{Z}{4\pi^2\lambda_t} \int_{\bar{r}_H}^{1} \int_0^{2\pi} \bar{\Gamma}_n(\bar{r})\, \frac{e^{i(n-mZ)\theta'}}{\bar{S}_0^3(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0;\ \tilde{\xi}_\Gamma,\ \bar{r},\ \theta' + \theta_\Gamma)} \times$$

$$\times \left[\bar{r}(\bar{x}_0 - \lambda_t\theta_\Gamma) - \bar{r}_0\lambda_t \sin(\theta_0 - \theta' - \theta_\Gamma)\right] d\theta'\, d\bar{r}, \tag{5.9}$$

где $\theta_\Gamma = \theta_{SI}(\bar{r}) + \tilde{\xi}_\Gamma(\bar{r})\, a(\bar{r})$.

При использовании «метода $^3/_4$» $\tilde{\xi}_\Gamma = {}^1/_2$.

Если несущую линию считать прямолинейной ($\theta_\Gamma = \text{const} = 0$), из уравнений (5.4) и (5.9) можно получить

$$\bar{p}_L(\theta_p) = -\frac{1}{2\pi\lambda_t}\sum_{j=0}^{Z-1}\int_{\bar{r}_H}^{1}\bar{\Gamma}(\bar{r},\ \theta_p+\chi_j)\times$$

$$\times\frac{[\bar{r}\bar{x}_0 - \bar{r}_0\lambda_t\sin(\theta_0-\theta_p-\chi_j)]\,d\bar{r}}{\left[\bar{x}_0^2+\bar{r}_0^2+\bar{r}^2-2\bar{r}\bar{r}_0\cos(\theta_0-\theta_p-\chi_j)\right]^{3/2}}. \qquad (5.10)$$

В предположении $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const}$ эта формула полностью эквивалентна зависимостям, полученным в упоминавшихся выше работах [4, 147], посвященных расчету периодического давления, создаваемого в жидкости гребным винтом.

Покажем, что силовая составляющая давления в случае замены лопасти одним несущим вихрем может быть выражена непосредственно через распределение упора и момента вдоль лопасти винта. Для этого воспользуемся следующими зависимостями, справедливыми для легко нагруженного винта:

$$dT = Z\rho\Gamma\Omega r\,dr;\quad dQ = Z\rho\Gamma V r\,dr,$$

где dT и dQ — элементарный упор и крутящий момент винта. Переходя к коэффициентам упора и момента, из формулы (5.10) получим

$$\bar{p}_{Lm} = -\frac{1}{\pi^2\lambda_t^2}\int_{\bar{r}_H}^{1}\int_0^{2\pi}\left[\bar{x}_0\left(\frac{dK_T}{d\bar{r}}\right)-2\bar{r}_0\left(\frac{1}{\bar{r}}\cdot\frac{dK_Q}{d\bar{r}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\theta_0-\theta')\right]\frac{e^{-imZ\theta'}}{\bar{S}_0^3}\,d\theta'\,d\bar{r}. \qquad (5.11)$$

Поскольку элементарный упор и тангенциальная сила, создающая момент, являются проекциями подъемной силы, возникающей на рассматриваемом сечении лопасти, силовую составляющую давления в предельном случае узколопастного винта можно рассматривать как давление, создаваемое в жидкости системой сил — диполей, направленных по нормали к винтовой поверхности и приложенных в точках несущей линии. В общем же случае широколопастного винта силовая составляющая давления создается, как указывалось выше, системой элементарных «диполей давления» плотностью $[p]$, распределенных по поверхностям лопастей.

Формула (5.11) может быть получена из зависимостей, выведенных Л. Я. Гутиным [28], при предельном переходе к схеме несжимаемой жидкости. Отметим, что в работах Л. Я. Гутина силовая составляющая давления определяется как давление, создаваемое в жидкости системой периодических сил — импульсов, распределенных по диску гребного винта.

Перейдем к определению объемной составляющей давления. Как указывалось выше, эту составляющую будем определять как давление, создаваемое системой источников, имитирующих влияние толщины лопастей.

В линейной постановке задачи, когда вызванные винтом скорости и скорости, характеризующие неоднородность внешнего потока, считаются малыми по сравнению со скоростью поступательного перемещения винта V, интенсивность источников q, определяемая формулой (2.44), оказывается не зависящей от угла поворота лопасти θ_p. Вместе с тем очевидно, что при работе винта в неоднородном набегающем потоке q является периодической функцией θ_p, хотя при малой неоднородности потока переменная составляющая функции $q(\theta_p)$ будет значительно меньше, чем ее постоянная составляющая, определяемая формулой (2.44). Поскольку в задачах, связанных с расчетом создаваемых винтом периодических давлений, наличие даже небольшой переменной составляющей $q(\theta_p)$ может в ряде случаев (например, при больших отстояниях рассматриваемой точки от винта) иметь существенное значение, внесем некоторые уточнения в формулу (2.44).

Простейшим обобщением этой формулы, пригодным для случая узколопастных гребных винтов, является зависимость

$$q(\xi,\ r;\ \theta_p) = V_\xi(r,\ \theta_p + \theta_{SI})\,\frac{\partial \eta_e(\xi,\ r)}{\partial \xi},$$

в которой V_ξ представляет проекцию относительной скорости набегающего потока (без учета вызванных скоростей, которые по-прежнему будем считать малыми) в точке $\xi = 0$ на направление хорды сечения. Величина V_ξ в этом случае одинакова для всех точек хорды, но зависит от угла поворота лопасти. Характер распределения интенсивности источников вдоль хорды в каждый момент времени при этом сохраняется таким же, как и в случае использования формулы (2.44).

Представим $q(\theta_p)$ в виде отрезка ряда Фурье

$$q(\xi,\ r;\ \theta_p) = \sum_{n=-N}^{N} q_n(\xi,\ r)\, e^{in\theta_p}.$$

Тогда для безразмерных коэффициентов $\bar{q}_n$ получим

$$\bar{q}_n(\bar{\xi},\ \bar{r}) = \frac{q_n}{V} = e^{in\theta_{SI}(\bar{r})}\,\overline{W}_n(\bar{r})\,\frac{\partial \bar{\eta}_e}{\partial \bar{\xi}}, \qquad (5.12)$$

где $\overline{W}_n = \overline{V}_{xn}(\bar{r})\sin\beta_I + \overline{V}_{\theta n}(\bar{r})\cos\beta_I$ при $n \neq 0$; $\overline{W}_0 = -[1 - \psi_{x0}(\bar{r})]\sin\beta_I - [\bar{r}/\lambda_t - \psi_{\theta 0}(\bar{r})]\cos\beta_I$. Величины $\overline{V}_{xn}$ и $\overline{V}_{\theta n}$ являются коэффициентами Фурье проекций заданной скорости внешнего потока (см. § 4.1).

Очевидно, что для гармоник функции $q(\theta_p)$ с достаточно большим номером, в особенности в случае широколопастных винтов, предположение о том, что скорость внешнего потока V_ξ

в каждый момент постоянна вдоль хорды, становится неприемлемым. Поэтому в общем случае [81] следует принять $V_\xi = V_\xi(r,\ \theta_p+\theta)$ и учесть наличие во внешнем потоке составляющей V_r:

$$q(\xi,\ r;\ \theta_p) = V_\xi[r,\ \theta_p + \theta(\xi,\ r)]\frac{\partial \eta_e}{\partial \xi} + V_r[r,\ \theta_p + \theta(\xi,\ r)]\frac{\partial \eta_e}{\partial r}.$$

Учитывая, что вектор скорости внешнего потока удовлетворяет условию сплошности, это выражение можно переписать в следующем виде:

$$q(\xi,\ r;\ \theta_p) = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}[\eta_e(r,\ \theta)\,V_\xi(r,\ \theta_p+\theta)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial r}\left[\eta_e(r,\ \theta)\,V_r(r,\ \theta_p+\theta)\sqrt{r^2+h^2}\right]\right\}, \qquad (5.13)$$

где $h = V/\Omega$.

Подставив формулу (5.13) в левую часть (2.49) и проинтегрировав по частям, можно убедиться, что, поскольку $\eta_e = 0$ на кромках лопасти, условие замкнутости поверхности лопасти (2.49) удовлетворяется.

Для безразмерных коэффициентов Фурье функции $q(\theta_p)$, определяемой уравнением (5.13), получим

$$\bar{q}_n(\tilde{\xi},\ \bar{r}) = e^{in\theta}\left\{\overline{W}_n(\bar{r})\left[\frac{in\bar{c}\tilde{\eta}_e}{2\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}} + \frac{\partial\tilde{\eta}_e}{\partial\tilde{\xi}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left[\bar{c}\tilde{\eta}_e\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\,\overline{V}_{rn}(\bar{r})\right]\right. . \qquad (5.13a)$$

Различие в зависимостях $\bar{q}_n(\tilde{\xi})$, определяемых формулами (5.12) и (5.13а), иллюстрируется данными, приведенными на рис. 5.1. Расчет выполнялся для случая $n = 5$. Величины $\overline{W}_n$ и $\overline{V}_{rn}$ составляли [159]: $|\overline{W}_5| = 0{,}0140$; $|\overline{V}_{r5}| = 0{,}0056$. Предполагалось, что профиль образован квадратичными параболами,

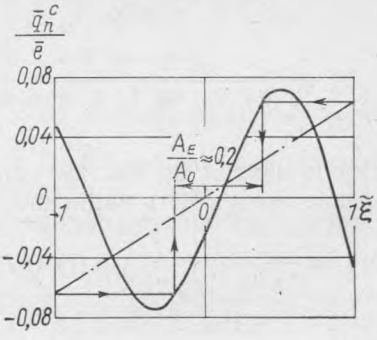


Рис. 5.1. Распределение интенсивности источников вдоль хорды (5-я гармоника).

——— — расчет по формуле (5.13а);
— • — • — расчет по формуле (5.13).

так что $\dfrac{\partial\tilde{\eta}_e}{\partial\tilde{\xi}}\sim\tilde{\xi}$. Как видно из рисунка, даже для сравнительно узколопастного винта, каковым являлся рассмотренный в данном примере гребной винт ($A_E/A_0=0{,}575$; $Z=4$), предположение о том, что скорость внешнего потока в каждый момент времени можно считать постоянной вдоль хорды, существенно искажает характер функции $\bar{q}_n(\tilde{\xi})$. Для $n=5$ (см. рис. 5.1) это предположение было бы справедливым лишь при $(A_E/A_0)/Z<0{,}05$. В связи со сказанным будем в дальнейшем считать, что распределение интенсивности источников вдоль лопасти определяется формулой (5.13а).

Потенциал скоростей системы источников, имитирующих влияние толщины лопасти, может быть записан в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\Phi}_T^{(j)}(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0,\ \theta_p)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\overline{\Phi}_{T_\nu}(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0)\,e^{-i\nu\,(\theta_p+\varkappa_j)};\\
&\overline{\Phi}_{T\nu}=-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}q_n(\tilde{\xi},\ \bar{r})\frac{e^{i\,(n-\nu)\,(\theta'+\varkappa_j)}}{\overline{S}_0}\times\\
&\qquad\times\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\,a\,(\bar{r})\,d\theta'\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r},
\end{aligned}\right\}\qquad(5.14)$$

где функция $\bar{q}_n(\tilde{\xi},\ \bar{r})$ определяется формулой (5.13а), а $\overline{S}_0$ имеет такой же вид, как в формуле (5.3); $\overline{\Phi}_T=\Phi_T/(VR)$. Безразмерная амплитуда ν-й гармоники объемной составляющей давления в соответствии с формулой (5.1) связана с амплитудой потенциала скоростей соотношением

$$\bar{p}_{T\nu}=2\left(\frac{\partial\overline{\Phi}_{T\nu}}{\partial\bar{x}}-i\,\frac{\nu}{\lambda_t}\,\overline{\Phi}_{T\nu}\right).$$

Тогда для винта в целом получим

$$\bar{p}_{Tm}=\frac{Z}{4\pi^2\lambda_t}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}a\,(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{q}_n\times$$

$$\times\frac{e^{i\,(n-mZ)\,\theta'}}{\overline{S}_0\,(\bar{x}_0,\ \bar{r}_0,\ \theta_0;\ \tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta'+\theta)}\left[imZ+\frac{\lambda_t\,(\bar{x}_0-\lambda_t\theta)}{\overline{S}_0^2}\right]d\theta'\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}.\qquad(5.15)$$

После взятия по частям одного из интегралов по θ' это выражение может быть написано также в следующем виде:

$$\bar{p}_{Tm}=\frac{Z}{4\pi^2\lambda_t}\int\limits_{\bar{r}_H}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}a\,(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{q}_n e^{i\,(n-mZ)\,\theta'}\left[\frac{in}{\overline{S}_0}+F_1\right],\qquad(5.15а)$$

где обозначено

$$F_1(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta') = \frac{\lambda_t(\bar{x}_0 - \lambda_t\theta) + \bar{r}_0\bar{r}\sin(\theta_0 - \theta' - \theta)}{\bar{S}_0^3}.$$

Для винта, работающего в однородном потоке ($q_n = 0$ при $n \neq 0$):

$$\bar{p}_{Tm} = \frac{Z}{4\pi^2\lambda_t}\int_0^{2\pi}\int_{\bar{r}_H}^{1}\int_{-1}^{1} a(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\,\bar{q}_0 F_1 e^{-imZ\theta'}\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}\,d\theta'. \quad (5.16)$$

Если входящую в (5.14) функцию $1/\bar{S}_0$ представить в виде (5.6), то для амплитуды объемной составляющей давления получим

$$\bar{p}_{Tm} = \frac{Z}{2\pi}\int_{\bar{r}_H}^{1}\int_{-1}^{1} a(\bar{r})\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{q}_n \times$$

$$\times\left(\frac{imZ}{\lambda_t}R_{n-mZ} - \frac{\partial R_{n-mZ}}{\partial\bar{x}}\right)e^{i(n-mZ)\theta_0}\,d\tilde{\xi}\,d\bar{r}.$$

Очевидно, что при расчетах объемной составляющей давления не обязательно в каждом случае точно воспроизводить характер распределения толщины сечения вдоль хорды; вполне допустимо предположить, что функция распределения толщины представляет собой параболу $F_e = 1 - \tilde{\xi}^2$. Тогда функции $\bar{q}_n$, определяемые формулой (5.13 а), будут иметь следующий вид:

$$\bar{q}_n(\tilde{\xi},\ \bar{r}) = e^{in\theta}\left\{\frac{\bar{e}(\bar{r})}{\sqrt{\bar{r}^2+\lambda_t^2}}\left[\frac{2\tilde{\xi}}{a(\bar{r})} - in(1-\tilde{\xi}^2)\right]\overline{V}_{\xi n}(\bar{r}) + \right.$$

$$+\bar{e}(\bar{r})\left[\frac{\bar{r}\overline{V}_{rn}(\bar{r})}{\bar{r}^2+\lambda_t^2} + \frac{d\overline{V}_{rn}}{d\bar{r}}\right](1-\tilde{\xi}^2) + \left[\frac{d\bar{e}}{d\bar{r}}(1-\tilde{\xi}^2) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\tilde{\xi}\bar{e}(\bar{r})}{a(\bar{r})}\left(\tilde{\xi}\frac{da}{d\bar{r}} - \frac{d\theta_{SI}}{d\bar{r}}\right)\right]\overline{V}_{rn}(\bar{r})\right\}. \quad (5.17)$$

Для винта в однородном потоке

$$\bar{q}_0(\tilde{\xi},\ \bar{r}) = \frac{2\bar{e}\tilde{\xi}}{a\lambda_t}.$$

С целью упрощения формулы (5.16) и сокращения времени расчетов на ЭВМ интеграл по $\tilde{\xi}$ в ней удобно представить в виде суммы интегралов по промежуткам (—1,0) и (0,1) и к каждому из получившихся интегралов применить теорему о среднем:

$$\int_0^1 \bar{q}_0(\tilde{\xi},\ \bar{r})F_1(\tilde{\xi},\ \bar{r},\ \theta')\,d\tilde{\xi} = F_1(\tilde{\xi}_Q,\ \bar{r},\ \theta')\int_0^1 q_0\,d\tilde{\xi} = F_1(\tilde{\xi}_Q)\,\overline{Q}(\bar{r}).$$

Учитывая, что на промежутках (—1,0) и (0,1) источники в рассматриваемом случае распределены по закону треугольника, можно принять $\tilde{\xi}_Q = \pm 2/3$. Поскольку $\bar{Q}(\bar{r}) = \int_0^1 \bar{q}_0 \, d\tilde{\xi} = \bar{e}/(a\lambda_t)$ для объемной составляющей давления, создаваемого винтом, работающим в однородном потоке, получим

$$\bar{p}_T(\theta_p) = \frac{1}{2\pi\lambda_t^2} \sum_{j=0}^{Z-1} \int_{\bar{r}_H}^{1} \bar{e} \sqrt{\bar{r}^2 + \lambda_t^2} \left[F_1\left(\frac{2}{3}, \bar{r}, \theta_p + \chi_j\right) - F_1\left(-\frac{2}{3}, \bar{r}, \theta_p + \chi_j\right)\right] d\bar{r}.$$

Физически изложенный прием означает, что система распределенных по лопасти источников интенсивностью $q_0(\xi, \bar{r})$ заменяется линейным источником интенсивности $Q(\bar{r})$ на линии $\tilde{\xi} = 2/3$ и стоком той же интенсивности на линии $\tilde{\xi} = -2/3$.

В полученных выше выражениях p_{Lm} и p_{Tm} представляют собой комплексные амплитуды гармоник силовой и объемной составляющих давления. Сложение их должно производиться с учетом фазы колебаний. Так, если обозначить

$$p_m = \frac{1}{2}(p_q^c \pm i p_q^s) \text{ при } m \leqslant 0, \; q = |m|,$$

то q-я гармоника суммарного давления

$$p_q = (p_{Lq}^c + p_{Tq}^c)\cos qZ\theta_p + (p_{Lq}^s + p_{Tq}^s)\sin qZ\theta_p.$$

Соотношение фаз силовой и объемной составляющих таково, что область максимальных амплитуд суммарного давления оказывается расположенной на некотором расстоянии вверх по потоку от гребного винта (рис. 5.2). При удалении от винта амплитуды пульсаций давления быстро уменьшаются. Так, для

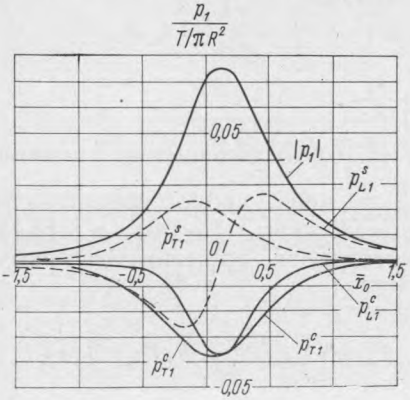


Рис. 5.2. Соотношение фаз силовой и объемной составляющих давления ($q=1$; $Z=4$; $A_E/A_0=1{,}0$; $H/D=1{,}24$; $e_0/D=0{,}06$; $C_T=0{,}8$; $\bar{r}_0=1{,}3$).

точек, расположенных по прямой, параллельной оси x_0, при удалении точки от центра диска винта на расстояние, равное его радиусу, амплитуды пульсаций становятся почти на порядок меньше, чем их максимальные значения при $x_0 \approx 0{,}2R$.

Что же касается соотношения величин p_L и p_T, то оно зависит от геометрических элементов винта [15] и его нагрузки. Однако во всех случаях вклад объемной составляющей в амплитуду сумарного давления растет с увеличением относительной толщины лопастей и с уменьшением нагрузки винта.

Формулы (5.5) и (5.15), полученные в предположении о легкой нагрузке винта, можно распространить на случай умеренно нагруженного винта, заменив в них, как это обычно делается, величину λ_t на λ_{I0}. Необходимо, однако, помнить, что справедливость такого приема можно доказать лишь в простейшем случае гребного винта в свободной воде (для этого при выводе расчетных формул необходимо сохранить квадраты вызванных скоростей в уравнении Бернулли и принять шаг вихревых пелен равным $2\pi R\lambda_{I0}$). В общем случае упомянутая замена λ_t на λ_{I0} не имеет строгого обоснования.

Прежде чем перейти к изложению некоторых результатов расчетов, остановимся на вопросе о влиянии сжимаемости жидкости на величину пульсаций давления, создаваемых винтом.

Все приведенные выше зависимости получены в предположении о несжимаемости жидкости, обычном для большинства гидродинамических расчетов. Вместе с тем известно [51], что при изучении нестационарных процессов сжимаемостью жидкости можно пренебрегать лишь в том случае, когда выполняется не только условие малости числа Маха $M_n = V/c_0 \ll 1$ (c_0 — скорость распространения звука в жидкости), но также и неравенство $R_0/c_0 \ll T$, означающее, что время, в течение которого возмущение в жидкости распространяется на расстояние R_0, должно быть много меньше характерного периода процесса $T = 2\pi/\omega$. Очевидно, что даже при весьма малой сжимаемости воды, начиная с некоторых значений отстояния точки наблюдения от центра диска винта, пренебрежение сжимаемостью будет приводить к ошибкам в определении амплитуд давления.

Для того чтобы произвести оценку влияния сжимаемости воды на амплитуды возмущений, создаваемых винтом, необходимо прежде всего получить выражение для потенциала скоростей, индуцируемых в сжимаемой жидкости элементарной гидродинамической особенностью — пульсирующим источником интенсивности $q(t)$, движущимся по винтовой линии (или по окружности, если движение рассматривается в системе координат, поступательно движущейся с винтом). В качестве исходного используем при этом выражение для так называемого «запаздывающего потенциала источника» [67]:

$$\varphi_q(X_0,\ r_0,\ \theta_0,\ t) = -\frac{q(t_1)}{4\pi R(X_0,\ r_0,\ \theta_0,\ t_1)}, \qquad (5.18)$$

где $R(t_1) = S(t_1) - \frac{1}{c_0}\vec{V}_s(t_1)\vec{S}(t_1)$, а t_1 является корнем уравнения

$$S(X_0,\ r_0,\ \theta_0;\ t_1) = c_0(t - t_1). \tag{5.19}$$

В этих формулах $\vec{V}_s(t)$ — скорость движения источника, причем предполагается, что $|\vec{V}_s| < c_0$, а $S(t)$ — расстояние между источником и точкой наблюдения. Запаздывающий потенциал (5.18) является решением волнового уравнения математической физики.

Если сделать предположение о несжимаемости жидкости ($c_0 \to \infty$), то выражение (5.18) переходит в известную зависимость:

$$\varphi_q(X_0,\ r_0,\ \theta_0;\ t) = -\frac{q(t)}{4\pi S(t)}.$$

Из сказанного ясно, что для того чтобы учесть влияние сжимаемости жидкости на амплитуды создаваемых винтом давлений, достаточно в соответствующих выражениях величины вида $1/S_0(t)$ заменить на $1/R(t_1)$, а $q(t)$ и $\gamma_b(t)$ — на $q(t_1)$ и $\gamma_b(t_1)$, где t_1 — корень уравнения (5.19). Однако практическое использование этого общего приема в задачах, связанных с исследованием возмущений, создаваемых гребным винтом [163, 168], затруднено тем, что (5.19) — трансцендентное уравнение [см. формулу (5.3)].

Можно показать, что в том случае, когда явление носит периодический характер (координаты источника и его интенсивность изменяются во времени с круговой частотой Ω), выражения для потенциала возмущений источника могут быть преобразованы к виду:

$$\varphi_q(X_0,\ r_0,\ \theta_0;\ t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi_{q\nu}(x_0,\ r_0,\ \theta_0)\, e^{i\nu\Omega t}; \tag{5.20}$$

$$\varphi_{q\nu} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{in\Omega t}\,\frac{e^{-i\nu k S_0(t)}}{S_0(t)}\,e^{-i\nu\Omega t}\,d(\Omega t), \tag{5.21}$$

где $k = \Omega/c_0$ — волновое число; q_n — амплитуда n-й гармоники разложения функции $q(\Omega t)$ в ряд Фурье. Выражения (5.20) и (5.21) полностью эквивалентны общей зависимости (5.18), но для их использования не требуется решать уравнение (5.19).

Если движение источника является периодическим не в неподвижной, а в движущейся поступательно со скоростью V системе координат (как это имеет место в случае гребного винта), то в формулу (5.21) нужно, вообще говоря, ввести некоторые поправки, зависящие от числа Маха $M_n = V/c_0$. Однако при условии $M_n \ll 1$, всегда выполняющемся для гребных винтов, этим

обстоятельством можно пренебречь и пользоваться зависимостью (5.21) и при $V \neq 0$.

Выражение для коэффициентов Фурье запаздывающего потенциала диполя при его периодическом движении в сжимаемой жидкости может быть получено дифференцированием (5.21) по координатам:

$$\varphi_{d\nu} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{3}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{ns}\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{e^{-i\nu k S_0(t)}}{S_0(t)}\right] e^{i(n-\nu)\Omega t}\, d(\Omega t), \tag{5.22}$$

где $\vec{d}_n = (d_{n1}, d_{n2}, d_{n3})$ — коэффициенты Фурье периодической функции $\vec{d}(\Omega t)$, характеризующей зависимость момента диполя от времени; d_{ns} — проекция вектора $\vec{d}_n$ на направление x_s.

С учетом изложенного давление, создаваемое винтом в сжимаемой жидкости, может быть представлено в виде ряда Фурье, каждая гармоника которого определяется как интеграл от выражений для элементарных особенностей вида (5.21) и (5.22), взятый по участкам винтовых поверхностей A_1.

Результаты количественной оценки влияния сжимаемости на амплитуды силовой составляющей давления для четырехлопастного винта приведены в табл. 5.1. Числа в последних трех

Таблица 5.1. **Влияние сжимаемости жидкости на амплитуду силовой составляющей давления для четырехлопастного винта**

$\overline{R}_0$	$\overline{k}_Z$		
	0	0,3	0,6
1,077	0,475	0,477	0,482
1,360	0,173	0,174	0,177
1,552	$0{,}808 \cdot 10^{-1}$	$0{,}815 \cdot 10^{-1}$	$0{,}837 \cdot 10^{-1}$
2,040	$0{,}172 \cdot 10^{-1}$	$0{,}175 \cdot 10^{-1}$	$0{,}186 \cdot 10^{-1}$
4,020	$0{,}523 \cdot 10^{-3}$	$0{,}579 \cdot 10^{-3}$	$0{,}808 \cdot 10^{-3}$
6,013	$0{,}696 \cdot 10^{-4}$	$0{,}885 \cdot 10^{-4}$	$0{,}207 \cdot 10^{-3}$
10,00	$0{,}546 \cdot 10^{-5}$	$0{,}118 \cdot 10^{-4}$	$0{,}770 \cdot 10^{-4}$

столбцах этой таблицы представляют собой безразмерные амплитуды первой гармоники давления $2\pi\bar{p}_{L1}/C_T$ (C_T — коэффициент нагрузки винта по упору) для точек, удаленных от центра диска винта на расстояние $\overline{R}_0 = \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{r}_0^2}$. Расчеты выполнялись при различных значениях безразмерного волнового числа $\overline{k}_Z = Z\overline{k} = ZkR$; значение $k = 0$ соответствует случаю несжимаемой жидкости. Видно, что влияние сжимаемости (рост $\overline{k}_Z$)

приводит к тем большему увеличению амплитуд давления, чем дальше от винта расположена рассматриваемая точка. Однако для практических оценок следует иметь в виду, что у гребных винтов современных судов частота вращения и диаметр ограничены соотношениями $n_m \leqslant 100$ об/мин, $D < 10$ м, что при $c_0 \approx \approx 1500$ м/с дает $\bar{k} = \Omega R/c_0 < 0{,}03$. Поэтому в области, где амплитуды давления максимальны ($\bar{R}_0 < 1$), влияние сжимаемости может увеличить их не более чем на 1 %, и предположение о несжимаемости жидкости является в этом случае вполне оправданным. При интегрировании давлений по поверхности корпуса судна с целью определения их равнодействующей (см. следующий параграф) приходится вычислять амплитуды давления в точках, удаленных от винта на расстояние до $(8 \div 10)R$. При таких расстояниях влияние сжимаемости жидкости, в особенности для высших гармоник давления, сказывается более заметно, однако сами амплитуды в этих точках весьма малы (см. табл. 5.1), и поэтому пренебрежение сжимаемостью также не приведет к сколь-нибудь заметным ошибкам в величине суммарной силы. Таким образом, во всех практически интересных случаях амплитуды периодических давлений, создаваемых гребным винтом в точках поверхности корпуса, могут вычисляться без учета влияния сжимаемости жидкости. На бóльших расстояниях от винта, соизмеримых с величиной $\lambda_Z = 2\pi c_0/Z\Omega$, учет влияния сжимаемости жидкости становится обязательным. На таких расстояниях создаваемые винтом в жидкости возмущения приобретают характер звуковых волн с длиной волны λ_Z и носят в соответствии с принятой терминологией название «звука вращения» винта [67].

Расчеты амплитуд давления, создаваемого гребными винтами, выполнялись многими авторами. Исследуя влияние различных параметров на амплитуды давления в точках поверхности корпуса судна, Н. Н. Бабаев одним из первых показал, что наиболее заметное влияние на их величину оказывает число лопастей гребного винта и относительный зазор между винтом и корпусом: с ростом этих параметров амплитуды давления падают. Им же было указано, что неоднородность потока, приводя к увеличению нагрузки лопасти в момент нахождения ее вблизи корпуса, увеличивает и амплитуды давления в точках поверхности корпуса. Это обстоятельство было подтверждено многими более поздними расчетами. При этом оказалось, что влияние неоднородности потока усиливается с удалением рассматриваемой точки пространства от винта. Расчеты показали, что максимальные амплитуды давления в точках поверхности корпуса могут увеличиваться вследствие влияния неоднородности потока в 1,2—1,6 раза. Нижний предел соответствует случаю умеренной неоднородности потока за корпусом двухвинтовых судов, а верхний — сильно неоднородному потоку одновинтового судна. Следует отметить, что для точек, расположенных

вблизи винта, неоднородность потока увеличивает в основном силовую составляющую давления, оказывая незначительное влияние на объемную.

Систематические расчетные оценки влияния геометрических элементов винта на амплитуды создаваемого им давления для случая работы винта в однородном потоке были выполнены Б. А. Бискупом [15]. Эти оценки показали, что шаговое и дисковое отношение винта сравнительно слабо влияют на амплитуды пульсации давления и подтвердили факт заметного снижения этих амплитуд при увеличении числа лопастей винта. При этом оказалось, что уменьшение амплитуд давления с ростом Z происходит лишь за счет силовой составляющей: объемная составляющая из-за происходящего одновременно увеличения относительной толщины лопастей с ростом их числа практически не меняется. Вследствие этого количественные оценки влияния числа лопастей, полученные ранее в работах [4, 147] без учета влияния толщины лопастей, следует считать завышенными.

Заметное влияние на амплитуды пульсации давления оказывает саблевидность лопастей гребного винта. Так, винты с сильно саблевидными лопастями, у которых угол саблевидности θ_S^* примерно равен углу между лопастями, создают пульсации давления в два—четыре раза меньшие, чем винты с обычным контуром лопастей типа Трооста [112, 162].

Многими авторами производилось сопоставление расчетных значений амплитуд и фаз периодического давления, создаваемого некавитирующим гребным винтом, с результатами, полученными при измерениях давлений в опытовых бассейнах и кавитационных трубах [15, 117, 128]. Такое сопоставление показало, что расчет амплитуд периодического давления методом гидродинамических особенностей дает результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментом. Это подтверждается также данными, приведенными на рис. 5.3—5.5.

Кривые на рис. 5.3 и 5.4 характеризуют расчетное распределение безразмерных амплитуд 1-й гармоники давления $K_{p1} = |p_1|/(\rho n^2 D^2)$ вдоль прямой $\bar{r}_0 = 1{,}1$, параллельной оси винта. Там же приведены результаты экспериментов в кавитационной трубе [117] по измерению давления на пластине, расположенной над моделью гребного винта. Данные рис. 5.4 относятся к случаю работы винта в неоднородном потоке за специальным экраном. С тем чтобы при сопоставлении с экспериментальными данными учесть влияние граничного условия непротекания на поверхности пластины (см. § 5.2), расчетные значения амплитуд давления удваивались.

На рис. 5.5 приведены расчетные кривые, характеризующие распределение амплитуд давления вдоль ватерлинии, проходящей вблизи гребного винта, для двухвального контейнерного судна (геометрические элементы винта приведены в гл. 3). Там

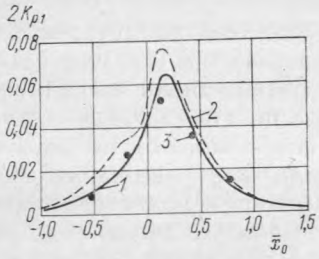


Рис. 5.3. Распределение амплитуд 1-й гармоники давления вдоль прямой $\bar{r}_0=1{,}1$ (однородный поток).

1 — расчет по теории несущей поверхности; *2* — расчет по теории несущей линии; *3* — измерения давления на пластине [117].

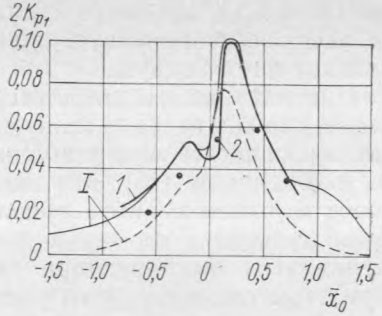


Рис. 5.4. Распределение амплитуд 1-й гармоники давления вдоль прямой $\bar{r}_0=1{,}1$ (неоднородный поток).

1 — расчет по теории несущей линии; ——— — неоднородный поток; — — — однородный поток; *1* — расчет по теории несущей поверхности [128]; *2* — измерения давления на пластине.

же нанесены экспериментальные точки, полученные в модельных и натурных условиях О. Н. Беззубиком.

Анализ большинства имеющихся данных показывает, что наилучшее совпадение с опытом дают расчеты, основанные на замене лопасти винта несущей поверхностью. Однако и в случае замены лопасти несущей линией (с использованием «метода $^3/_4$») совпадение расчета с экспериментом остается вполне удовлетворительным. Учитывая значительное сокращение времени расчетов на ЭВМ в случае использования схемы несущей линии, такой метод расчета давления вполне может быть рекомендован для практических целей, в особенности в тех случаях, когда давление вычисляется в большом числе точек (например,

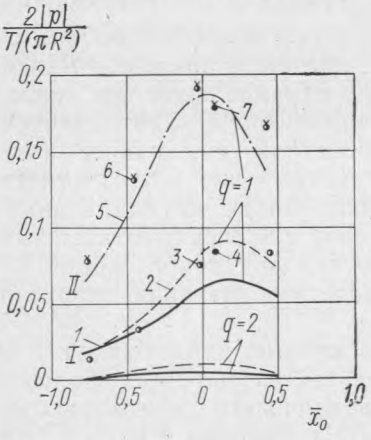


Рис. 5.5. Давление, индуцируемое винтом на корпусе двухвального контейнерного судна.

I — бескавитационный режим работы винта; *1* — расчет по теории несущей поверхности; *2* — расчет по теории несущей линии; *3* — измерения на корпусе модели; *4* — натурные измерения; *II* — при наличии кавитации на винте; *5* — расчет; *6* — измерения на корпусе модели; *7* — натурные измерения.

при расчетах равнодействующей системы давлений, передаваемых винтом на корпус судна).

В заключение заметим, что приведенные в данном параграфе зависимости позволяют рассчитывать не только амплитуды пульсаций давления, создаваемого винтом, но также и среднее во времени давление («нулевую гармонику» $m = 0$). Такого рода расчеты могут оказаться необходимыми при исследовании взаимодействия гребного винта с корпусом судна, например при расчетах силы засасывания.

5.2. Равнодействующая периодических давлений, создаваемых гребным винтом на корпусе судна

Если известно аналитическое представление формы поверхности корпуса судна A_H и изменение гидродинамического давления $\delta p(X, Y, Z; \theta_p)$, создаваемого гребным винтом в точках поверхности A_H, то равнодействующая давлений F_H, называемая поверхностной силой, будет определяться следующей формулой:

$$\vec{F}_H(\theta_p) = -\iint\limits_{A_H} \vec{n}_H \delta p \, dA_H, \tag{5.23}$$

где $\vec{n}_H$ — нормаль к поверхности A_H, X, Y, Z — координаты точек поверхности корпуса.

Разлагая каждую из проекций силы в ряд Фурье по углу θ_p, получим гармонические составляющие поверхностной силы, создаваемой гребным винтом на корпусе судна.

Поскольку, как правило, аналитическое представление формы поверхности корпуса корабля отсутствует, то она заменяется при расчетах поверхностью многогранника, а интегрирование в формуле (5.23) заменяется суммированием по площадкам, из которых состоит этот многогранник.

В линейной постановке задачи гидродинамическое давление подчиняется принципу суперпозиции, поэтому в качестве величины δp в формуле (5.23) может быть принято периодическое давление $(p_L + p_T)$, рассчитанное с помощью метода, изложенного в предыдущем параграфе. Необходимо лишь при его определении учесть влияние расположенной вблизи винта поверхности корпуса, а также влияние свободной поверхности воды, подчинив потенциал вызванных скоростей винта Φ_p дополнительным граничным условиям:

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial n_H} = 0 \quad \text{на поверхности } A_H; \tag{5.24}$$

$$p = \text{const} = p_a \quad \text{на свободной поверхности } Z = \zeta. \tag{5.25}$$

Линеаризованное граничное условие (5.25) в общем случае, как известно [46], имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_p}{\partial Z} = 0 \quad \text{при} \quad Z = 0,$$

или, в безразмерных величинах,

$$S_{nP}^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_p}{\partial \bar{t}^2} + \frac{1}{F_{nP}^2} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_p}{\partial \bar{Z}} = 0. \tag{5.26}$$

где $S_{nP} = \omega_Z R/V$ — число Струхаля; ω_Z — лопастная частота; $F_{nP} = V/\sqrt{gR}$ — число Фруда; $\bar{\Phi}_p = \Phi_p/VR$; $\bar{t} = \omega_Z t$; $\bar{Z} = Z/R$.

Для гребных винтов выполняется соотношение

$$\frac{1}{S_{nP}^2} \cdot \frac{1}{F_{nP}^2} \ll 1,$$

поэтому в рассматриваемом случае граничное условие (5.26) можно записать в виде

$$\Phi_p = 0 \quad \text{при} \quad Z = 0. \tag{5.27}$$

Решение задачи о нахождении потенциала вызванных скоростей винта, удовлетворяющего кроме граничных условий на поверхности лопасти и на бесконечности еще и условиям (5.24) и (5.27), в настоящее время еще не получено ввиду значительных вычислительных трудностей. В то же время для некоторых случаев схематизированных обводов корпуса известны оценки так называемого «коэффициента влияния стенки», показывающего, во сколько раз истинная амплитуда поверхностной силы превосходит ее величину, определенную без учета граничного условия непротекания (5.24), т. е. путем интегрирования давлений, которые создавал бы в точках поверхности корпуса гребной винт, работающий в безграничной жидкости. Так, Д. Бреслином [152] установлено, что в случае работы гребного винта вблизи бесконечно длинного цилиндра, ось которого параллельна оси винта, коэффициент влияния стенки равен двум. Такую же величину этого коэффициента принимают при вычислении поверхностной силы, создаваемой винтом на расположенной вблизи него плоской пластине конечных размеров [147].

Очевидно, что величина коэффициента влияния стенки в общем случае зависит от формы обводов корпуса в районе расположения гребного винта. Такой вывод следует, например, из решения схематизированной задачи о нахождении поверхностной силы, создаваемой на эллипсоиде вращения расположенным вблизи него пульсирующим источником [81]. Коэффициент влияния стенки в этом случае оказывается равным $(1+\lambda_{ii})$, где λ_{ii} — коэффициент присоединенной массы эллипсоида в соответствующем направлении, и может, следовательно, изменяться от

величины, близкой к единице (в случае расположения источника на продолжении большой оси эллипсоида большого удлинения) до двух (если источник расположен на продолжении малой оси такого эллипсоида). В случае шара коэффициент влияния стенки равен 1,5.

Из сказанного следует, что при вычислении амплитуд поверхностной силы для реальных судовых обводов коэффициент влияния стенки можно считать равным двум лишь приближенно. Ошибка будет наименьшей для случая бортового расположения винтов; для одновинтовых судов такой прием приводит к завышению амплитуд поверхностной силы, в особенности ее проекции на ось X.

Каких-либо данных о том, насколько сильно влияет на амплитуду поверхностной силы граничное условие на свободной поверхности (5.27), в настоящее время нет. Можно лишь предположить, что невыполнение этого условия сказывается лишь на амплитудах давления в тех точках поверхности корпуса, которые расположены непосредственно вблизи ватерлинии. Если амплитуды индуцируемого винтом давления в этих точках велики и вносят заметный вклад в интеграл (5.23), то влияние свободной поверхности на амплитуду поверхностной силы будет заметным; в противном случае оно будет невелико.

Амплитуды давления (см. § 5.1) быстро затухают по мере удаления рассматриваемой точки поверхности корпуса от винта. Однако вместе с тем с удалением от винта вверх по потоку увеличивается площадь поверхности интегрирования в выражении (5.23), так что при практическом вычислении проекций поверхностной силы предел интегрирования в формуле (5.23) в направлении оси винта следует принимать равным не менее чем $X_{\max} = 8R$ [81]. По остальным направлениям границей поверхности интегрирования должна являться действующая ватерлиния.

Выше отмечалось, что неоднородность поля скоростей в месте расположения гребного винта оказывает заметное влияние на амплитуды пульсаций давления, создаваемого винтом. Это влияние максимально при тех положениях лопасти по углу поворота, при которых попутный поток корпуса имеет наибольшую величину. Такие зоны с наибольшей неоднородностью поля скоростей расположены обычно так, что лопасть винта в момент прохождения этих зон наиболее близко подходит к поверхности корпуса. Следовательно, неоднородность потока должна увеличивать максимальные амплитуды давления в точках поверхности корпуса; это увеличение, как указывалось выше, составляет 1,2—1,6 раза. Еще более значительное влияние оказывает неоднородность потока на амплитуды давления в удаленных (в осевом направлении) от гребного винта точках. Таким образом, влияние неоднородности поля скоростей в диске винта должно приводить к росту амплитуд поверхностной силы.

Это подтверждается результатами расчетов, выполненных М. А. Вашкевичем [81]. Полученные им данные показывают, что за счет влияния неоднородности амплитуды 1-й гармоники поверхностной силы для двухвальных судов увеличиваются, например, в два—четыре раза.

Поверхностная сила, создаваемая винтом на корпусе судна, является возмущающей силой, вызывающей общую и местную вибрацию корпуса на лопастной и кратной ей частотах наряду с силами, передаваемыми винтом через гребной вал. Поэтому небезынтересно знать, каково соотношение амплитуд этих двух категорий сил. Очевидно, что это соотношение зависит от числа лопастей винта и зазора между винтом и корпусом, ибо с ростом числа лопастей Z и с увеличением относительного зазора амплитуда поверхностной силы весьма заметно снижается, а амплитуда силы на винте с ростом Z изменяется немонотонно [10] (хотя в общем также уменьшается) и значительно слабее зависит от зазора. Расчеты для двухвального контейнерного судна, рассматривавшегося в качестве примера в предыдущих параграфах, показали, что при $Z=4$ и относительном зазоре между винтом и корпусом $0{,}28D$ амплитуды поверхностной силы соизмеримы с амплитудами сил, передаваемых винтом на корпус через вал (табл. 5.2).

Таблица 5.2. **Амплитуды первых гармоник безразмерных (в % от упора) проекций сил, возникающих на гребном винте и на корпусе судна**

Амплитуда	Направление оси и номер гармоник					
	в нос		горизонтальное		вертикальное	
	1	2	1	2	1	2
Силы:						
на винте	2,36	0,42	1,68	0,16	2,40	0,31
поверхностные (от одного винта)	0,44	0,03	3,12	0,28	1,64	0,05
суммарные (от одного винта)	2,70	0,45	4,67	0,43	1,13	0,26

В заключение данного раздела отметим, что «прямой» метод определения амплитуды поверхностной силы путем вычисления интеграла давлений по поверхности корпуса не является единственно возможным. С. Ворус [164] показал, что задачу (5.23)—(5.27) путем применения формулы Грина можно свести к вычислению некоторого интеграла, взятого по поверхности лопастей винта, причем в подынтегральную функцию входит амплитуда $H_q(\vec{S})$ потенциала нестационарных скоростей, создаваемых корпусом при его движении (без винта) в направлении отрицатель-

ной оси X и колебаниях с единичной амплитудой в направлении, совпадающем с направлением той проекции поверхностной силы, которая подлежит определению. По мнению автора упомянутой работы, вычислительные трудности при решении задачи о нахождении функции H_q (из-за иного граничного условия на поверхности корпуса) меньше, чем при нахождении потенциала вызванных скоростей винта с учетом граничного условия (5.24).

5.3. Периодические силы, создаваемые гребным винтом на выступающих частях корпуса судна

Изложенный выше приближенный метод расчета поверхностных сил, основанный на предположении, что величина индуцируемого винтом давления на поверхности корпуса равна удвоенному давлению, создаваемому винтом в соответствующих точках жидкости при отсутствии корпуса, совершенно не пригоден для вычисления периодических усилий, создаваемых винтом на выступающих частях корпуса (лапы кронштейнов, выкружки, руль), ибо последние, по существу, представляют собой крылья конечного размаха, расположенные в потоке вблизи винта таким образом, что под действием периодически изменяющихся вызванных скоростей винта на них возникает периодически изменяющаяся подъемная сила. Именно в такой постановке следует решать задачу о расчете усилий, создаваемых винтом на выступающих частях корпуса судна.

Набегающий на гребной винт и выступающую часть внешний поток является неоднородным. Однако если считать его стационарным, то периодические усилия, действующие на выступающую часть, будут обусловлены лишь влиянием работающего гребного винта. Поэтому при нахождении указанных усилий можно пренебречь дополнительными скоростями, характеризующими неоднородность набегающего потока. Вместе с тем при расчете скоростей, создаваемых винтом в точках крыла, циркуляцию вокруг сечений лопастей винта следует считать переменной в течение оборота, учитывая в этом смысле влияние неоднородности набегающего на винт потока.

Заменяя выступающую часть (крыло) слоем вихрей и источников и используя методы теории несущей поверхности, описанные в гл. 4, можно получить выражения для амплитуд периодических сил, создаваемых гребным винтом на выступающих частях корпуса судна [81].

Анализ полученных зависимостей и результатов выполненных по ним расчетов показывает, что амплитуды периодических сил, создаваемых винтом на выступающих частях, зависят от большого количества параметров, таких как число лопастей винта и его нагрузка, геометрические характеристики высту-

пающих частей (удлинение, относительная толщина, размеры по отношению к радиусу винта), размещение их относительно винта.

При обычно имеющих место на практике геометрических элементах лап кронштейнов гребных валов и их расположении относительно винта амплитуда поперечной периодической силы, действующей на лапы, в долях упора винта составляет: для четырехлопастных винтов — около 0,5—1 %, для пятилопастных винтов — около 0,2—0,5 %. В неблагоприятных случаях (близко расположенные лапы и трехлопастные гребные винты) амплитуды усилий, возникающих на лапах кронштейна, могут быть по величине соизмеримы с амплитудами сил, передаваемых гребным винтом на корпус через гребной вал и через воду. При увеличении зазора между лапами и винтом амплитуды периодических сил резко уменьшаются.

Амплитуды поперечных сил, возникающих на руле [8] в случае размещения его в струе винта, могут достигать значительных величин — до 5—7 % упора для трехлопастных винтов (рис. 5.6). Амплитуды гидродинамических нагрузок, действующих в этом случае на руль, могут достигать 60—70 % удельного упора винта и в несколько раз превышать максимальные амплитуды периодических давлений, создаваемых винтом на обшивке корпуса судна. В случае размещения руля вне струи винта амплитуды периодических сил и нагрузок, возникающих на нем, оказываются в пять—семь раз меньшими, чем в предыдущем случае (кривая *4* на рис. 5.6). Амплитуды поперечных периодических сил, создаваемых на рулях трехлопастными гребными винтами, значительно превышают величины, соответствующие четырехлопастным винтам (кривые *1* и *3* на рис. 5.6). Это объясняется не только уменьшением амплитуд индуцируемых гребным винтом скоростей с ростом числа лопастей, но и различным характером (симметричным и антисимметричным) распределения этих скоростей относительно оси винта с нечетным и четным числом лопастей. Как следствие, для гребного винта

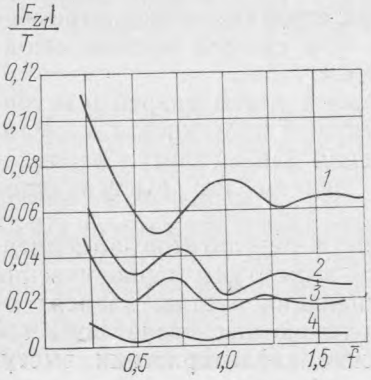


Рис. 5.6. Амплитуды поперечной периодической силы, возникающей на рулях.

1 — руль установлен симметрично относительно оси винта, $Z=3$; *2* — руль смещен по высоте относительно оси винта, $Z=4$; *3* — руль установлен симметрично относительно оси, $Z=4$; *4* — руль вне струи винта, $Z=4$; $\bar{f}$ — относительный зазор между винтом и рулем.

с четным числом лопастей поперечная периодическая сила на руле прямоугольной формы в плане, установленном по высоте симметрично относительно оси винта, в условиях однородного потока была бы равна нулю. Указанные особенности распределения скоростей сохраняются и при работе винта в неоднородном потоке. Однако в этом случае за счет нарушения антисимметрии распределения вызванных скоростей результирующая периодическая сила отлична от нуля и при четном числе лопастей.

По этой же причине для гребных винтов с четным числом лопастей поперечная периодическая сила, возникающая на руле, нижняя кромка которого совпадает с осью винта, оказывается больше, чем в том случае, когда руль по высоте расположен симметрично относительно оси винта (кривые *2* и *3* на рис. 5.6). Для гребных винтов с нечетным число лопастей размещение руля симметрично относительно оси винта является, наоборот, наиболее неблагоприятным из-за возникающих на руле поперечных периодических сил. Так, пятилопастные гребные винты создают на рулях, полностью перекрывающих струю, поперечные силы, амплитуды которых составляют 3—4 % упора. По отношению к осевой составляющей периодической силы влияние четности или нечетности числа лопастей винта носит обратный характер: при симметричном по отношению к оси винта расположении руля осевая сила в случае нечетного числа лопастей близка к нулю.

Зависимость амплитуд периодических сил от зазора между винтом и рулем носит волнообразный характер с убывающими по мере увеличения зазора «размахами колебаний» (см. рис. 5.6). Период указанных колебаний равен шагу пелен свободных вихрей винта, деленному на число лопастей. Указанный характер зависимости обусловлен соотношением фаз скоростей, вызываемых в точках поверхности руля свободными вихрями винта, с одной стороны, и присоединенными вихрями и источниками, характеризующими воздействие самих лопастей винта, с другой. При удалении от винта на расстояние, равное его диаметру, скорости, индуцируемые гребным винтом, приобретают характер «бегущей волны», и периодические силы, возникающие на руле, перестают зависеть от зазора. В силу указанного характера зависимости существуют оптимальные положения руля вдоль оси винта, соответствующие минимальным амплитудам периодических сил. Как показывает анализ результатов расчетов, ближайший к винту оптимум соответствует расстоянию между плоскостью диска винта и передней кромкой руля, приблизительно равному шагу винта, деленному на число лопастей.

На рис. 5.7 и 5.8 приведены некоторые результаты сопоставления расчетов по изложенному выше методу с данными опытов по измерению периодических усилий, создаваемых гребным

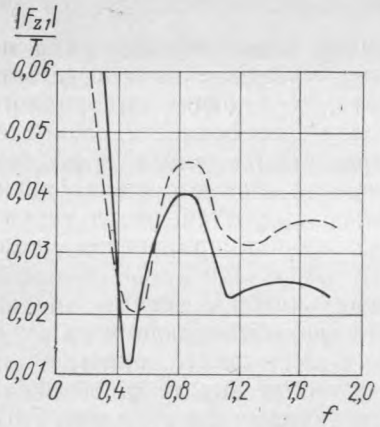


Рис. 5.7. Зависимость поперечной силы от зазора для прямоугольного руля, расположенного в струе за винтом, $Z=3$; $H/D=1{,}02$; $A_E/A_0=0{,}375$; $e_0/D=0{,}045$.

— — — — расчет, амплитуда 1-й гармоники; ——— — эксперимент [132].

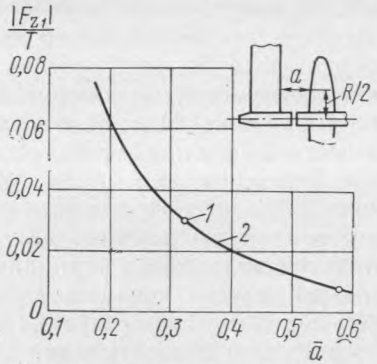


Рис. 5.8. Зависимость 1-й гармоники поперечной силы от зазора для лапы кронштейна гребного вала, $Z=4$; $H/D=1{,}0$; $A_E/A_0=0{,}5$; $e_0/D=0{,}05$.

1 — расчет; *2* — эксперимент [135].

винтом на выступающих частях корпуса. Кривые на рис. 5.7 характеризуют зависимость амплитуды поперечной силы на руле, установленном в струе винта, от зазора $\bar{f}$ между винтом и рулем. Кривая на рис. 5.8 характеризует зависимость амплитуды поперечной периодической силы, создаваемой четырехлопастным гребным винтом на лапе кронштейна гребного вала, от зазора между винтом и лапой. Относительная длина лапы (в долях радиуса винта) равна 1,83, относительная ширина лапы — 1,29. При расчетах [7] циркуляция вокруг элементов лопасти винта определялась по «методу $^3/_4$». Рассчитывались амплитуды 1-й гармоники, которая является преобладающей. На том же рисунке нанесены результаты опытов [135]. На рис. 5.9 приведено расчетное распределение амплитуд гидродинамической нагрузки (перепада давлений между нагнетающей и засасывающей сторонами) вдоль лапы кронштейна.

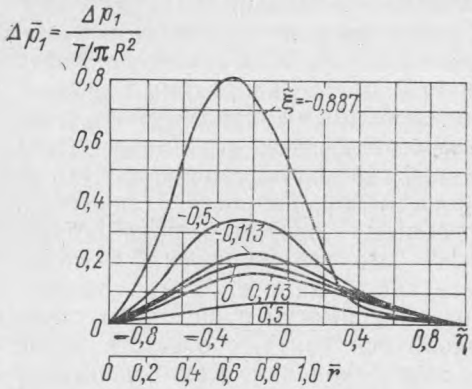


Рис. 5.9. Распределение амплитуд 1-й гармоники гидродинамической нагрузки вдоль лапы кронштейна в различных сечениях $\tilde{\xi}=\text{const}$ ($\tilde{\xi}=-1$ соответствует задней кромке лапы; $\tilde{\eta}=-1$ — оси винта).

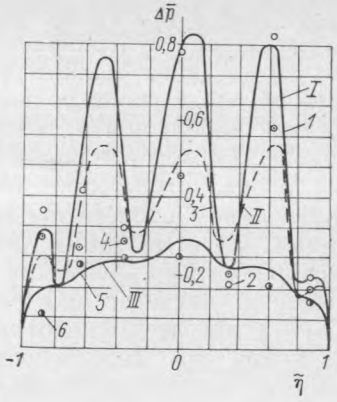


Рис. 5.10. Распределение амплитуд 1-й гармоники нагрузки вдоль размаха руля, установленного за винтом, $Z=3$; $H/D=1{,}0$; $A_в/A_0=0{,}5$; $e_0/D=0{,}05$.

I — $\tilde{\xi}=0{,}8$; 1 — расчет; 2 — эксперимент; II — $\tilde{\xi}=0{,}4$; 3 — расчет; 4 — эксперимент; III — $\tilde{\xi}=0{,}4$; 5 — расчет; 6 — эксперимент.

Кривые на рис. 5.10 характеризуют расчетное распределение амплитуд 1-й гармоники гидродинамической нагрузки вдоль размаха для руля, установленного в струе за трехлопастным гребным винтом. Расчеты выполнялись Е. Н. Сыркиным. Им же были проведены опыты по измерению давления на поверхности модели руля; результаты этих опытов также представлены на рис. 5.10.

Изложенные в данной главе методы могут быть использованы в расчетах общей и местной вибрации корпуса судна при определении величины возмущающих сил, создаваемых гребным винтом. При этом в расчетах общей вибрации периодические силы, действующие на обшивку кормовой оконечности корпуса и его выступающие части, следует с учетом начальных фаз суммировать с силами, передаваемыми от винта на корпус через опоры гребного вала.

Глава 6

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КАВИТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРЕБНОГО ВИНТА

6.1. Кавитация гребных винтов и сопровождающие ее эффекты

Кавитация гребных винтов — вредное явление, приводящее к ухудшению их гидродинамических характеристик, эрозионному разрушению лопастей, возникновению интенсивного подводного шума и увеличению уровней вибраций корпуса судна.

В отдельных случаях на высокоскоростных судах избежать сильно развитой кавитации гребных винтов не удается, поэтому возникает проблема наиболее рационального их приспособле-

ния к работе в указанных условиях. Такие гребные винты получили название суперкавитирующих. Однако, как уже указывалось во введении, в книге рассматриваются теория и методы расчета обычных гребных винтов, при проектировании которых вследствие небольшой интенсивности допускаемых кавитационных процессов могут использоваться методы, развитые применительно к некавитирующим винтам, а учет влияния кавитации при поверочном расчете производится путем корректировки получаемых этими методами данных.

Возникновение кавитации обязано своим происхождением уменьшению местного давления в обтекающем лопасти гребного винта потоке до некоторого критического значения.

Несмотря на кажущуюся простоту явления возникновения кавитации, в действительности этот процесс очень сложен и в настоящее время до конца не изучен. Вопреки обыденным представлениям, чистые жидкости могут выдерживать очень большие растягивающие напряжения. Причиной, препятствующей проявлению указанного свойства жидкостей в обычных условиях, является их неоднородность. Инородные включения являются теми «слабыми точками», в которых и происходит разрыв. В результате оказывается, что корректное описание процесса возникновения кавитации требует знания прочностных характеристик и концентрации «слабых точек», получивших название кавитационных зародышей или ядер кавитации. Кроме того, оказывается, что взаимодействие ядер с потоком жидкости и их способность совершать движение относительно окружающих жидких частиц обусловливает возможность проявления кавитации в различных формах, таких как пузырьковая, пленочная, облачная, вихревая и т. д. [41].

Зародышами кавитации могут служить изобилующие в реальных жидкостях несмачиваемые твердые частицы, а также невидимые невооруженным глазом микроскопические газовые пузырьки. Однако необходимо констатировать, что физическая природа зародышей кавитации и механизм их стабилизации недостаточно изучены, в связи с чем в настоящее время повсеместно интенсивно ведутся исследования этой проблемы.

Несмотря на сделанную оговорку, механизм возникновения и развития кавитации согласно современным воззрениям заключается в следующем.

Натекающий поток, содержащий кавитационные ядра — микроскопические газовые пузырьки, транспортирует их в зоны пониженного давления у поверхности обтекаемого тела. Под влиянием растягивающих напряжений, действующих в этих зонах, пузырьки испытывают рост. До определенной величины растягивающих напряжений рост пузырьков оказывается несущественным, а при достижении ими критического значения — взрывоподобным, в результате чего микроскопические зародыши кавитации превращаются в макроскопические кавита-

ционные каверны. Соответствующая возникновению критических растягивающих напряжений при заданном статическом давлении скорость потока является той критической скоростью, при которой возникает кавитация.

При обтекании несущих поверхностей максимальные разрежения могут возникать в ядрах свободных вихрей и непосредственно у поверхности, вызывая появление вихревой и профильной кавитации. В зависимости от местоположения профильной кавитации ее принято именовать собственно-профильной, если кавитационная область расположена на засасывающей поверхности вблизи центральной части хорды профиля, что соответствует условиям обтекания с малыми углами атаки, и кромочной, если кавитационная область локализована вблизи входящей кромки, что характерно, в частности, для обтекания профиля с большими углами атаки.

В зависимости от формы эпюры разрежения и геометрического масштаба профиля градиент давления в области разрежения может быть различным. Взаимодействие же ядер кавитации с окружающим потоком в большой мере определяется величиной этого градиента. Если градиент давления велик, т. е. нарастание давления за областью разрежения происходит достаточно резко, то кавитационные ядра могут оказаться не в состоянии покинуть эту область. Скапливаясь в ней, кавитационные ядра в этом случае могут создать предпосылки для возникновения у поверхности профиля присоединенной пленочной каверны. Такая каверна возникает, однако, лишь при условии возможности ее устойчивого существования.

Если же градиент давления мал, то ядра кавитации беспрепятственно минуют область разрежения, при этом каждое ядро, испытывая взрывоподобный рост, превращается в каверну, близкую по форме к сферической. В результате возникает так называемая пузырьковая кавитация. По мере увеличения степени ее развития количество и размеры пузырьков растут, происходит объединение пузырьков, и в итоге у профиля образуется единая развитая каверна.

В результате тщательно проведенных экспериментов В. Аракери установил, что профильная кавитация возникает либо в зоне ламинарного отрыва пограничного слоя в носовой части профиля, либо в зоне перехода ламинарного режима течения в турбулентный [103]. При этом критическое число возникновения кавитации оказывается по абсолютной величине равным местному давлению в точке отрыва или перехода. При малых значениях относительной толщины потери импульса пограничного слоя ($\delta_2/c < 3 \cdot 10^{-4}$) возникает пленочная кавитация, а при больших ($\delta_2/c > 3 \cdot 10^{-4}$) — пузырьковая. В связи с тем, что на формирование отрыва и перехода оказывает сильное влияние величина градиента давления, представляется, что найденная корреляция между параметрами течения в пограничном слое

и характеристиками профильной кавитации отражает сильную зависимость этих процессов от величины градиента давления.

Наиболее очевидным проявлением кавитации является изменение гидродинамических характеристик профилей при образовании каверн у их поверхности.

При закритических числах Рейнольдса безразмерные гидродинамические параметры, характеризующие взаимодействие профиля с жидкостью — коэффициенты подъемной силы и сопротивления, а также эпюра давления в докавитационном режиме течения, как известно, слабо зависят от скорости натекающего потока.

При возникновении связанной с профилем каверны из-за того, что давление в ней не может упасть ниже давления насыщенных паров, эпюра давления в зоне разрежения существенно деформируется: область, занятая каверной, оказывается областью постоянного давления, пики разрежения, существовавшие до возникновения каверны, сглаживаются. При этом вследствие перераспределения давления коэффициент подъемной силы профиля вначале может увеличиваться, а затем по мере развития кавитации падает.

Возникновение и развитие кавитации, с одной стороны, требует энергетических затрат, что должно приводить к увеличению коэффициента сопротивления профиля, а с другой — фактическая площадь смоченной поверхности профиля уменьшается на величину площади образовавшейся каверны, что приводит к противоположному эффекту. Установлено, что начальные степени развития присоединенной каверны могут сопровождаться небольшим падением коэффициента сопротивления профиля, а затем, по мере дальнейшего развития каверны, происходит его резкий рост.

При возникновении и развитии кавитационных каверн на лопастях гребных винтов в результате отмеченных особенностей поведения коэффициентов подъемной силы и сопротивления профилей коэффициенты упора и момента винта вначале, как правило, несколько возрастают, а затем по мере развития кавитации резко уменьшаются. Коэффициент полезного действия гребного винта при этом оказывается на всех стадиях развития кавитации в большинстве случаев меньше, чем при ее отсутствии.

Ухудшение гидродинамических характеристик профилей при кавитации — серьезное, но не единственное ее вредное проявление, требующее учета при проектировании движителей. Другим важным отрицательным фактором является кавитационная эрозия — механическое разрушение поверхности лопасти, обтекаемой в кавитационном режиме [24, 25].

Своим происхождением эрозия обязана ударам масс жидкости по обтекаемой поверхности, возникающим при замыкании кавитационных каверн, и, следовательно, целиком обуслов-

лена нестационарностью течения при кавитации. Эта нестационарность существует и в том случае, если кавитационное течение в статистическом смысле стационарно. Так, например, при пленочной кавитации стационарно обтекаемого крылового профиля нестационарность обусловлена пульсациями хвостовой части каверны. Вместе с тем к настоящему времени установлено, что основным гидродинамическим фактором, влияющим на интенсивность кавитационной эрозии, является нестационарность обтекания тела. Возникающее при этом периодическое исчезновение и развитие каверн на профиле являются теми неблагоприятными условиями, многократно интенсифицирующими процесс кавитационной эрозии, которых необходимо всячески избегать. С этой точки зрения гребные винты, работающие в неоднородном попутном потоке за корпусом судна, оказываются в предельно неблагоприятных условиях. Неоднородность натекающего на гребной винт потока обусловливает периодическое изменение углов атаки элементов цилиндрических сечений его лопастей и, как следствие, возможность возникновения существенно нестационарных каверн на лопастях гребного винта.

Также нежелательным является легко регистрируемое практически на самых начальных стадиях развития кавитации акустическое излучение, сопровождающее замыкание кавитационных каверн в зонах повышенного давления. Кавитационный шум гребных винтов имеет широкополосный характер от низких инфразвуковых до высоких ультразвуковых частот и является серьезным фактором, ухудшающим условия обитаемости на судне, кроме того, этот шум создает помехи работе судовых гидроакустических средств.

Иллюстрацией практической важности прогнозирования характеристик кавитационного шума гребных винтов является высказывание К. Круппа, содержащееся в докладе на международном симпозиуме по корабельной гидродинамике, происходившем в Норвегии в 1979 г. [131]: «Кроме решения проблемы поиска на рыболовецких судах, гидроакустические исследования явились предметом интенсивных усилий в области военного кораблестроения. Однако позже оказалось, что исследование гидродинамического шума, генерируемого корабельным движителем, также является важной составной частью проектирования коммерческих судов, требуя выполнения модельных и натурных исследований этой характеристики. По этой причине многие гидродинамические лаборатории не только сочли для себя необходимым обзавестись соответствующим оборудованием для подобного рода исследований и гидроакустических измерений, но и обучить специалистов-гидромехаников основам гидроакустики».

Обусловленное изменением интенсивности кавитации периодическое изменение давления в непосредственной близости от гребного винта воздействует на обшивку кормовой оконечно-

сти судна, являясь источником повышенных вибраций корпуса и шумов во внутрисудовых помещениях.

Уместно отметить, что в отличие от обсуждавшихся выше эффектов кавитации периодические пульсации давления являются менее специфическим явлением. Ранее, в гл. 5 подробно анализировался процесс возникновения периодических пульсаций давления в жидкости при работе некавитирующего гребного винта. Физическая природа объемной составляющей этих пульсаций и пульсаций давления при кавитации близки.

Приведенное краткое описание механизма вредных процессов, сопровождающих кавитацию гребных винтов, свидетельствует о том, что их прогнозирование на стадии проектирования судна является нелегкой задачей, требующей для своего решения детального описания нестационарной картины кавитационного обтекания лопастей винта в неоднородном потоке, а также умения на основе этой информации определять характеристики индуцируемых кавитационными кавернами давлений.

Следует констатировать, что в настоящее время удовлетворительной общей теории кавитационных течений, позволяющей, не прибегая к эксперименту, описать все многообразие кавитационных процессов, протекающих в потоке у лопастей гребного винта, не существует. Более того, нельзя считать полностью разрешенной проблему моделирования этих процессов.

В еще большей степени сказанное относится к определению характеристик индуцированных кавернами давлений и силовому взаимодействию каверн с обтекаемой поверхностью.

Таким образом, широкое привлечение эксперимента при разработке расчетных методов прогнозирования характеристик кавитационных течений оказывается в настоящее время неизбежным. В меньшей мере это относится к теории обтекания тел при сильно развитой кавитации, однако область приложения этой теории ограничена и не охватывает всех проблем, представляющих интерес в рассматриваемом случае.

Следует подчеркнуть, что ряд проблем, таких, например, как прогнозирование эрозии гребных винтов, в настоящее время вообще не может быть разрешен без непосредственного привлечения экспериментальных методов исследования.

Менее строгий и общий характер теории, а также необходимость привлечения экспериментальных методов исследования приводят к тому, что даже основные положения, на которых базируются развитые к настоящему времени методы прогнозирования характеристик процессов, обусловленных кавитацией гребных винтов, являются не до конца устоявшимися и далеко не бесспорными. Это существенно отличает материал настоящей главы от предыдущего.

Однако в связи с большой практической значимостью, повсеместно придаваемой кавитационным эффектам, требуется их оценка на стадии проектирования гребных винтов. Это тре-

бование, с одной стороны, делает необходимым помещение в настоящей книге соответствующего материала, а с другой, несмотря на известную разнородность рассматриваемых вопросов, оправдывает его сосредоточение в специальной главе.

6.2. Формы кавитации гребного винта и возможности их прогнозирования

Многочисленные фотографии моделей гребных винтов в кавитационных трубах, начиная с первых, полученных Парсонсом в конце прошлого века, свидетельствуют о том, что одной из наиболее характерных форм кавитации гребных винтов является кавитация концевых свободных вихрей. На рис. 6.1 приведена одна из таких фотографий.

Наличие однозначной связи между радиальным распределением циркуляции и распределением интенсивности свободных вихрей в сходящей с лопасти вихревой пелене определяет существенную зависимость параметров вихревой кавитации от закона распределения циркуляции.

Преимущественное возникновение вихревой кавитации оказывается свойственным лишь гребным винтам с оптимальным распределением циркуляции, характеризующимся наличием большого градиента у конца лопасти. При распределениях, отличных от оптимального, с меньшими значениями градиента, вихревая кавитация может либо вообще не возникать, либо оказаться менее выраженной.

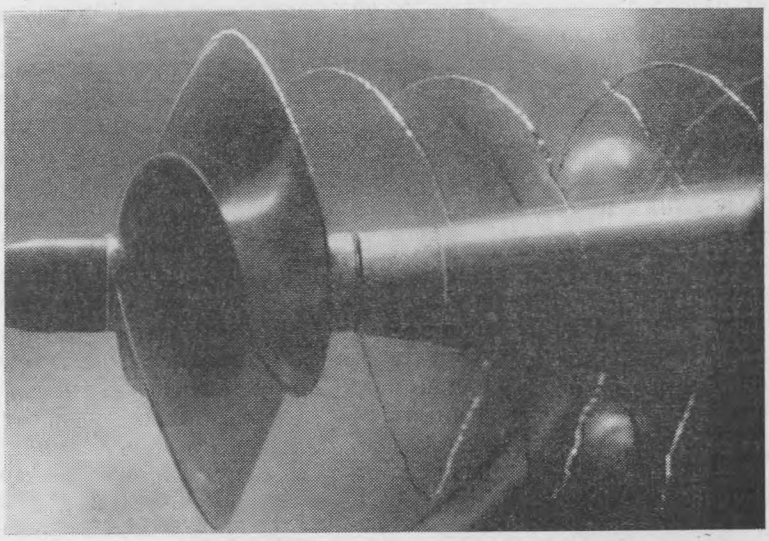


Рис. 6.1. Кавитация концевых вихрей гребного винта.

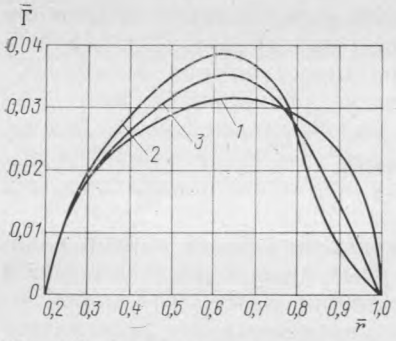


Рис. 6.2. Распределение циркуляции вдоль лопасти гребных винтов 1, 2, 3.

Е. Гловер, Д. Торн и Л. Хоудон [119] выполнили экспериментальное исследование кавитационных характеристик трех равноупорных гребных винтов, отличающихся распределением циркуляции вдоль лопасти, иллюстрируемым рис. 6.2. Гребной винт *1* имеет оптимальное распределение, винт *2* характеризуется разгрузкой конца лопасти, соответствующей нулевому значению градиента циркуляции, винт *3* — имеет промежуточное значение циркуляции вблизи конца лопасти.

В результате опытов было установлено, что кавитацию концевых вихрей у гребного винта *2* в условиях модельного эксперимента получить не удается, а у гребного винта *3* она возникает позже, чем профильная кавитация лопастей.

Причиной возникновения вихревой кавитации, как уже отмечалось, является снижение давления на оси вихря ниже критического значения, обеспечивающего возможность существенного роста попадающих в эту область кавитационных зародышей.

В соответствии со схемой Рэнкина обычно предполагается, что вне вязкого ядра вихря течение потенциально, а вязкое ядро радиусом a вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω [64].

Использование этой схемы позволяет просто оценить величину разрежения на оси линейного вихря бесконечной протяженности с циркуляцией Г.

Внутри вязкого ядра распределение скоростей описывается соотношением $u=\omega S$, а вне его — $u=\Gamma/2\pi S$.

Выражая циркуляцию через скорость на границе вязкого ядра, получим

$$\Gamma = 2\pi a u_a = 2\pi a^2 \omega.$$

Давление на границе вязкого ядра p_a определяется с помощью выражения

$$p_\infty - p_a = \frac{\rho u_a^2}{2} = \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 a^2}, \qquad (6.1)$$

а действующая на единицу объема центробежная сила внутри него

$$\frac{dp}{dS} = \rho S \omega^2 = \rho S \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^4}. \qquad (6.2)$$

Перепад давлений внутри вязкого ядра найдем, интегрируя последнее выражение

$$p_a - p_c = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi^2 a^4} \int_0^a S\, dS_1 = \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 a^2},$$

а перепад давлений на оси вихря и в невозмущенном потоке — комбинируя выражения (6.1) и (6.2)

$$p_\infty - p_c = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}. \qquad (6.3)$$

Эпюры распределения скоростей и давлений представлены на рис. 6.3.

Если вихрь развился в потоке, характеризуемом скоростью V, то критическое число вихревой кавитации, приравнивая давление на оси вихря к давлению насыщенных паров, можно представить в виде

$$\sigma_i = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho V^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{\pi a V}\right)^2 = 2\left(\frac{u_a}{V}\right)^2. \qquad (6.4)$$

Из выражений (6.3) и (6.4) следует, что разрежение на оси вихря и, следовательно, критическое значение числа кавитации определяются радиусом его вязкого ядра. С уменьшением радиуса разрежение на оси вихря и критическое число кавитации увеличиваются, в пределе при $a \to 0$ они оказываются бесконечно большими.

Полученный вывод явился причиной тщательного изучения условий формирования вязкого ядра вихря и факторов, влияющих на его размеры. Применительно к свободному вихрю, сходящему с концевых элементов крыла конечного размаха, Б. Мак-Кормиком было установлено, что диаметр ядра вихря имеет величину порядка толщины пограничного слоя на концевых элементах крыла [62].

Таким образом, получить исходную информацию для расчетного определения момента возникновения кавитации свободных вихрей, сходящих с лопастей гребного винта, на первый

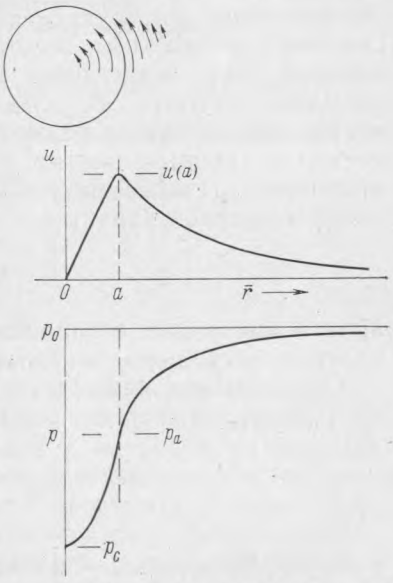


Рис. 6.3. Эпюра распределения скоростей и давлений плоского вихря.

взгляд не составляет принципиальных трудностей. Для этого необходимо выполнить поверочный расчет гребного винта с целью установления интенсивности свободных вихрей, однозначно связанной с распределением циркуляции вдоль лопасти с учетом сворачивания вихревой пелены, а затем расчетным путем определить характеристики развивающегося на лопасти пограничного слоя.

Однако в настоящее время успешных попыток решения названной задачи не осуществлено (или, во всяком случае, они неизвестны авторам) и повсюду используется метод прогнозирования характеристик вихревой кавитации, основанный на результатах модельного эксперимента, что в первую очередь объясняется сложностью расчетного определения параметров пограничного слоя вблизи концевых элементов лопастей, где течение носит сильно выраженный трехмерный характер.

Необходимо отметить, что прогнозирование момента возникновения вихревой кавитации для практических целей оказывается недостаточным, не меньший интерес представляют характеристики развитой вихревой кавитации, способы описания которой в настоящее время отсутствуют, что усугубляет необходимость использования экспериментальных методов исследования.

Прогнозирование характеристик вихревой кавитации на основе испытаний моделей гребных винтов в кавитационных трубах является менее сложной задачей, чем их расчетное определение. Однако трудности встречаются и на этом пути, что связано с неизбежным отсутствием моделирования по числу Рейнольдса при испытаниях моделей гребных винтов в кавитационных трубах. Б. Мак-Кормиком [62] применительно к крыльям конечного размаха и Л. Ноорджием [142] применительно к гребным винтам было установлено, что зависимость критического числа вихревой кавитации от числа Рейнольдса имеет степенной характер

$$\sigma_i \sim R_n^m, \tag{6.5}$$

причем наилучшее совпадение результатов модельного эксперимента с натурными данными обеспечивается при $m \approx 0{,}5$.

Образовывая, как обычно, число кавитации по скорости осевого движения гребного винта

$$\sigma_0 = \frac{2(p - p_v)}{\rho V_A^2},$$

а число Рейнольдса — по окружной скорости конца лопастей

$$R_n = \frac{nD^2}{\nu} = \frac{V_A D}{J\nu},$$

формулу (6.5) можно переписать в виде

$$\frac{V_{ASH}}{V_{AM}}=\left(\frac{D_M}{D_{SH}}\right)^{\frac{m}{2+m}}\left(\frac{p_{SH}-p_v}{p_M-p_v}\right)^{\frac{1}{2+m}}\approx\left(\frac{D_M}{D_{SH}}\right)^{0,2}\left(\frac{p_{SH}-p_v}{p_M-p_v}\right)^{0,4},$$

где индексы «M» и «SH» указывают на принадлежность величин к условиям модели и натуры соответственно.

Из последней формулы следует, что при геометрическом масштабе моделирования $D_{SH}/D_M\approx 30$ и равенстве статического давления в условиях модели и натуры натурная критическая скорость осевого движения гребного винта вследствие вязкостных эффектов по сравнению с моделью снизится вдвое. По той же причине увеличение критической скорости с ростом давления происходит не пропорционально квадратному корню из этой величины — закономерности, присущей течению, не подверженному влиянию вязкости, — а менее интенсивно.

Л. Ноорджий произвел сопоставление результатов пересчета данных модельного эксперимента по определению момента возникновения вихревой кавитации гребных винтов с данными натурных наблюдений, выполненных на трех судах [142]. Результаты сопоставления приведены в табл. 6.1. Как видно, эти данные удовлетворительно согласуются.

Таблица 6.1. **Сопоставление измеренной и пересчитанной критической скорости судна, соответствующей возникновению вихревой кавитации гребного винта**

Судно	V, уз	
	Измерения	Пересчет
A	12	11,7
B	15	15,7
C	8	7,1

Выше отмечалось, что для практических целей представляет интерес информация о развитых стадиях вихревой кавитации.

Несоответствие критических чисел вихревой кавитации вследствие различия чисел Рейнольдса в натуре и на модели и следующая из этого несоответствия бессмысленность выполнения лабораторного эксперимента на начальных стадиях развития вихревой кавитации при условии $\sigma_0=\text{idem}$ приводит к необходимости использования следующего приема. Предполагается, что идентичность параметров вихревой кавитации на начальных стадиях достигается при условии $\sigma_{0i}/\sigma_0=\text{idem}$, где σ_{0i} — критическое число кавитации гребного винта.

По мере развития вихревой кавитации и заполнения ядра вихря паром влияние вязкости на кинематические характеристики течения ослабевает, по этой причине на развитых стадиях кавитации моделирующим течение параметром оказывается число кавитации.

Следовательно, для осуществления подобия кинематических характеристик течения при любых степенях развития кавитации необходимо сконструировать такой безразмерный параметр, который бы удовлетворял требованиям:

$$\sigma_{0i}/\sigma_0 = \text{idem} \quad \text{при} \quad \sigma_{0i}/\sigma_0 \approx 1;$$

$$\sigma_0 = \text{idem} \quad \text{при} \quad \sigma_{0i}/\sigma_0 \gg 1.$$

Простейшая возможность состоит в использовании параметра [54]:

$$\gamma = \frac{1 - \sigma_0/\sigma_{0i}}{\sigma_0}.$$

При $\sigma_0/\sigma_{0i} \approx 1$ $\gamma \to 0$, в этой области значений параметра γ определяющую роль, как это и требуется, играет отношение σ_0/σ_{0i}. При $\sigma_0/\sigma_{0i} \ll 1 \gamma \to 1/\sigma_0$ и роль отношения σ_0/σ_{0i}, как это и должно быть, становится исчезающе малой.

Прогнозирование характеристик профильной кавитации лопастей гребного винта в настоящее время осуществляется на основе анализа параметров течения в пограничном слое профилей цилиндрических сечений. Основанием для этого, как уже указывалось, явилось экспериментально установленное В. Аракери [103] наличие корреляции между положением точки ламинарного отрыва пограничного слоя или перехода ламинарного режима течения в турбулентный и местом возникновения профильной кавитации, а также между критическим числом возникновения кавитации и коэффициентом разрежения в этой точке. Т. Хуангом и Ф. Петерсоном [126] предпринята попытка анализа причины указанной взаимосвязи. Согласно результатам анализа эта причина состоит в возникновении интенсивных пульсаций давления в месте повторного присоединения пограничного слоя после ламинарного отрыва, либо в месте перехода ламинарного режима течения в турбулентный, если этот переход происходит раньше. В табл. 6.2 приведены результаты измерений пульсаций давления на стенке для трех областей течения в пограничном слое: *а* — развитый турбулентный режим течения, *б* — область перехода ламинарного режима течения в турбулентный, *в* — область повторного присоединения пограничного слоя после ламинарного отрыва. Здесь $\sqrt{\overline{p'^2}}$, p'_m, p'_{mc} — среднеквадратичное значение пульсаций давления, максимальное значение амплитуды пульсации в течение 40-секундного периода и в течение периода, равного 1 с, соответственно: $q = \rho V^2/2$ — скоростной напор.

Таблица 6.2. **Интенсивность пульсаций давления в пограничном слое**

Режим течения	$\sqrt{\overline{p'^2}}/q$	$-p'_m/q$	$-p'_{mc}/q$
а	0,015	0,06	0,035
б	0,04	0,2	0,1
в	0,15	0,55	0,35

Как видно, пульсации давления в области присоединения пограничного слоя после ламинарного отрыва превосходят их значение в развитом турбулентном пограничном слое на порядок, а в области перехода ламинарного режима течения в турбулентный — втрое.

Другим важным экспериментально зарегистрированным фактом является существенная деформация эпюры давления на профиле при наличии ламинарного отрыва. Пик разрежения, существующий при потенциальном обтекании профиля, существенно сглаживается.

На рис. 6.4 схематически представлены эпюры давления профиля для трех случаев: *1* — потенциальное обтекание; *2* — обтекание при больших натурных значениях чисел Рейнольдса; *3* — обтекание при малых значениях чисел Рейнольдса, соответствующих испытаниям моделей гребных винтов, характеризуемое наличием развитого пузыря ламинарного отрыва.

Заштрихованная область соответствует диапазону изменения мгновенных значений давления вследствие случайных пульсаций.

Приведенные данные проливают свет на возможные причины невыполнения условия равенства критического числа кавитации коэффициенту максимального разрежения тела при его потенциальном обтекании. Наибольшее отличие этих величин реализуется при малых значениях чисел Рейнольдса, т. е. в условиях модельного эксперимента. При больших натурных значениях чисел Рейнольдса ламинарный отрыв, как правило, не возникает, так как ему предшествует переход к турбулентному режиму течения.

По тем же причинам место возникновения кавитации на профиле может не соответ-

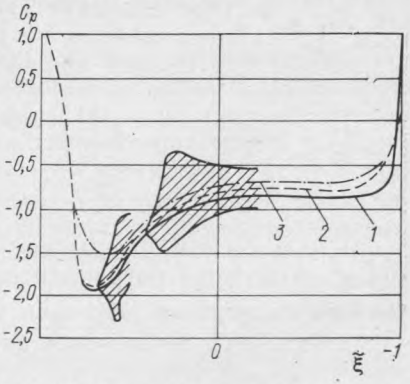


Рис. 6.4. Эпюра давления на профиле.

ствовать положению пика разрежения при потенциальном обтекании.

Установленное В. Аракери соответствие критического числа кавитации местному значению коэффициента разрежения при потенциальном обтекании представляется менее понятным. Во-первых, из предыдущего следует, что благодаря наличию интенсивных пульсаций разрежение в месте возникновения кавитации оказывается больше определенного в предположении потенциальности течения, а во-вторых, известно, что на величину критического числа кавитации при прочих равных условиях оказывает влияние зависящая от ядросодержания кавитационная прочность воды [53]. Учитывая, однако, что оба фактора действуют в противоположных направлениях, можно предположить, что они частично компенсируют друг друга, обеспечивая возможность приближенного выполнения обсуждаемого равенства.

Базирующаяся на приведенных основных положениях схема расчетной оценки параметров профильной кавитации гребных винтов разработана П. Ван-Оосаненом [144].

При ее использовании вычисление характеристик ламинарного пограничного слоя производится приближенным методом Твейтса, применение которого требует знания местных значений скорости на границе пограничного слоя плоского профиля. Учитывая, что в носовой части профиля толщина пограничного слоя мала, в первом приближении можно ограничиться информацией о потенциальном распределении скоростей на поверхности самого профиля, определить толщину вытеснения пограничного слоя, вычислить распределение скоростей на его границе, после чего произвести окончательный расчет.

Толщина потери импульса δ_2 определяется из уравнения

$$\frac{v_{\xi_s}\delta_2^2}{\nu} = \frac{0{,}45}{v_{\xi_s}^5}\int_0^{\xi_s} v_{\xi_s}^5\, d\xi_s,$$

где v_{ξ_s} — местное значение скорости на границе пограничного слоя; ξ_s — криволинейная координата на поверхности профиля с началом в передней критической точке; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Далее вычисляется безразмерный формпараметр

$$m = -\frac{dv_{\xi_s}}{d\xi_s}\frac{\delta_2^2}{\nu}.$$

Использование формпараметра позволяет определить толщину вытеснения пограничного слоя и касательные напряжения на стенке:

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\xi_s}^2} = \frac{L(m)\,\nu}{v_{\xi_s}\delta_2}.$$

Зависимость $L(m)$ представлена в табл. 6.3.

Таблица 6.3. **Функция $L(m)$**

m	$L(m)$	m	$L(m)$	m	$L(m)$	m	$L(m)$
—0,250	0,500	0,040	0,153	—0,048	0,291	0,076	0,072
—0,200	0,463	0,048	0,138	—0,032	0,268	0,080	0,056
—0,140	0,404	0,056	0,122	—0,016	0,244	0,084	0,038
—0,120	0,382	0,060	0,113	0	0,220	0,086	0,027
—0,100	0,359	0,064	0,104	0,016	0,195	0,088	0,015
—0,080	0,333	0,068	0,095	0,032	0,168	0,090	0
—0,064	0,313	0,072	0,085				

Отрыв ламинарного пограничного слоя соответствует обращению в нуль касательных напряжений, что, как видно из таблицы, реализуется при $L(m)=0$, $m=0{,}09$.

Точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный может быть найдена с помощью формулы Смита:

$$R_{n\delta_{2tr}} = 1{,}174\, Rn_{\xi_{tr}}^{0{,}46}, \tag{6.6}$$

где

$$R_{n\delta_2} = \frac{v_\xi \delta_2}{\nu};$$

$$R_{n_\xi} = \frac{V\xi}{\nu},$$

где ξ — абсцисса; v_ξ — местное значение скорости на профиле; V — скорость натекающего потока.

Формула (6.6) позволяет получить удовлетворительные результаты в диапазоне чисел Рейнольдса

$$10^5 < R_{n\xi_{t_2}} < 10^8,$$

что для оценки кавитационных характеристик элементов цилиндрических сечений лопастей гребных винтов вполне достаточно.

Вычисление указанных характеристик пограничного слоя при работе гребного винта в неоднородном потоке выполняется отдельно для засасывающей и нагнетающей поверхности профиля для ряда последовательных угловых положений лопасти. Если переход ламинарного режима течения в турбулентный происходит раньше ламинарного отрыва, как уже указывалось, координата точки перехода отождествляется с местом возможного возникновения кавитации, в противном случае — с координатой точки ламинарного отрыва.

Критическое число кавитации принимается равным взятому с обратным знаком коэффициенту давления в этой точке:

$$\sigma_i = -C_{p_{\xi_i}}.$$

Если местное значение числа кавитации профиля, являющееся функцией углового положения лопасти вследствие действия сил тяжести и неоднородности натекающего на гребной винт потока, оказывается меньше критического, то кавитация возникает, в противном случае — отсутствует.

В связи с тем, что как критическое, так и текущее значение числа кавитации профиля являются функциями углового положения лопасти, в различных угловых положениях оказываются различными не только условия возникновения кавитации, но и действующие в этой точке растягивающие напряжения. В результате размеры занятой каверной области оказываются также зависящими от углового положения лопасти. При определении конфигурации этой области используется квазистационарный подход, т. е. для фиксированного углового положения лопасти для каждого из ее расчетных цилиндрических сечений определяются параметры каверны в предположении, что обтекание элемента цилиндрического сечения лопасти стационарно.

Прежде всего решается вопрос о форме возникающей профильной кавитации. Экспериментально установлено, что наличие узких и больших по величине пиков разрежения, возникающих вблизи входящих кромок при обтекании профилей с отличными от проектного значения углами атаки, приводит к возникновению пленочной каверны, а при отсутствии таких пиков, что характерно для «безударного» обтекания с углами атаки, мало отличающимися от проектной величины,— к возникновению пузырьковой кавитации. Регулирующая форму возникающей кавитации величина обратного градиента давления в зоне разрежения на профиле одновременно оказывает существенное влияние на толщину потери импульса в месте возникновения каверны δ_{2i}. Хорошо подтверждаемый экспериментально критерий возникновения пленочной каверны

$$\frac{\delta_{2i}}{c} < 3 \cdot 10^{-4},$$

где c — хорда профиля.

При $\delta_{2i}/c > 3 \cdot 10^{-4}$ возникает пузырьковая кавитация.

6.3. Расчет кавитационных диаграмм профилей сечений лопастей гребного винта и параметров каверн

Расчетное определение геометрических характеристик профильной кавитации на лопастях гребного винта требует сведения задачи обтекания цилиндрического сечения лопасти к задаче обтекания плоского профиля.

Описание используемого в настоящее время приема такого сведения было дано ранее в гл. 4. В прилож. 3 приведены систематические данные по винтовым профилям.

В основу расчета протяженности возникающей на профиле каверны при пузырьковой кавитации положено уравнение Релея [148]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P - p_\infty}{\rho} \tag{6.7}$$

где R, $\dot{R}$, $\ddot{R}$ — радиус, радиальная скорость и ускорение пузырька; P, p_∞ — давление на границе пузырька и в невозмущенной жидкости.

Интегрирование этого уравнения при значении давления $P(\bar{\xi})$, соответствующем давлению на нулевой линии тока профиля, позволяет найти координаты точек $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, соответствующих началу роста пузырька и его замыканию. При этом длина каверны: $\bar{l}_{cav} = \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1$.

Расчет параметров каверн при пленочной кавитации в настоящее время базируется на использовании методов описания развитых кавитационных течений.

Ниже приводится решение, справедливое для частичной кавитации, когда каверны остаются в пределах лопасти, не достигая ее выходящей кромки. Методы расчета каверн, замыкающихся за пределами крыльевого профиля, подробно изложены в книге [37].

Расчет частичных каверн на лопасти выполняется при решении следующих двух практических задач:

— определение геометрии каверны при заданном числе кавитации;

— определение числа кавитации, соответствующего существованию на лопасти каверны заданной длины.

Трудности численной реализации расчетов пространственных кавитационных течений не позволяют пока решать задачи об определении форм и размеров каверн, возникающих на лопастях гребных винтов, с той же полнотой и строгостью, с какой решается большинство задач гидродинамики некавитирующего гребного винта. Следует отметить, что возникающие в подобных задачах трудности связаны не только с пространственным характером течения, но и с существенной физической нелинейностью явления. В частности, для рассмотрения кавитационного обтекания кромки лопасти не могут быть применены линейные (по толщине лопасти) математические модели.

Указанные обстоятельства оставляют пока единственный путь для построения методов расчета частичных каверн на лопастях гребных винтов, заключающийся в использовании решений соответствующих плоских задач. Аналогичным образом обстоят дела и с расчетами распределения давления по лопасти. В § 4.4 изложен способ построения профиля крыла бесконечного размаха, который с точки зрения распределения скоростей вдоль хорды с точностью линейной теории эквивалентен

профилю цилиндрического сечения лопасти гребного винта. Оставаясь в рамках использованных при этом допущений, следовало бы в случае кавитирующего гребного винта переход к «эквивалентному» плоскому профилю выполнять на основе расчета по линейной теории кавитирующей несущей поверхности. Однако такой расчет представляется слишком сложным, поэтому будем считать, что влияние кавитации не нарушает условия эквивалентности, полученного для некавитирующего гребного винта. Фактически такое допущение соответствует предположению об относительно небольшой величине каверн. Следует также отметить, что переход от пространственного обтекания сечения лопасти к обтеканию однородным потоком геометрически искаженного профиля вносит в расчет каверны большую ошибку по сравнению с расчетом распределения давлений. Из-за этого обстоятельства может оказаться предпочтительней подход, в котором задача пространственного обтекания профиля сечения лопасти сводится к плоской задаче обтекания этого же профиля неоднородным потоком, создаваемым вносимыми в поток гидродинамическими особенностями. Некоторые трудности в реализации такого подхода состоят в неоднозначности выбора количества, расположения и интенсивностей указанных особенностей, обеспечивающих воспроизведение на плоскости поля вызванных гребным винтом скоростей.

Расчет частичных каверн на крыле бесконечного размаха. Впервые нелинейная задача об определении параметров каверны, возникающей на крыльевом профиле, была поставлена и решена А. Н. Ивановым [36]. В основе предложенного им метода лежит фундаментальная идея решения задач с неизвестной свободной границей путем построения последовательных приближений, на каждом шаге которых решаются: точная прямая задача и линеаризованная обратная задача.

На основе этого же приема К. В. Александровым разработан способ расчета частичной каверны методом гидродинамических особенностей [2]. Достаточно подробно этот способ расчета освещен в книге [37].

Ниже рассмотрен несколько иной способ расчета частичной каверны на профиле [34]. Этот способ также использует идею А. Н. Иванова о построении решения методом последовательных приближений.

На каждом шаге приближений сначала решается прямая задача об отыскании распределения скоростей по профилю заданной формы. На первом шаге производится расчет обтекания исходного профиля, а на всех последующих шагах — профиля с каверной, найденной на предыдущем шаге. Задача обтекания профиля решается методом конформных отображений так, как это описано в § 4.4.

Затем на этом же шаге решается обратная линеаризованная

задача с тем, чтобы определить форму каверны и число кавитации, соответствующие текущему приближению.

Последовательные приближения продолжаются до тех пор, пока скорость на границе каверны не окажется в пределах заданной точности постоянной.

Погрешности, вносимые в расчет линеаризацией обратной задачи на каждом последующем шаге, исключаются за счет того, что прямая задача обтекания решается в точной постановке.

С тем чтобы однозначно решить обратную задачу об определении формы каверны, необходимо задаться точкой схода каверны, положением конца каверны и схемой замыкания каверны.

Для получения непротиворечивого результата в рамках идеальной жидкости точку схода каверны следует разыскивать из условия Бриллюэна плавного схода каверны (кривизна профиля и каверны в точке схода должны совпадать). Вместе с тем, как показывают наблюдения, начальная точка реальной каверны расположена практически всегда ниже по потоку по отношению к точке, определенной из условия плавного схода. Это обстоятельство естественно объясняется факторами, не учитываемыми в модели обтекания идеальной жидкостью. К таким факторам относится существенное локальное перераспределение давлений на профиле при явлениях отрыва и перехода в пограничном слое, а также проявление сил поверхностного натяжения в окрестности точки контакта трех сред. Целый ряд исследований показывает, что указанные факторы являются определяющими и точка схода каверны всегда находится вблизи зоны местного отрыва пограничного слоя.

Таким образом, если не ставить целью детальное исследование течения в носовой части каверны, то можно считать, что положение ее начала задается, независимо от условия плавного схода, по результатам расчета пограничного слоя, как это сделано выше.

Известно, что при заданных профиле и угле атаки длина каверны однозначно связана с числом кавитации. Во всех методах расчета приходится задаваться длиной каверны и затем определять, какому числу кавитации такая каверна соответствует. Если же задача состоит в определении размеров каверны при заданном числе кавитации, приходится строить последовательные приближения, изменяя длину каверны до тех пор, пока не будет найдена нужная.

В общем случае в хвосте каверны не может реализоваться стационарное течение. Стационарное замыкание возможно лишь при плавном подходе каверны к профилю, когда в районе замыкания нет критической точки течения. С тем чтобы оставаться в рамках стационарной модели, принимают в конце каверны такую схему течения, при которой на свободной линии тока

критических точек не образуется. А. Н. Ивановым [37] введена схема замыкания каверны, обобщающая известную схему Рябушинского. По этой схеме в конце каверны пристраивается тем или иным способом фиктивное тело, на которое каверна замыкается плавно. Выбор формы и размеров этого тела осуществляется из условий плавности замыкания каверны и сходимости численной процедуры решения задачи. Последнее условие приводит к тому, что в ряде случаев приходится замыкать каверну на фиктивное тело довольно большой относительной протяженности (до 20 % от длины каверны).

Как уже указывалось, расчет выполняется для заданной длины каверны. При введении замыкающего каверну тела понятие длины каверны требует уточнения. Здесь будет принято, что каверна кончается в точке, в которой она примыкает к фиктивному телу.

Таким образом, для того чтобы произвести расчет формы каверны и соответствующего этой каверне числа кавитации, следует фактически задать на профиле положение трех точек: точки схода каверны, точки замыкания каверны на фиктивное тело и точки, в которой фиктивное тело примыкает к исходному профилю. Учитывая произвол в выборе этих точек, нельзя гарантировать для каждой их комбинации существование физически реализуемого решения. В частности, в некоторых случаях по расчету получается каверна, частично лежащая внутри профиля. Естественно такие результаты трактовать как неудачную попытку отыскания пленочной каверны с принятой в расчете длиной. Сопоставление с наблюдениями показывает, что часто отсутствию решения задачи о пленочной каверне соответствует существование пузырьковой кавитации.

Как показывают аналитические решения задачи обтекания пластины с частичной каверной при числах кавитации, соответствующих длинам каверны, близким к длине пластины, существует два решения. Одно решение определяет каверну короче пластины, а второе — длиннее. Физически такая ситуация проявляется в том, что реализуется более устойчивая длинная каверна. По этой причине, видимо, нет смысла производить расчеты частичных каверн относительно большой длины.

Как и обычно, в задачах со свободными границами при математической формулировке рассматриваемой задачи следует выставить два основных граничных условия — кинематическое и динамическое.

Условие непротекания (кинематическое условие) $V_n=0$ должно выполняться на границе каверны, замыкающей дуге и части профиля, не охваченной ими.

Динамическое условие должно выполняться на границе каверны. Это условие можно получить из интеграла Бернулли для линии тока, часть которой составляет границу каверны (рис. 6.5). В безразмерной форме (скорости отнесены к ско-

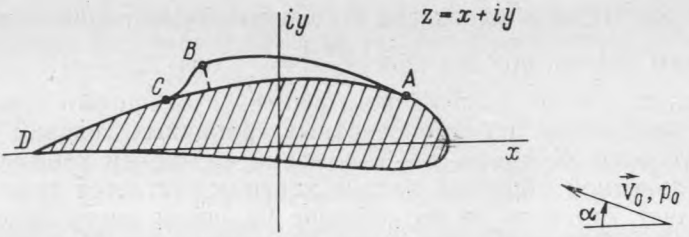


Рис. 6.5. Схема обтекания профиля с частичной каверной (физическая плоскость).

рости набегающего потока V_0, а линейные размеры — к полухорде $c/2$) динамическое условие дает связь между скоростью V_c на границе каверны и основными параметрами задачи:

$$V_c^2 = 1 + \sigma_0 + \mathrm{We}/r_c, \tag{6.8}$$

где $\sigma_0 = \dfrac{p_0 - p_c}{\rho V_0^2/2}$ — число кавитации; We — (коэффициент поверхностного натяжения)/ $(c\rho V_0^2/4)$ — число Вебера; r_c — радиус кривизны границы каверны.

Используя конформное отображение $z = z(\zeta)$ внешности единичного круга (рис. 6.6) на внешность профиля с каверной, соотношение (6.8) может быть записано в следующем виде:

$$V_c^2 = 1 + \sigma_0 + \mathrm{We}\left|\arg\frac{dz}{d\zeta}\right| \Big/ \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|. \tag{6.9}$$

Домножая граничное условие (6.8) на квадрат модуля производной отображающей функции, получим условие на границе каверны во вспомогательной плоскости ζ:

$$V_c^2(\zeta) = \left[(1 + \sigma_0)\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| + \mathrm{We}\left|\arg\frac{dz}{d\zeta}\right|\right]\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|. \tag{6.10}$$

Граничное условие непротекания при переходе на плоскость круга остается неизменным $V_n(\zeta) = 0$.

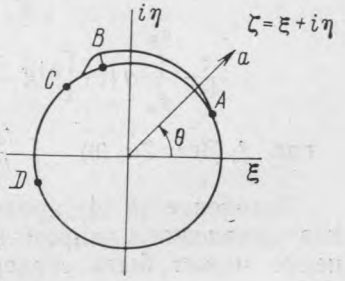


Рис. 6.6. Вспомогательная плоскость для решения задачи о частичной каверне на профиле.

С тем чтобы в плоскости ζ не изменились параметры набегающего потока, примем $\lim \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = 1$ при $|\zeta| \to \infty$.

Для получения однозначного решения задачи обтекания профиля необходимо помимо основных граничных условий выполнить условие Жуковского—Чаплыгина на задней кромке.

В линейной обратной задаче каверна считается тонкой, что позволяет заменить ее воздействие на поток распределенными по дуге AB круга плоскости ζ источниками. Интенсивность $q(\theta)$ этих источников следует искать из уравнения (6.10), считая, что отображение $z=z(\zeta)$ нам известно (из предыдущего приближения).

Записать выражение для комплексной скорости в плоскости круга труда не представляет:

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = \left(e^{-i\alpha} - \frac{1}{e^{-i\alpha}\zeta^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{q(\vartheta)}{\zeta - e^{i\vartheta}}\, d\vartheta, \quad (6.11)$$

где Γ — циркуляция вокруг профиля, определяемая из условия Жуковского—Чаплыгина.

Соотношение (6.11) справедливо для точек ζ, не лежащих на дуге (θ_A, θ_B). Осуществляя предельный переход с помощью формул Сохоцкого [23] и разделяя вещественную и мнимую части равенства (6.11), получим:

$$V_n(\theta) = \frac{1}{2} q(\theta); \quad (6.12)$$

$$V_\tau(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\theta_A}^{\theta_B} q(\vartheta)\left[\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\theta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\theta_D}{2}\right] d\vartheta + 2u_0, \quad (6.13)$$

где $u_0 = \sin(\theta_D - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)$.

В равенстве (6.13), определяющем касательную к кругу скорость $V_\tau(\theta)$, вместо Γ подставлено значение циркуляции, вычисленное из условия $V_\tau(\theta_D) = 0$.

Основное интегральное уравнение задачи относительно функции $q(\theta)$ получается из граничного условия (6.10) и соотношения $V_\tau(\theta)$:

$$V_\tau(\theta) = V_c(\theta) \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\theta_A}^{\theta_B} q(\vartheta)\left[\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\theta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\theta_D}{2}\right] d\vartheta = f_1(\theta), \quad (6.14)$$

где $f_1(\theta) = 2u_0(\theta) - \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^{1/2}\left[(1+\sigma_0)\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| + \mathrm{We}\left|\arg\frac{dz}{d\zeta}\right|\right]^{1/2}$.

Уравнение (6.14) представляет собой сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта. Как известно, такое уравнение может быть сведено заменой переменных к уравнению

с ядром Коши. Эта замена соответствует конформному отображению внешности круга на верхнюю полуплоскость:

$$s = -\frac{\operatorname{ctg}\vartheta/2 + d_0}{d_1}, \quad t = -\frac{\operatorname{ctg}\theta/2 + d_0}{d_1},$$

где $d_0 = -(\operatorname{ctg}\theta_A/2 \pm \operatorname{ctg}\theta_B)/2$; $d_1 = (\operatorname{ctg}\theta_A/2 - \operatorname{ctg}\theta_B/2)/2$.

В новых переменных уравнение (6.14) принимает классическую форму интеграла типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q^*(s)\,ds}{s-t} = f(t), \tag{6.15}$$

где $q^*(s) = q(s)/(s - t_D)$; $f(t) = f_1(t)/(t - t_D)$; $t_D = t(\theta_D) = -(\operatorname{ctg}\theta_D/2 + d_0)/d_1$.

Решение уравнения (6.15) будем искать в классе функций, ограниченных на концах каверны. Сама каверна получится при этом незамкнутой, отходящей от профиля по касательной к нему. Указанное решение существует, если выполняется условие обратимости уравнения (6.15) [23]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0. \tag{6.16}$$

Из этого условия при $We = 0$ (что мы и будем предполагать в дальнейшем) вытекает простая формула для определения числа кавитации:

$$\sqrt{1+\sigma_0} = \frac{2\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{u_0(t)\,dt}{(t-t_D)\sqrt{1-t^2}}}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|dt}{(t-t_D)\sqrt{1-t^2}}}. \tag{6.17}$$

Достоинством этой формулы является то, что она позволяет определить в каждом приближении в замкнутом виде число кавитации, не решая уравнение (6.15) и не находя форму каверны.

Само решение уравнения (6.15) также получается в замкнутом виде

$$q^*(s) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-s^2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-s)}. \tag{6.18}$$

Естественно, что получить решение в замкнутом виде удается только благодаря использованию конформного отображения. Этим обстоятельством определяется одно из основных преимуществ излагаемой схемы расчета.

По найденной интенсивности источников вычисляются вызванные ими скорости $V_n(\theta)$ и $V_\tau(\theta)$ и определяется форма каверны в плоскости $\zeta = ae^{i\theta}$:

$$a(\theta) = \int_{\theta_A}^{\theta} \frac{V_n(\vartheta)}{V_\tau(\vartheta)}\, d\vartheta.$$

Замыкание каверны осуществляется на каждом приближении кубической параболой в плоскости ζ. Коэффициенты этой параболы выбираются из условия сопряжения по первой производной с каверной и профилем.

Необходимо заметить, что для ускорения расчетов не следует на каждом приближении возвращаться в физическую плоскость z, а достаточно выполнять только конформное отображение внешности круга на внешность круга с «каверной».

Вычисление сингулярных и несобственных интегралов (6.17) с весовой функцией $1/\sqrt{1-t^2}$ более эффективно осуществляется с помощью квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности [43].

Расчеты частичных каверн на профиле, выполненные по изложенной схеме, показали следующее:

— по числу кавитации процесс последовательных приближений сходится (с точностью до 10 %) после первой итерации;

— для выполнения нелинейного граничного условия на границе каверны с точностью до 1—2 % требуется примерно $4 \div 5$ приближений.

На рис. 6.7 представлены результаты расчета формы каверн на профиле NACA-15 при фиксированной их длине и различных длинах тел замыкания. На этом же рисунке приведена форма каверны, полученная расчетом по методу [2].

Расчет кавитационных диаграмм профилей. Кавитационные диаграммы профилей представляют собой зависимости критического числа кавитации, соответствующего моменту возникновения кавитации, от угла атаки профиля (или коэффициента его подъемной силы). При исследовании кавитационных характеристик лопастей гребных винтов критическое число кавитации строится в зависимости от относительной поступи. При экспериментальном определении критического числа кавитации, как правило, фиксируется появление визуально различимой каверны. Иначе говоря, за критическое принимается число кавитации, соответствующее существованию каверны некоторых небольших абсолютных размеров, не связанных с размерами профиля.

Естественно, что, пытаясь получить кавитационную диаграмму расчетным путем, следует задаваться длиной каверны. В связи с этим обстоятельством в отличие от экспериментальной расчетная диаграмма имеет два параметра — относитель-

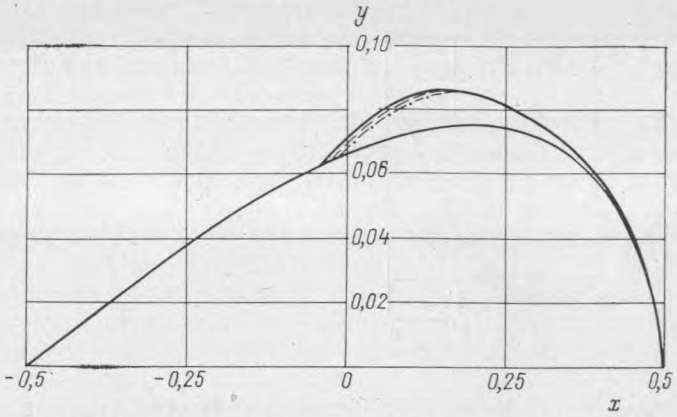


Рис. 6.7. Результаты расчета формы каверны на профиле NACA-15.

— — — — относительная длина замыкающей дуги $l_\varphi = 0{,}105$; — · — — $l_\varphi = 0{,}05$; ———— расчет методом, данным в работе [2], $l_\varphi = 0{,}105$.

ную длину каверны и угол атаки. Таким образом, при практическом применении результатов таких расчетов необходимо иметь связь между размерами каверны и интересующими в том или другом случае проявлениями кавитации (например, шумом).

По указанной причине при анализе результатов расчетов целесообразно считать критическим такое число кавитации σ_i^*, при котором на профиле существует каверна заданной длины, принимаемой из каких-либо соображений за пороговую.

При стремлении длины каверны к нулю величина σ_i^* стремится к своему наибольшему значению, в свою очередь, ограниченному абсолютной величиной минимума давления:

$$\sigma_i^* \leqslant |\min \bar{p}|.$$

Есть все основания полагать, что и в реальных течениях при числах кавитации, больших величины $|\min \bar{p}|$, определенной расчетом обтекания профиля потоком идеальной жидкости, не может существовать присоединенной каверны. Это обстоятельство следует учитывать при сравнении расчетов с результатами визуальной регистрации момента возникновения кавитации.

При расчете чисел кавитации, соответствующих кавернам относительно небольших размеров, достаточно в изложенной выше схеме выполнять только одно приближение. В этом случае весь расчет сводится к определению числа кавитации по формуле (6.17).

На рис. 6.8 приведены результаты расчета кавитационных диаграмм профиля для нескольких длин каверны (начиная

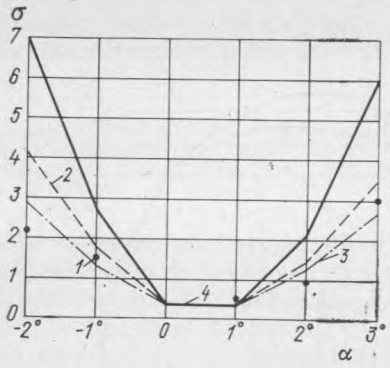


Рис. 6.8. Кавитационная диаграмма профиля NACA-66 mod, $\delta=0{,}05$, $\delta_c=0{,}01$.

1 — эксперимент; *2* — относительная длина каверны $l_{cav}=0{,}005$; *3* — $l_{cav}=0{,}01$; *4* — $l_{cav}=0$.

с нулевой). На этом же рисунке показаны опытные данные, полученные В. П. Ильиным визуальной регистрацией момента появления кавитации при опытах с тем же профилем в кавитационной трубе.

6.4. Периодические давления, индуцируемые кавитирующим гребным винтом в окружающей жидкости и на корпусе судна

В предыдущей главе был рассмотрен механизм и приведена схема расчета пульсации давления в окружающей жидкости, обусловленных работой некавитирующего гребного винта. В гл. 2 и 5 показано, что силовая и объемная составляющие пульсаций давления вследствие малости индуцируемых скоростей, допускающей пренебрежение их квадратами, разделяются. Кроме того, из этих результатов следует, что имеется аналогичная возможность независимого определения составляющей пульсаций давления, обусловленной движением образующихся на лопастях каверн при кавитации гребного винта, и ее последующего суммирования с составляющими некавитационного происхождения.

Заметим, что неучитываемым при этом влиянием кавитации на изменение силовой составляющей пульсаций можно пренебречь, поскольку при малых степенях развития кавитации ее влияние на циркуляцию мало, а при больших, как это будет ясно из дальнейшего, превалирующей составляющей оказывается кавитационная. Вклад силовой составляющей становится незначительным, в связи с чем ее уточнение теряет практический смысл.

Если кавитирующий гребной винт работает в однородном потоке, то, как мы видели выше, объем образовавшейся на лопасти каверны остается постоянным. В неоднородном же потоке он зависит от пространственного положения лопасти и, следова-

тельно, от времени. Таким образом, кавитация гребного винта в однородном потоке приводит к увеличению эффективного объема лопастей, вызывая появление соответствующей дополнительной объемной составляющей пульсаций давления. Ее вычисление может быть выполнено таким же способом, как и для некавитирующего винта, с той лишь разницей, что в качестве исходных должны использоваться данные об объеме образовавшихся на лопастях каверн. С точки зрения механизма возникновения пульсаций никаких новых эффектов при этом не возникает (Б. А. Бискуп, 1967 г.).

Изменение объема каверн при работе гребного винта в неоднородном потоке является существенно новым фактором, не имеющим прямой аналогии со случаем его работы в докавитационном режиме.

Квазистационарный подход к определению пульсаций давления оказывается неприемлем, поскольку, как известно, наибольшие возмущения в окружающей жидкости обусловлены изменением объема обтекаемого тела вследствие наименьшего по сравнению с другими формами движения затухания возмущений по мере увеличения расстояния [51].

При определении геометрических параметров каверн можно, как это нередко делается, использовать квазистационарный подход к решению задачи. Вместе с тем при определении пульсаций давления необходимо учитывать изменение геометрических параметров каверны во времени.

В соответствии с результатами, полученными в гл. 2, из граничного условия на поверхности каверны можно найти связь между ее геометрическими параметрами и скачком нормальной скорости, индуцированной каверной. Выражение для потенциала скоростей, индуцированных каверной, расположенной на одной лопасти, при этом приобретает вид

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_1(t)}^{r_2(t)}\int\limits_{\theta_1(r,t)}^{\theta_2(r,t)}\left[\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial t} - \frac{V_R\cos\varphi}{r}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial\theta}\right]\frac{r\,dr\,d\theta}{S\cos\varphi}. \quad (6.19)$$

Физически второе слагаемое в правой части последнего равенства представляет собой индукцию квазистационарной каверны, оно сохраняется и в случае работы гребного винта в однородном потоке, когда геометрические характеристики каверны не зависят от времени. Первое же слагаемое представляет собой индукцию каверны, обусловленную изменением ее объема во времени, в случае работы винта в однородном потоке оно обращается в нуль.

Здесь

$$S = \left[\left(x_0 - \frac{H\theta}{2\pi}\right)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta_0 - \theta_p - \theta)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.20)$$

где H — шаг цилиндрического сечения лопасти на данном радиусе; $r_1(t)$, $r_2(t)$ — границы распространения каверны по радиусу; $\theta_1(r, t)$, $\theta_2(r, t)$ — то же, по углу на данном радиусе.

Учитывая соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\theta_p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\theta_p}=2\pi n\frac{\partial}{\partial\theta_p},$$

для индуцированного каверной давления с помощью выражения (6.19), получим формулу

$$p=\rho\pi n^2\frac{\partial}{\partial\theta_p}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial\theta_p}\frac{r\,dr\,d\theta}{S\cos\varphi}-\frac{\rho n}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{V_R}{S}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial\theta}\,dr\,d\theta-$$

$$-\frac{\rho n}{2}V\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial\theta_p}\frac{r\,dr\,d\theta}{S\cos\varphi}+\frac{\rho V}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{V_R}{S}\frac{\partial e_{\text{cav}}}{\partial\theta}\,dr\,d\theta.$$

Двойные интегралы, входящие в последнее выражение, могут быть последовательно взяты по частям. Используя при этом известное правило дифференцирования по параметру интегралов с учетом того, что на концах промежутков $[r_1(t), r_2(t)]$; $[\theta_1(r, t); \theta_2(r, t)]$ толщина каверны обращается в нуль, $e_{\text{cav}}=0$, а также переходя к безразмерной форме записи, следуя А. М. Клубничкину, получим

$$K_p=\frac{\partial^2F_1^2}{\partial\theta_p^2}+\frac{\partial F_2}{\partial\theta_p}+F_3,$$

где

$$F_i(\theta_p,\ \theta_0,\ r_0,\ x_0)=\int\limits_{\bar{A}_{\text{cav}}}\int\bar{e}_{\text{cav}}G_i\bar{\mu}\,d\bar{r}\,d\theta;$$

$$i=1,\ 2,\ 3;$$

$$G_1=\frac{\pi}{4\bar{S}},$$

$$G_2=\frac{\pi}{4\bar{S}^2}\left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial\theta_p}-\frac{\partial\bar{S}}{\partial\theta}+\frac{J_V}{\pi}\frac{\partial\bar{S}}{\partial\bar{x}_0}\right);$$

$$G_3=\frac{J_V}{4}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}_0}\frac{1}{\bar{S}^2}\left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial\theta}-\frac{\partial\bar{S}}{\partial\theta_p}\right)\right];$$

$$\bar{S}=\left[\left(\bar{x}_0-\frac{H\theta}{2\pi}\right)^2+\bar{r}^2+\bar{r}_0^2-2\bar{r}\bar{r}_0\cos(\theta_0-\theta_p-\theta)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\bar{\mu}=\frac{\bar{r}}{\cos\varphi};\quad K_p=\frac{p}{\rho n^2D^2};$$

$$\bar{A}_{\text{cav}}=\frac{A_{\text{cav}}}{R^2};\quad\frac{J_VV_R}{\pi\bar{\mu}}\approx1;$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta_p} = -\frac{\bar{r}\bar{r}_0}{\bar{S}} \sin(\theta_0 - \theta_p - \theta);$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{\bar{r}\bar{r}_0}{S}\left[\sin(\theta_0 - \theta_p - \theta) + \frac{\overline{H}}{2\pi\bar{r}\bar{r}_0}\left(\bar{x}_0 - \frac{\overline{H}\theta}{2\pi}\right)\right];$$

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}_0} = \frac{1}{\bar{S}}\left(\bar{x}_0 - \frac{\overline{H}\theta}{2\pi}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_0}\left(\frac{1}{\bar{S}^2}\frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta_p}\right) = -\frac{3}{\bar{S}^3}\cdot\frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta_p}\cdot\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}_0};$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_0}\left(\frac{1}{\bar{S}^2}\frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{\bar{S}^3}\left(3\frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}_0} + \frac{\overline{H}}{2\pi}\right).$$

Как видим, благодаря использованному приему, предложенному А. М. Клубничкиным, подынтегральные функции G_i преобразуются в простые алгебраические выражения, не содержащие частных производных от толщины каверны и радиуса-вектора, что существенно упрощает процедуру вычислений и делает их более точными.

Безразмерное индуцированное давление K_p для Z-лопастного гребного винта является периодической функцией угла поворота лопасти с периодом $2\pi/Z$, поэтому оно может быть представлено рядом Фурье вида

$$K_p = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mZ\theta_p + b_m \sin mZ\theta_p) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{p_m} \sin(mZ\theta_p + \psi_m).$$

Коэффициенты ряда Фурье и фазовые углы имеют значение:

$$a_m = -(mZ)^2 a_{1m} + mZ b_{2m} + a_{3m};$$

$$b_m = -(mZ)^2 b_{1m} - mZ a_{2m} + b_{3m};$$

$$a_0 = a_{30};$$

$$a_{im} = \frac{Z}{\pi}\int_0^{2\pi} F_i \cos(mZ\theta_p)\, d\theta_p;$$

$$b_{im} = \frac{Z}{\pi}\int_0^{2\pi} F_i \sin(mZ\theta_p)\, d\theta_p;$$

$$K_{p_m} = (a_m^2 + b_m^2)^{1/2};\quad \psi_m = \operatorname{arctg}\frac{a_m}{b_m}.$$

Необходимо заметить, что благодаря известному и уже использовавшемуся ранее в § 5.1 свойству рядов Фурье периодических функций, представляющих собой суперпозицию Z одинаковых функций, смещенных по фазе на угол $\chi_j = 2\pi/Z$ ($j = 0, 1, \ldots, Z-1$), производить суммирование давлений, индуцированных расположенными на различных лопастях Z-лопастного винта кавернами, не потребовалось. Для решения задачи оказывается достаточным рассмотреть движение каверны, принадлежащей одной лопасти.

При определении периодических сил, вызывающих вибрацию корпуса судна, необходимо вычислить индуцированные давления непосредственно на корпусе. Учет его влияния на величину давлений, как и в случае некавитирующего гребного винта, в первом приближении можно выполнить путем их простого удвоения.

Оценивая положительные качества полученного решения, нельзя, однако, не отметить того обстоятельства, что возникает явное противоречие между строгостью постановки задачи и, следовательно, принципиально достижимой высокой точностью получаемых результатов и приближенностью задания исходных данных, поскольку толщина каверны как функция координат и времени известна лишь приблизительно. Вместе с тем трудоемкость ручного труда, обеспечивающего задание этой функции, чрезвычайно велика, время расчетов на ЭВМ при этом оказывается также неоправданно завышенным.

Естественный путь упрощения рассмотренного решения состоит в замене непрерывно распределенных гидродинамических особенностей, схематизирующих обтекание каверны, дискретными. Для этого в выражениях для функций F_i можно произвести интегрирование по координате θ с использованием теоремы о среднем.

Учитывая, что зависящая от радиуса площадь сечения каверны определяется выражением

$$\overline{W}_{\text{cav}}(\bar{r}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{e}_{\text{cav}} \bar{\mu}\, d\theta,$$

получим

$$\widetilde{F}_i = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \overline{W}_{\text{cav}} \widetilde{G}_i\, d\bar{r},$$

где $\widetilde{G}_i$ — средние по угловой координате θ значения этих функций, вычисляемые при $\theta' = [\theta_1(\bar{r}) + \theta_2(\bar{r})]/2$.

Описанная формальная операция эквивалентна схематизации каверны системой гидродинамических особенностей, состоящей из пары линейных источника и стока равной интенсивности для описания квазистационарной составляющей возмуще-

ний и линейным источником — для описания нестационарной составляющей.

Полученное решение можно упростить в еще большей степени, если перейти от линейных дискретных особенностей к точечным.

Учитывая, что объем каверны

$$\overline{\mathscr{V}}_{\text{cav}} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \overline{W}_{\text{cav}}\, d\bar{r},$$

получим $\overline{\overline{F}}_i = \overline{\mathscr{V}}_{\text{cav}} \overline{\overline{G}}_i$, где $\overline{\overline{G}}_i$ — средние значения функций G_i, вычисляемые при $\bar{r}' = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)/2$.

С целью выявления влияния на амплитуды и фазы гармонических составляющих периодических давлений пространственного положения исследуемой точки, числа лопастей гребного винта и характера изменения во времени геометрических элементов каверны были произведены систематические расчеты в широком диапазоне изменения названных величин.

Следуя предложению Хузе [127], обследовались два закона изменения геометрических элементов каверны во времени, соответствующие условиям $I - B = 3$; $II - B = 6$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\bar{e}_{\substack{\text{cav}\\ \max}}}{\bar{e}^*_{\substack{\text{cav}\\ \max}}} = \frac{\bar{l}_{\text{cav}}}{\bar{l}^*_{\text{cav}}} = \frac{2}{\sqrt{Z}}\left[\frac{1}{2}(1+\cos B\theta_p)\right]^{1/3} \\ &1 - \bar{r}_1 = 0{,}4\left[\frac{1}{2}(1+\cos B\theta_p)\right]^{1/3},\quad \bar{r}_2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{при } 0 < \theta_p < \frac{\pi}{B};$$

$$\bar{e}_{\substack{\text{cav}\\ \max}} = \bar{l}_{\text{cav}} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = 0$$

$$\text{при } \frac{\pi}{B} < \theta_p < \pi.$$

Радиальное распределение достигаемых при $\theta_p = 0$ наибольших значений максимальной толщины каверны и ее длины при $Z = 4$ иллюстрируется табл. 6.4.

В соответствии с исходными данными [127] при расчетах принимались значения относительной поступи винта $J_V = 0{,}42$ и радиальное распределение шага, приведенное в табл. 6.5.

Как следует из приведенных выражений, суммарный наибольший объем каверн для гребного винта с любым числом лопастей сохраняется неизменным. Объем каверны изменяется по гармоническому закону в первом случае в диапазоне изменения угла поворота лопасти $-\pi/3 \leqslant \theta_p \leqslant \pi/3$, во втором — $-\pi/6 \leqslant \theta_p \leqslant \pi/6$. Во всех остальных положениях лопасти кавитация

Таблица 6.4. **Радиальное распределение наибольших значений максимальной толщины и длины каверны у четырехлопастного гребного винта**

$\bar{r}-\bar{r}_1$	$\bar{e}^*_{\text{cav}}$ max	$\bar{l}^*_{\text{cav}}$	$\bar{r}-\bar{r}_1$	$\bar{e}^*_{\text{cav}}$ max	$\bar{l}^*_{\text{cav}}$
0,400	0	0	0,133	0,0351	0,202
0,333	0,0526	0,417	0,067	0,0175	0,109
0,267	0,0702	0,365	0,000	0	0
0,200	0,0526	0,292			

Таблица 6.5. **Радиальное распределение шага винта**

$\bar{r}$	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	1,0
H/D	1,05	1,085	1,08	1,05	1,02	1,00	0,97

отсутствует. Закон изменения толщины каверны вдоль ее длины принят эллиптическим.

Расчеты выполнялись для случаев схематизации каверны системами распределенных (схема *I*), а также дискретных линейных (схема *II*) и точечных (схема *III*) гидродинамических особенностей.

В табл. 6.6 в качестве примера приводятся результаты расчета по трем названным схемам амплитуды первой гармоники разложения периодических давлений в функции расстояния r_0 для условий $\bar{x}_0 = 0$; $\theta_0 = 0$; $B = 3$; $Z = 3$ и $B = 6$; $Z = 6$. Сопоставление этих результатов показывает, что уже при расстояниях $\bar{r}_0 \geqslant 1{,}2$ их отличие не превосходит 5 %, что позволяет сделать заключение о практической целесообразности схематизации каверны точечными гидродинамическими особенностями. С учетом этого обстоятельства ниже приводятся лишь результаты расчетов, произведенных с использованием последней схемы.

На рис. 6.9 приведены результаты расчетов амплитуд трех первых гармоник для условий: $Z = 3, 4, 5, 6$; $\bar{r}_0 = 1{,}6$; $\bar{x}_0 = 0$; $\theta_0 = 0$ и закона изменения геометрических элементов каверны, соответствующего $B = 3$. На рис. 6.10 — для тех же условий, но при $B = 6$. Как видно, величина амплитуд зависит как от числа лопастей гребного винта, так и от закона изменения геометрических элементов каверны.

Соотношение между первой гармоникой и гармониками более высокого порядка определяется при заданном законе изменения геометрических элементов каверны числом лопастей гребного винта, так при $Z = B$ гармоники порядка выше первого на достаточном удалении от винта практически отсутствуют.

Таблица 6.6. **Зависимость от расстояния безразмерной амплитуды первой гармоники разложения индуцированного давления, вычисленной с использованием различных расчетных схем**

$K_{p_1} \cdot 10^2$

Схема	$\bar{r}_0$	1,1	1,2	1,6	2,0	2,4
$B=3$; $Z=3$	I	6,77	5,02	2,43	1,59	1,18
	II	7,04	5,19	2,48	1,61	1,19
	III	6,73	5,04	2,45	1,60	1,19
$B=6$; $Z=6$	I	15,11	10,72	4,90	3,17	2,35
	II	15,76	11,05	4,97	3,21	2,37
	III	14,79	10,63	4,92	3,19	2,36

На рис. 6.11 приведена зависимость амплитуды первой гармоники разложения индуцированного давления от относительного расстояния до точки наблюдения $\bar{r}_0$ при $\bar{x}_0 = 0$, $\theta_0 = 0$; $B = 6$; $Z = 6$.

На рис. 6.12 для тех же условий показана зависимость амплитуды первой гармоники от координаты точки наблюдения $\bar{x}_0$, при $\bar{r}_0 = 1{,}6$, а на рис. 6.13 — от угловой координаты θ_0.

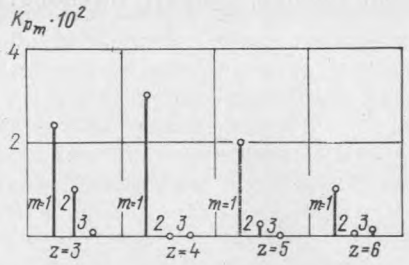


Рис. 6.9. Амплитуды гармоник периодического давления ($Z=3, 4, 5, 6$; $\bar{r}_0 = 1{,}6$; $\bar{x}_0 = 0$; $\bar{\theta}_0 = 0$; $B=3$.

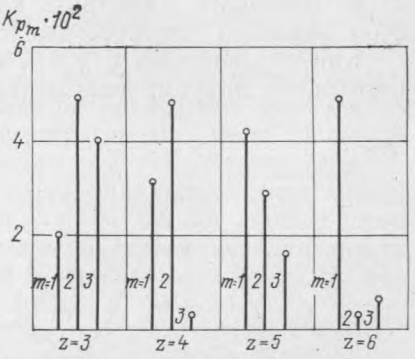


Рис. 6.10. Амплитуда гармоник периодического давления ($Z=3, 4, 5, 6$; $\bar{r}_0 = 1{,}6$; $\bar{x}_0 = 0$; $\theta_0 = 0$; $B=6$.

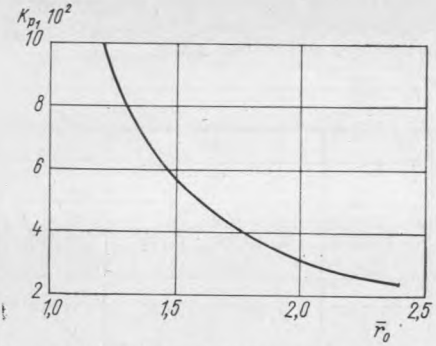


Рис. 6.11. Зависимость амплитуды и фазы от относительного расстояния до точки наблюдения $\bar{r}_0$ ($\bar{x}_0=0$; $\theta_0=0$; $B=6$; $Z=6$; $m=1$).

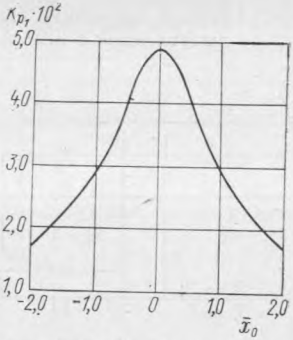


Рис. 6.12. Зависимость амплитуды и фазы от осевой координаты $\bar{x}_0$ ($\bar{r}_0=1,6$; $\theta_0=0$; $B=6$; $Z=6$; $m=1$).

Сопоставление рассчитанных амплитуд гармоник пульсаций давления с результатами аналогичных расчетов, представленных в предыдущей главе для некавитирующего гребного винта, показывает, что при достаточно развитой кавитации, соответствующей принятому в расчетах объему каверн, амплитуды оказываются существенно больше. По этой причине при выполнении практических расчетов для режимов работы винта при развитой кавитации допустимо ограничиться определением лишь кавитационной составляющей индуцированного давления. В том случае, когда при малых степенях развития кавитации амплитуды оказываются сравнимыми по величине, необходимо произвести суммирование соответствующих гармоник с учетом сдвига фаз между ними.

Следует также иметь в виду, что при интегрировании давлений, создаваемых кавитирующим винтом, по поверхности корпуса необходимо учитывать влияние сжимаемости жидкости на фазу давления [см. формулу (5.21)].

Как указывалось в § 5.1, на больших расстояниях от гребного винта индуцированные им возмущения принято именовать

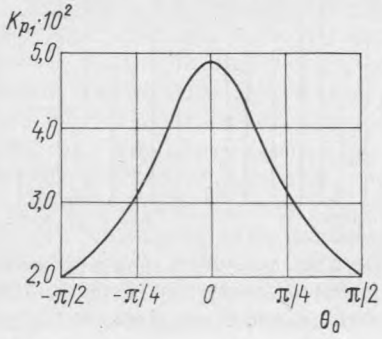


Рис. 6.13. Зависимость амплитуды и фазы от угловой координаты ($\bar{r}_0=1,6$; $\bar{x}=0$; $B=6$; $Z=6$; $m=1$).

звуком вращения. Звук вращения, обусловленный кавитацией винта, работающего в неоднородном потоке, оказывается существенно более интенсивным, чем при ее отсутствии [122].

6.5. Прогнозирование кавитационного шума гребных винтов (основы теории)

Прогнозирование характеристик кавитационного шума гребных винтов базируется на использовании ряда специфических закономерностей гидродинамики и акустики, краткие сведения о которых приводятся ниже.

Кавитационный шум представляет собой случайную последовательность распространяющихся в жидкости импульсов давления. Каждый из импульсов обусловлен нестационарным движением элементарных кавитационных каверн, совокупность которых образует кавитационную область.

Нестационарность движения с дозвуковыми скоростями в соответствии с теоремой Д. И. Блохинцева [17] является необходимым условием акустического излучения. По этой причине ответственной за его образование является лишь та область кавитационного течения, в которой реализуется нестационарное движение каверн. Так, при пленочной кавитации крыла, обтекаемого стационарным потоком, акустическим излучением сопровождаются колебания хвостовой части каверны и замыкание выносимых в зону повышенного давления продуктов ее распада в виде отдельных парогазовых пузырьков. Если вспомнить, что классическая теория кавитационного обтекания тел основана на гипотезе о возможности пренебрежения указанными нестационарными процессами, становится очевидной ее неприменимость для изучения кавитационного шумообразования.

Характеристики одиночного импульса давления полностью определяются параметрами нестационарного движения каверны, обусловившего его возникновение, характеристики случайной последовательности импульсов, представляющей собой кавитационный шум в целом, параметрами распределения этой последовательности, описывающими интенсивность, длительность и интервалы времени между появлением отдельных импульсов.

Основой для описания параметров одиночного кавитационного импульса является известное из акустики соотношение, устанавливающее связь между изменением объема излучающего тела, давлением в звуковой волне и интенсивностью излучения [51]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\rho \ddot{\mathcal{V}} (t')}{4\pi S}; \\ I &= \frac{\rho \ddot{\mathcal{V}}^2 (t')}{4\pi c_0} = \frac{4\pi S^2 p^2}{\rho c_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

где p — звуковое давление; I — интенсивность излучения; ρ — плотность жидкости; S — расстояние до излучающего тела; $t' = t - S/c_0$ — время запаздывания; t — время; c_0 — скорость звука; $\ddot{\mathcal{V}} = d^2\mathcal{V}/dt^2$ — ускорение изменения объема тела.

В частном случае, когда каверна имеет сферическую форму, ускорение изменения ее объема можно представить в виде

$$\ddot{\mathcal{V}} = 4\pi(2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}),$$

где R, $\dot{R}$, $\ddot{R}$ — текущий радиус каверны, первая и вторая его производные по времени.

В этом частном случае

$$p = \frac{\rho}{S}(2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}),$$

что в точности соответствует выражению для давления на далеких от каверны расстояниях, полученному методами теории несжимаемой жидкости [82]. Отличие состоит лишь в необходимости учета времени запаздывания $t' = t - S/c_0$, обусловленного конечностью скорости распространения возмущений.

Следуя предложению М. Гаррисона, принято аппроксимировать одиночный импульс экспоненциальной функцией [125]:

$$p = p^* \exp(-t/\alpha), \tag{6.22}$$

где p^* — максимальное давление импульса; α — постоянная времени, характеризующая длительность положительной составляющей импульса. (В соответствии с аппроксимацией (6.22) в отличие от действительности импульс предполагается однополярным).

Спектральная плотность энергии импульса может быть вычислена с помощью известного соотношения [97]

$$g(f) = 2\,|s(f)|^2, \tag{6.23}$$

где $s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t}dt$ — спектр амплитуд; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота; f — циклическая частота.

Производя вычисления с использованием формулы (6.22), получим

$$g(f) = \left(\frac{\alpha p^*}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{1+\alpha^2\omega^2}, \tag{6.24}$$

т. е. в низкочастотной области $\omega < 1/\alpha$, $f < f_0$ спектральная плотность является практически постоянной, при $\omega = 1/\alpha$ по сравнению с постоянным значением она уменьшается вдвое, а при дальнейшем увеличении частоты, падает как ω^{-2}, т. е. со скоростью 6 дБ/октава.

Легко показать, что вывод о постоянстве энергетического спектра в области низких частот является следствием предпо-

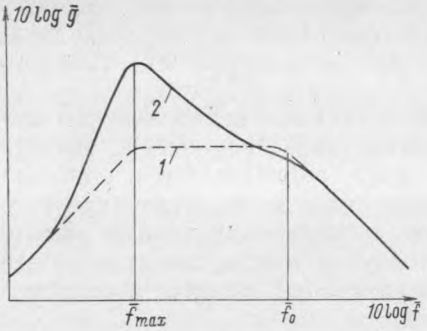


Рис. 6.14. Энергетический спектр одиночного импульса.

1 — по формуле (6.24); *2* — действительный спектр.

ложения об однополярности импульса. Учет его отрицательной составляющей приводит к выводу о том, что в области низких частот спектральная плотность энергии растет со скоростью 6 дБ/октаву [53]:

$$g(f) = 2\omega^2 \int_0^{\vartheta} tp\,dt,$$

где $\vartheta \approx R_{\max}\sqrt{\rho/p_0}$.

Непосредственные вычисления энергетического спектра свидетельствуют о том, что в области низких частот его форма является более сложной, на частоте, соответствующей времени замыкания каверны $f_{\max} \approx 1/R_{\max}\sqrt{p_0/\rho}$, энергетический спектр имеет выраженный максимум, в то же время в области высоких частот аппроксимация (6.24) хорошо соответствует точному решению. Энергетический спектр одиночного кавитационного импульса приведен на рис. 6.14.

Как указывалось выше, кавитационный шум представляет собой последовательность звуковых импульсов, каждый из которых обусловлен ростом и замыканием одиночной каверны. Появление в потоке каверны тех или иных размеров является случайным событием, зависящим от множества факторов, поэтому при детерминированной форме импульса интервалы времени между их появлением, амплитудные значения и длительности являются случайными функциями времени. Следовательно, рассматривая кавитационный шум как случайный импульсный процесс, можно воспользоваться разработанным в статистической теории связи математическим аппаратом для описания его параметров [75, 83].

В зависимости от статистических характеристик интервалов времени между импульсами все импульсные процессы можно подразделить на две основные категории:

— апериодические импульсные процессы, у которых отсутствует какая-либо периодичность интервалов времени между появлением импульсов;

— импульсные процессы с детерминированным тактовым интервалом, у которых появление импульсов может быть охарактеризовано случайной величиной отклонения от основного периода.

Очевидно, что кавитационный шум как апериодический импульсный процесс в представляющем для нас интерес аспекте будет характерен для гребного винта, работающего в однородном потоке. В неоднородном же потоке из-за периодического изменения параметров, характеризующих возникающую на лопастях гребного винта кавитационную область, кавитационный шум будет представлять собой импульсный процесс с детерминированным тактовым интервалом.

В частном случае апериодического кавитационного шума, состоящего из импульсов одинаковой продолжительности и амплитуды с интервалами времени между их появлением, подчиняющимися характерному для независимых случайных событий экспоненциальному закону распределения, спектр мощности шума с точностью до постоянного множителя, характеризующего количество импульсов, появляющихся в единицу времени, совпадает с энергетическим спектром одиночного импульса [52]:

$$G_0(f) = \frac{1}{T_m} g(f), \tag{6.25}$$

где T_m — среднее значение интервала.

Как уже указывалось, в действительности амплитудные значения и длительности импульсов различаются между собой и являются случайными величинами.

Максимальное давление и время замыкания каверны пропорциональны ее максимальному размеру. Учитывая также, что постоянная времени α пропорциональна времени замыкания каверны, можно предположить, что между длительностью импульса и его амплитудным значением существует детерминированная линейная связь.

Использование этого предположения приводит к выводу о том, что амплитудные значения и длительности импульсов могут быть охарактеризованы одной случайной величиной — максимальным радиусом каверны или, что эквивалентно, постоянной времени α. Для количественной оценки возможного искажения спектра мощности (6.25), В. П. Морозовым рассмотрен гипотетический случай равномерного распределения параметра α в интервале $[0, \alpha_1]$ [75].

Отношение спектров мощности рассматриваемого процесса и временной последовательности одинаковых кавитационных импульсов со средним значением постоянной времени α составляет [53]:

$$\frac{G(f)}{G_0(f)} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{4}{\nu^2}\right)\left[1 - \frac{3}{\nu^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg}\nu}{\nu}\right)\right],$$

где $\nu = \omega\alpha_1$; $\omega = 2\pi f$.

В области высоких частот при $\nu \gg 1$ $G(f)/G_0(f) \approx 4/3$, в области низких частот $\nu \ll 1$, разлагая arctg ν в ряд Тэйлора, получим

$$\frac{G(f)}{G_0(f)} = \frac{16}{5}\left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right)\left(1 - \frac{5}{7}\nu^2\right).$$

При $\nu \to 0$ $G(f)/G_0(f) = 3{,}2$, при $\nu = 0{,}5$ $G(f)/G_0(f) = 2{,}78$.

Таким образом, во всем частотном диапазоне спектральные уровни оказываются выше вычисленных в предположении, что все импульсы одинаковы и соответствуют среднему значению последовательности. В области высоких частот эта разница пренебрежимо мала, так как составляет 30 %, т. е. приблизительно равна $10 \log 4/3 \approx 1$ дБ, в области низких частот она больше, однако не превосходит $10 \log 3{,}2 \approx 5$ дБ. Таким образом, использование формулы (6.25) позволяет с приемлемой точностью оценить спектральные уровни кавитационного шума для апериодических условий излучения.

Для оценки влияния периодичности изменения условий кавитационного шумообразования, учитывая полученные выше результаты, рассмотрим последовательность одинаковых импульсов с детерминированным тактовым интервалом T.

Предполагая, что интервалы между импульсами распределены по нормальному закону, обеспечивающему при нулевой дисперсии описание детерминированной периодической последовательности импульсов, можно получить [75]:

$$\frac{G(f)}{G_0(f)} = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{(\sigma_\mu \omega)^2}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{(\sigma_\mu \omega)^2}{2} - \cos\left[(T/\sigma_\mu)\,\sigma_\mu \omega\right]}. \qquad (6.26)$$

В области высоких частот при $\sigma_\mu \omega \gg 1$ $G(f)/G_0(f) = 1$, т. е. апериодичность процесса не оказывает влияния на форму спектра кавитационного шума.

В области низких частот при $\sigma_\mu \omega \ll 1$ $G(f)/G_0(f) \approx (\sigma_\mu/T)^2$.

Для того чтобы при принятом нормальном законе распределения процесс имел детерминированный тактовый интервал, необходимо наложить условие $(\sigma_\mu/T)^2 \ll 1$.

Следовательно, в низкочастотной области деформация спектра оказывается существенной: спектральные уровни оказываются значительно ниже уровней спектра одиночного импульса.

На частоте тактового интервала и кратных частотах, $\omega = 2\pi m/T$, $m = 1, 2, \ldots, n$, спектр имеет повышенные уровни. Результаты расчетов по формуле (6.26) показывают, что существенное проявление дискретных составляющих в спектре начинается при $\sigma_\mu/T \leqslant 0{,}1$. При $\sigma_\mu/T = 0{,}2$ местное увеличение спектральной плотности на основной частоте составляет 4 дБ,

при $\sigma_\mu/T = 0{,}1$ эта величина равна 10 дБ, а при $\sigma_\mu/T = 10^{-2}$ 30 дБ, т. е. спектр оказывается практически дискретным.

Выполненный анализ показывает, что для реальных условий работы гребного винта в неоднородном потоке за корпусом судна прогнозирование спектральных уровней его кавитационного шума является относительно простой задачей для области высоких частот, где эти уровни с точностью до постоянного множителя, характеризующего количество замыкающихся в потоке каверн в единицу времени, совпадают со спектральными уровнями шума, обусловленного замыканием одиночной каверны, размер которой соответствует математическому ожиданию последовательности.

Для области низких частот эта задача оказывается значительно более сложной, так как на величину спектральных уровней оказывают существенное влияние такие факторы, как отличие от принятой аппроксимации (6.22) формы импульса давления, генерируемого замыкающейся каверной, и статистические параметры последовательности импульсов, характеризующие распределение их амплитудных значений, а также в особой мере — интервалов между импульсами.

Трудности получения указанной информации привели к тому, что к настоящему времени разработаны практические методы прогнозирования спектральных уровней кавитационного шума гребных винтов лишь для высокочастотной области спектра $f \geqslant 500$ Гц.

Следует отметить, что использование экспериментальных методов исследования низкочастотного кавитационного шума также затруднительно из-за необходимости обеспечения больших размеров измерительных камер, требуемых для формирования акустических волн.

6.6. Прогнозирование кавитационного шума гребных винтов (методы расчета)

В соответствии с полученными в предыдущем параграфе результатами для расчетного определения спектральных уровней кавитационного шума гребного винта в высокочастотной области спектра необходимо располагать информацией о величине среднего объема кавитационных каверн, замыкающихся в потоке в единицу времени.

Используя теорию подобия и размерностей, Д. Росс пришел к выводу, что зависимость среднего объема каверн от параметров потока должна иметь вид [149]:

$$\mu_{\overline{\mathcal{V}}_{\text{cav}}} = f(\beta), \tag{6.27}$$

где

$$\mu_{\overline{\mathcal{V}}_{\text{cav}}} = \mu_{\mathcal{V}_{\text{cav}}}/D^2V_t;$$

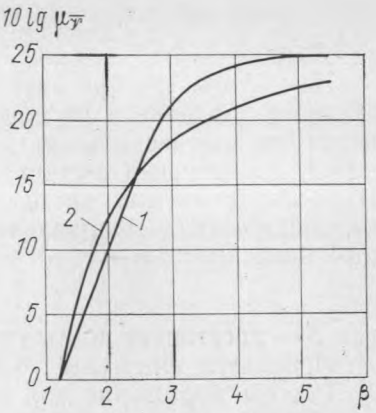


Рис. 6.15. Зависимость среднего объема каверн от степени развития кавитации.
1 — эксперимент; *2* — по формуле (6.28).

$\mu_{\overline{\mathcal{V}}_{cav}}$ — среднее значение объема каверн, замыкающихся в единицу времени; D — диаметр гребного винта; $V_t = \pi n D$ — окружная скорость концов лопастей:

$$\beta = \sigma_{t_i}/\sigma_t; \quad \sigma_{t_i} = \frac{2(p_\infty - p_v)}{\rho V_{t_i}^2};$$

$$\sigma_t = \frac{2(p_\infty - p_v)}{\rho V_t^2};$$

σ_{t_i} — критическое число кавитации, образованное по окружной скорости концов лопастей; σ_t — текущее значение числа кавитации. Им же предложено аппроксимирующее зависимость (6.27) аналитическое выражение

$$\mu_{\overline{\mathcal{V}}_{cav}} = (\sqrt{\beta} - 1)^2. \qquad (6.28)$$

В результате специально поставленных экспериментов на крыльях бесконечного размаха, в процессе которых выполнялась скоростная киносъемка кавитационной области, универсальный характер зависимости (6.27) был подтвержден [53]. Результаты эксперимента представлены на рис. 6.15. Там же приведен график функции $\mu_{\overline{\mathcal{V}}_{caw}} = f(\beta)$, соответствующей аналитическому выражению (6.28). Как видно, обе зависимости удовлетворительно согласуются между собой.

Энергия акустического излучения кавитационной области представляет собой диссипирующую часть полной энергии кавитационных каверн. Последняя, в свою очередь, численно равна потенциальной энергии каверн в момент замыкания, из чего можно заключить, что интенсивность кавитационного шума должна быть пропорциональна произведению давления в потоке

на средний секундный объем замыкающихся каверн: $I \sim p_\infty \times \times \mu \gamma_{cav}$.

Из-за того, что при акустических измерениях регистрируется звуковое давление, а не мощность источника излучения, практически удобнее использовать понятие не интенсивности излучения I, а дисперсии амплитуд пульсаций звукового давления L. В рассматриваемом частном случае монопольного излучателя, не обладающего направленностью, эти величины связаны простой зависимостью

$$L = I/4\pi S^2, \tag{6.29}$$

где S — расстояние до излучателя.

Используя формулы (6.27)—(6.29), получим предложенное Д. Россом выражение для дисперсии амплитуд кавитационного шума гребного винта, обычно именуемой интегральными в отличие от спектральных уровнями шума или уровнями шума в общей полосе частот:

$$L = \frac{A_1 Z D^2 V_t p_\infty}{S^2} (\sqrt{\beta} - 1)^2.$$

Здесь и ниже A_i — безразмерные постоянные, определяемые экспериментально; Z — число лопастей гребного винта.

Пренебрегая давлением насыщенных паров, давление в невозмущенном натекающем потоке вначале будем считать постоянным, соответствующим определенному значению заглубления оси гребного винта. Тогда последнюю формулу можно представить в виде

$$L = \frac{A_2 \rho Z D^2 \sigma_{t_i} V_{t_i}^3}{S^2} \left[\frac{V_t}{V_{t_i}} \left(\frac{V_t}{V_{t_i}} - 1 \right)^2 \right], \tag{6.30}$$

свидетельствующем, что при эксплуатационных режимах работы судовых гребных винтов, соответствующих умеренным значениям степени развития кавитации на их лопастях $1{,}5 \leqslant \leqslant V_t/V_{t_i} \leqslant 3$, интегральные уровни кавитационного шума нарастают приблизительно пропорционально пятой степени скорости.

На практике также представляют интерес спектральные уровни кавитационного шума. Их связь с интегральными уровнями определяется выражением

$$L = \int_0^\infty G(f)\, df. \tag{6.31}$$

В области высоких частот $f > f_0$, как это было показано в предыдущем параграфе, спектральные уровни изменяются по закону

$$G(f) = G(f_0)(f_0/f)^2, \tag{6.32}$$

сохраняя приблизительно постоянное значение при $f < f_0$, что позволяет, учитывая соотношение (6.31), приближенно представить выражение (6.32) в виде

$$G(f) \approx \frac{Lf_0}{f^2}. \tag{6.33}$$

Экспериментальное исследование зависимости спектральных уровней кавитационного шума гребных винтов от параметров потока [149], подтверждаемое результатами теоретического анализа и расчетов [53], показывает, что выражение для граничной частоты имеет структуру

$$f_0 \sim \frac{1}{D}\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho}}\,\sigma_t^{3/2}. \tag{6.34}$$

Использование соотношений (6.29), (6.33) и (6.34) позволяет получить зависимость спектральных уровней кавитационного шума гребного винта в высокочастотной области от окружной скорости концов лопастей:

$$G(f) = \frac{A_3 Z D p_\infty^2 \sigma_{t_i}}{\rho S^2 f^2}\left(1 - \frac{V_{t_i}}{V_t}\right)^2. \tag{6.35}$$

Как видно, эта зависимость оказывается существенно более слабой, чем аналогичная зависимость интегральных уровней шума (6.30), а при $V_t/V_{t_i} \gg 1$ она практически вообще отсутствует, т. е. при сильно развитой кавитации гребного винта спектральные уровни шума на фиксированной частоте в высокочастотной области спектра с дальнейшим ростом скорости практически не увеличиваются. Вывод о наличии тенденции спектральных уровней к «насыщению» подтверждается многочисленными результатами непосредственных измерений. На рис. 6.16 в логарифмическом масштабе изображена зависимость интегральных и спектральных уровней кавитационного шума гребного винта от относительной окружной скорости концов лопастей, соответствующая формулам (6.30) и (6.35). В качестве пороговых в обоих случаях приняты уровни, соответствующие относительной скорости $V_t/V_{t_i} = 1{,}1$.

Теперь предположим, что переменным является давление в потоке, а частота вращения гребного винта сохраняется неизменной.

В этом случае формула (6.35) приобретает вид

$$G(f) = \frac{A_4 Z \rho D V_t^4 \sigma_{t_i}^3}{S^2 f^2}\left(\frac{p_\infty}{p_{\infty_i}}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{p_\infty}{p_{\infty_i}}}, \tag{6.36}$$

где $p_{\infty i}$ — внешнее давление, соответствующее моменту возникновения кавитации при заданной частоте вращения гребного винта.

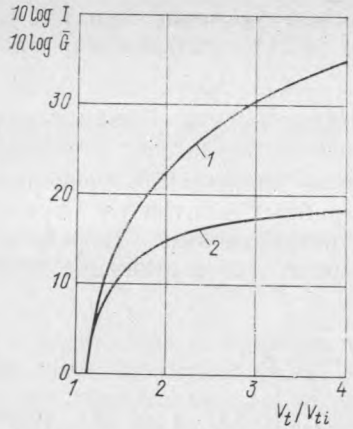


Рис. 6.16. Зависимость спектральных (*1*) и интегральных (*2*) уровней шума от относительной окружной скорости концов лопастей гребного винта.

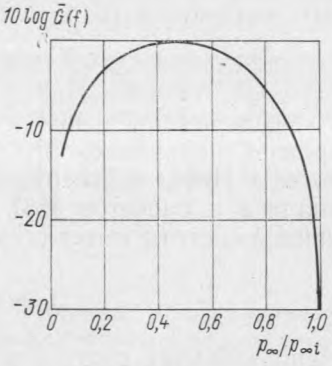


Рис. 6.17. Зависимость спектральных уровней шума от статического давления.

Анализ последнего выражения показывает, что спектральные уровни максимальны при $p_\infty/p_{\infty i} = {}^4/_9$ и обращаются в нуль при $p_\infty/p_{\infty i} = 0$, $p_\infty/p_{\infty i} = 1$. На рис. 6.17 результаты расчетов по формуле (6.41) представлены графически в логарифмическом масштабе.

Физически полученный характер зависимости спектральных уровней шума от давления в потоке обусловлен тем, что на их величину оказывают влияние два противоположно действующих фактора. С одной стороны, увеличение давления при постоянной частоте вращения гребного винта приводит к уменьшению степени развития кавитации на его лопастях и соответствующему уменьшению уровней шума, а с другой — к увеличению потенциальной энергии возникающих в потоке каверн, сопровождающемуся ростом этих уровней. При $p_\infty/p_{\infty i} > {}^4/_9$ преимущественное влияние оказывает уменьшение степени развития кавитации, а при $p_\infty/p_{\infty i} < {}^4/_9$ — увеличение потенциальной энергии каверн.

Выявленный аналитически характер зависимости спектральных уровней кавитационного шума от величины внешнего давления был неоднократно зафиксирован во время испытаний моделей гребных винтов в кавитационных трубах, где снижение числа кавитации достигают за счет уменьшения давления в рабочем участке. При этом, несмотря на увеличение степени развития кавитации, зачастую, вопреки ожиданиям, спектральные уровни шума модели гребного винта в ультразвуковой области не падают, а растут.

Получение количественных результатов с помощью формул (6.30), (6.35) и (6.36) требует знания критического числа возникновения кавитации гребного винта σ_{t_i}. Этот параметр мо-

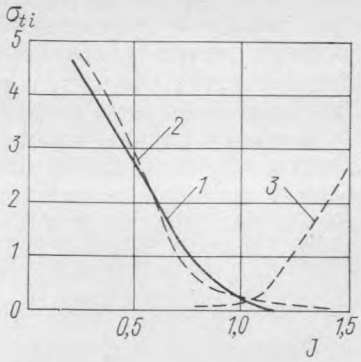


Рис. 6.18. Кавитационная диаграмма модели гребного транспортного судна.

1 — кавитация концевого вихря; *2* — кавитация входящей кромки (засасывающая поверхность); *3* — кавитация входящей кромки (нагнетающая поверхность).

жет определяться как теоретически, путем расчета кавитационных диаграмм профилей сечений лопастей, так и экспериментально, путем испытания моделей винтов в кавитационных трубах и последующей корректировки результатов для учета масштабного эффекта возникновения кавитации.

В качестве примера на рис. 6.18 представлена типичная диаграмма кавитационных испытаний модели гребного винта транспортного судна. При малых значениях относительной поступи $0{,}3 \leqslant J \leqslant 0{,}6$ кавитация возникает в ядре свободного концевого вихря и на засасывающей поверхности лопасти у входящей кромки, критическое число возникновения кавитации при этом весьма значительно $1{,}5 \leqslant \sigma_{t_i} \leqslant 3$. В районе значений относительной поступи, соответствующих рабочему режиму $0{,}7 \leqslant J \leqslant 0{,}9$, кавитация первоначально возникает на засасывающей поверхности лопасти, при этом $0{,}3 \leqslant \sigma_{t_i} \leqslant 0{,}6$. При больших значениях относительной поступи $J \geqslant 1{,}0$ кавитация возникает у входящей кромки лопасти на нагнетающей поверхности, критическое число кавитации вновь оказывается существенным и может достичь величины $\sigma_{t_i} \approx 3$.

Из предыдущего анализа следует, что при выборе рациональной конструкции и режима работы гребного винта, предназначенного обеспечить низкие уровни кавитационного шума, необходимо стремиться к достижению на рабочей поступи как можно меньших значений критического числа кавитации, гарантирующих при прочих равных условиях возникновение кавитации при наибольшей частоте вращения гребного винта.

В реальных условиях, однако, проблема этого выбора, а также расчета уровней кавитационного шума существенно осложняется необходимостью учета неоднородности потока, натекающего на гребной винт, работающий за корпусом судна.

В первом приближении решение задачи расчетного определения уровней кавитационного шума гребного винта можно осуществить, используя гипотезу квазистационарности. Согласно

этой гипотезе мгновенные значения кавитационных характеристик лопастей предполагаются соответствующими таковым для гребного винта, работающего в однородном потоке, при условии равенства относительной поступи J ее мгновенному значению в неоднородном потоке $J(\theta_p)$.

В общем случае, когда в диске винта имеет место не только аксиальная, но и тангенциальная составляющая скорости, мгновенное значение относительной поступи определяется выражением

$$J(\theta_p) = \frac{V_x(\theta_p)}{nD + V_\theta(\theta_p)/\pi}.$$

Располагая полученной в результате кавитационных испытаний модели гребного винта в однородном потоке зависимостью $\sigma_{t_i}(J)$, подобной приведенной на рис. 6.18, а также результатами измерений составляющих скорости натекающего потока в диске винта $V_x(\theta_p)$, $V_\theta(\theta_p)$, найдем зависимость мгновенных значений критического числа кавитации и критической скорости концов лопастей гребного винта от угловой координаты $\sigma_{t_i}(\theta_p)$, $V_{t_i}(\theta_p)$.

После чего формулы для расчетного определения интегральных и спектральных уровней кавитационного шума (6.30), (6.35) легко распространить на условия работы винта в неоднородном натекающем потоке:

$$L = \frac{A_2 \rho Z D^2}{S^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{t_i}(\theta_p) V_{t_i}^3(\theta_p) \left[\frac{V_t}{V_{t_i}(\theta_p)} \left(\frac{V_t}{V_{t_i}(\theta_p)} - 1 \right)^2 \right] d\theta_p; \tag{6.37}$$

$$G(f) = \frac{A_3 Z D p_\infty^2}{\rho S^2 f^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{t_i}(\theta_p) \left[1 - \frac{V_{t_i}(\theta_p)}{V_t} \right]^2 d\theta_p. \tag{6.38}$$

Здесь надлежит отметить, что поток в диске гребного винта может оказаться обладающим значительной радиальной неоднородностью. Модель винта, спроектированного с учетом этой неоднородности, при испытаниях в радиально однородном потоке кавитационной трубы будет обладать существенно искаженными кавитационными характеристиками. По этой причине для получения зависимости $\sigma_{t_i}(\theta_p)$ необходимо подвергнуть кавитационным испытаниям модель, эквивалентную прототипу гребного винта, обладающую в однородном потоке таким же радиальным распределением нагрузки вдоль лопасти, каким обладает прототип в радиально неоднородном потоке.

На практике для характеристики высокочастотной составляющей шума, наряду со спектральными уровнями $G(f)$, часто

используют интегральные уровни в определенной полосе частот $\Delta f = f_2 - f_1$ [40]:

$$L_f = \int_{f_1}^{f_2} G(f)\, df. \tag{6.39}$$

Широко распространено использование так называемых октавных, полуоктавных и третьоктавных спектров. В этом случае

$$f_2 = 2^{\frac{1}{q}} f_1, \tag{6.40}$$

где $q = 1, 2, 3$ для октавы, полуоктавы и третьоктавы соответственно.

Средняя частота полосы частот определяется как ее среднегеометрическое значение:

$$f_m = \sqrt{f_1 f_2} = 2^{\frac{1}{2q}} f_1. \tag{6.41}$$

Следовательно, полоса и средняя частота связаны соотношением

$$\Delta f = f_m \frac{2^{\frac{1}{q}} - 1}{2^{\frac{1}{2q}}}. \tag{6.42}$$

Для октавы, полуоктавы и третьоктавы соответственно получим: $\Delta f = 0{,}71 f_m$; $\Delta f = 0{,}345 f_m$; $\Delta f = 0{,}232 f_m$.

Используя формулы (6.38)—(6.42), указанные характеристики высокочастотного кавитационного шума гребного винта вычислить не представляет труда.

Наряду с рассмотренными расчетными методами прогнозирования параметров кавитационного шума гребных винтов, на практике также находят применение эмпирические зависимости, полученные в результате статистической обработки данных натурных измерений.

Для расчета интегральных и спектральных уровней в высокочастотной области Д. Росс [149] и Т. Сасаима [150] рекомендуют использовать следующие соотношения:

$$L_{f>0,1} = 74 + 60 \log V_S + 9 \log T; \tag{6.43}$$

$$G(f) = 36 + 60 \log V_S + 9 \log T - 20 \log f - 20 \log D, \tag{6.44}$$

где $L_{f>0,1}$ — интегральные уровни шума в области частот выше 100 Гц на условном расстоянии $S = 1$ м относительно порога, соответствующего звуковому давлению 1μ Па, дБ; $G(f)$ — спектральные уровни шума при тех же условиях, дБ; V_S — скорость судна, уз; T — водоизмещение судна, т; f — частота, кГц; D — диаметр гребного винта, м.

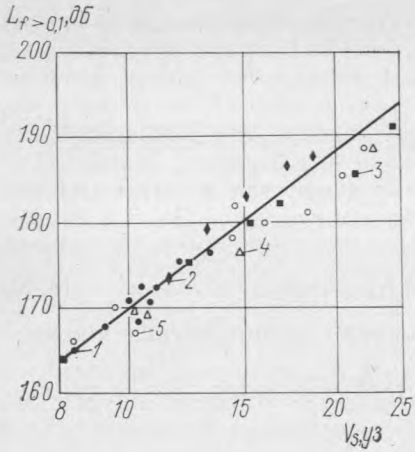


Рис. 6.19. Зависимость интегральных уровней шума от скорости.

1 — для транспортных судов; *2* — для пассажирского судна «Астрид»; *3* — для крейсера «Кардифф»; *4* — для крейсера «Куинси»; *5* — для эскадренных миноносцев.

На рис. 6.19 изображены результаты измерений интегральных уровней шума $L_{f>0,1}$ различных судов в функции скорости хода и расчетов по формуле (6.43). Как видно, их соответствие является удовлетворительным.

Выше отмечалось, что доля энергии, сообщаемой гребному винту судовой энергетической установкой и расходуемой на обусловленное кавитацией акустическое излучение, пренебрежимо мала. Тем не менее представляет интерес произвести ее оценку

Из приведенного на рис. 6.19 графика следует, что при скорости судна $V_S = 12$ уз, интегральные уровни шума составляют $L_{f>0,1} = 175$ дБ относительно 1μ Па на расстоянии $S = 1$ м. Используя формулу (6.21), с учетом того, что излучение происходит в полупространство, находим, что эти уровни соответствуют мощности излучения 2,5W. Для судна среднего водоизмещения при указанной скорости хода подводимая к гребному винту мощность составляет ≈ 3000 л. с. или 2,5 MW. Следовательно, «КПД излучения» имеет величину $\approx 10^{-6}$. Более тщательная оценка показывает, что эта величина в среднем составляет $1{,}5 \times \times 10^{-6}$ с разбросом ± 6 дБ, т. е. на 1 MW мощности энергетической установки мощность акустического излучения гребного винта составляет от 0,3 до 5 W.

Подводя итог приведенному в главе материалу, можно заключить, что его использование позволяет произвести расчеты критического числа кавитации гребных винтов в неоднородном потоке и геометрических элементов, возникающих на лопастях каверн, выполнить расчет периодических давлений, индуцированных винтом в окружающей жидкости и произвести расчетную оценку спектральных уровней кавитационного шума гребных винтов.

Глава 7

АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТОВ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ

Методы расчета гребных винтов, описанные в предыдущих главах, без ЭВМ не реализуемы. Иначе говоря, не имея необходимых программ и средств вычислительной техники, невозможно спроектировать гребной винт, удовлетворяющий многочисленным жестким и подчас противоречивым требованиям, вытекающим из необходимости улучшения эксплуатационных характеристик судна. Более того, возрастающие требования к точности изготовления гребных винтов, наряду с усложнением их конструкции, не позволяют и в винтовом производстве обойтись без вычислительной техники. Все шире используется вычислительная техника в конструкторских работах по гребным винтам.

Применять ЭВМ для расчетов гребных винтов стали почти одновременно с появлением машин второго поколения. Гидродинамические расчеты винтов всегда стремились, и тенденция эта осталась, выполнять на наиболее мощных ЭВМ. В определенной степени развитие методов расчета гребных винтов связано с развитием вычислительной техники.

Как и в других отраслях техники, постепенное накопление программ, реализующих методы расчета гребных винтов, привело к парадоксальному результату — непомерно увеличился объем ручного труда, требовавшийся для подготовки информации при выполнении большого числа расчетов, включаемых в процедуру проектирования. В это же примерно время появились ЭВМ третьего поколения с операционными системами, винтообрабатывающие станки с ЧПУ и чертежные автоматы. Такое стечение обстоятельств объединило проблемы автоматизации расчетов и изготовления гребных винтов и дало толчок к системному подходу в их решении.

Именно по этой причине нельзя рассматривать вопросы автоматизации расчетов гребных винтов, выполняемых в процессе их проектирования, в отрыве от вопросов автоматизации технической подготовки производства и автоматизации самого производства гребных винтов. Вместе с тем основное внимание далее будет уделено программному обеспечению проектирования винтов. Это определяется не только тематикой книги, но и удельным объемом трудоемкости проектных расчетов в общем балансе работ по технической подготовке производства. Указанный удельный объем при выполнении полного цикла расчетов по вихревой теории и проведении модельных испытаний по приближенным оценкам составляет 80—90 %.

Работы по созданию автоматизированных систем технической подготовки производства гребных винтов и совершенство-

ванию соответствующего программного обеспечения интенсивно ведутся как в СССР, так и за рубежом (см., например, [32, 108, 143, 145]).

В данной главе излагаются основные принципы построения подобных систем, а также дается описание некоторой «идеализированной» системы — такой, какой она, по нашему мнению, должна быть. Отметим, что концепции, сформулированные в работе [32], не претерпели за прошедшее время радикальных изменений, что позволило их использовать и в настоящей книге.

7.1. Единая автоматизированная система технической подготовки производства гребных винтов

Техническая подготовка производства гребных винтов, как впрочем, и других сложных деталей, может быть условно разделена на три основных этапа:

— проектирование,
— конструирование,
— технологическая подготовка производства.

Автоматизированная система, о которой пойдет речь, является единой и сквозной, поскольку охватывает все три указанных этапа технической подготовки. Такая система должна удовлетворять следующим основным общесистемным требованиям, вытекающим из необходимости обеспечения непрерывности автоматизируемого процесса.

1. Сохранение всей однажды выработанной информации, необходимой для последующих этапов функционирования системы. В частности, принципиальное значение имеет сохранение и использование математического представления поверхности гребного винта, получаемого при его проектировании.

2. Модульное построение программного обеспечения, позволяющее развивать систему и настраивать ее под конкретную среду функционирования (типы ЭВМ, программно-управляемого оборудования и т. п.).

3. Единый язык программного обеспечения для всех блоков, допускающих программирование на языке высокого уровня.*

4. Упорядочение и унификация машинных носителей и записи информации на них при передаче информации от подсистемы к подсистеме.

5. Информационная и структурная согласованность с системами высшего уровня, в частности, с системами автоматизированного проектирования судов и измерительно-вычислитель-

* В связи с тем, что современные операционные системы имеют, как правило, средства для совмещения программных модулей, написанных на разных языках, это требование нельзя отнести к числу обязательных. Вместе с тем мы считаем, что соблюдение этого требования (в разумных пределах) снижает трудоемкость разработки системы.

ными системами, обеспечивающими автоматизированное проведение модельных экспериментов.

Естественно, что эффективность работы системы определяется полнотой и качеством программного обеспечения, составом и эксплуатационной надежностью аппаратного обеспечения, а также организационной структурой этой системы.

В соответствии с основными этапами технической подготовки производства гребных винтов, система может быть разделена на три подсистемы: проектирования, конструирования и технологической подготовки. Программное обеспечение проектирования гребных винтов будет рассмотрено в следующем параграфе. Здесь лишь перечислим основные задачи, решаемые каждой из подсистем. Как видно из схемы, приведенной на рис. 7.1, исходная информация, по которой выполняется проектирование гребного винта, содержится в техническом задании. Это техническое задание готовится проектантом судна в целом и может вырабатываться с использованием автоматизированной системы проектирования судов. Результатом проектирования гребного винта является математическое представление поверхности лопасти, иллюстрируемое теоретическим чертежом гребного винта. Эта информация является исходной для работы подсистемы конструирования. В задачу подсистемы конструирования входит:

— формирование окончательного математического представления поверхности гребного винта, включая ступицу и галтельное сопряжение ступицы с лопастями;

— подготовка конструкторской документации, включая рабочие чертежи лопастей, ступицы и обтекателя;

— подготовка чертежей контрольной оснастки (шаблонов).

Как видно, существенную долю работ, выполняемых подсистемой конструирования, составляют чертежные работы. Чертежи гребных винтов весьма специфичны. В качестве основы программного обеспечения их построения целесообразно принимать поэлементную форму математического представления поверхности гребного винта (см. § 1.2).

На этапе конструирования к десяти базовым геометрическим элементам, определяющим поверхность лопасти гребного винта, добавляются аппроксимации еще трех элементов: формы ступицы (т. е. $\bar{r}_{Hl}(\bar{x})$) и радиусов галтельных сопряжений засасывающей и нагнетающей поверхностей лопасти с поверхностью ступицы (т. е. $\bar{\rho}^{\pm}_{\Gamma}(\xi)$). Естественно, что проектантами гребного винта могут быть даны те или иные рекомендации относительно характера зависимостей $\bar{r}_{Hl}(\bar{x})$ и $\bar{\rho}^{\pm}_{\Gamma}(\xi)$. Однако окончательные значения этих величин могут быть выбраны только с учетом конкретных размеров гребного вала.

Чертежи и математическое представление поверхности гребного винта в целом, полученные в результате работы подси-

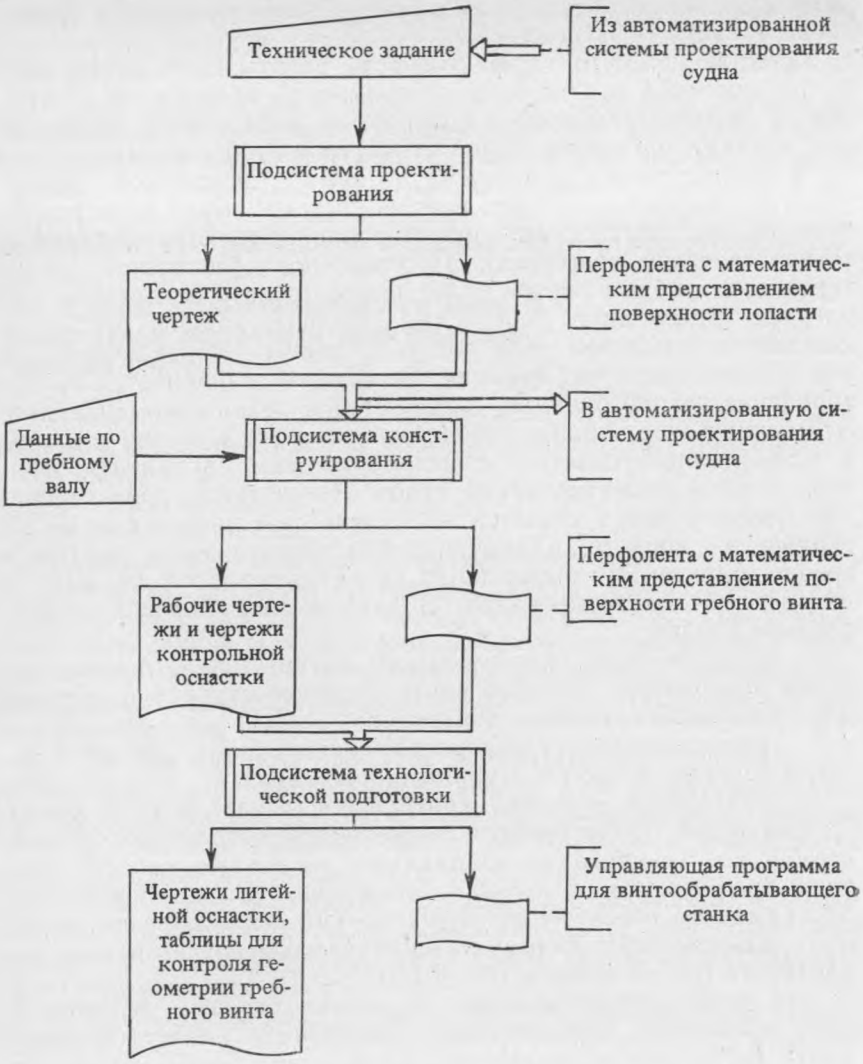


Рис. 7.1. Блок-схема единой сквозной автоматизированной системы технической подготовки производства гребных винтов.

стемы конструирования, составляют исходную информацию для работы подсистемы технологической подготовки. С помощью этой подсистемы изготавливается вся технологическая документация, необходимая для производства гребного винта.

Наиболее трудоемким и сложным этапом этой работы является расчет управляющих программ для обработки гребных винтов на специальных фрезерных многокоординатных станках. Кроме того, в процессе технологической подготовки выполняются:

— расчеты и построение чертежей литейной оснастки;

— расчеты данных, используемых при контроле геометрии изготовленного гребного винта (включая управляющие программы для обмерочных станков с ЧПУ, если таковые имеются).

Все вышеуказанные расчеты выполняются с использованием поэлементного математического представления поверхности гребного винта. Вместе с тем, как уже указывалось в § 1.2, для расчетов программ управления обрабатывающими станками удобнее применять другую форму представления, основанную на непосредственной аппроксимации параметрических уравнений поверхностей гребного винта. Переход к другой форме представления осуществляется специальной программой в два этапа. Сначала по исходному поэлементному представлению рассчитывается стандартного вида таблица координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ точек поверхности гребного винта, а затем по этой таблице строятся интерполяционные бикубические сплайны. Такая процедура исключает необходимость «доработки» или сглаживания приведенных на чертеже данных при подготовке управляющих программ.

Рассмотрев вкратце процесс технической подготовки производства гребных винтов, укажем основные преимущества, которые дает использование в этом процессе сквозной автоматизированной системы:

— сокращается цикл и уменьшается трудоемкость технической подготовки производства;

— повышается качество проектирования гребных винтов за счет использования наиболее совершенных методов и возможностей вариантного анализа;

— реализуется быстрое внедрение достижений науки в практику проектирования;

— обеспечивается возможность автоматизации самого производства гребных винтов на базе программно-управляемого оборудования.

7.2. Программное обеспечение проектирования гребных винтов

Здесь, несколько расширяя использовавшееся в предыдущих главах определение, мы будем под проектированием гребного винта понимать совокупность работ, в результате которых

определяется геометрия лопастей гребного винта, подлежащего изготовлению и установке на судно.

В автоматизированной системе основные этапы проектирования выполняются с помощью взаимосвязанных комплексов программ. Во многих случаях комплексы программ, относящиеся к тем или иным этапам проектирования, могут использоваться и самостоятельно, т. е. вне общей системы. Это обстоятельство, наряду с большим объемом и сложностью структуры, позволяет с полным основанием говорить о взаимодействующих системах программ, обеспечивающих автоматизированное проектирование.

Таких систем (являющихся на самом деле подсистемами по отношению к основной системе, описанной в предыдущем параграфе), можно выделить шесть:

С1. Программное обеспечение (ПО) расчетов ходкости.

С2. ПО проектировочного расчета.

С3. ПО математического представления поверхности лопастей.

С4. ПО поверочных расчетов.

С5. ПО конструкторско-технологической подготовки производства моделей гребных винтов.

С6. ПО испытаний моделей гребных винтов в кавитационных трубах.

Далее при ссылках на эти системы будет использоваться обозначение ПО Cn ($n = 1, 2, \ldots, 6$).

В подсистеме проектирования целесообразно организовать трехуровневое хранение данных:

— базы данных;

— банк постоянных данных;

— архив.

Каждая база данных содержит информацию, относящуюся к одному проекту гребного винта. В базу данных заносятся:

— данные и требования технического задания на проектирование гребного винта;

— результаты работы программных модулей, которые могут быть использованы при продолжении процесса проектирования.

По завершении проектирования гребного винта соответствующая этому проекту база данных разрушается.

В банк постоянных данных включаются:

— библиотека диаграмм серийных испытаний моделей гребных винтов в виде массивов коэффициентов уравнений регрессии;

— массивы коэффициентов аппроксимаций различного рода поправок или зависимостей, полученных на основе систематических расчетов или экспериментов и используемых в процессе проектирования гребного винта (например, поправок Моргана);

— нормативные данные, используемые в процессе проектирования (например, требования классификационных обществ к прочности лопастей).

В архиве подсистемы проектирования сохраняются результаты проектирования гребных винтов и испытаний их моделей. В частности, целесообразно хранить в архиве математическое представление поверхности лопасти гребного винта и аппроксимации экспериментальных зависимостей, полученных при испытаниях модели этого винта в кавитационной трубе. Создание такого архива позволяет оперативно осуществлять сравнительную оценку качеств спроектированного гребного винта. В некоторых случаях с помощью архива можно подобрать испытанный ранее близкий по геометрическим параметрам гребной винт и обойтись без модельных испытаний.

На рис. 7.2 представлена структурная схема процесса проектирования гребного винта, осуществляемая подсистемой проектирования. Ниже даются комментарии к этой схеме. Нумерация разделов комментариев соответствует номерам элементов схемы.

1. Техническое задание состоит из двух разделов: требования и исходные данные. Одно (и только одно) из требований может быть сформулировано в виде цели (обеспечение максимума или минимума целевой функции). Все остальные требования являются ограничениями. В алгоритме процесса должна быть предусмотрена возможность выявления неосуществимых и противоречивых требований. При этом следует отличать требования, невыполнимые в принципе, от требований, которые невозможно выполнить одной лишь вариацией геометрии гребного винта. Например, эксплуатационные характеристики гребного винта существенно зависят от степени неоднородности поля скоростей. В связи с этим иногда не удается выполнить требования к характеристикам виброактивности гребного винта только за счет рационального выбора его формы. В таких случаях принимаются конструктивные меры по уменьшению неоднородности попутного потока и изменению жесткости элементов корпуса и валопровода.

2. Для судов с дизельной энергетической установкой расчетную частоту вращения гребного винта увеличивают по отношению к номинальной частоте вращения дизеля. Назначение расчетного режима осуществляется вручную.

3, 6. Эти расчеты, а также расчеты, обозначенные на схеме номером 38, выполняются с помощью ПО С1. Основной модуль этой системы, обеспечивающий вычисление левых частей уравнений ходкости, может быть непосредственно использован в системе автоматизированного проектирования судов при оптимизации основных размерений судна и выборе его силовой установки, количества движителей и т. п.

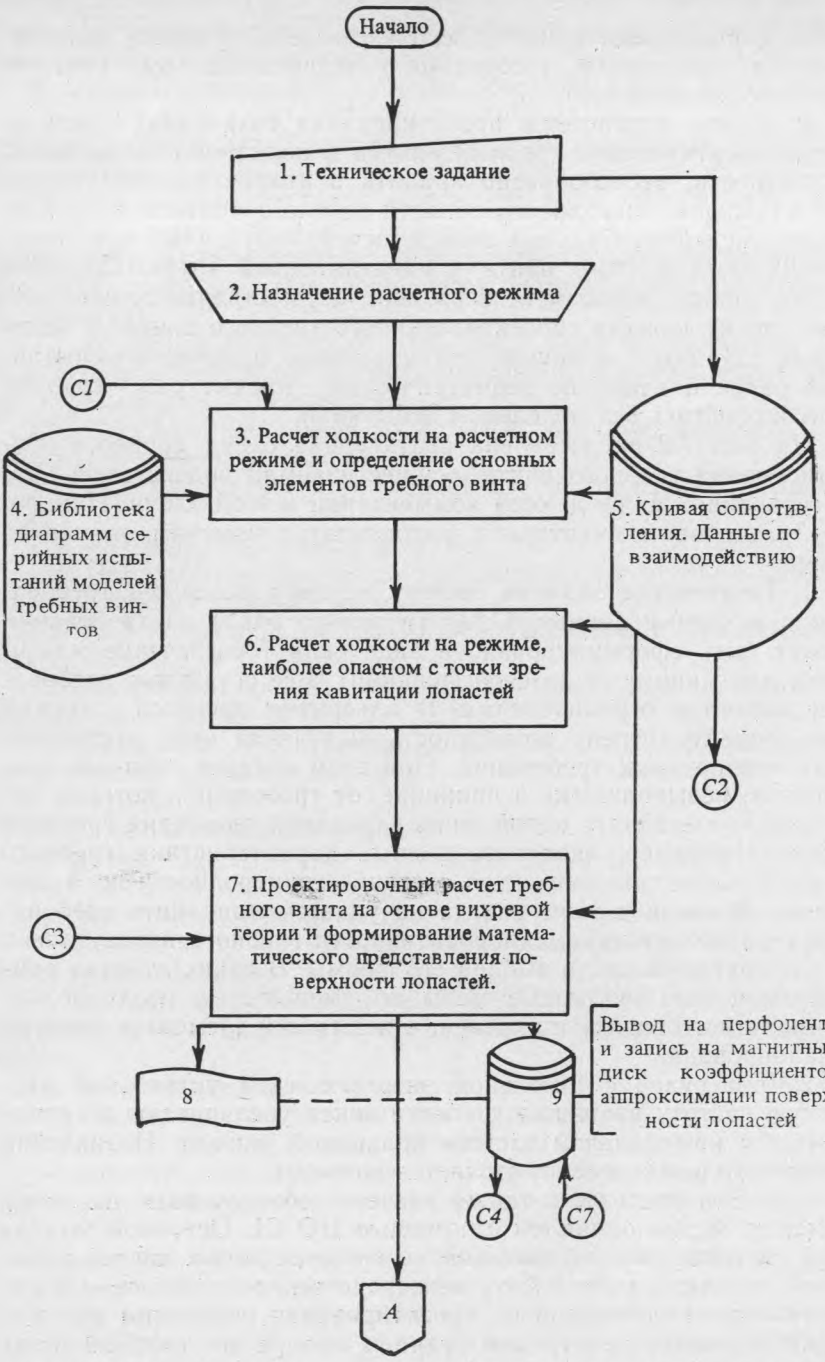


Рис. 7.2. Блок-схема автоматизированного процесса проектирования гребного винта.

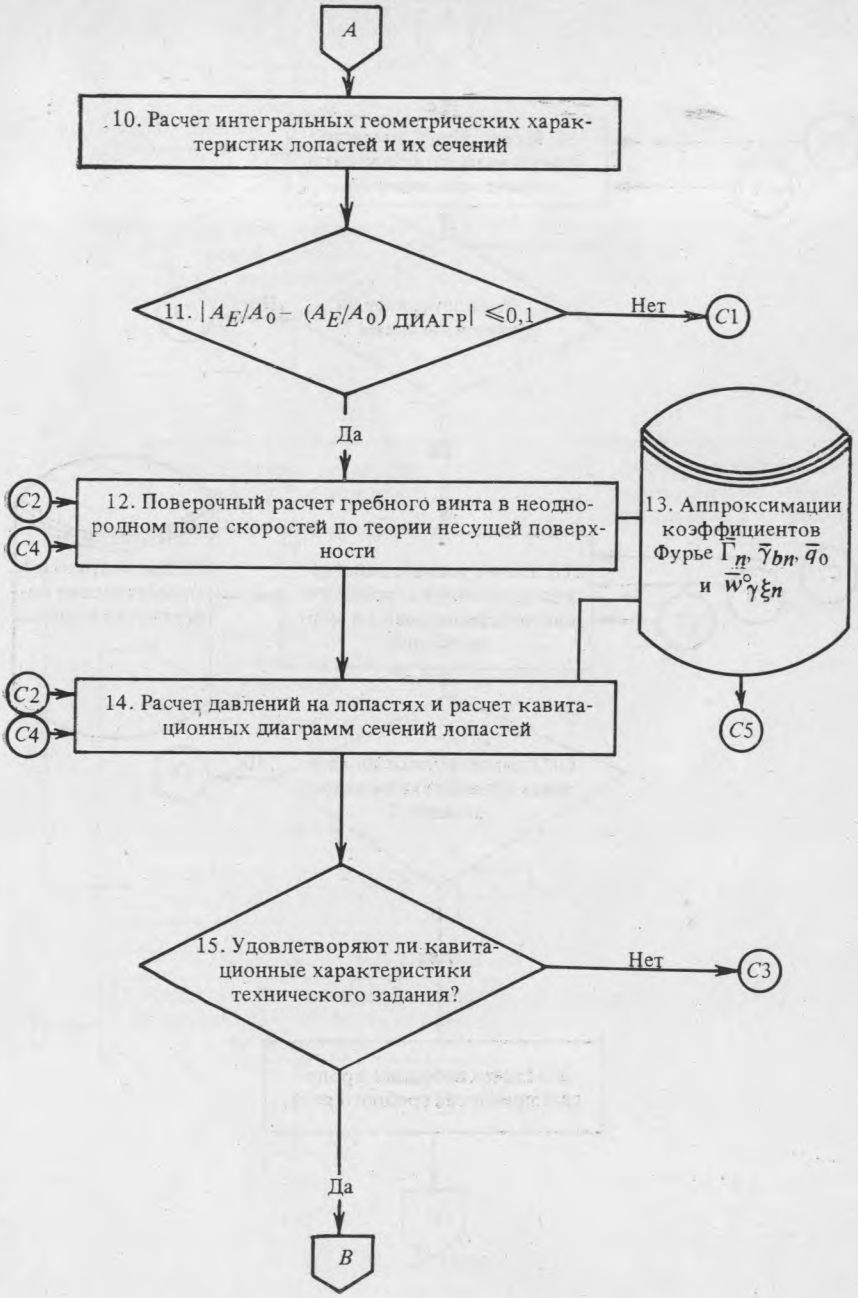


Рис. 7.2. (продолжение)

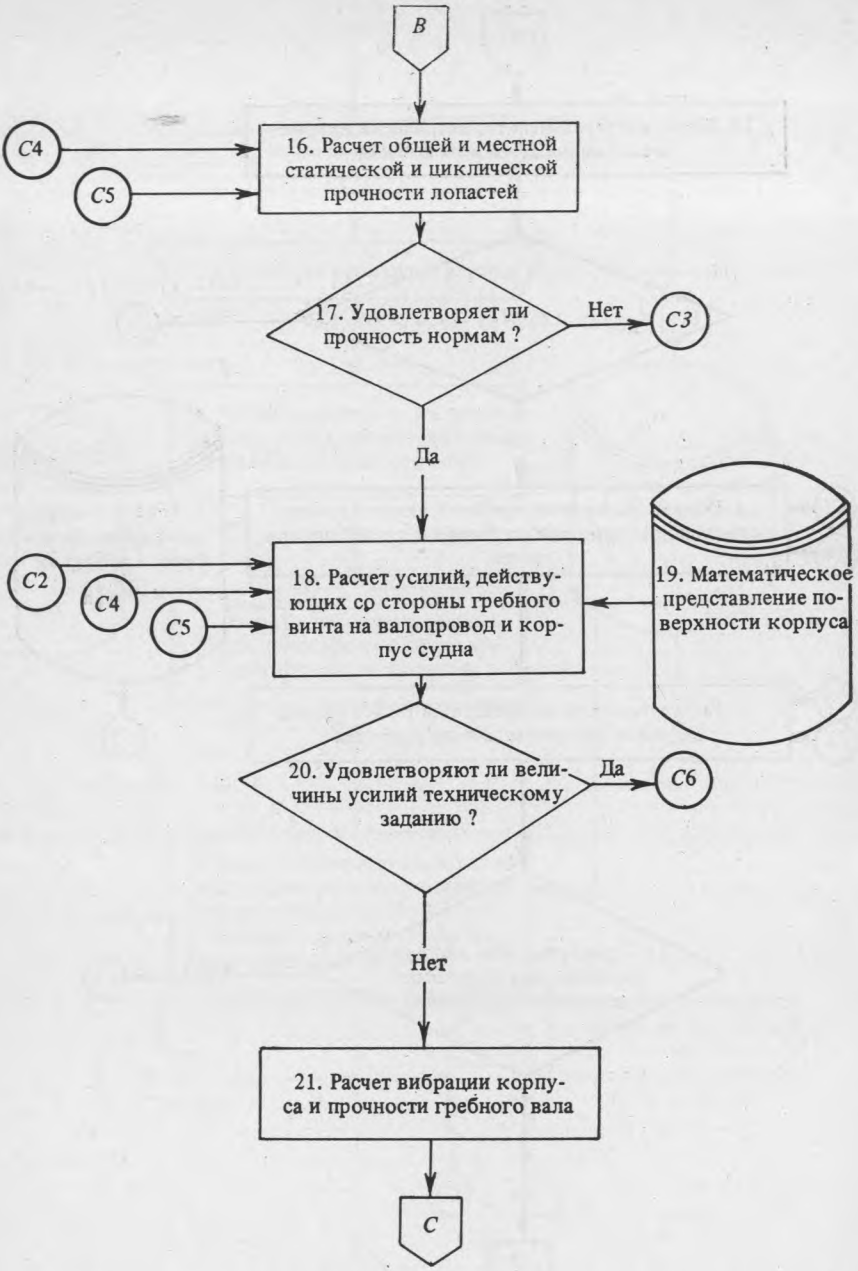


Рис. 7.2. (продолжение)



Рис. 7.2 (продолжение).

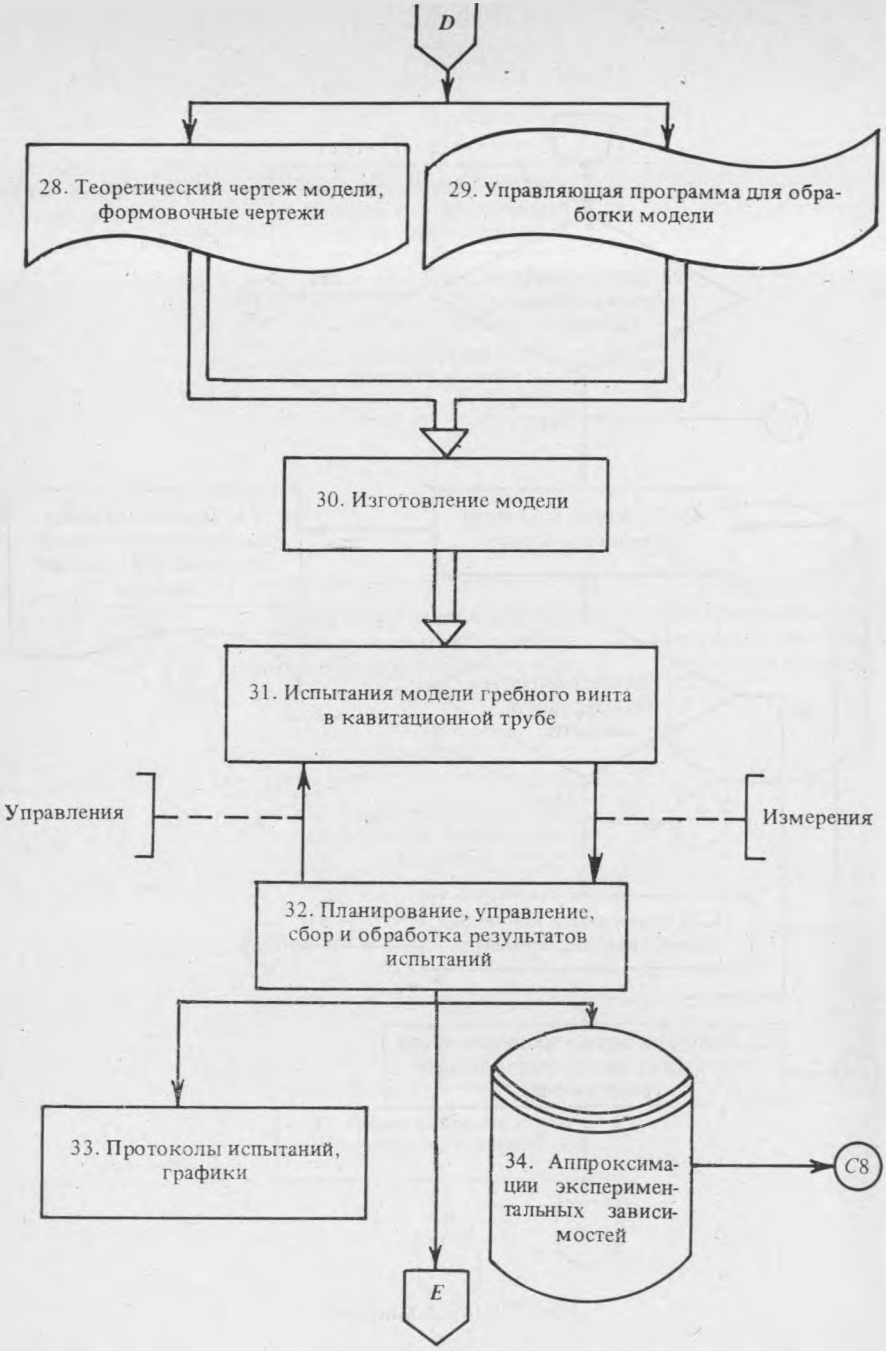


Рис. 7.2. (продолжение)

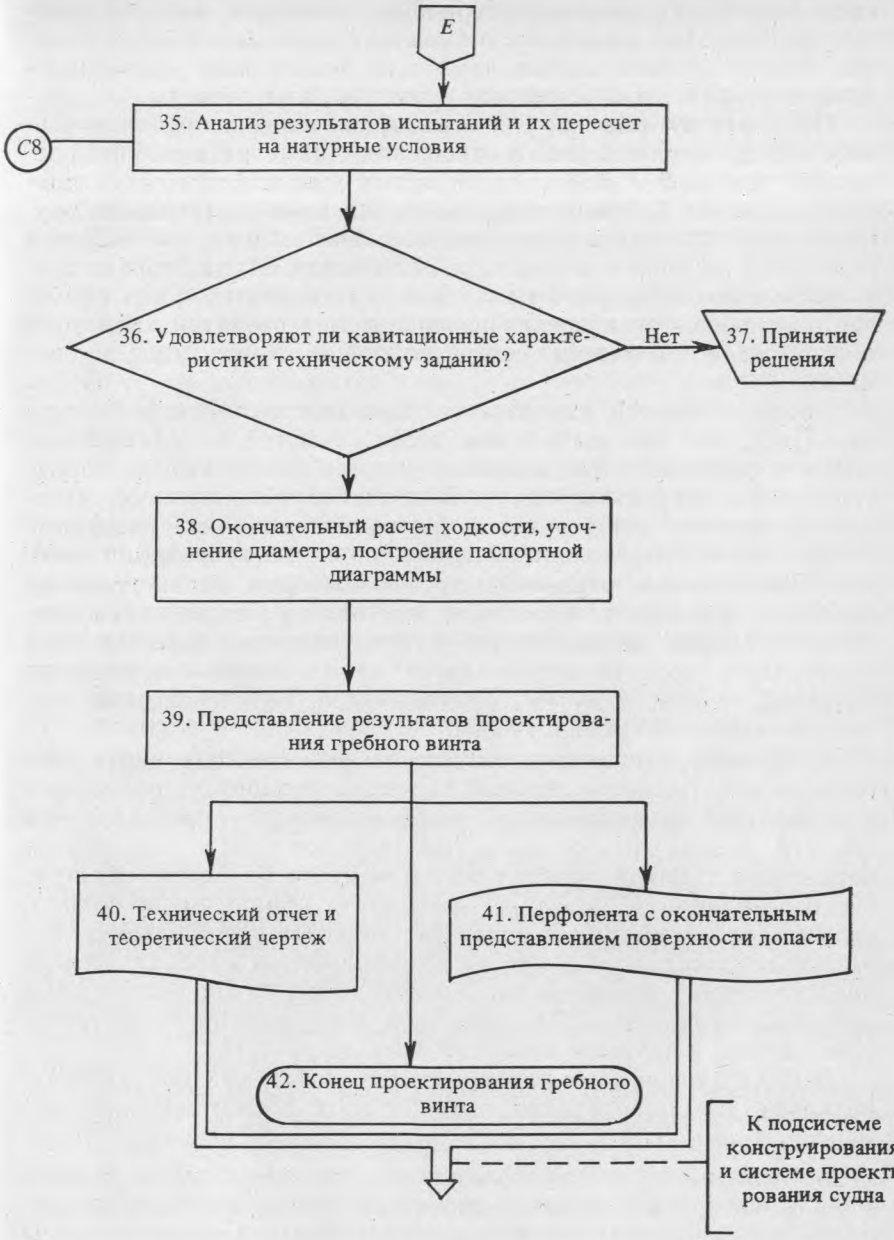


Рис. 7.2 (продолжение).

Эффективность работы ПО С1 существенно зависит от полноты библиотеки диаграмм серийных испытаний моделей гребных винтов. При наличии в библиотеке нескольких серий гребных винтов, отличающихся теми или иными конструктивными особенностями, можно провести сравнительные расчеты.

По существу, расчеты 3 и 6 выполняются для предварительного определения дискового отношения, диаметра и выбора расчетных значений J и K_T, для которых выполняется проектировочный расчет 7. Чаще всего выбор дискового отношения осуществляют так, чтобы наверняка обеспечить отсутствие влияния кавитации на упор и момент гребного винта. Из-за этого и приходится выполнять расчеты 6. Для транспортных судов наиболее опасным с точки зрения возникновения развитой кавитации обычно является режим, соответствующий ходу судна в балласте.

Число лопастей назначается проектантом. Может, однако, оказаться, что при выбранном числе лопастей не удается выполнить требования технического задания (например, по характеристикам виброактивности). В таких случаях процесс, начиная с элемента 3, повторяется при измененном числе лопастей.

В ряде исключительных случаев при проектировании гребного винта можно ограничиться его выбором по диаграммам серийных испытаний. При этом изменяется содержание элемента 7 схемы: формирование математического представления поверхности лопасти производится не на основе расчетов по вихревой теории, а путем аппроксимации геометрических элементов серийного гребного винта.

7. Процедура проектировочного расчета гребного винта описана в гл. 3. Проектировочный расчет целесообразно совмещать с процедурой формирования математического представления лопасти. В программах это осуществляется просто: как только определена таблица ординат того или иного базового геометрического элемента, следует выполнить обращение к подпрограмме аппроксимации и результат записать с помощью специальной подпрограммы в массив коэффициентов математического представления поверхности лопасти. При такой организации программ отпадает необходимость в интерполяции геометрических данных в процессе проектировочного расчета.

В ПО С2 входит два основных модуля. Первый модуль предназначен для определения всех базовых геометрических элементов, кроме H/D и $\bar{f}_M$. Этот же модуль обеспечивает вычисление величин λ_I и $\overline{\Gamma}$, используемых вторым модулем. Второй модуль, алгоритм которого использует теорию несущей поверхности, предназначен для определения двух элементов — H/D и $\bar{f}_M$.

По завершении расчетов 7 полный набор коэффициентов аппроксимации базовых геометрических элементов записывается

в базу данных (элемент 9 схемы). Одновременно может быть выведена перфолента с этой же информацией.

10. Расчет интегральных геометрических элементов лопасти (дискового отношения, объема лопастей, площадей сечений и др.) осуществляется на основе математического представления поверхности лопасти по формулам, приведенным в § 1.1.

11. Может в принципе оказаться так, что дисковое отношение, определенное расчетами 7 и 10, существенно отличается от дискового отношения, определенного расчетами 3 и 6. В этом случае необходимо заново провести расчеты ходкости, приняв величину A_E/A_0 из расчета 10.

12—22. Методы, на которых могут быть основаны алгоритмы ПО С4, изложены в гл. 4, 5 и 6. Целью расчетов является проверка удовлетворения требованиям технического задания. Естественно, что выполняются лишь те расчеты, которые определяют регламентируемые техническим заданием характеристики гребного винта.

Исходными данными для расчетов, выполняемых с помощью ПО С4, являются математическое представление поверхности лопастей и поле скоростей в месте расположения гребного винта. Кроме того, для определения сил, действующих со стороны гребного винта на корпус судна (и его выступающие части), а также для расчетной оценки искажения поля скоростей при качке судна необходимо математическое представление поверхности корпуса.

Поле скоростей, определяемое экспериментально, вводится в систему в виде двумерных таблиц, составляющих $\overline{V}_{x_0}$, $\overline{V}_{r_0}$ и $\overline{V}_{\theta_0}$. Для удобства использования данных по полю скоростей целесообразно предварительно аппроксимировать зависимости $\overline{V}_{x_0}(\bar{r}, \theta_0)$, $\overline{V}_{r_0}(\bar{r}, \theta_0)$, $\overline{V}_{\theta_0}(\bar{r}, \theta_0)$ на прямоугольнике $[\bar{r}_H, 1]\times[0, 2\pi]$ с помощью прямых произведений сплайнов переменной $\bar{r}$ и рядов Фурье переменной θ_0. Этой цели служит специальная вспомогательная программа, использующая модули ПО С3.

В описываемой схеме не выделены поверочные расчеты, учитывающие влияние развитой кавитации и эксплуатационных условий (маневрирования и качки судна). Вместе с тем такие расчеты выполняются по отдельным программам, использующим менее точные методы.

Величины усилий, передающихся от гребного винта корпусу судна через воду и гребной вал, как правило, непосредственно не нормируются. С тем чтобы определить пригодность спроектированного гребного винта, необходимо выполнить расчеты вибрации и прочности корпусных конструкций и элементов валопровода. Эти расчеты, однако, выполняются вне подсистемы проектирования гребного винта.

Если расчетная проверка показывает, что какие-либо из проверявшихся характеристик не удовлетворяют требованиям тех-

нического задания или действующим нормам, то приходится заново выполнять проектировочный расчет с новыми значениями исходных данных («запасов» прочности и давлений, формы контура лопасти и т. д.). При необходимости изменения числа лопастей, как уже указывалось, заново выполняются и расчеты ходкости.

23—26. Проектант гребного винта должен визуально оценить результаты проектирования. Поэтому, несмотря на то что методы аппроксимации геометрических элементов, изложенные в § 1.2, практически гарантируют «хорошее» качество геометрии гребного винта, на чертежный автомат выводятся графики базовых геометрических элементов и проекции лопасти. Кроме того, могут быть выведены графики производных этих элементов, аксонометрические изображения лопастей, чертежи сечений лопасти в большом масштабе и другие графики, позволяющие проектанту хорошо представить себе результаты работы подсистемы. Если же окажется, что какие-либо геометрические элементы проектанта не удовлетворяют, то выполняется их сглаживание. Программы, осуществляющие графический вывод и сглаживание геометрических элементов, входят в состав ПО С3.

27—30. Конструкторско-технологическая подготовка производства моделей гребных винтов в какой-то степени моделирует аналогичный процесс, выполняющийся при подготовке производства натурного гребного винта. Специфика подготовки производства моделей заключается, главным образом, в формовочных чертежах. Для подготовки программ, управляющих фрезерным станком, обрабатывающим модели, может использоваться та же система автоматизированного программирования (только со своим постпроцессором), что и для станков, обрабатывающих натурные гребные винты. На рис. 7.3, в качестве примера работы ПО С5 приведен теоретический чертеж модели гребного винта.

31—36. ПО С6 должно включать программы:

— планирования (выбора режимов) испытаний моделей гребного винта;

— управления электроприводами кавитационной трубы для установки и поддержания заданного режима;

— сбора и экспресс-обработки результатов измерений;

— окончательной отработки эксперимента, включающей регрессионный анализ результатов испытаний;

— пополнения архива экспериментальных данных.

По завершении испытаний модели гребного винта осуществляется анализ результатов испытаний и проверка удовлетворения требованиям технического задания. Если результаты испытаний модели (с учетом масштабного эффекта) дали отрицательный результат, то проектант гребного винта должен принять решение относительно продолжения процесса проектирования. Как правило, трудности возникают с удовлетворением требова-

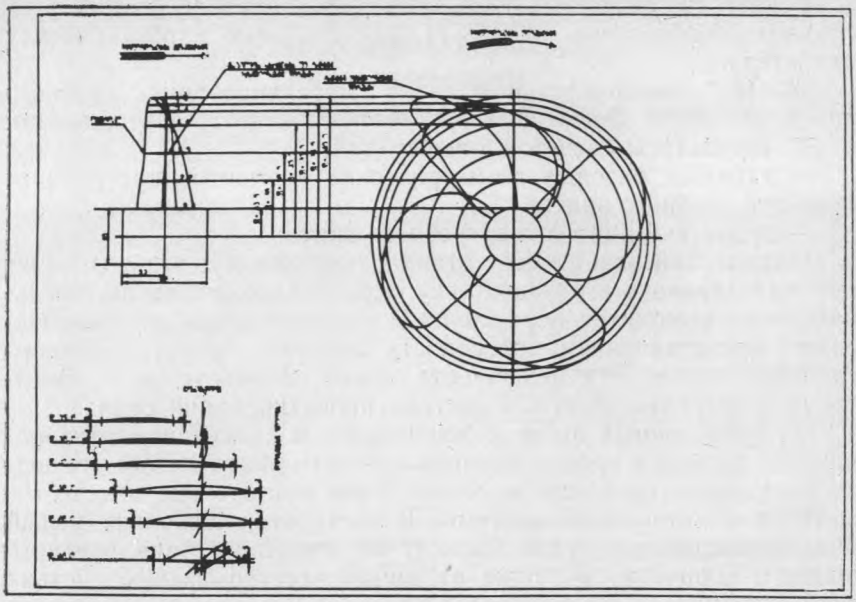


Рис. 7.3. Теоретический чертеж модели гребного винта, выполненный чертежным автоматом.

ниям, зависящим от кавитационных характеристик гребного винта. Проектант на основе анализа результатов испытаний модели может принять решение изменить те или иные геометрические элементы лопасти (например, шаг и кривизну) или повторить процесс проектирования с новыми исходными данными, или, наконец, принять те конструктивные меры, которые, по его мнению, позволят выполнить требования технического задания. Естественно, что при существенных изменениях геометрии лопасти гребного винта, принятых «конструктивно», необходимо вновь провести расчетную и экспериментальную проверку удовлетворения требованиям технического задания.

Необходимо указать также, что изготовление и испытания модели гребного винта осуществляются лишь в тех случаях, когда есть опасность возникновения развитой кавитации лопастей или когда к характеристикам гребного винта, зависящим от кавитационных качеств гребного винта, предъявляются особые требования.

38. Окончательный расчет ходкости выполняется с помощью ПО С1. Для этого в библиотеку диаграмм серийных испытаний записываются коэффициенты аппроксимации экспериментальных кривых действия, пересчитанных на натурные условия. С помощью этого расчета определяется окончательная величина диаметра гребного винта.

В качестве исходных данных для расчета паспортной диаграммы необходимо задать ограничительную характеристику двигателя.

39—42. Заключительный этап проектирования гребного винта состоит в подготовке технического отчета, содержащего:

— результаты расчетов и испытаний;

— таблицы базовых геометрических элементов поверхности лопастей гребного винта;

— теоретический чертеж гребного винта.

Технический отчет имеет стандартную форму, что позволяет автоматизировать его подготовку. Кроме того, на заключительном этапе выводится перфолента с окончательным математическим представлением поверхности лопасти спроектированного гребного винта. Эта перфолента далее используется в подсистеме конструирования и в системе проектирования судна.

Из приведенных выше комментариев к схеме автоматизированного процесса проектирования гребного винта видно, что подсистема проектирования не может быть реализована в качестве полностью автономной системы. В частности, поскольку целый ряд характеристик судна зависит от взаимодействия гребного винта с корпусом, а также от динамического взаимодействия гребного винта с главной энергетической установкой, во многих случаях лишь одновременный выбор конструкций гребного винта, корпуса и параметров судового двигателя может дать необходимый эффект. Для решения этих задач описанная выше система может быть дополнена соответствующими модулями (расчет характеристик взаимодействия гребного винта с корпусом, реверс судна и др.).

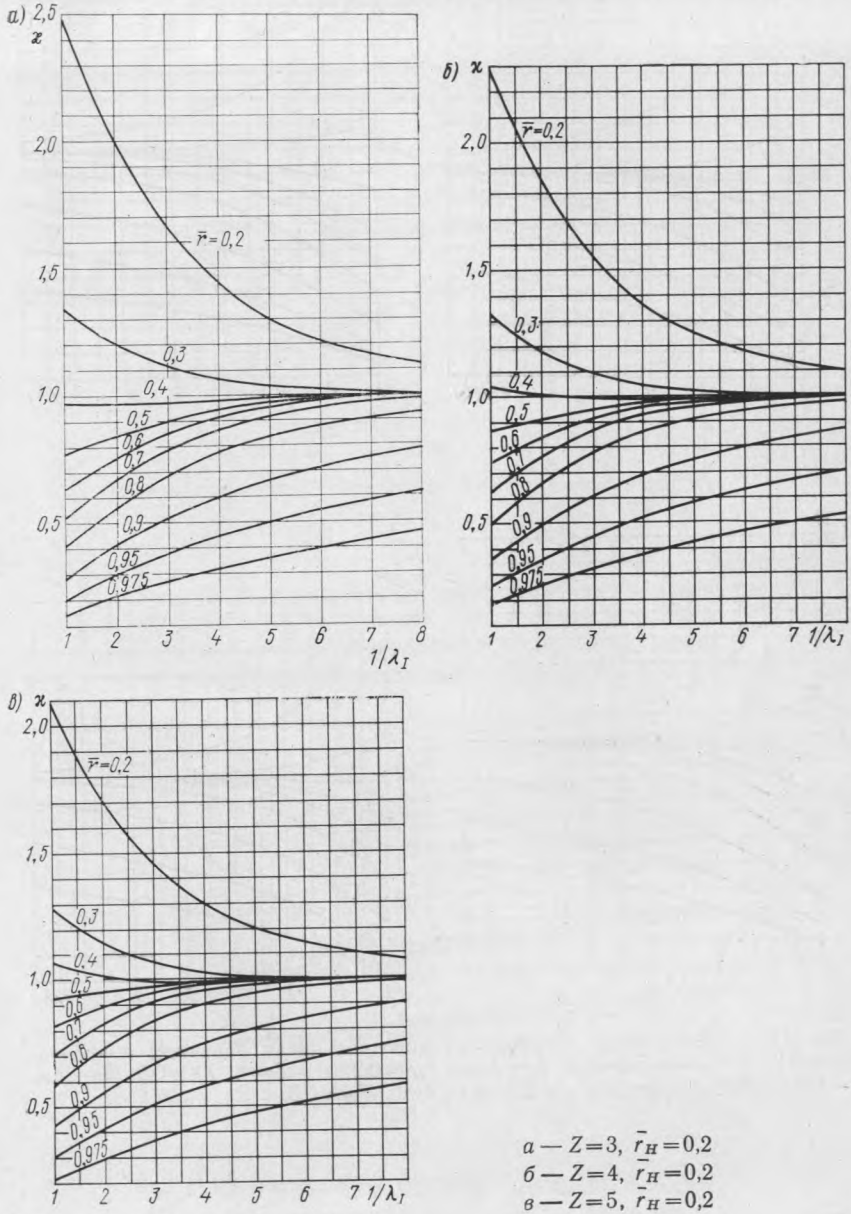
При описании программных средств мы не касались программ, управляющих процессом проектирования. Вместе с тем эти программы составляют существенную и весьма сложную часть программного обеспечения.

Эффективность автоматизированного проектирования гребного винта во многом определяется характеристиками используемых аппаратных средств. В частности, без средств графического отображения результатов расчетов (чертежных автоматов и графических дисплеев), средств долговременного хранения больших объемов информации и других современных средств вычислительной техники организация автоматизированного проектирования гребного винта невозможна.

В заключение отметим следующее. Роль расчетов в процессе проектирования гребного винта по мере их совершенствования возрастает. Поэтому эффективность проектируемых гребных винтов, являющихся одной из самых сложных и ответственных конструкций судна, все в большей степени определяется успехами в развитии методов и программ их расчета. Авторы надеются, что данная книга будет в какой-то степени способствовать прогрессу в этой важной для судостроения области.

Приложение 1

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ



а — $Z=3$, $\bar{r}_н=0,2$
б — $Z=4$, $\bar{r}_н=0,2$
в — $Z=5$, $\bar{r}_н=0,2$

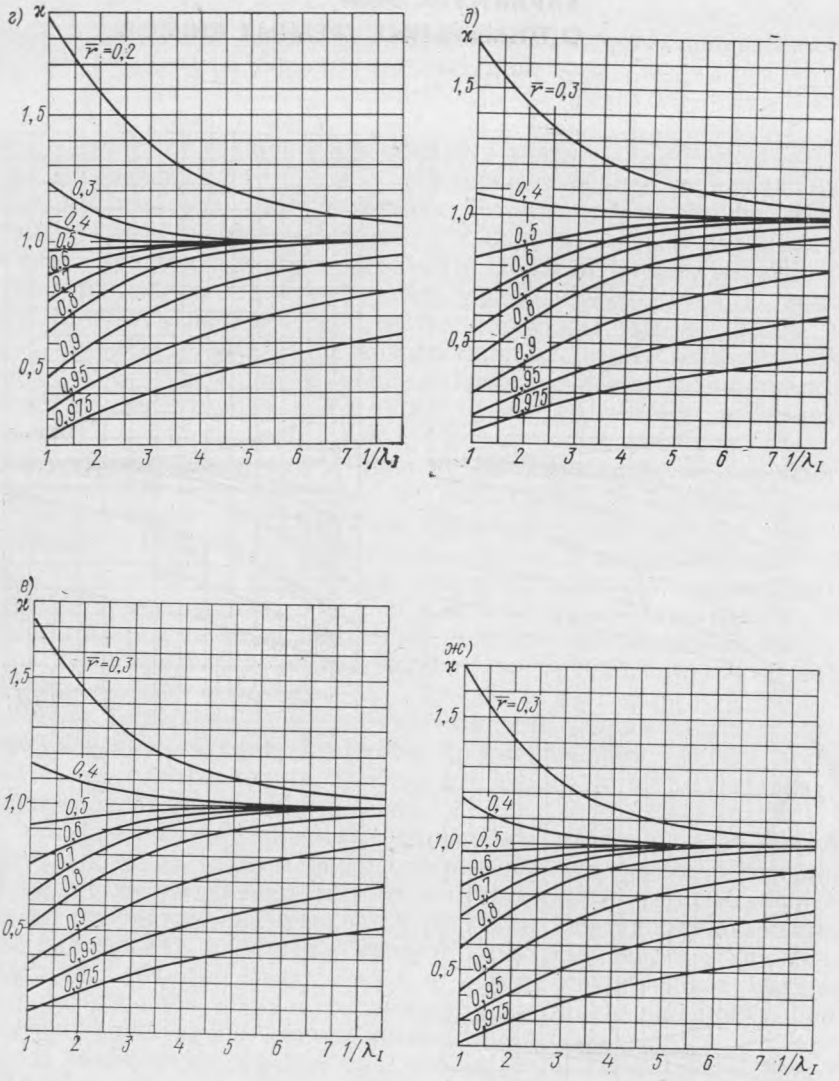


Рис. П.1.1. Диаграммы поправки на конечное число лопастей: *а* — $Z=3$, $\bar{r}_н=0{,}2$; *б* — $Z=4$, $\bar{r}_н=0{,}2$; *в* — $Z=5$, $\bar{r}_н=0{,}2$; *г* — $Z=6$; $\bar{r}_н=0{,}2$; *д* — $Z=3$, $\bar{r}_н=0{,}3$; *е* — $Z=4$, $\bar{r}_н=0{,}3$; *ж* — $Z=5$, $\bar{r}_н=0{,}3$.

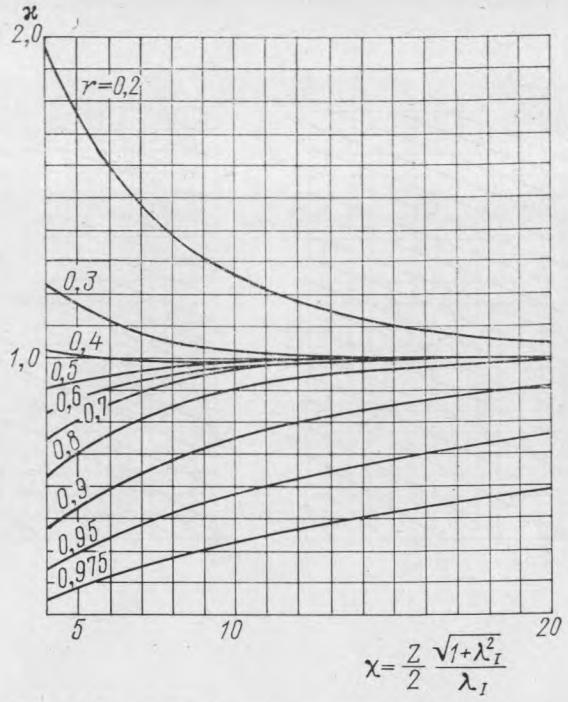


Рис. П.1.2. Универсальная диаграмма для определения поправки на конечное число лопастей ($Z \geqslant 2$; $\lambda_I \leqslant 1$; $\bar{r}_H = 0{,}2$). При $\bar{r}_H > 0{,}2$ диаграммой можно пользоваться для относительных радиусов $\bar{r} \geqslant \bar{r}_H + 0{,}3$.

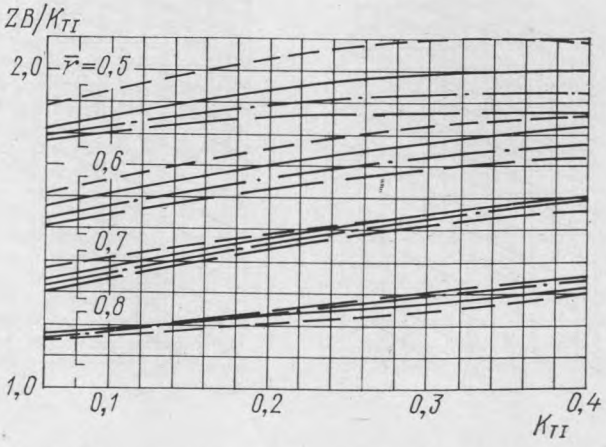
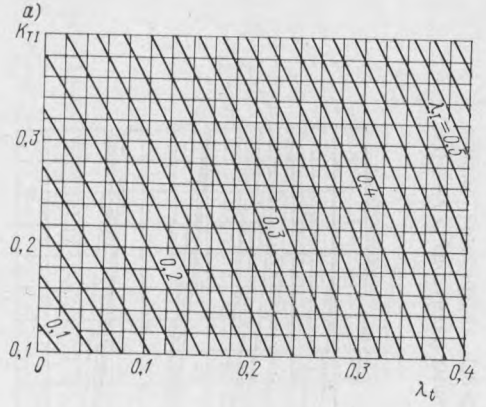
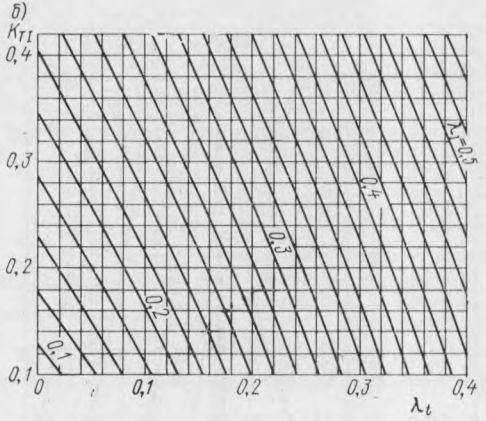
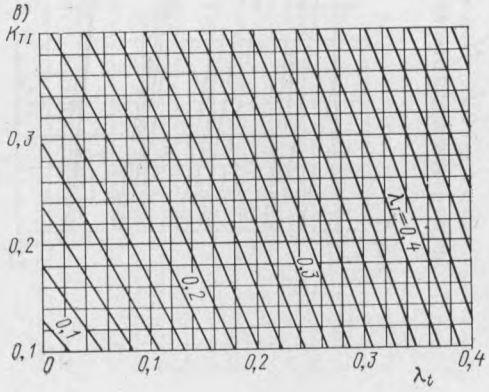
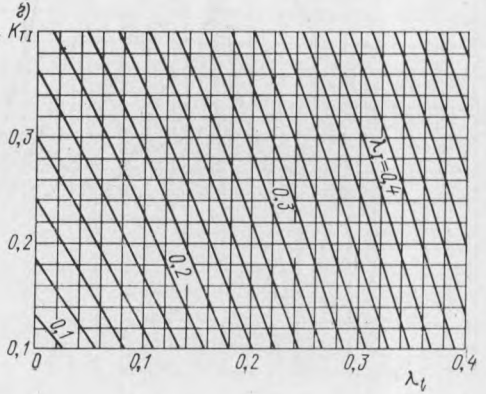


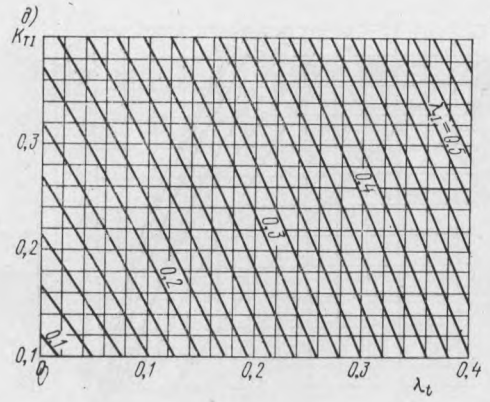
Рис. П.1.3. Зависимость функции ZB/K_{TI} от Z, K_{TI} и $\bar{r}$.
– – – – $Z=3$; ——— $Z=4$; – · – – $Z=5$; — — — $Z=6$.

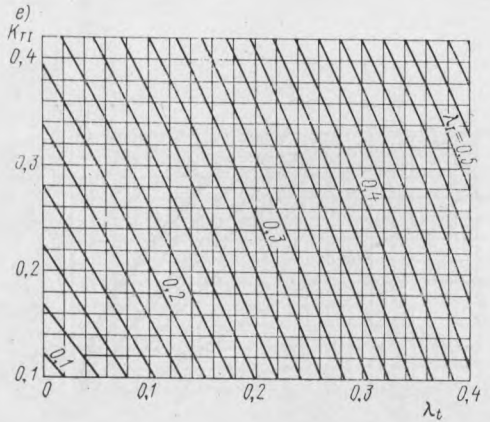

а)
K_{TI}
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
λ_t
λ_1=0,5
0,4
0,3
0,2
0,1


б)
K_{TI}
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
λ_t
λ_1=0,5
0,4
0,3
0,2
0,1


в)
K_{TI}
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
λ_t
λ_1=0,4
0,3
0,2
0,1


г)
K_{TI}
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
λ_t
λ_1=0,4
0,3
0,2
0,1





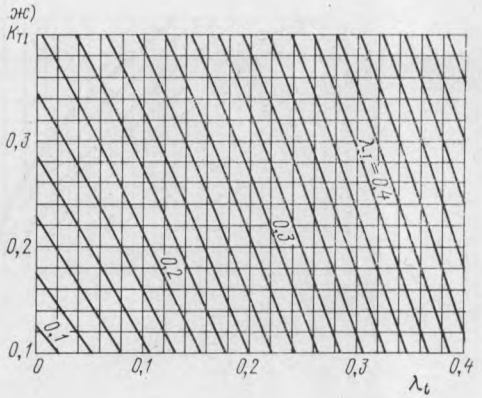


Рис. П.1.4. Диаграммы K_{TI}—λ_I—λ_t для оптимальных гребных винтов: *а* — $Z=3$, $\bar{r}_H=0{,}2$; *б* — $Z=4$, $\bar{r}_H=0{,}2$; *в* — $Z=5$, $\bar{r}_H=0{,}2$; *г* — $Z=6$, $\bar{r}_H=0{,}2$; *д* — $Z=3$, $\bar{r}_H=0{,}3$; *е* — $Z=4$, $\bar{r}_H=0{,}3$; *ж* — $Z=5$, $\bar{r}_H=0{,}3$.

Приложение 2

ПОПРАВКИ НА НЕСУЩУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ [140]

Элементы исследованных гребных винтов: $Z=4, 5, 6$; $A_E/A_0=0{,}35$ (0,20) 1,15; $\pi\lambda_I=$ $=0{,}4$ (0,4) 2; $\theta_s^*=0$, 7, 14, 21°; $\bar{r}_H=0{,}20$ (табл. П.2.1).

Распределение нагрузки типа NACA $a=0{,}8$; распределение толщины — NACA-66 mod вдоль хорды; вдоль радиуса: $e/D=(e_0/D-$ $-0{,}003)(1-\bar{r})+0{,}003$ (рис. П.2.1—П.2.3)

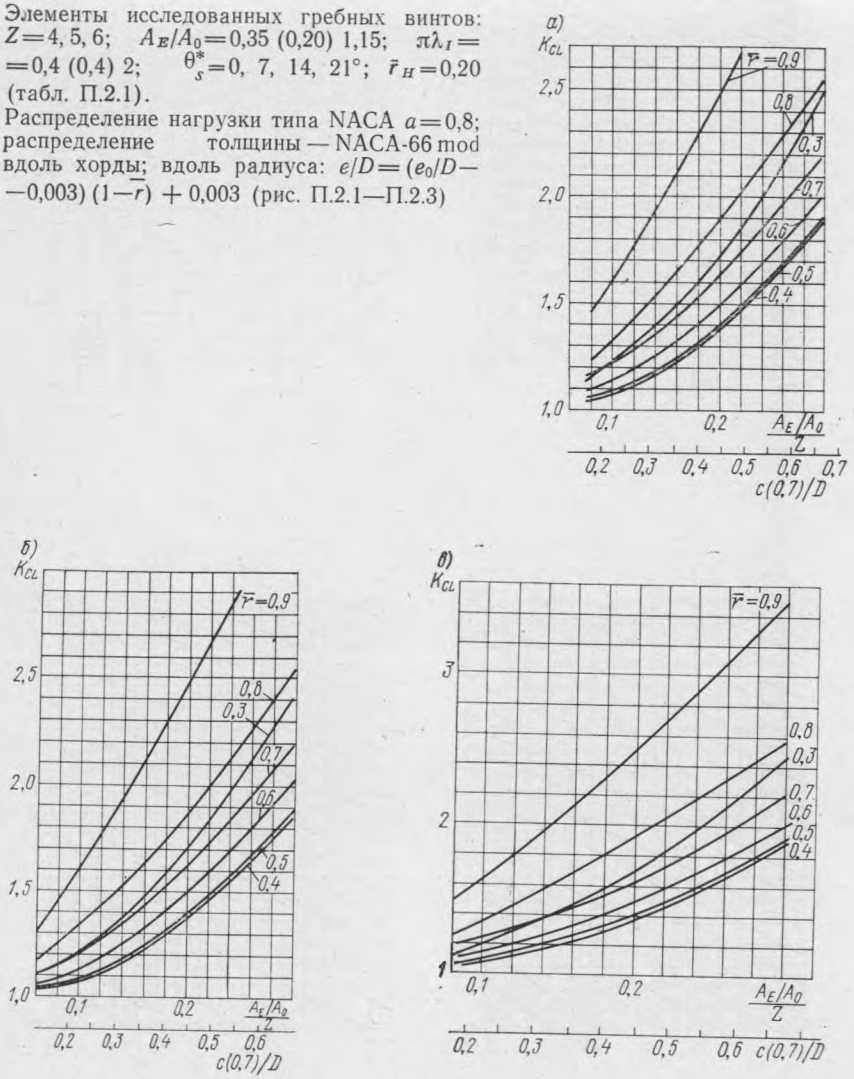


Рис. П.2.1. Поправка K_{CL} на несущую поверхность: *а* — при $\theta_S^*=0°$; $\pi\lambda_I=$ $=1, 2$; *б* — при $\theta_S^*=7°$, $\pi\lambda_I=1{,}2$; *в* — при $\theta_S^*=14°$, $\pi\lambda_I=1{,}2$.

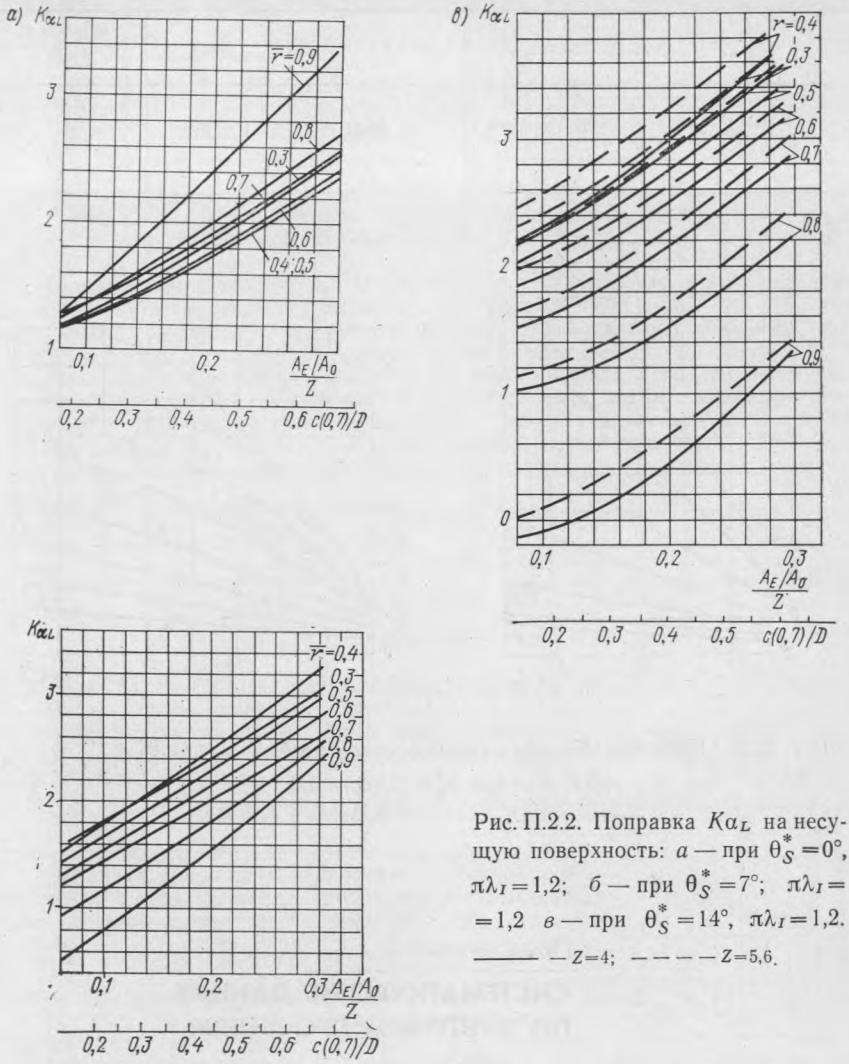


Рис. П.2.2. Поправка $K\alpha_L$ на несущую поверхность: *а* — при $\theta_S^*=0°$, $\pi\lambda_I=1{,}2$; *б* — при $\theta_S^*=7°$; $\pi\lambda_I=1{,}2$ *в* — при $\theta_S^*=14°$, $\pi\lambda_I=1{,}2$. ——— — Z=4; — — — — Z=5,6.

Таблица П.2.1. **Распределение ширины лопасти гребных винтов серии, рассчитанной Морганом и др.**

$\bar{r}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\frac{Zc/D}{A_E/A_0}$	1,6338	1,8082	1,9648	2,0967	2,1926	2,2320

$\bar{r}$	0,8	0,9	0,95	1
$\frac{Zc/D}{A_E/A_0}$	2,1719	1,8931	1,5362	0

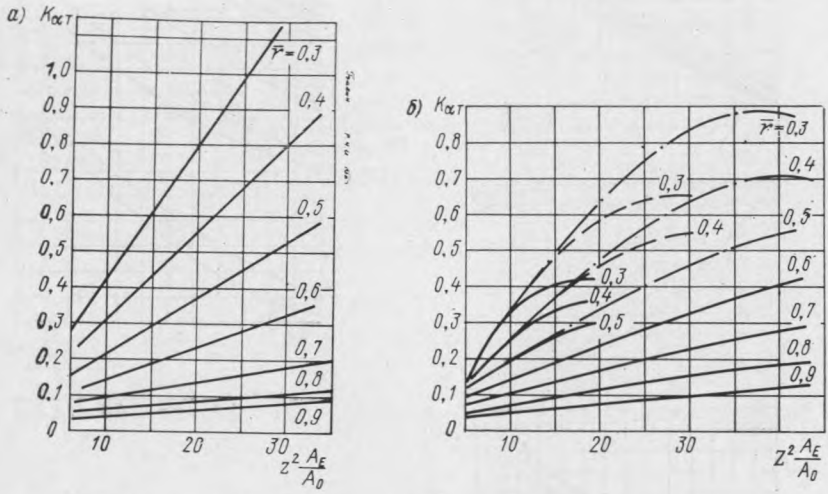


Рис. П.2.3. Поправка $K\alpha_T$ на несущую поверхность: *а* — при $\theta_S^*=7°$, $\pi\lambda_I=0{,}8$; *б* — при $\theta_S^*=7°$, $\pi\lambda_I=1{,}2$.

——— — $Z=4$; — — — — $Z=5$; — · — · — $Z=6$.

Приложение 3

СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ПО ВИНТОВЫМ ПРОФИЛЯМ

Ординаты засасывающей η^+ и нагнетающей η^- поверхностей профиля вычисляют по формулам

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\eta}^+(\tilde{\xi}) &= 2\delta_c F_C(\tilde{\xi}) + \delta F_T(\tilde{\xi});\\ \tilde{\eta}^-(\tilde{\xi}) &= 2\delta_c F_C(\tilde{\xi}) - \delta F_T(\tilde{\xi}),\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.1})$$

где безразмерные абсцисса $\tilde{\xi}$ и ординаты $\tilde{\eta}^+$, $\tilde{\eta}^-$ получены делением размерных величин на $c/2$.

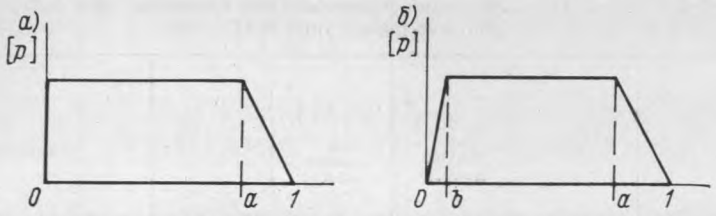


Рис. П.3.1. Распределение нагрузки вдоль хорды профилей со средней линией типа NACA a (*а*), ИК a, b (*б*).

Средняя линия тиха NACA a соответствует распределению нагрузки тонкого плоского профиля, указанному на рис. П.3.1 *а*; типа ИК a, b — на рис. П.3.1 *б*. Функция распределения стрелки прогиба средней линии F_c приведена в табл. П.3.1 для NACA $a=0{,}8$ и ИК $a=0{,}8$; $b=0{,}05$.

Функция распределения толщины F_T для профиля типа NACA-66 приведена в табл. П.3.1 (обозначена F_{T0}). Ввиду того, что у профилей типа NACA-66 толщины около кромок с малой величиной δ ($\delta < 0{,}06$) оказываются недостаточными с точки зрения местной прочности, рекомендуется использовать профили ИК-75 со следующим распределением толщины вдоль хорды:

$$F_T(\tilde{\xi}) = \begin{cases} F_{T0}(\tilde{\xi}), & \delta \geqslant 0{,}06; \quad -1 \leqslant \tilde{\xi} \leqslant 1; \\ F_{T0}(\tilde{\xi}), & \delta < 0{,}06; \quad -0{,}6 \leqslant \tilde{\xi} \leqslant 0{,}8; \\ F_{T1}(\tilde{\xi}, \delta), & \delta < 0{,}06; \quad 0{,}8 \leqslant \tilde{\xi} \leqslant 0{,}975; \\ F_{T2}(\tilde{\xi}, \delta), & \delta < 0{,}06; \quad -0{,}9 \leqslant \tilde{\xi} \leqslant -0{,}6, \end{cases} \qquad (\text{П.2})$$

где $F_{T1}(\tilde{\xi}, \delta)$, $F_{T2}(\tilde{\xi}, \delta)$ графически представлены на рис. П.3.2.

Распределения нагрузки типа NACA a и ИК a, b соответствуют следующей связи между коэффициентом подъемной силы C_L, относительной кривизной δ_c и углом атаки α_I:

$$\delta_c = B_1 C_L; \quad \alpha_I = B_2 C_L, \qquad (\text{П.3})$$

где коэффициенты B_1 и B_2 приведены в табл. П.3.2.

Величина минимального давления на спинке профиля на расчетном (безударном) режиме вычисляется по формуле линейной теории [68, 109]:

$$-\bar{p}_{\min} = (1 + a_1\delta + b_1 C_L)^2 - 1, \qquad (\text{П.4})$$

где a_1 и b_1 приведены в табл. 2.

На рис. П.3.3 и П.3.4 приведены диаграммы для определения минимального давления на расчетном режиме в функции от C_L и δ. На диаграмме

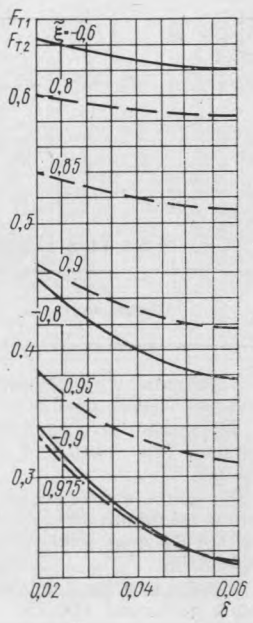


Рис. П.3.2. Зависимость функций распределения толщины F_{T1} и F_{T2} от $\tilde{\xi}$ и δ.
– – – – F_{T1}; ——— F_{T2}.

Таблица П.3.1. **Функции распределения кривизны типа NACA $a=0{,}8$ и ИК $a=0{,}8$; $b=0{,}05$ и толщины типа NACA-66**

$\tilde{x}$	$\frac{1-\tilde{x}}{2}$	$F_C(\tilde{x})$ NACA $a=0{,}8$	$F_C(\tilde{x})$ ИК $a=0{,}8$; $b=0{,}05$	$F_{T_0}(\tilde{x})$	Примечание
1	0	0	0	0	Передняя кромка
0,975	0,0125	0,0910	0,0686	0,231	
0,95	0,025	0,159	0,142	0,306	
0,9	0,05	0,271	0,282	0,419	
0,85	0,075	0,366	0,389	0,508	
0,8	0,1	0,448	0,475	0,584	
0,6	0,2	0,699	0,725	0,8	
0,4	0,3	0,863	0,881	0,927	
0,2	0,4	0,961	0,970	0,990	
					Максимум:
0,1	0,45	0,988	0,992	1	толщины
0	0,5	1	1	0,992	кривизны
—0,2	0,6	0,979	0,971	0,931	
—0,4	0,7	0,889	0,877	0,807	
—0,6	0,8	0,703	0,690	0,622	
—0,8	0,9	0,359	0,352	0,375	
—0,9	0,95	0,171	0,168	0,229	
—1,0	1	0	0	—	Задняя кромка

Таблица П.3.2. **Значения коэффициентов в формулах (П.3) и (П.4)**

Величина	B_1	B_2, град	B_2, рад	a_1	b_1
Профиль со средней линией NACA $a=0{,}8$	0,0679	1,54	0,0269	—	—
Профиль со средней линией ИК $a=0{,}8$; $b=0{,}05$	0,0733	1,0	0,0174	—	—
Профиль с распределением толщины NACA-66 mod или NACA-66	—	—	—	1,25	0,263
Профиль с распределением толщины ИК-75	—	—	—	1,25	0,272

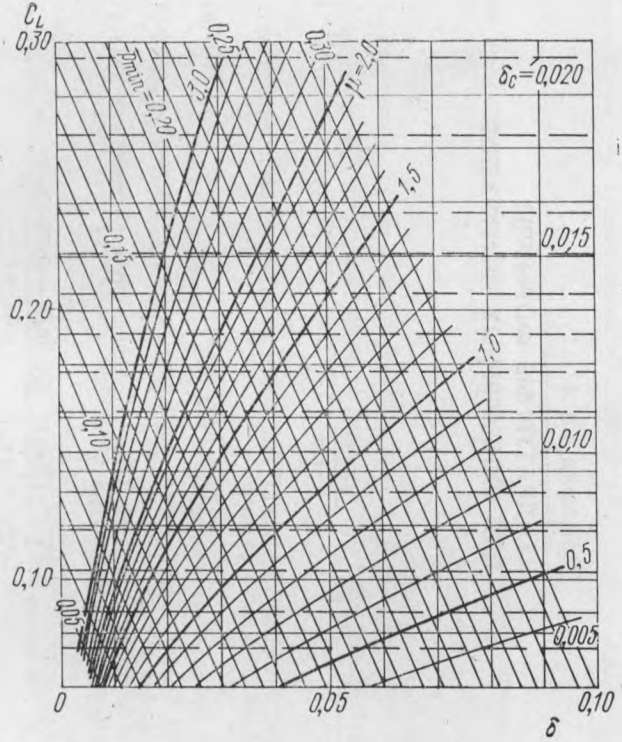


Рис. П.3.3. Диаграмма C_L—$\bar{p}_{min}$—δ для профилей со средней линией типа NACA $a=0{,}8$ и распределением толщины NACA-66 mod на расчетном режиме безударного входа ($\mu=B/A_d$).

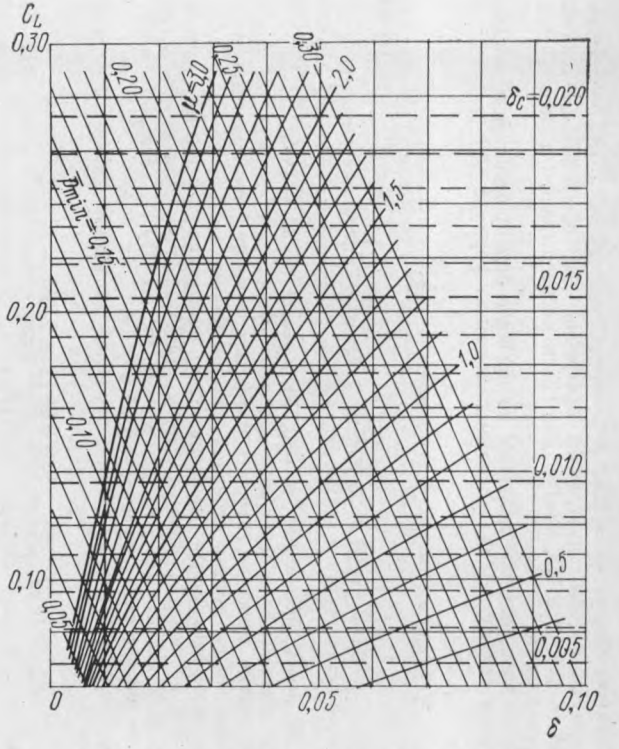


Рис. П.3.4. Диаграмма C_L—p_{min}—δ для профилей со средней линией типа ИК $a=0{,}8$, $b=0{,}05$ и распределением толщины ИК-75 на расчетном режиме безударного входа ($\mu=B/A_d$).

нанесены также линии $\delta_c = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, где $\mu = B/A_d$ (A_d — характеристика прочности [48]). Диаграммы построены для профилей со средней линией NACA $a = 0{,}8$ и ИК $a = 0{,}8$; $b = 0{,}05$ и распределением толщины типа NACA-66 mod и ИК-75.

Величину минимального давления на профиле при произвольном режиме его обтекания (включая и безударный) находят по формуле [72]:

$$-\bar{p}_{\min} = \max\left\{(1 + u_1\delta + u_2 C_L + u_3\delta_c)^2 - 1;\right.$$
$$\left.(1 + u_{11}\delta)^2 + \frac{u_{12}}{\delta^2}(C_L - u_{13}\delta_c)^2 - 1\right\}, \qquad (\text{П.5})$$

где $u_1 = 1{,}25$; $u_2 = 0{,}15$; $u_3 = 1{,}65$; $u_{11} = 0{,}750$; $u_{12} = 0{,}1195$; $u_{13} = 13{,}90$.

Первое выражение в фигурных скобках соответствует точкам на средней части спинки профиля, второе определяет величину минимальных давлений в пике эпюры вблизи передней кромки. Формула (П.5) с указанными числовыми коэффициентами пригодна для профилей со средней линией NACA $a = 0{,}8$ и распределением толщины NACA-66 mod. Для профилей со средней линией ИК $a = 0{,}8$; $b = 0{,}05$; $u_{11} = 0{,}736$; $u_{13} = 14{,}11$, остальные коэффициенты те же, что и для профиля NACA $a = 0{,}8$.

Коэффициент обратного качества профилей указанных типов вычисляют по формуле

$$\varepsilon \equiv \frac{C_D}{C_L} = \frac{0{,}058\,08\,(1 + 2{,}3\delta)}{C_L R_{nS}^{0{,}1458}}, \qquad (\text{П.6})$$

где R_{nS} — число Рейнольдса, построенное по длине профиля и скорости его обтекания.

Приложение 4

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть задан сингулярный интеграл

$$I(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(x)}{x - y}\,dx, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \qquad (\text{П.7})$$

как главное значение по Коши. Плотность интеграла можно представить в виде произведения двух функций:

$$\gamma(x) = f(x)\,w(x), \qquad (\text{П.8})$$

где $f(x) = \gamma(x)/w(x)$ — непрерывная функция, а $w(x)$ — известная весовая функция, причем $w(x) \geqslant 0$.

А. А. Корнейчуком [43] получена следующая интерполяционная квадратурная формула для интеграла (П.7):

$$I(y) \approx -\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{P_n'(x_k)} \frac{Q_n(x_k) - Q_n(y)}{x_k - y}, \qquad (\text{П.9})$$

где x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — нули полинома $P_n(x)$ из системы полиномов, ортогональных с весом $w(x)$ на промежутке $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)\, w(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ d_n^2, & n = m; \end{cases} \qquad (\text{П.10})$$

$$Q_n(y) = -\int_{-1}^{+1} \frac{w(x)\, P_n(x)}{x - y}\, dx$$ — функция II рода [27].

Формула (П.9) точна, если $f(x)$ — полином степени не выше $(n-1)$. Если точка y совпадает с одним из узлов при $k=m$, то соответствующее слагаемое в формуле (П.9) равно

$$\frac{f(x_m)}{P_n'(x_m)}\, Q_n'(x_m). \qquad (\text{П.11})$$

В случае если y совпадает с одним из нулей функции $Q_n(y)$, т. е. $y=y^*$, $Q_n(y^*)=0$, то квадратура (П.9) принимает вид

$$I(y^*) \approx -\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{P_n'(x_k)} \frac{Q_n(x_k)}{x_k - y^*}. \qquad (\text{П.12})$$

Формула (П.12) точна, если $f(x)$ — произвольный полином степени не выше $2n$. Таким образом, формула (П.12) является квадратурой наивысшей алгебраической степени точности (типа Гаусса). В дальнейшем точки y^* будем называть расчетными.

В задачах гидродинамики в качестве плотности сингулярных интегралов $f(x)w(x)$ выступает интенсивность вихрей или источников, заменяющих крыло или лопасть винта. В большинстве случаев функция ведет себя вблизи концов промежутка $[-1, 1]$ следующим образом:

$$\gamma(\varepsilon) \sim 0\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \text{ или } 0(\sqrt{\varepsilon}),$$

где ε — расстояние до соответствующего конца промежутка. Таким образом, весовую функцию $w(x)$ можно задать в виде

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

где $\alpha, \beta = \pm 1/2$. Такой весовой функции соответствуют ортогональные полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ и функции II рода $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ [27]. Квадратурные формулы принимают следующий вид [73]:

1. $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$; $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В этом случае полиномы $P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$ принимают вид (с точностью до постоянной) полиномов Чебышева I рода $T_n(x)$, а функция $Q_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$ — полиномов Чебышева II рода $U_{n-1}(x)$. Квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности принимает вид

$$I(y_i^*) \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{x_k - y_i^*} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(x_k)\sqrt{1-x_k^2}}{x_k - y_i^*}, \qquad (\text{П.13})$$

где x_k — корни полиномов Чебышева I рода:

$$T_n(x_k)=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad x_k=\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n};$$

y_i^* — корни полиномов Чебышева II рода:

$$U_{n-1}(y_i^*)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\quad y_i^*=\cos\frac{\pi i}{n}.$$

Число расчетных точек на единицу меньше числа узлов.

$$2.\ \alpha=\beta=\frac{1}{2};\quad w(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Теперь роль полиномов $P_n^{(1/2,\ 1/2)}(x)$ играют полиномы Чебышева II рода $U_n(x)$, а функции $Q_n^{(1/2,\ 1/2)}(x)$ — полиномы Чебышева I рода $T_{n+1}(x)$. Квадратура (П.12) принимает вид

$$I(y_i^*)\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1-x_k^2}{x_k-y_i^*}=\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma(x_k)\sqrt{1-x_k^2}}{x_k-y_i^*},\tag{П.14}$$

где

$$y_i^*=\cos\frac{\pi(2i-1)}{2(n+1)},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1;$$

$$x_k=\cos\frac{\pi k}{n+1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

а число расчетных точек на единицу больше числа узлов.

$$3.\ \alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=-\frac{1}{2};\quad w(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

В этом случае $P_n^{(1/2,\ -1/2)}(x)$ выражаются через тригонометрические функции $\sin\frac{2n+1}{2}\theta/\sin\frac{\theta}{2}$, а $Q_n^{(1/2,\ -1/2)}(x)$ — через $\cos\frac{2n+1}{2}\theta/\cos\frac{\theta}{2}$ где $\theta=\arccos x$.

Квадратура наивысшей алгебраической степени точности (П.12) имеет вид

$$I(y_i^*)\approx\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\frac{f(x_k)}{x_k-y_i^*}=$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma(x_k)\sqrt{1-x_k^2}}{x_k-y_i^*},\tag{П.15}$$

где

$$y_i^*=\cos\frac{\pi(2i-1)}{2n+1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$x_k=\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Таким образом, число узлов равно числу расчетных точек.

$$4.\ \alpha = -\frac{1}{2};\ \beta = \frac{1}{2};\ w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Узлы и расчетные точки в этом случае и в предыдущем меняются местами и квадратура (П.12) принимает вид

$$I(y_i^*) \approx \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{\pi(2k-1)}{2(2n+1)} \frac{f(x_k)}{x_k - y_i^*} =$$

$$= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(x_k)\sqrt{1-x_k^2}}{x_k - y_i^*}, \qquad (\text{П.16})$$

где

$$y_i^* = \cos \frac{2\pi i}{2n+1},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$x_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n+1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Вводя обозначения $C_n \gamma(x_k)\sqrt{1-x_k^2} = \Gamma_k$,

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{n}, & \alpha = \beta = -1/2; \\ \dfrac{\pi}{n+1}, & \alpha = \beta = 1/2; \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}, & \alpha = 1/2,\ \beta = -1/2 \text{ или} \\ & \alpha = -1/2,\ \beta = 1/2, \end{cases}$$

квадратурные формулы (П.13), (П.14), (П.15), (П.16) можно привести к единому виду

$$I(y_i^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{x_k - y_i^*}. \qquad (\text{П.17})$$

Здесь x_k и y_i^* вычисляют по-разному в зависимости от поведения плотности $\gamma(x)$ у концов промежутка (т. е. от вида весовой функции $w(x)$, см. п. 1, 2, 3, 4). Величину Γ_k можно понимать как интенсивность «дискретной» гидродинамической особенности. Тогда суммарная интенсивность особенностей на промежутке $[-1, 1]$:

$$\Gamma = \int_{-1}^{+1} \gamma(x)\,dx \approx C_n \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k)\sqrt{1-x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k.$$

При выводе этой формулы использовано то обстоятельство, что узлы квадратурной формулы Гаусса совпадают с узлами квадратуры А. А. Корнейчука, если весовые функции w одинаковы.

Расчетный вид интерполяционных квадратур (П.9), а также узлы и коэффициенты квадратур для отличных от рассмотренных весовых функций приведены в работе [73].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адамар Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., Наука, 1978.
2. **Александров К. В.** Частичная кавитация произвольного профиля.— Труды НТО судпрома, 1978, вып. 284, с. 73—80.
3. Аэродинамика/Под ред. В. Ф. Дюрэнд. Т. II. М., Гос. изд-во оборонной промышленности, 1940.
4. **Бабаев Н. Н.** Исследование периодических усилий, передаваемых корпусу корабля работающим винтом.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. 1952, вып. 65.
5. **Бавин В. Ф., Вашкевич М. А., Миниович И. Я.** Гидродинамическое давление, создаваемое гребным винтом, работающим в неоднородном потоке.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1967, вып. 237, с. 3—14.
6. **Бавин В. Ф., Вашкевич М. А., Мухина Л. А.** Расчет циркуляции гребного винта, работающего в неоднородном потоке.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1967, вып. 237, с. 15—28.
7. **Бавин В. Ф., Мухина Л. А., Топорков А. И.** Периодические силы, создаваемые гребным винтом на выступающих частях корпуса.— В сб. НТО судпрома: Материалы по обмену опытом, 1971, вып. 168, с. 111—121.
8. **Бавин В. Ф., Сыркин Е. Н., Томницкий М. Ю.** Периодические нагрузки, создаваемые гребным винтом на руле.— Судостроение, 1976, № 12, с. 10—12.
9. **Бавин В. Ф., Тимошин Ю. С.** Метод и алгоритм проектировочного расчета гребного винта на ЭВМ.— В сб.: Вопросы судостроения, сер. Проектирование судов. 1980, вып. 23, с. 3—13.
10. **Басин А. М., Миниович И. Я.** Теория и расчет гребного винта. Л., Судпромгиз, 1963.
11. **Баскин В. Э.** О движении пространственной диффундирующей вихревой трубки в несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 6, с. 1261—1264.
12. **Белоцерковский С. М.** Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., Наука, 1965.
13. **Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К.** Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М., Наука, 1975.
14. **Белоцерковский С. М., Васин В. А., Локтев Б. Е.** К построению нестационарной нелинейной теории воздушного винта.— Механика жидкости и газа, 1979, № 5, с. 1107—1113.
15. **Бискуп Б. А.** Влияние основных конструктивных элементов гребного винта на создаваемые им пульсирующие давления.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1967, вып. 237, с. 41—52.
16. **Бискуп Б. А., Завадовский Н. Ю.** Влияние кавитации на периодические усилия, действующие со стороны гребного винта на валопровод. Тезисы к Крыловским чтениям. — Труды НТО судпрома, 1971, вып. 156, с. 56.
17. **Блохинцев Д. И.** Акустика неоднородной движущейся среды. М., Гостехиздат, 1946.
18. **Богораз И. И., Кауфман И. М.** Производство гребных винтов. Л., Судостроение, 1978.
19. **Брутян М. А., Серебрийский Я. М.** Приближенный метод расчета подъ-

емной силы и продольного момента профиля с учетом вязкости при малых скоростях.— Уч. записки ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1, с. 33—39.
20. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
21. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М., Мир, 1967.
22. **Ветчинкин В. П., Поляхов Н. Н.** Теория и расчет воздушного гребного винта. М., Оборонгиз, 1940.
23. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М., Наука, 1977.
24. **Георгиевская Е. П.** Кавитационная эрозия гребных винтов и методы борьбы с ней. Л., Судостроение, 1978.
25. **Георгиевская Е. П., Мавлюдов М. А., Салазкин И. В.** О влиянии масштаба на процесс кавитационной эрозии.— В сборнике статей по гидродинамике транспортных судов. Л., 1981, с. 119—130.
26. **Голубев В. В.** Лекции по теории крыла. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
27. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971.
28. **Гутин Л. Я.** Избранные труды. Л., Судостроение, 1977.
29. Движители быстроходных судов (гидродинамический расчет)./ Мавлюдов М. А. и др. Л., Судостроение, 1973.
30. **Дробленков В. В., Каневский Г. И.** Подъемная сила и вязкостное сопротивление плоских профилей в вязкой несжимаемой жидкости.— Вопросы судостроения, 1980, вып. 23, с. 26—32.
31. **Жуковский Н. Е.** Вихревая теория гребного винта. Избранные сочинения, т. II. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
32. **Завадовский Н. Ю.** Автоматизированная система проектирования и изготовления гребных винтов.— Вопросы судостроения, 1974, вып. 5, с. 10—18.
33. **Завадовский Н. Ю., Русецкий А. А.** Метод расчета давлений на лопастях гребных винтов.— Труды НТО судпрома, 1977, вып. 253, с. 65—77.
34. **Завадовский Н. Ю., Масленников С. С., Русецкий А. А.** Численные методы решения краевых задач бескавитационного и кавитационного обтекания крыльевых профилей.— Гидромеханика, 1982, вып. 45, с. 3—9.
35. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М., Наука, 1980.
36. **Иванов А. Н.** Кавитационное обтекание профилей крыльев.— Известия АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, № 6, с. 117—120.
37. **Иванов А. Н.** Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л., Судостроение, 1980.
38. **Ивченко В. М.** О наивыгоднейшем движительном комплексе.— Труды НТО судпрома, 1963, вып. 45, с. 73—76.
39. **Кацман Ф. М., Кудреватый Г. М.** Конструирование винторулевых комплексов морских судов. Л., Судостроение, 1974.
40. **Клюкин И. И.** Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Изд. 2-е, Л., Судостроение, 1971 г.
41. **Кнэпп Р., Дейли Д., Хэммит Ф.** Кавитация. М., Мир, 1974.
42. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1968.
43. **Корнейчук А. А.** Квадратурные формулы для сингулярных интегралов.— В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. 1964, т. 4, № 4, с. 64—74.
44. **Копеецкий В. В.** Гидродинамика винта в трубе кругового сечения. Л., Судпромгиз, 1956.
45. **Копеецкий В. В.** Гидродинамика винта в свободной воде. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. Л., ЛКИ, 1963.
46. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., ГИФМЛ, 1963.
47. **Куликов С. В., Храмкин М. Ф.** Водометные движители. Л., Судостроение, 1980.

48. **Лаврентьев В. М.** Судовые движители. М.—Л., Морской транспорт, 1949.
49. **Лаврентьев В. М.** Гидродинамика широколопастных гребных винтов.— Труды НТО судпрома, 1963, вып. 45, с. 197—219.
50. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.—Л., ГИТТЛ, 1947.
51. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
52. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М., Советское радио, 1969.
53. **Левковский Ю. Л.** Структура кавитационных течений. Л., Судостроение, 1978.
54. **Левковский Ю. Л.** Прогнозирование спектральных уровней кавитационного шума.— Акустический журнал, 1980, т. XXVI, вып. 6, с. 879—882.
55. **Лепилкин А. М.** К вихревой теории изолированного винта.— Труды ЦАГИ, 1940, вып. 529, с. 29—43.
56. **Липис В. Б.** Гидродинамика гребного винта при качке судна. Л., Судостроение, 1975.
57. **Лифанов И. К.** О методе дискретных вихрей. ПММ. Т. 43, 1979, вып. 1, с. 184—187.
58. **Лифенко П. Л., Орлов О. П., Пустошный А. Ф.** Метод определения эффективного поля скоростей в месте расположения движителя.— Труды НТО судпрома, 1980, вып. 313, с. 34—40.
59. **Майкапар Г. И., Лепилкин А. М., Халезов Д. В.** Аэродинамический расчет винтов по лопастной теории.— Труды ЦАГИ, 1940, вып. 529, с. 3—28.
60. **Майкапар Г. И.** Определение индуктивных скоростей винта с помощью Бесселевых функций. — Труды ЦАГИ, 1940, вып. 529, с. 57—69.
61. **Майкапар Г. И.** К теории тонкого крыла. Приложения вихревой теории винта.— Труды ЦАГИ, 1947, вып. 613.
62. **Мак-Кормик Б. В.** Кавитация, обусловленная свободным вихрем, сходящим с несущей поверхности.— Теоретические основы инженерных расчетов, 1962, т. 84, № 3, с. 74—85.
63. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977.
64. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М., Мир, 1964.
65. **Миниович И. Я.** Действие судового гребного винта в косом потоке.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1946, вып. 14.
66. **Миниович И. Я.** Учет конечности ширины лопасти при определении гидродинамических характеристик гребного винта, работающего в неравномерном поле скоростей за корпусом судна.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1961, вып. 172, с. 100—103.
67. **Миниович И. Я., Перник А. Д., Петровский В. С.** Гидродинамические источники звука. Л., Судостроение, 1972.
68. **Мишкевич В. Г.** Проблемы проектирования гребных винтов.— В кн.: Проблемы прикладной гидромеханики судна. Л., Судостроение, 1975, с. 179—207.
69. **Мишкевич В. Г.** Нелинейная вихревая теория гребного винта в однородном потоке идеальной жидкости.— Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов, 1978, вып. 19, с. 70—82.
70. **Мишкевич В. Г.** Факторы индукции для элементарных вихрей в пространстве между соосными бесконечными цилиндрами.— Труды НТО судпрома, 1978, вып. 278, с. 85—95.
71. **Мишкевич В. Г.** Гидродинамические характеристики оптимальных гребных винтов, работающих в пространстве между соосными цилиндрами. Тезисы докладов на Крыловских чтениях. Л., Судостроение, 1978, с. 32—34.
72. **Мишкевич В. Г., Рождественский К. В.** Расчет обтекания тонкого профиля на основе метода сращиваемых разложений и его применение при проектировании сечений лопастей гребных винтов.— Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов, 1978, вып. 19, с. 96—106.

73. **Мишкевич В. Г.** О построении квадратурных формул для сингулярных интегралов, встречающихся в аэрогидродинамике.— Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов, 1980, вып. 23, с. 98—108.
74. **Мишкевич В. Г.** Учет влияния вязкости при проектировочном и поверочном расчетах гребного винта по вихревой теории.— В сборнике статей по гидродинамике судна. Л., 1980, с. 62—73.
75. **Морозов В. П.** Кавитационный шум как последовательность акустических импульсов, возникающих в случайные моменты времени.— Акустический журнал. 1968, т. 14, № 3, с. 435—440.
76. **Некрасов А. Н.** Теория крыла в нестационарном потоке. М., АН СССР, 1947.
77. **Непомнящий Е. А.** О «звуке вращения» пропеллера.— ЖТФ. 1939. Т. 9, № 13.
78. **ОСТ 5.4050—72.** Винты гребные. Методы оценки статической и циклической прочности лопастей и нормы запасов их прочности.
79. **ОСТ 5.0317—80.** Винты гребные фиксированного шага морских судов. Правила математического представления поверхности лопастей.
80. **Папмель Э. Э.** Практический расчет гребного винта. Л., НИВК, 1936.
81. **Периодические** силы, передаваемые гребным винтом корпусу судна.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1972, вып. 273.
82. **Перник А. Д.** Проблемы кавитации. Л., Судостроение, 1966.
83. **Перник А. Д.** Кавитационный шум.— Труды Акустического института, 1969, вып. 6, с. 87—103.
84. **Поляхов Н. Н.** Вихревая теория винта с точки зрения теории решетки.— Труды ЛПИ, 1953, вып. 4, с. 45—48.
85. **Поляхов Н. Н.** Теория нестационарных движений несущей поверхности. ЛГУ, 1960.
86. **Поляхов Н. Н.** Теория несущей винтовой поверхности.— Вестник ЛГУ, 1963, вып. 3, № 13, с. 35—42.
87. **Правила** классификации и постройки морских судов. Регистр Союза ССР. Часть IX. М.—Л., Транспорт, 1973.
88. **Рождественский К. В.** Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла. Л., Судостроение, 1979.
89. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
90. **Самойлович Г. С.** Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М., Наука, 1969.
91. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики, т. IV, ч. 1. М., Наука, 1974.
92. Теория несущего винта./Баскин В. Э., Вильдгрубе Л. С., Вождаев Е. С., Майкапар Г. И. М., Машиностроение, 1973.
93. **Тирувенгадам А.** Масштабные эффекты кавитационной эрозии.— Труды международного симпозиума по неустановившимся течениям воды с большими скоростями. М., Наука, 1973, с. 405—426.
94. **Титов И. А.** Судовые движители.— Справочник по теории корабля. Л., Судпромгиз, 1960.
95. **Фильчакова В. П.** Конформные отображения областей специального типа. Киев, Наукова Думка, 1972.
96. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II, М., Наука, 1970.
97. **Харкевич А. А.** Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.
98. **Хаскинд М. Д.** Неустановившееся движение твердого тела в ускоренном потоке безграничной жидкости. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 120—123.
99. **Чумак В. М.** Систематические данные по аксиальной составляющей попутного потока за корпусом одновальных транспортных судов.— Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов, 1980, вып. 26, с. 81—89.
100. **Шалларь А. В.** Линеаризованная задача о нестационарном движении суперкавитирующего или вентилируемого подводного крыла.— Матери-

алы Всесоюзной конференции по краевым задачам и их приложениям в механике сплошной среды, КГУ, Казань, 1970, с. 272—279.
101. **Эшли Х., Лэндал М.** Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1969.
102. **Abbott I. H., Doenhoff A. E., Stivers L. S.** Summary of Airfoil Data, NACA Report 824, 1945.
103. **Arakeri V. H.** Viscous Effects on the Position of Cavitation Separation from Smooth Bodies.— Journ. of Fluid Mechanics, 1975, v. 68, part 4, p. 779—799.
104. **Brard R.** Vortex Theory for Bodies Moving in Water, Nineth Symp. on Naval Hydrodynamics. Paris, 1972.
105. **Breslin J. P.** The Pressure Field Near a Ship Propeller.— Journ. of Ship Research, 1958, v. 1, N 4.
106. **Breslin J. P., Tsaconas S.** Marine Propeller Pressure Field Due to Loading and Thickness Effect. Trans. SNAME, 1959, v. 67.
107. **Breslin J. P.** Report on Vibratory Propeller, Appendages and Hull Forces and Moments, ITTC Propeller Committee, Appendix V, 1969, June.
108. **Bussler M., Grimmer K., Fichtner R.** Ein Komplexes EDV — system zur Automatisierung der Konstruktion und Fertigung von Propelleranlagen, Seewirtschaft, H. 4, 1970, S. 298—305.
109. **Castagneto E., Maioli P. G.** A Theoretical and Experimental Study on the Hydrodynamics of Hydrofoils as Applied to Naval Propellers, Seventh Symp. on Naval Hydrodynamics. Rome, 1968.
110. **Cheng H.** Hydrodynamic Aspects of Propeller Design Based on Lifting — Surfase Theory. Part 1, 2, DTMB Report 1802, 1803, 1964, 1965.
111. **Cox G. G.** Corrections to the Camber of Constant Pitch Propellers, Quart. TRINA, 1961, v. 103, N 3, p. 227—243.
112. **Cumming R. A., Morgan Wm. B., Boswell R. J.** Highly Skewed Propellers. Trans. SNAME, 1972, v. 80, p. 98—135.
113. **Cummins W. E.** The Force and Moment on a Body in Time—Varying Potential Flow.— Journ. of Ship Research, 1957, v. 1, N 1.
114. **Cummings D. E.** Numerical Prediction of Propeller Characteristics.— Journ. of Ship Research, 1973, v. 17, N 1.
115. **Daily J. W.** Force and Cavitation Characteristics of the NACA-4412 Hydrofoil.— Trans. ASME, 1949, v. 71, p. 269—284.
116. **Darrozes J.-S.** Behaviour of a Subsonic Flow Past a Thin Wing in the Vicinity of the Leading Edge, ONEYA Note Technique N 1976 — 16.
117. **Denny S.** Comparision of Experimentally Determined and Theoretically Predicted Pressures in Vicinity of a Marine Propeller, NSRDC Report 2349, 1967.
118. **Ginzel G. J.** Theory of the Broaded Bladed Propeller, ARC Techn. Report C. P. N 208, 1955.
119. **Glover E. J., Thorn J. F., Hawdon L.** Propeller Design for Minimum Hull Excitation, The Naval Architect, 1979, N 6, p. 267—284.
120. **Goldstein S.** On the Vortex Theory of the Screw Propeller, Proc. of the Royal Society, 1929, v. 123, N 729, p. 440—465.
121. **Goldstein S.** On the Limiting Values for Infinite Pitch of a Parametre Occuring in Airscrew Theory, Cambridge Philos. Soc., 1944, v. 40, part 2.
122. **Gray L. M., Greeley D. S.** Source Level Model for Propeller Blade Rate Radiation for the World's Merchant Fleet. JASA, 1980, v. 67, N 2, p. 516—522.
123. **Gutsche F.** Einfluss der Gitterstellung auf die Eigenschaften der im Shiffschraubenentwurf Benutzten Blattschnitte. JSTG, 1938, Bd. 39.
124. **Gutsche F.** Untersuchung von Schiffsschrauben in Schräger Anströmung, Schiffbauforschung, 1964, N 3/4, S. 7—19.
125. **Harrison M.** An Experimental Study of Single Bubble Cavitation Noise, JASA, 1952, v. 24, N 6, p. 776—781.
126. **Huang T. T., Peterson F. B.** Influence of Viscous Effects on Model/Full — Scale Cavitation Scaling.— Journ. of Ship Research, 1976, v. 20, N 4, p. 215—223.

127. **Huse E.** Pressure Fluctuations on the Hull Induced by Cavitating Propellers. Norwegian Ship Model Experimental Tank Publication, 1972, N 111.
128. **Jacobs W., Mercier J., Tsaconas S.** Theory and Measurements of the Propeller—Induced Vibratory Pressure Field.— Journ. of Ship Research, 1972, v. 16, N 2.
129. **Karman T. H., Tsien H. S.** Lifting-line Theory for a Wing in Non-Uniform Flow, Quar. of Applied Math., 1945, v. 3, N 1.
130. **Kerwin J. E.** Numerical Determination of Propeller Blade Section Camber Lines, W. P. A. van Lammeren Jubilee Memorial. NSMB, 1970.
131. **Kruppa C.** Hydrodynamics. Resistance and Propulsion of Ships, Advances in Marine Technology, Intern. Symp., Proc. Norway, 1970, v. 1, p. 165—181.
132. **Lehman A. F., Kaplan P.** Experimental and Analitical Study of Propeller-Induced Appendage Forces, Seventh Symp. on Naval Hydrodynamics. Rome, 1968, p. 169—233.
133. **Lerbs H. W.** Moderately Loaded Propellers With a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation.— Trans. SNAME, 1952, v. 60, p. 73—117.
134. **Lerbs H. W., Alef W., Albrecht K.** Numerische Auswertungen zur Theorie der Tragenden Fläche von Propellern. JSTG, 1964, Bd. 58, S. 295—318.
135. **Lewis F. M.** Propeller—Vibration Forces.— Trans. SNAME, 1963, v. 71.
136. **Manen J. D.**, van, On the Usefulness of a Test with a Propeller Model in a Cavitation Tunnel, Symp. on Testing Techniques in Ship Cavitation Research, Trondheim, 1967.
137. **Mattioli J. P.** Theorie des Dünnen Tragflügels bei Beliebigen Umrissformen, Ing.— Archiv, 1939, Bd. 10, N 3.
138. **McCormick B. W.** The Effect of Finite Hub on the Optimum Propeller.— Journ. of Aeronautical Sci., 1955, v. 22, N 9, p. 645—650.
139. **Morgan Wm. B., Wrench J. W.** Some Computational Aspects of Propeller Design, Methods in Computational Physics, 1965, v. 4, p. 301—331.
140. **Morgan Wm. B. Silovic V., Denny S. B.** Propeller Lifting—Surface Correction. Trans. SNAME, 1968, v. 76, p. 309—347.
141. **Nicolson J. W.** The Approximate Calculation of Bessel Functions of Imaginary Argument. Phil. Magazine, 1910, v. 20, p. 938—943.
142. **Noordzij Z.** A Note on the Scaling of Tip Vortex Cavitation Inception. Intern. Shipbuilding Progress, 1977, v. 24, N 277, p. 233—236.
143. **Okamoto H., Tamai H., Saito Y., Takasugi N.** Propeller Design and Performance Calculation by Computer, in "Computer Appl. Automat. Shipyard Oper. and Ship Design", Tokio, 1974.
144. **Oossanen P.** van. Calculation of Performance and Cavitation Characteristics of Propellers Including Effects of Nonuniform Flow and Viscosity. NSMB Publ., N 457.
145. **Oosterveld M. W. C., Oossanen P., van.** Ship Research Activities in the Netherlands. Intern. Shipbuilding Progress, 1972, v. 19, N 215, p. 213—246.
146. **Pien P. C.** The Calculation of Marine Propellers Based on Lifting — Surface Theory.— Journ. of Ship Research, 1961, v. 5, N 2, p. 1—14.
147. **Pohl K. H.** Das Instationäre Drückfeld in der Umgebung eines Schiffspropellers und die von ihm auf Benachbarten Platten Erzeugten Periodischen Kräfte.— Schiffstechnik, 1959, Bd. 32, H. 6.
148. **Rayleigh.** On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity, Phil. Magazine, 1917, v. 34, p. 94—98.
149. **Ross D.** Mechanics of Underwater Noise. N. Y., Pergamon Press, 1976.
150. **Sasajima T.** Cavitation Noise of Ship Propellers, Bull. of the Soc. of Naval Architects of Japan, 1979, N 605, p. 539—549.
151. **Schoenberg I. J.** Contributions to Problem of Approximation of Equidistant Data by Analitic Functions, Quart. Appl. Math., 1946, v. 4, p. 45—99.
152. **Seventh** Symp. on Naval Hydrodynamics, Panel Discussion — Propeller — Hull Interaction. Rome, 1968.

153. **Shioiri J., Tsaconas S.** Three — dimensional Approach to the Gust Problem for a Screw Propeller. Journ. of Ship Research., 1964, v. 7, N 4.
154. **Tachmindji A. I.** The potential Problem of the Optimum Propeller with Finite Hub.— Intern. Shipbuilding Progress, 1956, v. 3, N 27, p. 563—572.
155. **Tachmindji A. I., Milam A. B.** The Calculation of Circulation Distribution for Propeller with Finite Hub, Having Three, Four, Five and Six Blades.— Intern. Shipbuilding Progress, 1957, v. 4, N 37, p. 467—475.
156. **Tachminji A. I.** Potential Problem of the Optimum Propeller with Finite Number of Blades, Operating in Cylindrical Duct.— Journ. of Ship Research, 1958, v. 2, N 3, p. 23—29.
157. **Takahashi M., Oku M.** The Cavitation Characteristics of MAU Type Propeller.— Journ. of Soc. of Naval Arch. of Japan, 1977, v. 141, p. 17—27.
158. **Tanibayashi H.** Practical Approach to Unsteady Problems of Propellers.— Intern. Shipbuilding Progress, 1973. v. 20, N 226, p. 12—17.
159. **Takahashi H. et al.** Results of the Comparative Tests Proposed by Propeller Committee of ITTC.— Report of Ship Research Institute, 1970, v. 7, N 6.
160. **Tsaconas S., Jacobs W. R., Ali M. R.** Propeller Blade Pressure Distribution due to Loading and Thickness Effects.— Journ. of Ship Research, 1979, v. 23, N 2, p. 89—107.
161. **Tsaconas S., Jacobs W. R.** Unsteady Lifting — Surface Theory for a Marine Propeller.— Journ. of Ship Research, 1965, v. 9, N 2, p. 79—101.
162. **Valentine D. T., Dashnaw F. J.** Highly Skewed Propeller for San Clemente Class OBO Carrier Design Consideration, First STAR Symp. Washington, 1975, p. 11.1—11.28.
163. **Van de Vooren A. J., Zandbergen P. J.** Noise Field of a Rotating Propeller in Forward Flight.— AIAA Journ., 1963, v. 1, N 7.
164. **Vorus S.** Calculation of Propeller — Induced Vibratory Hull Forces, Force Distributions and Pressures.— Journ. of Ship Research, 1976, v. 20, N 2.
165. **Weissinger J.** Über eine Erweiterung der Prandtlischen Theorie der Tragenden Linie.— Math. Nachr. 1949, Bd. 2, H. 1/2.
166. **Weissinger J.** Linearisierte Profiltheorie bei Ungleichförmiger Anströmung.— Acta Mecanica, 1970, N 10, S. 207—228, 1972, N 13, S. 133—154.
167. **Weitendorf E. A.** Experimentelle Untersuchungen der durch Kavitierende Propeller Erzeugten Druckschwankungen.— Schiff und Hafen, 1973, H. 11.
168. **Wu Y. T.** Introductory Lectures on Hydro-Acoustics.— Schiffstechnik, 1966, Bd. 13, H. 68.
169. **Yamazaki R.** On the Theory of Screw Propellers in Nonuniform Flows, Memoirs of the Faculty of Engineering.— Kyushu Univ., Japan, 1966, v. 25, N 2.
170. **Yamasaki T.** On some tank test results with a large model propeller.— 0,95 m in diameter.— J. Soc. Naval archit, Japan, 1978, v. 144.
171. **Zwick W.** Zur Berechnung der Zirkulation und der Kräfte eines Propellers.— Schiffbauforschung, 1962, N 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов 3
Введение 5
Условные обозначения и системы координат 7
Глава 1. **Геометрия гребного винта** 17
1.1. Геометрические элементы и уравнения поверхности лопасти гребного винта 18
1.2. Методы аппроксимации геометрических элементов поверхности гребного винта 36
Глава 2. **Теоретические основы гидродинамических расчетов гребных винтов** 48
2.1. Уравнения движения жидкости и постановка задач гидродинамики гребного винта 49
2.2. Основные положения вихревой теории гребного винта . . . 55
2.3. Линейная теория несущей поверхности 59
2.4. Вихревая теория несущей линии 64
2.5. Силы и моменты, действующие на гребной винт 79
2.6. Условия оптимума для гребного винта в свободной воде и за корпусом судна 88
Глава 3. **Проектировочный расчет гребного винта по вихревой теории** 96
3.1. Исходная информация и общая последовательность проектировочного расчета гребного винта 98
3.2. Расчет гребного винта по теории несущей линии при различных условиях оптимума 100
3.3. Расчет гребного винта с произвольным распределением циркуляции по теории несущей линии 110
3.4. Профилирование лопастей винта на основе теории несущей поверхности 117
3.5. Поправки на влияние вязкости жидкости 126
Глава 4. **Поверочный расчет гребного винта** 133
4.1. Постановка задачи. Определение интенсивности присоединенных вихрей 133
4.2. Периодические силы и моменты, действующие на гребной винт 157
4.3. Расчет кривых действия гребного винта 169
4.4. Расчет давлений на лопастях гребных винтов 173
Глава 5. **Расчет периодических давлений и сил, создаваемых гребным винтом на корпусе судна и его выступающих частях** 181
5.1. Периодические давления, создаваемые гребным винтом в окружающей жидкости 182
5.2. Равнодействующая периодических давлений, создаваемых гребным винтом на корпусе судна 199
5.3. Периодические силы, создаваемые гребным винтом на выступающих частях корпуса судна 203

Глава 6. **Прогнозирование кавитационных характеристик гребного винта** 207
6.1. Кавитация гребных винтов и сопровождающие ее эффекты 207
6.2. Формы кавитации гребного винта и возможности их прогнозирования 213
6.3. Расчет кавитационных диаграмм профилей сечений лопастей гребного винта и параметров каверн 222
6.4. Периодические давления, индуцируемые кавитирующим гребным винтом в окружающей жидкости и на корпусе судна . . . 232
6.5. Прогнозирование кавитационного шума гребных винтов (основы теории) 241
6.6. Прогнозирование кавитационного шума гребных винтов (методы расчета) 246
Глава 7. **Автоматизация расчетов гребных винтов** 255
7.1. Единая автоматизированная система технической подготовки производства гребных винтов 256
7.2. Программное обеспечение проектирования гребных винтов 259
Приложение 1. Гидродинамические характеристики оптимальных гребных винтов 273
Приложение 2. Поправки на несущую поверхность для оптимальных гребных винтов [140] 278
Приложение 3. Систематические данные по винтовым профилям . . . 280
Приложение 4. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов 284
Список литературы 288

Виктор Федорович Бавин
Николай Юрьевич Завадовский
Юрий Львович Левковский
Виктор Григорьевич Мишкевич

ГРЕБНЫЕ ВИНТЫ. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Редактор *З. Г. Якимова*
Художественный редактор *В. В. Купихин*
Технический редактор *А. П. Ширяева*
Корректоры *А. Г. Кувалкин, И. П. Острогорова*
Оформление художника *А. А. Власова*
ИБ № 805

Сдано в набор 13.01.83. Подписано к печати 19.05.83. М-29073. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Физ. печ. л. 18,5. Физ. кр.-отт. 18,5. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 2700 экз. Изд. № 3704—81. Заказ № 44. Цена 3 р. 20 к.

Издательство «Судостроение», 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 190000, г. Ленинград, Прачечный переулок, 6.