

ББК 39.47

Р37

УДК 629.12.073.243.4(075.8)

Рецензенты: кафедра теории корабля Ленинградского кораблестроительного института, канд. техн. наук Ю. А. Нецветаев

Ремез Ю. В.

Р37 Качка корабля. Л.: Судостроение, 1983 — 328 с., ил.

ИСБН

На основе методов гидромеханики и теории случайных процессов в книге изложена теория качки корабля, решена краевая задача о колебаниях контура на поверхности жидкости и вычислены присоединенные массы и коэффициенты демпфирования, содержится линейная теория качки на косом регулярном волнении, определены статистические характеристики качки на нерегулярном волнении, приведена методика гидродинамического расчета волновых нагрузок, описаны особенности нелинейной теории качки на тихой воде, регулярном и нерегулярном волнении, рассмотрены принципы стабилизации корабля. Основные теоретические результаты доведены до расчетных методик, графиков и алгоритмов.

Книга предназначена для студентов специальности «Судостроение и судоремонт», может также служить пособием для аспирантов и инженеров.

Р 3605030000—027
048(01)—83 9—83

39.47

© Издательство «Судостроение», 1983 г.

ченный объем книги не позволил привести общее решение этой задачи для произвольной частоты колебаний. В связи с этим в книге рассмотрены предельные случаи очень низких и очень высоких частот, а для произвольных частот даны вычисленные на ЭВМ таблицы значений присоединенных масс и коэффициентов демпфирования шпангоутных контуров, пригодные для непосредственного использования в практике расчетов.

Не удалось уделить достаточно внимания некоторым вопросам нелинейной теории качки и стабилизации корабля, а приобретающий все большее значение вопрос о качке на мелководье вообще не рассмотрен в книге. В список литературы включены только учебники и монографии.

Отзывы на книгу просьба направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство «Судостроение».

телей) качающийся корабль теряет скорость. На встречном волнении это уменьшение скорости иногда бывает настолько велико, что приводит к потере управляемости — корабль перестает слушаться руля. Управляемость ухудшается и на попутном волнении, когда снижается устойчивость корабля на курсе. На попутном волнении, кроме того, падает остойчивость и иногда наблюдается опасное явление, называемое брочингом, при котором корабль захватывается волной и разворачивается лагом¹.

На встречном волнении может иметь место так называемый *слеминг* — удары волн в периодически оголяющуюся носовую часть днища, а также заливание палубы накатывающейся волной, которое нередко приводит к нарушению прочности надстроек, повреждению палубных устройств, смыву за борт плохо закрепленных грузов. Корабли, имеющие значительный развал носовых шпангоутов, помимо днищевого, могут испытывать и бортовой слеминг. При значительной скорости на относительно коротких встречных волнах может появиться низкочастотная вибрация корпуса.

За счет периодического изменения величины и формы погруженной части корабля, качающегося на волнении, а также за счет скоростей и ускорений качки, на корпус действуют знакопеременные гидродинамические нагрузки, вызывающие его изгиб в вертикальной плоскости, а на косом волнении, кроме того, изгиб в горизонтальной плоскости и кручение.

Вследствие наличия ускорений на корпусные конструкции, механизмы и устройства действуют силы инерции, ухудшающие условия их работы. Нормальная работа высокооборотных механизмов затрудняется также гироскопическими силами, обусловленными угловыми скоростями качки. Наклонения вокруг продольной оси и угловые ускорения корабля могут вызвать опасное смещение насыпных грузов.

Длительное воздействие линейных ускорений на вестибулярный аппарат внутреннего уха человека является причиной болезненного состояния пассажиров и команды, называемого *укачиванием* или морской болезнью. Люди, впервые находящиеся на качающемся корабле, страдают морской болезнью примерно в 90 % случаев, а имеющие некоторый «опыт» — вдвое реже, вовсе не укачиваются на море всего 6—8 %. Основными симптомами морской болезни являются головокружение, холодный пот, тошнота, рвота; в легких случаях — чувство усталости и головная боль. Для профилактики укачивания применяют так называемые противогистаминные препараты (димедрол и др.), однако они не всегда оказываются эффективными. Кроме того, ряд препаратов этой

¹ *Лагом к волне* называется такое положение корабля, при котором его диаметральной плоскость, перпендикулярна направлению распространения волн. Если направление распространения волн и диаметральной плоскость параллельны, то волнение называется *продольным*.

периоды и малые амплитуды. Кроме того, на положении корабля относительно взволнованной поверхности моря, а следовательно, на заливаемости, слеминге, «разгоне» винтов и главных двигателей, существенно сказывается разность фаз колебаний той или иной точки корабля и поверхности воды. Так, например, если в момент наибольшего наклонения на нос последний находится на подошве волны, а корма — на вершине, фазы будут благоприятными как для носа, так и для кормы. Если в рассматриваемый момент наибольшего наклонения на нос последний находится на вершине волны, а корма — на подошве, то фазы будут для обеих оконечностей неблагоприятными (колебательные процессы происходят в противофазе). Возможны также случаи, когда фаза для одной оконечности или вообще для некоторой точки корабля благоприятна, а для другой нет.

Добиться хорошей мореходности можно, используя следующие пути: целенаправленное назначение основных элементов корабля в процессе проектирования; надлежащее распределение грузов; рациональный выбор скорости хода и курса относительно волн; применение специальных устройств, называемых успокоителями качки.

Рассматривая качающийся корабль как твердое тело с шестью степенями свободы, различают шесть видов качки: продольно-горизонтальную — поступательные колебания вдоль продольной оси; поперечно-горизонтальную — поступательные колебания вдоль поперечной оси; вертикальную — поступательные колебания вдоль вертикальной оси; бортовую — вращательные колебания вокруг продольной оси; килевую — вращательные колебания вокруг поперечной оси; рысканье — вращательные колебания вокруг вертикальной оси.

Совокупность продольно-горизонтальной, вертикальной и килевой качки принято называть продольной качкой, а совокупность рысканья, поперечно-горизонтальной и бортовой качки — боковой.

Между вертикальной, бортовой и килевой качкой, с одной стороны, и продольно-горизонтальной, поперечно-горизонтальной и рысканьем, с другой, существует принципиальное различие. Первые три вида качки, называемые иногда основными, представляют собой колебания относительно положения устойчивого равновесия, а вторые, называемые дополнительными, — относительно безразличного.

Если придать кораблю некоторое вертикальное перемещение или наклонить относительно продольной или поперечной оси, то возникнут силы, стремящиеся возвратить его в положение равновесия (восстанавливающие силы), и корабль, предоставленный самому себе, будет совершать на тихой воде¹ колебания, назы-

¹ Вода называется тихой при отсутствии на ее поверхности свободных волн, вызывающих качку. Если находящийся на этой поверхности корабль совершает то или иное движение, то на ней возникают волны, вызываемые этим движением. Такие волны называются *вынужденными*.

§ 2. Краткий исторический очерк и современное состояние теории качки

Начало изучению качки было положено в середине XVIII в. работами Л. Эйлера, П. Бугера, Д. Бернулли.

Приняв в качестве математической модели корабля, качающегося на тихой воде, обычный математический маятник, Эйлер и Бугер получили формулы для периодов свободных колебаний. Теория бортовой качки на волнении была впервые предложена Д. Бернулли. И хотя она основывалась на неправильном допущении о характере волнового движения жидкости, в ней был сделан весьма важный вывод о резком увеличении амплитуды качки при резонансе, т. е. при равенстве периода волны и периода свободных колебаний корабля.

Более близкой к современным воззрениям была теория бортовой качки корабля, расположенного лагом к волнам синусоидального профиля, созданная в 1861 г. В. Фрудом. В этой теории поперечные размеры корабля полагались очень малыми по сравнению с длиной и высотой волны. Из этого предположения следовало, что центр тяжести корабля движется по круговой траектории как частица жидкости, находящаяся на взволнованной поверхности.

Способы учета влияния соизмеримости поперечных размеров корабля и размеров волны разрабатывали Э. Бертен и Б. Сен-Венан. Предложенные ими поправочные коэффициенты несколько уточняли численные результаты теории Фруда, однако не приводили к ее принципиальному усовершенствованию и не давали возможности применить ее к расчету бортовой качки на косом волнении и тем более к расчету килевой качки.

Принципиально новая теория качки, свободная от допущения Фруда о малости размеров корабля, была создана в конце прошлого века А. Н. Крыловым. Основываясь на гипотезе о том, что на каждую точку смоченной поверхности корабля действует такое же давление, какое имело бы место в соответствующей точке пространства, занятого свободно распространяющимися волнами, А. Н. Крылов в 1895 г. создал линейную теорию килевой качки, а в 1897 г. обобщил ее на все шесть видов качки корабля на косом регулярном¹ волнении.

Теория А. Н. Крылова, получившая всеобщее признание и широкое распространение, сыграла выдающуюся роль в исследовании качки корабля. Дальнейшее развитие теории качки шло по трем основным направлениям: учет возмущений, вносимых присутствием и качкой корабля в поле давлений окружающей жидкости; учет конечности амплитуд качки и нелинейного характера зависимости демпфирующих сил от скорости колебаний; учет

¹ Волнение называется *регулярным*, если характеристики всех волн совершенно одинаковы.

ренцированию в неподвижных координатах, привели к дальнейшему уточнению формул для возмущающих сил.

Строгий учет возмущений, вносимых плавающим телом в волнуемую жидкость предельно малой глубины, был впервые осуществлен Н. Е. Жуковским в 1907 г. Решение этой задачи, явившееся предпосылкой гидродинамической теории качки, было обобщено А. М. Басиным на случай одновременного наличия качки и дрейфа и использовано В. Н. Анфимовым для определения влияния мелководья на распределение давлений по корпусу судна.

Важные научные результаты в области теоретической и прикладной гидродинамики, полученные в работах отечественных ученых в предвоенные годы, и, в первую очередь, исследование Н. Е. Кочина по теории волн, вызываемых колебаниями тела под поверхностью жидкости, создали основу для построения теории качки, свободной от гипотезы А. Н. Крылова, т. е. теории, учитывающей гидродинамические эффекты, обусловленные качкой корабля и дифракцией набегающих волн. Такая теория, получившая название гидродинамической теории качки, была создана в середине 40-х гг. М. Д. Хаскиндом.

В первых работах по гидродинамической теории качки в качестве математической модели реального корабля использовалась известная в теории волнового сопротивления модель корабля, имеющего малое отношение ширины к длине. Эта модель, называемая тонким кораблем или кораблем типа Мичелла, дает возможность построить вполне корректную теорию продольной качки в рамках линейной теории волн, не требуя наложения ограничений на скорость хода. Позднее наряду с тонким в гидродинамической теории рассматривался так называемый удлиненный корабль, для которого нормаль к смоченной поверхности можно полагать перпендикулярной к продольной оси.

В большом цикле работ М. Д. Хаскиндом были развиты методы определения действующих на корабль сил и гидродинамических характеристик качки, исследована гидродинамика качки на тихой воде при различных видах начальных возмущений, в рамках линейной теории при косвенном учете нелинейности решена задача о волновом сопротивлении корабля на волнении, разработан способ оценки заливаемости и рассмотрен ряд других вопросов, связанных с проблемой мореходности корабля.

Из гидродинамической теории качки следует, что отказ от основной гипотезы А. Н. Крылова не отвергает построенной им теории, а требует дополнения ее учетом сил, связанных с возмущениями, которые вносятся кораблем в окружающую жидкость, т. е. инерционно-демпфирующих и дифракционных сил. В связи с этим в гидродинамической теории качки возмущающие силы делятся на две части: главную, соответствующую гипотезе А. Н. Крылова, и дифракционную, учитывающую эффект присутствия корабля как препятствия на пути распространения волн.

В отечественной практике наибольшее распространение получили методы М. Д. Хаскинда и Ф. Урселла.

А. З. Салькаев на основе теоретического решения М. Д. Хаскинда рассчитал гидродинамические характеристики качки аналитических контуров, близких по форме к корабельным шпангоутам, при различных значениях отношения ширины к осадке, коэффициента полноты и частоты колебаний. В. А. Поздеев и В. В. Дыхта, воспользовавшись методом приближенных конформных отображений, предложили достаточно простой способ расчета гидродинамических характеристик для аналитических контуров несколько иной формы.

Пользуясь методом Ф. Урселла, Я. М. Элис рассчитал гидродинамические характеристики качки для обычных и накренных контуров в жидкости конечной глубины, Ю. Н. Пашенко — для контуров, заданных теоретическим чертежом, Э. В. Коханов — для контуров, колеблющихся на поверхности двухслойной жидкости.

Определению гидродинамических характеристик контуров в неограниченно глубокой жидкости посвящены также работы Ф. Тасаи, О. Грима, Ж. Котика и В. Мангулиса, а в жидкости конечной глубины — работы П. Г. Авраменко, Ю. М. Гулиева, Й. Ю и Ф. Урселла, С. Кима, У. Портера, Е. Такка.

Краевая задача о потенциале скоростей вынужденного волнового движения жидкости принадлежит к числу нелинейных краевых задач теории потенциала. Решая эту задачу применительно к кораблю типа Мичелла, М. Д. Хаскинд линеаризовал ее, исходя из физических соображений. Более строго к ее линеаризации подошли А. Питерс и Дж. Стокер, которые использовали для этой цели метод малого параметра.

Этот метод решения нелинейных задач, предложенный А. Пуанкаре, состоит в том, что граничные условия и все неизвестные задачи представляются в виде рядов по степеням одного или нескольких малых параметров. Таким путем нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных задач. Кроме того, с принципиальной точки зрения этот метод дает возможность, сохраняя в разложениях члены, содержащие соответствующие степени малых параметров, получить решение с любой степенью точности.

Выбрав в качестве малого параметра задачи о корабле типа Мичелла отношение ширины к длине («параметр тонкости»), Питерс и Стокер показали, что при продольной качке тонкого корабля инерционно-демпфирующие и дифракционные силы имеют более высокий порядок малости, чем восстанавливающие и главная часть возмущающих сил.

Таким образом, из теории Питерса и Стокера следует, что в первом приближении продольная качка тонкого корабля не вносит возмущений в окружающую жидкость, в результате чего отсутствуют демпфирование и присоединенные массы и при резонансе

использованы трехпараметрические разложения в форме, предложенной Ньюманом.

Гидродинамика качки тонкого корабля, движущегося на взволнованной поверхности жидкости конечной глубины по круговому пути, изучена Л. М. Дыхтой. Е. М. Коганом решена трехмерная гидродинамическая задача о качке в жидкости конечной глубины катамарана, корпуса которого рассматриваются как корабли типа Мичелла. Ю. Л. Воробьев применил к исследованию продольной качки метод сращиваемых асимптотических разложений. Последний предусматривает раздельное использование метода малого параметра в двух областях, на которые делится поток, — внешней и внутренней. Затем производится сращивание (гладкое соединение) решений, полученных для каждой из этих областей. Таким образом отыскивают приближенное решение задачи, пригодное для всего потока.

В течение последних 25—30 лет появился ряд работ, в которых развита гидродинамическая теория качки применительно к жидкости со сложными границами. Так, О. Ф. Васильев предложил метод расчета присоединенных масс при вертикальной качке корабля в камере судоходного шлюза и показал, что при этом присоединенная масса возрастает в десятки раз по сравнению со случаем качки в неограниченной жидкости и может значительно превышать действительную массу жидкости в камере. Н. Н. Моисеевым изучена качка без хода в ограниченном объеме жидкости, Э. А. Пержняно — качка в жидкости неограниченной глубины между двумя параллельными стенками, В. А. Степановым — качка над существенно неровным дном или подводным препятствием, на отмели, вблизи вертикальной стенки в жидкости конечной глубины.

В линейной теории качки удлиненного корабля в 50—60-е гг. оставался дискуссионным вопрос об учете скорости хода при определении инерционно-демпфирующих и дифракционных сил. Этот вопрос представлял большой теоретический и практический интерес, так как предложенные рядом авторов дифференциальные уравнения, отличающиеся способом учета скорости, приводили к существенным различиям в численных результатах расчета качки.

Проведенное исследование показало, что та или иная форма коэффициентов дифференциальных уравнений, зависящих от скорости хода, определяется наличием или отсутствием учета кривизны ватерлиний при определении гидродинамических сил, с одной стороны, и отнесением граничных условий обтекания к мгновенному или средним по углам килевой качки и рысканья положениям корабля, — с другой.

К настоящему времени практически установилась общая точка зрения на структуру дифференциальных уравнений как продольной, так и боковой качки удлиненного судна.

Коэффициенты уравнений продольной качки, впервые предложенные Ю. В. Ремезом в 1963 г., были впоследствии с помощью

вченко, Г. Е. Павленко, Ю. И. Фаддеев, М. Д. Хаскинд, Г. М. Хорошанский, К. Вендель и другие авторы. Эти исследования показали, что учет нелинейности восстанавливающего момента существенно влияет на характер зависимости амплитуды качки от частоты возмущающей силы. В частности, обнаружилось, что определенным значениям частоты может соответствовать не одно, как в линейной теории, а три или пять значений амплитуды. При этом некоторые из них отвечают устойчивым режимам движения, наблюдаемым в опыте, а некоторые — неустойчивым, которые физически не реализуются.

Бортовая качка представляет значительную опасность для низкобортных кораблей, у которых на палубе могут скапливаться большие массы воды. В изучение проблемы обеспечения безопасности таких кораблей на волнении наиболее существенный вклад внесли В. В. Гарькавый и Н. Н. Рахманин.

Вертикальные перемещения корабля на волнении вызывают периодическое изменение важного параметра бортовой качки — восстанавливающего момента, в связи с чем при определенных условиях ее амплитуда может существенно возрасти.

Это явление, называемое параметрическим возбуждением колебаний, или параметрическим резонансом, изучалось как в рамках линейной теории качки, так и с учетом нелинейности диаграммы статической остойчивости. Его исследованию посвящены работы Г. К. Авдеева, А. М. Басина, В. В. Луговского, В. В. Семенова-Тян-Шанского, В. Г. Сизова, Л. Н. Стреляева, Х. Баумана, О. Грима, Дж. Паулинга и Р. Розенберга.

В. В. Луговским было исследовано взаимное влияние продольной и боковой качки корабля, идущего под произвольным курсовым углом по отношению к регулярным волнам малой амплитуды. Эта задача тесно связана с проблемой остойчивости корабля на попутном волнении, которая изучалась теоретическими и экспериментальными методами С. Н. Благовещенским, Е. В. Пергаевым, В. Н. Салтовской, Н. Б. Севастьяновым, В. В. Семеновым-Тян-Шанским, В. Арндтом, С. Кастнером, Дж. Паулингом, С. Роде-ном. Наиболее обстоятельные исследования и обобщения этой проблемы выполнены И. К. Бородаевым и Ю. И. Нечаевым.

При движении корабля на попутном волнении он иногда «захватывается» волнами. Сущность этого явления, называемого бродингом, состоит в следующем. Когда скорость корабля достигает 60—80% скорости попутной волны¹, длина которой соизмерима с его длиной, дополнительная энергия, сообщаемая кораблю волнами, может оказаться достаточной для того, чтобы он начал двигаться со скоростью последних. При этом мидель располагается на переднем склоне волны, «захватившей» корабль.

¹ На глубокой воде скорость волны (в узлах) равна $2,43\sqrt{\lambda}$, где λ — длина волны (в метрах); на мелководье скорость уменьшается.

вероятностную теорию качки не привели к ощутимым результатам. Это было связано, в первую очередь, с отсутствием в то время законченной теории случайных процессов, которая позднее нашла широкое применение в задачах радиоэлектроники, теории автоматического управления и оказалась наиболее подходящим для изучения нерегулярной качки разделом теории вероятностей.

Первые работы, посвященные исследованию нерегулярной качки методами теории случайных процессов, появились в 1953 г. одновременно в СССР (А. И. Вознесенский, А. П. Воробьев, А. А. Свешников и С. С. Ривкин, А. Н. Тупысев) и США (М. Сен-Дени и У. Пирсон).

Наиболее плодотворным оказалось предложенное в работах А. И. Вознесенского и Г. А. Фирсова, А. Н. Тупысева, Сен-Дени и Пирсона применение спектрального подхода, согласно которому нерегулярное волнение и качка как сложные колебательные движения представляются в виде суммы простых гармонических колебаний различных частот. При этом в рамках линейной теории качки корабль рассматривается как линейная динамическая система, преобразующая входной процесс волнения в выходной процесс качки.

При преобразовании случайного процесса линейными динамическими системами каждая гармоническая составляющая спектра входного процесса преобразуется в гармоническую составляющую спектра выходного процесса той же частоты, но другой амплитуды. Величина последней зависит от отношения амплитуды качки корабля на регулярном волнении к амплитуде набегающих на него волн. Таким образом, вероятностная теория качки не лишает практического смысла теорию качки на регулярном волнении, а включает ее в себя в качестве неотъемлемой части, без которой расчет качки на нерегулярном волнении невозможен.

В развитие спектральной теории качки на нерегулярном волнении и ее приложений, помимо названных выше авторов основополагающих работ, существенный вклад внесли И. К. Бородай, А. В. Герасимов, Д. В. Кондриков, В. Б. Липис, В. В. Луговский, В. А. Мореншильдт, В. А. Некрасов, Ю. А. Нецветаев, Н. Н. Рахманин, Н. Б. Севастьянов и ряд других авторов.

Вероятностные методы получили широкое распространение в строительной механике корабля (Г. В. Бойцов, В. В. Екимов, В. В. Козляков, Я. И. Короткин, А. А. Курдюмов, А. И. Максимаджи, Э. Льюис, Н. Норденстрем, Дж. Фукуда), в расчетах судовых устройств (М. Н. Александров, Б. А. Бугаенко, Ю. Д. Жуков, А. Е. Поляков) и других отраслях судостроительной науки.

Наряду с построением линейной теории нерегулярной качки, внимание исследователей привлекали также и нелинейные задачи, т. е. задачи, в которых динамические свойства корабля описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Наиболее эффективным методом решения таких задач является метод статистической линеаризации, состоящий в замене нелиней-

В практике такие успокоители, получившие название бортовых управляемых рулей, были впервые применены в 1923 г. по предложению С. Мотора. В настоящее время этот тип успокоителя рассматривается как наиболее перспективный.

В разработку теории успокоителей качки существенный вклад внесли А. Н. Крылов, И. Г. Бубнов, а позднее С. Н. Благовещенский, Н. А. Заботкин, М. Е. Мазор, В. А. Мореншильдт, Г. Е. Павленко, Г. А. Фирсов, А. Н. Холодилин, Г. М. Хорошанский, А. Н. Шмырев и ряд других советских и зарубежных исследователей.

Волны, профиль которых перемещается в горизонтальном направлении, называются *прогрессивными*, в противном случае — *стоячими*.

Если характеристики всех волн совершенно одинаковы, волнение называется *регулярным*, в противном случае — *нерегулярным*. Регулярного волнения в природе не существует и это лишь одна из возможных математических моделей реального морского волнения. Из существующих видов волнения наиболее близка к регулярному мертвая зыбь, представляющая собой свободные колебания поверхности моря при полном безветрии. Зыбь возникает из ветровых волн при выходе последних из зоны действия ветра либо после его прекращения.

Волновое движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, которая представляет собой модель воды в теории волн и гидродинамической теории качки, суть движение *безвихревое*. Для того чтобы в этом убедиться, следует обратиться к известной в классической гидромеханике теореме Томсона. Эта теорема гласит, что *в идеальной баротропной жидкости¹, находящейся под действием потенциальных массовых сил, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, состоящему из одних и тех же частиц жидкости, не зависит от времени*. Следствием этой теоремы является теорема Лагранжа, утверждающая, что *движение такой жидкости, возникающее из состояния покоя, будет безвихревым*.

Действительно, если в какой-либо момент времени в определенном объеме жидкости циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то, обращаясь к теореме Томсона, можно утверждать, что в этом объеме она всегда была и будет равна нулю. Когда данный объем жидкости находится в покое, то, очевидно, циркуляция скорости равна нулю. Следовательно, когда он придет в движение, циркуляция также останется равной нулю. Но в векторном анализе доказывается, что циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря этого вектора через поверхность, опирающуюся на данный контур. Это утверждение называется теоремой Стокса. Таким образом, если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, лежащему в данном объеме жидкости, равна нулю, то вихри в нем отсутствуют.

На принятую модель воды как идеальную несжимаемую тяжелую жидкость распространяются теоремы Томсона и Лагранжа, т. е. ее волновое движение, как возникающее из состояния покоя, будет безвихревым.

Безвихревое движение обладает потенциалом скоростей ϕ , определение которого и представляет собой первоочередную задачу теории волн. Будем решать эту задачу в неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, плоскость $O_1x_1y_1$, которой совпадает с невоз-

¹ Баротропной называется жидкость, плотность которой зависит только от давления. Баротропная жидкость, плотность которой постоянна, есть частный случай баротропной жидкости.

Ограничиваясь случаем неограниченно глубокой жидкости, запишем условие затухания волнового движения на большой глубине в виде

$$v = \text{grad } \varphi = 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \quad (1.3)$$

Динамическое граничное условие на свободной поверхности состоит в том, что во всех ее точках давление постоянно и равно атмосферному. Запишем интеграл Лагранжа — Коши в линеаризованной форме, пренебрегая квадратом скорости волнового движения как малой второго порядка,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz = F(t),$$

где p — давление, ρ — плотность жидкости, а g — ускорение силы тяжести.

Введем новую функцию $\varphi^{(1)}$, определяемую равенством

$$\varphi^{(1)} = \varphi - \int_0^t F(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - F(t)$$

и интеграл Лагранжа — Коши примет вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + gz = 0. \quad (1.4)$$

Введем теперь функцию $\varphi^{(2)}$, связанную с $\varphi^{(1)}$ соотношением

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} + \frac{p_0}{\rho} t,$$

где p_0 — давление на свободной поверхности жидкости, равное атмосферному давлению. Как легко видеть,

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho}.$$

Подставив это значение производной в равенство (1.4) и отбросив для простоты записи верхние индексы у функции φ , окончательно можем написать

$$\frac{p - p_0}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz = 0.$$

При $z = \lambda(x, y, t)$, т. е. на свободной поверхности, последнее уравнение примет вид

$$\frac{\partial \varphi(x, y, \lambda, t)}{\partial t} + g\lambda = 0.$$

где точками обозначены символы дифференцирования по времени.

В последнем равенстве левая часть зависит только от координат, а правая — только от времени. Это возможно лишь в том случае, когда обе части равны постоянной, которую обозначим через σ_0^2 . Заметим, что если в качестве постоянной выбрать отрицательную величину, то полученное решение не будет удовлетворять условиям периодичности во времени и конечности поля скоростей (при неограниченном возрастании времени функция φ будет стремиться к бесконечности).

Итак, имеем равенство

$$-\frac{\ddot{\varphi}_0}{\varphi_0} = \sigma_0^2,$$

которое, очевидно, представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}_0 + \sigma_0^2 \varphi_0 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_0 = A_1 e^{i\sigma_0 t} + A_2 e^{-i\sigma_0 t}, \quad (i^2 = -1).$$

Поскольку φ_0 суть вещественная функция времени, условимся во всех выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{i\sigma_0 t}$, принимать во внимание только действительную часть. Тогда полученное решение для функции φ_0 можно переписать в форме

$$\varphi_0 = A e^{i\sigma_0 t},$$

где A — комплексное число.

Таким образом, для функции φ будем иметь следующее выражение:

$$\varphi = A e^{i\sigma_0 t} \varphi_1(x, z). \quad (1.7)$$

При этом функция φ_1 должна, очевидно, удовлетворять уравнению Лапласа для плоского движения

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (1.8)$$

и граничному условию на свободной поверхности. Но если функция φ определяется выражением (1.7), то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\sigma_0^2 \varphi$$

и условие на свободной поверхности (1.6) примет вид

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma_0^2 \varphi = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1.9)$$

Если же величина $C_2 \neq 0$, то при $z \rightarrow -\infty$ функция $Z(z)$, а вместе с нею и потенциал, будут неограниченно возрастать.

Таким образом, имеем

$$Z = Ce^{kz}$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = BCe^{kz - ikx} \quad (1.11)$$

Заметим, что постоянная σ_0 , называемая частотой волны, и k , называемая волновым числом, не являются независимыми. Связь между ними устанавливается из условия (1.10) для функции φ_1 на свободной поверхности.

Подставляя в это условие следующее из формулы (1.11) значение производной $\partial\varphi_1/\partial z = k\varphi_1$, имеем

$$\sigma_0^2 = gk \text{ или } \sigma_0 = \sqrt{gk}.$$

Период волны τ_0 определяется по формуле

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sigma_0}.$$

Итак, используя полученные выражения для φ_0 и φ_1 , можем написать

$$\varphi = ABCe^{kz + i(\sigma_0 t - kx)}.$$

Ординаты профиля волны найдем, пользуясь формулой (1.5)

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{g} ABCi \sigma_0 e^{i(\sigma_0 t - kx)}.$$

Очевидно, что выражение $-ABCi\sigma_0/g$ представляет собой амплитуду волны r . Таким образом, профиль волны имеет вид косинусоиды

$$\zeta = re^{i(\sigma_0 t - kx)} = r \cos(\sigma_0 t - kx).$$

Из равенства

$$-\frac{1}{g} ABCi \sigma_0 = r$$

получаем

$$ABC = i \frac{g}{\sigma_0} r$$

и, следовательно, формула для потенциала приобретает вид

$$\varphi = i \frac{g}{\sigma_0} re^{kz + i(\sigma_0 t - kx)}. \quad (1.12)$$

Значения длины волны в этих формулах выражаются в метрах, период — в секундах, а фазовая скорость — в метрах в секунду.

Важной особенностью волн малой амплитуды является независимость их фазовой скорости, периода и частоты от амплитуды.

Величина амплитуды свободно распространяющихся волн линейной теорией не определяется и в практике ее находят по различным эмпирическим формулам. Часто для этой цели используют формулу Циммермана

$$r = 0,085 \lambda^{3/4}.$$

Для определения траектории частицы запишем горизонтальную и вертикальную компоненты ее скорости в виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i(\sigma_0 t - kx)},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ik \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i(\sigma_0 t - kx)}.$$

Имея в виду малость отклонения частицы от ее положения равновесия в спокойной воде, упростим эти уравнения, заменив в правых частях x на x_0 и z на z_0 , где x_0 и z_0 — координаты частицы в спокойной воде. Тогда, проинтегрировав, получим:

$$x = -i r e^{kz_0+i(\sigma_0 t - kx_0)} + D_1;$$

$$z = r e^{kz_0+i(\sigma_0 t - kx_0)} + D_2.$$

Поскольку при отсутствии волнового движения ($r = 0$) координаты частицы $x = x_0$, $z = z_0$, очевидно, что $D_1 = x_0$, $D_2 = z_0$. Тогда, учитывая что в выражениях, содержащих сомножитель $e^{i\sigma_0 t}$, принимается во внимание только действительная часть, можем написать:

$$x - x_0 = r e^{kz_0} \sin(\sigma_0 t - kx_0);$$

$$z - z_0 = r e^{kz_0} \cos(\sigma_0 t - kx_0).$$

Исключив отсюда время, получим уравнение траектории

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = (r e^{kz_0})^2.$$

Очевидно, что в рамках принятого приближения траектории частиц представляют собой окружности, радиусы которых быстро убывают с ростом глубины. Для поверхностных частиц эти радиусы равны амплитуде волны, а на глубине, равной длине волны, падают в 535 раз ($e^{-2\pi} = 1,867 \cdot 10^{-3} = 1/535$).

Поскольку траектории частиц есть замкнутые кривые, перемещения массы жидкости в направлении распространения волн не происходит.

и формула для потенциала скоростей прогрессивных волн может быть окончательно записана в виде

$$\varphi = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}, \quad (1.14)$$

где $\sigma = \sigma_0 - vk \cos \varepsilon$. (1.15)

Величина σ называется кажущейся частотой волны и представляет собой частоту, наблюдаемую с движущегося корабля. Соответственно кажущейся частоте существует понятие кажущегося периода волны

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sigma_0 - vk \cos \varepsilon}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней формулы на волновое число k и имея в виду, что $\sigma_0/k = c$, можем переписать эту формулу в виде

$$\tau = \frac{\lambda}{c - v \cos \varepsilon}.$$

Из последнего выражения видно, что τ действительно представляет собой период по отношению к движущемуся кораблю, курс которого составляет угол ε с фазовой скоростью волн.

Для того, чтобы не смешивать σ_0 с σ и τ_0 с τ , частоту σ_0 иногда называют истинной частотой, а период τ_0 — истинным периодом волны.

При отсутствии хода корабля ($v = 0$), либо при ходе лагом к волне ($\varepsilon = 90^\circ$, $\cos \varepsilon = 0$) кажущиеся и истинные частоты (периоды) совпадают.

В граничном условии (1.6) и уравнении свободной поверхности (1.5)

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{при } z = 0$$

производные по времени вычисляют в неподвижной системе координат (неподвижной точке пространства). В дальнейшем нам будет удобнее символом $\partial/\partial t$ обозначать производную по времени, вычисленную в подвижной системе координат, т. е. в точке пространства, имеющей неизменные координаты x , y , z по отношению к движущемуся кораблю. В связи с этим для производной по времени в неподвижной системе координат от функции, заданной в подвижной системе, введем символ $\partial_a/\partial t$. Тогда формулы (1.6) и (1.5) приобретут вид:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial_a^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (1.16)$$

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial_a \varphi}{\partial t} \quad \text{при } z = 0. \quad (1.17)$$

необходимо найти вторую производную потенциала скоростей $\partial_a^2 \varphi / \partial t^2$. Но, как видно из формулы (1.19), оператор $\partial_a / \partial t$ дифференцирования по времени в неподвижной системе координат функции, определенной в подвижной системе, движущейся вдоль оси Ox с постоянной скоростью v , имеет вид

$$\frac{\partial_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.21)$$

Ему соответствует следующее выражение для оператора $\partial_a^2 / \partial t^2$:

$$\frac{\partial_a^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (1.22)$$

Применив последний оператор к функции φ и подставляя полученный результат в равенство (1.16), получим окончательное выражение для граничного условия на свободной поверхности в подвижной системе координат:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1.23)$$

Полученные выше граничные условия для потенциала скоростей волнового движения и выражения для ординат свободной поверхности жидкости применимы к любым прогрессивным гравитационным волнам малой амплитуды независимо от первопричины их возникновения. Поэтому мы будем пользоваться этими выражениями и для описания возмущенного движения жидкости, вызванного колебаниями шпангоутного контура или корабля в целом, и для набегающих на корабль свободно распространяющихся волн и для дифрагированного волнового движения.

Глава 2

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧКИ

§ 6. Общие формулы для присоединенных масс.

Метод плоских сечений

Кажущееся изменение инерционных характеристик твердого тела при ускоренном движении в жидкости было обнаружено экспериментально еще в XVIII в.: в 1776 г. Дюбуа, исследуя малые колебания сферического маятника, наблюдал указанное явление и измерил величину присоединенной массы. Позднее Грин и Стокс дали математическое определение этого понятия и пришли к классическому результату, показав, что присоединенная масса шара

личества движения, сообщаемого телом окружающей его бесконечной массе жидкости. Векторы N и Q определяются выражениями

$$N = -\rho \iint_S \Phi n dS, \quad Q = -\rho \iint_S \Phi (r_S \times n) dS.$$

Здесь ρ — плотность жидкости, Φ — потенциал скоростей ее возмущенного движения, S — поверхность тела, n — орт внешней (направленной внутрь жидкости) нормали к поверхности S , r_S — радиус-вектор элемента dS .

Таким образом, дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости будут иметь вид:

$$\frac{dK}{dt} = F_0 + F, \quad \frac{dL}{dt} = M_0 + M$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt} (K + N) = F_0, \quad \frac{d}{dt} (L + Q) = M_0.$$

Сравнивая последние уравнения с уравнениями движения тела в пустоте, заключаем, что при движении в жидкости к главному вектору количество движения тела K как бы присоединяется добавочное количество движения N , а к главному моменту количества движения тела L — добавочный момент количества движения Q . Это объясняется тем, что при движении тела в жидкости внешние силы должны изменять количество движения не только самого тела, но и количество движения окружающей его жидкости.

Примем некоторую неподвижную относительно тела точку O за полюс и совместим с ней неизменно связанной с телом системы координат $Oxyz$. Обозначим вектор линейной скорости точки O через U , а вектор угловой скорости вращения тела вокруг проходящей через эту точку мгновенной оси — через Ω . Тогда можно, следуя Кирхгофу, представить потенциал скоростей возмущенного движения жидкости в виде

$$\Phi = U_x \Phi_1 + U_y \Phi_2 + U_z \Phi_3 + \Omega_x \Phi_4 + \Omega_y \Phi_5 + \Omega_z \Phi_6.$$

Проекции векторов U и Ω на координатные оси системы $Oxyz$ удобно обозначать одной буквой U с цифровыми индексами, придавая этим обозначениям следующий смысл:

$$U_1 = U_x; \quad U_2 = U_y; \quad U_3 = U_z; \quad U_4 = \Omega_x; \quad U_5 = \Omega_y; \quad U_6 = \Omega_z.$$

С использованием этих обозначений выражение для потенциала приобретает весьма компактную форму

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k. \quad (2.2)$$

Полагая в последнем равенстве $U_1 = 1 \text{ мс}^{-1}$, а $U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = U_6 = 0$, нетрудно убедиться, что функция Φ_1 представляет собой потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным поступательным движением тела вдоль оси Ox

Спроектируем векторы N и Q на координатные оси, обозначив

$$N_x = N_1; N_y = N_2; N_z = N_3; Q_x = N_4; Q_y = N_5; Q_z = N_6.$$

Тогда получим

$$N_j = -\rho \sum_{k=1}^6 U_k \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (j=1, 2, \dots, 6). \quad (2.4)$$

Обозначив далее

$$-\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = M_{jk},$$

будем иметь

$$N_j = \sum_{k=1}^6 M_{jk} U_k. \quad (2.5)$$

В системе координат, неизменно связанной с телом, граничные условия (2.3), а следовательно, и функции Φ_k , не зависят от времени. В связи с этим, будучи определенными в этой системе, величины M_{jk} также не зависят от времени и полностью определяются формой тела и выбором системы координат.

Они имеют размерность массы ($j, k = 1, 2, 3$), статического момента массы ($j = 1, 2, 3, k = 4, 5, 6$ или $j = 4, 5, 6, k = 1, 2, 3$), момента инерции массы ($j, k = 4, 5, 6$) и называются присоединенными массами или коэффициентами присоединенных масс, так как в уравнениях движения присоединяются (добавляются) к инерционным характеристикам самого тела (массе, статическим моментам, моментам инерции). Иногда, соответственно размерности, величины M_{jk} называют присоединенными массами, присоединенными статическими моментами или присоединенными моментами инерции.

Очевидно, что M_{jk} представляют собой некоторые коэффициенты, через которые выражается j -я проекция гидродинамической инерционной силы или момента при k -м виде движения тела. Если все компоненты скорости тела U_k суть малые первого порядка, то в соответствии с формулами (2.1) и (2.5) эта проекция определяется выражением

$$F_j = - \sum_{k=1}^6 M_{jk} \dot{U}_k, \quad (j=1, 2, \dots, 6),$$

где точка над буквой, как обычно, представляет собой символ дифференцирования по времени.

Индексы j и k имеют, очевидно, следующий смысл: $j = 1$ определяет проекцию силы на ось Ox , $j = 2$ — на ось Oy , $j = 3$ — на ось Oz ; $j = 4$ — проекцию момента на ось Ox , $j = 5$ — на ось Oy , $j = 6$ — на ось Oz . Аналогично индексы $k = 1, 2, 3$ определяют проекции линейной скорости полюса соответственно на оси Ox, Oy, Oz , а $k = 4, 5, 6$ — проекции угловой скорости на те же оси.

потенциалы скоростей пространственного обтекания известны только для небольшого числа тел простейшей формы (шара, эллипсоида вращения, трехосного эллипсоида). Для плоских контуров присоединенные массы определяются значительно проще в связи с тем, что единичные потенциалы Φ_k могут быть найдены сравнительно легко с помощью методов конформных отображений или гидродинамических особенностей.

Поскольку корабль представляет собой удлиненное вдоль оси Ox тело, интегралы по его поверхности S можно представить в виде

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_l f(x, y, z) dl dx, \quad (2.6)$$

где L — длина корабля, а l — контур шпангоута. В этой и дальнейших формулах настоящей главы начало подвижной системы координат располагается в точке пересечения плоскостей миделя, диаметральной и ватерлинии; если рассматривается полностью погруженный контур, то ось Oy считается расположенной посередине его высоты, а плоскость контура обозначается через Oyz .

На основании формулы (2.6) имеем

$$M_{jk} = -\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left(-\rho \int_l \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl \right) dx. \quad (2.7)$$

Для двумерного обтекания контура, расположенного в плоскости Oyz , единичные потенциалы Φ_k и Φ_j имеют смысл лишь когда $j, k = 2, 3, 4$. При этих значениях индексов выражение, стоящее в скобках в формуле (2.7), представляет собой присоединенную массу шпангоута μ_{jk}

$$\mu_{jk} = -\rho \int_l \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl \quad (2.8)$$

и, следовательно,

$$M_{jk} = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{jk} dx \quad (j, k = 2, 3, 4). \quad (2.9)$$

Таким образом, на основе метода плоских сечений могут быть непосредственно вычислены присоединенные массы M_{22} , M_{33} , M_{24} , M_{44} . Для вычисления присоединенных масс, отвечающих остальным сочетаниям индексов, воспользуемся следующими соотношениями, справедливыми для удлиненного вдоль оси Ox тела:

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = z \cos(n, x) - x \cos(n, z) \approx -x \cos(n, z) = -x \frac{\partial \Phi_3}{\partial n};$$

$$\Phi_5 = -x \Phi_3;$$

$$\frac{\partial \Phi_6}{\partial n} = x \cos(n, y) - y \cos(n, x) \approx x \cos(n, y) = x \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}; \quad \Phi_6 = x \Phi_2.$$

$$M_{55}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{33} (x - x_0)^2 dx = M_{55} + 2x_0 M_{35} + x_0^2 M_{33}.$$

Для учета конечности удлинения корабля, т. е. трехмерного характера обтекания, к величинам M_{jk} (или M_{jk}^0), вычисленным по методу плоских сечений, можно ввести поправочный множитель ζ_L , определяемый эмпирической формулой Пабста

$$\zeta_L = \frac{\frac{L}{B}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{B}\right)^2}} \left[1 - 0,425 \frac{\frac{L}{B}}{1 + \left(\frac{L}{B}\right)^2} \right],$$

где, очевидно, L — длина, а B — ширина корабля.

Наряду с формулой Пабста, коэффициент ζ_L может быть вычислен по более простой формуле А. С. Повицкого

$$\zeta_L = \frac{1}{1 + 0,8 \frac{B}{L}}.$$

Однако этими формулами учитывается только влияние носового и кормового заострений корабля и не принимается во внимание отклонение линий тока от плоскостей шпангоутов, связанное с наличием хода. Поэтому введение в расчет множителя ζ_L вряд ли может существенно уточнить результаты, полученные по методу плоских сечений.

Определим в качестве простейших примеров присоединенные массы круга и эллипса, расположенных в плоскости Oyz в безграничной жидкости.

Если круг радиуса a движется вдоль оси Oz с единичной скоростью, то, как известно из гидромеханики, потенциал скоростей возмущенного движения жидкости будет иметь вид

$$\Phi_3 = -\frac{a^2 z}{y^2 + z^2}.$$

На контуре круга, т. е. при $y^2 + z^2 = a^2$, получим

$$\Phi_3 = -z$$

и, следовательно, учитывая выражения (2.8) и (2.3), можем написать

$$\mu_{33} = -\rho \int_l \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dl = \rho \int_l z \cos(n, z) dl.$$

Преобразуем интеграл по замкнутому контуру l , лежащему в плоскости Oyz , в интеграл по ограниченной этим контуром пло-

$$= \rho \frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT} \iint_{\omega} (y^2 - z^2) d\omega.$$

Но, как известно,

$$\iint_{\omega} y^2 d\omega = j_z = \frac{\pi b^3 T}{32}; \quad \iint_{\omega} z^2 d\omega = j_y = \frac{\pi b T^3}{8},$$

где j_z и j_y — моменты инерции площади эллипса относительно соответствующих осей. Таким образом,

$$\mu_{44} = \frac{\rho\pi}{8} \left(\frac{b^2}{4} - T^2 \right)^2.$$

Интересно отметить, что для эллипса μ_{22} не зависит от b , а μ_{33} — от T . Отсюда следует, что формула, определяющая μ_{22} для эллипса, будет справедлива и для вертикальной пластинки высотой $2T$ и длиной вдоль оси Ox , равной единице. Аналогично формула, определяющая μ_{33} для эллипса, будет одновременно определять собой присоединенную массу горизонтальной пластинки шириной $2b$ и длиной, равной единице.

§ 7. Присоединенные массы шпангоутных контуров

Способ вычисления присоединенных масс шпангоутных контуров, получивший широкое распространение в практике расчетов качки, был разработан в 1929 г. Ф. Льюисом. Им предложена следующая функция, реализующая конформное отображение внешности единичного круга в плоскости комплексного переменного τ на внешность контуров, близких по форме к дублированным относительно ватерлинии корабельным шпангоутам в плоскости ζ :

$$\zeta = y + iz = ia_0(\tau + a_1\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}). \quad (2.12)$$

Здесь a_0 , a_1 и a_3 — действительные постоянные, причем a_0 выражается через a_1 , a_3 и осадку шпангоута T :

$$a_0 = -\frac{T}{1 + a_1 + a_3}. \quad (2.13)$$

Таким образом, контур Льюиса определяется коэффициентами a_1 , a_3 , которые должны быть выражены через параметры реального шпангоута.

На контуре единичного круга имеем

$$\tau = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.14)$$

Подставляя это равенство в формулу (2.12) и отделяя действитель-

Таблица 1. Значения коэффициентов a_1 и a_3 для контуров формы Льюиса

$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β						
	0,5	0,6	0,7	$\pi/4$	0,8	0,9	1,0
0,2	-0,735 0,102	-0,711 0,066	-0,687 0,030	-0,667 0	-0,663 -0,005	-0,639 -0,041	-0,616 -0,076
0,4	-0,492 0,150	-0,470 0,097	-0,448 0,044	-0,428 0	-0,425 -0,008	-0,402 -0,060	-0,380 -0,113
0,6	-0,294 0,174	-0,278 0,112	-0,263 0,051	-0,250 0	-0,248 -0,009	-0,233 -0,069	-0,218 -0,129
0,8	-0,132 0,184	-0,124 0,118	-0,117 0,054	-0,111 0	-0,110 -0,009	-0,103 -0,073	-0,095 -0,138
1,0	0 0,186	0 0,119	0 0,055	0 0	0 -0,009	0 -0,074	0 -0,141
1,2	0,108 0,184	0,102 0,118	0,096 0,054	0,091 0	0,090 -0,009	0,084 -0,073	0,078 -0,139
1,4	0,197 0,181	0,186 0,116	0,176 0,053	0,167 0	0,165 -0,009	0,155 -0,071	0,144 -0,136
1,6	0,272 0,176	0,257 0,113	0,243 0,052	0,231 0	0,229 -0,009	0,215 -0,069	0,200 -0,132
1,8	0,334 0,170	0,317 0,110	0,300 0,050	0,286 0	0,283 -0,009	0,266 -0,067	0,249 -0,128
2,0	0,388 0,164	0,369 0,106	0,345 0,048	0,333 0	0,330 -0,008	0,312 -0,065	0,292 -0,124
3,0	0,569 0,138	0,544 0,089	0,520 0,041	0,500 0	0,496 -0,007	0,472 -0,055	0,448 -0,104
4,0	0,670 0,118	0,646 0,076	0,621 0,035	0,600 0	0,596 -0,006	0,572 -0,047	0,547 -0,088
5,0	0,734 0,102	0,710 0,066	0,687 0,030	0,666 0	0,664 -0,005	0,640 -0,040	0,616 -0,076
6,0	0,778 0,090	0,756 0,058	0,734 0,026	0,714 0	0,711 -0,004	0,688 -0,036	0,666 -0,067
7,0	0,810 0,080	0,789 0,052	0,768 0,024	0,750 0	0,747 -0,004	0,726 -0,032	0,705 -0,060
8,0	0,834 0,072	0,814 0,046	0,794 0,022	0,778 0	0,775 -0,004	0,756 -0,028	0,736 -0,054
9,0	0,852 0,066	0,834 0,042	0,816 0,020	0,800 0	0,798 -0,003	0,779 -0,026	0,761 -0,049
10,0	0,868 0,060	0,850 0,039	0,833 0,018	0,818 0	0,816 -0,003	0,798 -0,024	0,781 -0,045

которые в теории функций комплексного переменного называются условиями или уравнениями Коши — Римана.

С учетом этих соотношений и формул для направляющих косинусов нормали к контуру

$$\cos(n, y) = \frac{dz}{dl}; \quad \cos(n, z) = -\frac{dy}{dl},$$

где dl — длина элемента контура, нормальную составляющую скорости жидкости можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n, z) = \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{dz}{dl} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dl} = \frac{\partial \Psi}{\partial l}. \end{aligned}$$

Но нормальная составляющая скорости на движущемся контуре должна удовлетворять условию обтекания

$$v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) + U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)],$$

где U_2 и U_3 — проекции линейной скорости полюса (точки O пересечения вертикальной оси симметрии контура и ватерлинии) соответственно на оси Oy и Oz , а U_4 — угловая скорость вращения контура вокруг перпендикулярной его плоскости оси Ox .

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = U_2 \frac{dz}{dl} - U_3 \frac{dy}{dl} - U_4 \left(y \frac{dy}{dl} + z \frac{dz}{dl} \right),$$

или

$$d\Psi = U_2 dz - U_3 dy - U_4 (y dy + z dz).$$

Интегрируя это выражение, получаем (с точностью до несущественной аддитивной постоянной) следующую формулу для функции тока:

$$\Psi = U_2 z - U_3 y - \frac{U_4}{2} (y^2 + z^2).$$

Если теперь, аналогично потенциалу скоростей возмущенного движения жидкости, представить функцию тока в виде

$$\Psi = \sum_{k=2}^4 U_k \Psi_k$$

и приравнять в двух последних формулах коэффициенты при одинаковых компонентах скорости контура U_k , получим следующие выражения для функций Ψ_k :

$$\Psi_2 = z; \quad \Psi_3 = -y; \quad \Psi_4 = -\frac{1}{2} (y^2 + z^2).$$

Но поскольку

$$\zeta = y + iz, \text{ а } \Psi_k = \text{Im } W_k,$$

и

$$\frac{\zeta\bar{\zeta}}{2} = \frac{T^2}{(1+a_1+a_3)^2} \left[\frac{1}{2} (1+a_1^2+a_3^2) + a_1(1+a_3)\cos 2\theta + a_3\cos 4\theta \right].$$

Но согласно (2.20)

$$\operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left(-i \frac{\zeta\bar{\zeta}}{2} \right).$$

Тогда, отбросив в произведении $\zeta\bar{\zeta}$ постоянное слагаемое (напомним, что потенциал и функция тока всегда определяются с точностью до аддитивной постоянной), получим

$$\operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left\{ - \frac{iT^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3)\cos 2\theta + a_3\cos 4\theta] \right\}.$$

Поскольку на единичной окружности имеет место соотношение

$$\operatorname{Im}(i\tau^{-n}) = \operatorname{Im}[i(\cos n\theta - i\sin n\theta)] = \cos n\theta$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Im}(i\cos n\theta) = \operatorname{Im}(i\tau^{-n}),$$

выражение для мнимой части комплексного потенциала W_4 можно представить в несколько ином виде

$$\operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left\{ - \frac{iT^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3)\tau^{-2} + a_3\tau^{-4}] \right\}. \quad (2.27)$$

Итак, в точках единичной окружности мнимые части комплексных потенциалов W_2 , W_3 и W_4 равны соответственно мнимым частям функций, стоящих в фигурных скобках формул (2.25), (2.26) и (2.27). Кроме того, функции W_k , как известно из гидромеханики плоского безвихревого движения, являются аналитическими во всей области, занятой жидкостью. Пользуясь этим их свойством, нетрудно доказать, что действительные части соответствующих функций также оказываются равными.

В самом деле, пусть у нас есть две аналитические функции:

$$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1;$$

$$f_2 = \varphi_2 + i\psi_2$$

комплексного переменного $\zeta = y + iz$. Функции $\varphi_{1,2}$ и $\psi_{1,2}$ должны в этом случае удовлетворять условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = - \frac{\partial \psi_2}{\partial y}.$$

Если $\psi_1 = \psi_2$, то, очевидно,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

что дает нам право написать следующие равенства, справедливые с точностью до несущественного постоянного слагаемого:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{и} \quad f_1 = f_2.$$

Докажем теперь справедливость представлений (2.11) для функций Φ_k ($k = 2, 3, 4$) на контуре эллипса с полуосями $b/2$ и T . Положив в формулах (2.15) и (2.17) постоянную $a_3 = 0$, найдем

$$\frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{2T}{b}, \quad \text{или} \quad a_1 = \frac{\frac{2T}{b} - 1}{\frac{2T}{b} + 1}$$

и, кроме того,

$$\sin \theta = \frac{1+a_1}{1-a_1} \frac{y}{T} = \frac{2y}{b}; \quad \cos \theta = -\frac{z}{T}.$$

Воспользовавшись выражениями (2.30) при $a_3 = 0$, получим:

$$\Phi_2 = -T \sin \theta = -\frac{2T}{b} y;$$

$$\Phi_3 = T \frac{1-a_1}{1+a_1} \cos \theta = -\frac{b}{2T} z;$$

$$\Phi_4 = -T^2 \frac{a_1}{(1+a_1)^2} \sin 2\theta = 2 \frac{a_1}{1-a_1^2} yz = -\frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT} yz.$$

Таким образом, справедливость приведенных ранее без вывода формул (2.11) доказана.

Вернемся к определению присоединенных масс контуров формы Льюиса. Подставляя выражения для Φ_k и $d\Psi_j$ в формулу (2.29) и имея в виду, что точкам контура, лежащим на ватерлинии, соответствуют значения угла θ , равные $-\pi/2$ и $\pi/2$ (угол θ , как уже упоминалось, отсчитывается от отрицательного направления мнимой оси), получим

$$\mu_{22} = \frac{\rho T^2}{(1+a_1+a_3)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1+a_1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta] \times \\ \times [(1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta] d\theta;$$

$$\mu_{33} = \frac{\rho T^2}{(1+a_1+a_3)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(a_1-1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta] \times \\ \times [(a_1-1) \cos \theta + 3a_3 \cos 3\theta] d\theta;$$

$$\mu_{44} = \frac{2\rho T^4}{(1+a_1+a_3)^4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + a_3 \sin 4\theta] \times \\ \times [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + 2a_3 \sin 4\theta] d\theta.$$

либо по формуле

$$\mu_{42} = -\rho \int \Phi_2 d\Psi_4.$$

Подставляя в эти формулы выражения для Φ_2 , Φ_4 , Ψ_2 и Ψ_4 , можем написать

$$\mu_{24} = \frac{\rho T^3}{(1 + a_1 + a_3)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a_1 (1 + a_3) \sin 2\theta + a_3 \sin 4\theta] \times \\ \times [(1 + a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta] d\theta;$$

$$\mu_{42} = \frac{2\rho T^3}{(1 + a_1 + a_3)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + a_1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta] \times \\ \times [a_1 (1 + a_3) \sin 2\theta + 2a_3 \sin 4\theta] d\theta.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{4}{3}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \sin 4\theta d\theta = -\frac{8}{15}; \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2\theta \sin 3\theta d\theta = \frac{4}{5}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 3\theta \sin 4\theta d\theta = \frac{8}{7},$$

получим

$$\mu_{24} = \frac{4\rho T^3}{(1 + a_1 + a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1 (1 + a_1) (1 + a_3) - \right. \\ \left. - a_3 \left[\frac{2}{15} (1 + a_1) - \frac{3}{5} a_1 (1 + a_3) - \frac{6}{7} a_3 \right] \right\}; \quad (2.34)$$

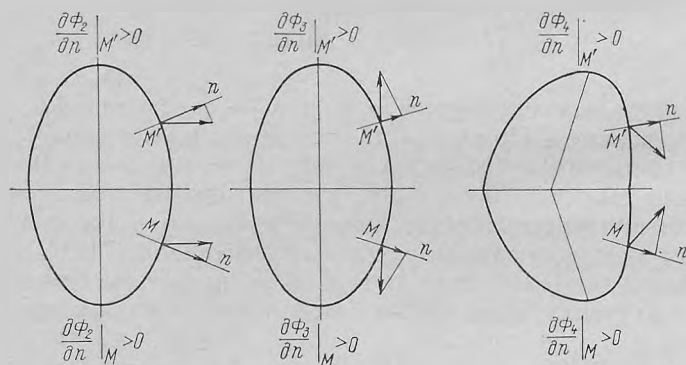
$$\mu_{42} = \frac{8\rho T^3}{(1 + a_1 + a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1 (1 + a_1) (1 + a_3) - \right. \\ \left. - a_3 \left[\frac{4}{15} (1 + a_1) - \frac{1}{5} a_1 (1 + a_3) - \frac{4}{7} a_3 \right] \right\}. \quad (2.35)$$

Таким образом, $\mu_{42} \neq \mu_{24}$; в частности, для полуэллиптического шпангоута ($a_3 = 0$) μ_{42} оказывается вдвое больше, чем μ_{24} . Это противоречит выводу М. Д. Хаскинда о том, что при колебаниях дублированного относительно ватерлинии шпангоутного контура должно сохраняться свойство парности присоединенных масс, т. е. равенство $\mu_{jh} = \mu_{hj}$. Причина указанного противоречия состоит в том, что полученное выше выражение для μ_{42} соответствует колебаниям с предельно малой, а для μ_{24} — с неограниченно большой частотой. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Если гармонические колебания частично или полностью погруженного в жидкость тела сопровождаются волнообразованием,

Таким образом, зная знаки $\partial\Phi_k/\partial n$, т. е. зная, по каким нормальным (внешним или внутренним) направлены нормальные компоненты векторов скорости, нетрудно установить и направление самих векторов, т. е. найти направление движения верхней и нижней половинок дублированного контура.

Как видно из рис. 2.3, в случае четного продолжения граничных условий на зеркальное отражение контура в верхней полуплоскости, при горизонтальных колебаниях контур движется как единое целое, а при вертикальных и угловых колебаниях его половинки движутся в противоположных направлениях. Таким образом, при $v = 0$ колебаниям контура как единого целого отве-



2.3. Четное продолжение граничных условий на контуре в верхнюю полуплоскость.

чает функция Φ_2 и присоединенные массы μ_{22} и μ_{42} , определенные через эту функцию, отвечают колебаниям с предельно малой частотой.

В другом предельном случае ($v \rightarrow \infty$, $\Phi_k = 0$ при $z = 0$) вертикальная скорость частиц $\partial\Phi_k/\partial z$ может иметь любое значение, т. е. частицы, образующие свободную поверхность, могут беспрепятственно перемещаться в вертикальном направлении. Это значит, что при высокочастотных колебаниях ускорение силы тяжести пренебрежимо мало по сравнению с ускорением колеблющихся частиц и жидкость может рассматриваться как невесомая. Такая модель используется в теории удара тела о жидкость.

Условие $\Phi_k = 0$ при $z = 0$ допускает нечетное продолжение функций Φ_k в верхнюю полуплоскость и граничных условий на контуре на его зеркальное отражение. Нечетное продолжение граничных условий означает, что в симметричных относительно

то, воспользовавшись полученными выше выражениями (2.31) и (2.33) — (2.35) для μ_{jk} , найдем

$$\left. \begin{aligned} m_{22} &= \frac{(1+a_1)^2 + 3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2}; & m_{33} &= \frac{(1-a_1)^2 + 3a_3^2}{(1-a_1+a_3)^2}; \\ m_{44} &= \frac{a_1^2(1+a_3)^2 + 2a_3^2}{(1+a_1+a_3)^3}; \\ m_{24} &= \frac{4}{\pi(1+a_1+a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1(1+a_1)(1+a_3) - \right. \\ &\quad \left. - a_3 \left[\frac{2}{15}(1+a_1) - \frac{3}{5} a_1(1+a_3) - \frac{6}{7} a_3 \right] \right\}; \\ m_{42} &= \frac{8}{\pi(1+a_1+a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1(1+a_1)(1+a_3) - \right. \\ &\quad \left. - a_3 \left[\frac{4}{15}(1+a_1) - \frac{1}{5} a_1(1+a_3) - \frac{4}{7} a_3 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

При расчете значений присоединенных масс на основе метода плоских сечений для корабля в целом можно считать, что распределение по длине присоединенных масс μ_{22} и μ_{33} достаточно хорошо описывается формулами

$$\mu_{22} = \mu_{022} \left(\frac{z}{T} \right)^2; \quad \mu_{33} = \mu_{033} \left(\frac{b}{B} \right)^2, \quad (2.39)$$

где b — ширина шпангоута по ватерлинии, z — аппликата нулевого батокса в плоскости данного шпангоута, или, иначе говоря, осадка этого шпангоута с обратным знаком, μ_{022} и μ_{033} — присоединенные массы мидель-шпангоута.

Зададимся уравнениями ватерлинии равновесия и нулевого батокса в виде:

$$\begin{aligned} b &= B \left[1 - \left(\frac{2|x|}{L} \right)^n \right]; \\ z &= -T \left[1 - \left(\frac{2|x|}{L} \right)^m \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Вычисляя площадь ватерлинии S_0 , которая с одной стороны равна

$$S_0 = 2 \int_0^{L/2} b dx = 2B \int_0^{L/2} \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^n \right] dx = LB \frac{n}{n+1},$$

а с другой

$$S_0 = \alpha LB,$$

Подставляя последнее равенство в выражения (2.31) и (2.34), найдем

$$\mu_{44} = \frac{\rho \pi T^4}{16} \left[1 - \left(\frac{b}{2T} \right)^2 \right]^2;$$

$$\mu_{24} = \frac{\rho T^3}{3} \left[1 - \left(\frac{b}{2T} \right)^2 \right].$$

При определении присоединенных масс миделя μ_{044} и μ_{024} в последних формулах следует под b понимать ширину корабля B . Таким образом, считая для простоты нулевой батокс прямоугольником, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mu_{44} &= \mu_{044} \frac{\left[1 - \left(\frac{b}{2T} \right)^2 \right]^2}{\left[1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \right]^2}; \\ \mu_{24} &= \mu_{024} \frac{1 - \left(\frac{b}{2T} \right)^2}{1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Воспользовавшись уравнением ватерлинии в форме (2.40), можем написать

$$M_{44} = \frac{2\mu_{044}}{\left[1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \right]^2} \int_0^{L/2} \left\{ 1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^n \right]^2 \right\}^2 dx;$$

$$M_{24} = \frac{2\mu_{024}}{1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2} \int_0^{L/2} \left\{ 1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^n \right]^2 \right\} dx.$$

Проинтегрировав и выразив n через α по формуле (2.41), получим

$$M_{44} = \mu_{044} L \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \right]^2} \left[\left(\frac{B}{2T} \right)^4 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \frac{4\alpha^2}{1 + \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{24\alpha^4}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)} \right];$$

$$M_{24} = \mu_{024} L \frac{1}{1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2} \left[1 - \left(\frac{B}{2T} \right)^2 \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \right].$$

Если рассматривать погруженную часть диаметральной плоскости (нулевого батокса) как прямоугольник и подставить в полученные выше формулы для M_{ik} значения присоединенных масс

Поскольку в выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{i\sigma t}$, повсюду принимается во внимание только действительная часть (вследствие такого условия символ Re в этих выражениях, как обычно, опущен), последние уравнения можно переписать в виде

$$\eta_k = A_k^{\pm} \cos(\sigma t \mp \nu y).$$

Таким образом, если уравнение профиля волны имеет форму (2.45), то абсциссы вершин волн ($\eta_k = A_k^{\pm}$) определяются из выражения

$$\cos(\sigma t - \nu y) = 1,$$

или

$$\sigma t - \nu y = 2n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда получаем следующую формулу для абсцисс вершин:

$$y = \frac{\sigma}{\nu} t - \frac{2n\pi}{\nu}.$$

Из этой формулы видно, что вершина волны, а с ней и весь волновой профиль, перемещается вдоль положительной оси Oy со скоростью σ/ν .

Совершенно аналогично доказывается, что вершинам волн, профиль которых описывается уравнением (2.46), соответствуют абсциссы

$$y = -\frac{\sigma}{\nu} t + 2\frac{n\pi}{\nu}.$$

Это значит, что с течением времени абсцисса вершины уменьшается, т. е. волновой профиль движется вдоль отрицательной оси Oy . Но в рамках линейной теории волн функция $\Phi_k(y, 0, t)$ — потенциал скоростей движения жидкости, вызванного k -м видом колебаний контура, определенный в точках плоскости $z = 0$, и ординаты волнового профиля η_k связаны соотношением

$$\eta_k = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_k(y, 0, t)}{\partial t}. \quad (2.47)$$

Кроме того, функции Φ_k должны удовлетворять условию отсутствия вызванных скоростей на неограниченно большой глубине ($z \rightarrow -\infty$). Это условие приводит к формуле

$$\Phi_k(y, z, t) = \Phi_k(y, 0, t) e^{\nu z}. \quad (2.48)$$

Таким образом, на основании выражений (2.47) и (2.48) можем написать

$$\Phi_k(y, z, t) = -g e^{\nu z} \int_0^t \eta_k d\tau,$$

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,00	1,50	0,500	0,491	0,446	0,375	0,286	0,182
	1,75	0,488	0,483	0,444	0,376	0,289	0,190
	2,00	0,478	0,472	0,439	0,376	0,294	0,198
	2,25	0,467	0,462	0,431	0,375	0,299	0,209
	2,50	0,457	0,451	0,422	0,370	0,301	0,219
	2,75	0,447	0,440	0,412	0,364	0,300	0,224
	3,00	0,437	0,429	0,402	0,356	0,294	0,221
	3,25	0,427	0,418	0,391	0,345	0,282	0,198
1,25	0,25	0,377	0,342	0,309	0,275	0,240	0,204
	0,50	0,463	0,419	0,367	0,305	0,223	0,122
	0,75	0,472	0,421	0,358	0,279	0,192	0,104
	1,00	0,456	0,412	0,345	0,266	0,179	0,088
	1,25	0,428	0,397	0,334	0,257	0,171	0,084
	1,50	0,400	0,378	0,323	0,249	0,167	0,081
	1,75	0,375	0,357	0,311	0,243	0,164	0,084
	2,00	0,353	0,336	0,297	0,237	0,163	0,086
	2,25	0,332	0,317	0,282	0,229	0,163	0,090
	2,50	0,313	0,298	0,266	0,219	0,161	0,096
	2,75	0,295	0,280	0,250	0,208	0,155	0,097
	3,00	0,278	0,263	0,235	0,195	0,146	0,091
	3,25	0,261	0,247	0,219	0,180	0,132	0,069
1,50	0,25	0,342	0,306	0,272	0,235	0,197	0,158
	0,50	0,441	0,391	0,332	0,264	0,180	0,085
	0,75	0,440	0,384	0,315	0,233	0,150	0,075
	1,00	0,415	0,365	0,293	0,214	0,135	0,060
	1,25	0,377	0,341	0,276	0,202	0,126	0,054
	1,50	0,341	0,315	0,261	0,191	0,120	0,050
	1,75	0,309	0,289	0,245	0,183	0,115	0,051
	2,00	0,281	0,263	0,228	0,175	0,113	0,050
	2,25	0,256	0,240	0,210	0,166	0,111	0,053
	2,50	0,233	0,219	0,192	0,154	0,108	0,056
	2,75	0,212	0,199	0,175	0,142	0,101	0,056
	3,00	0,193	0,161	0,158	0,128	0,091	0,050
	3,25	0,175	0,163	0,142	0,113	0,076	0,029
1,75	0,25	0,310	0,274	0,241	0,205	0,165	0,127
	0,50	0,427	0,373	0,311	0,239	0,157	0,071
	0,75	0,421	0,361	0,290	0,210	0,133	0,071
	1,00	0,389	0,337	0,265	0,189	0,118	0,057
	1,25	0,346	0,309	0,246	0,176	0,109	0,051
	1,50	0,305	0,280	0,229	0,166	0,103	0,046
	1,75	0,269	0,251	0,212	0,157	0,099	0,046
	2,00	0,238	0,224	0,194	0,149	0,096	0,044
	2,25	0,211	0,200	0,175	0,139	0,094	0,046
	2,50	0,187	0,177	0,157	0,127	0,090	0,048

Таблица 3. Значения коэффициента m_{33} для контуров формы Льюиса

$\sqrt{T}$	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,25	0,25	0,951	0,933	0,844	0,786	0,757	0,752
	0,50	0,949	0,869	0,838	0,835	0,854	0,905
	0,75	0,939	0,890	0,862	0,861	0,895	0,986
	1,00	0,950	0,901	0,877	0,880	0,933	1,079
	1,25	0,959	0,901	0,881	0,895	0,954	1,105
	1,50	0,966	0,894	0,872	0,905	0,987	1,146
	1,75	0,972	0,886	0,854	0,896	1,037	1,316
	2,00	0,977	0,876	0,831	0,867	1,023	1,368
	2,25	0,981	0,866	0,806	0,823	0,954	1,260
	2,50	0,985	0,856	0,782	0,778	0,874	1,117
	2,75	0,987	0,847	0,758	0,735	0,802	0,996
	3,00	0,989	0,838	0,736	0,696	0,739	0,901
	3,25	0,990	0,830	0,717	0,663	0,688	0,830
0,50	0,25	0,705	0,715	0,677	0,653	0,647	0,657
	0,50	0,742	0,686	0,671	0,688	0,739	0,832
	0,75	0,697	0,658	0,645	0,666	0,738	0,880
	1,00	0,671	0,631	0,622	0,651	0,745	0,949
	1,25	0,651	0,603	0,599	0,640	0,744	0,955
	1,50	0,636	0,577	0,571	0,631	0,758	0,981
	1,75	0,625	0,554	0,541	0,609	0,790	1,120
	2,00	0,615	0,534	0,510	0,573	0,768	1,161
	2,25	0,607	0,516	0,481	0,528	0,698	1,049
	2,50	0,601	0,500	0,454	0,482	0,616	0,899
	2,75	0,596	0,487	0,429	0,439	0,541	0,765
	3,00	0,591	0,474	0,407	0,401	0,476	0,658
	3,25	0,586	0,464	0,387	0,368	0,422	0,574
0,75	0,25	0,581	0,608	0,602	0,602	0,612	0,633
	0,50	0,666	0,629	0,631	0,669	0,751	0,882
	0,75	0,609	0,584	0,588	0,635	0,743	0,928
	1,00	0,567	0,540	0,550	0,608	0,742	0,997
	1,25	0,533	0,499	0,516	0,588	0,735	0,997
	1,50	0,507	0,464	0,480	0,572	0,744	1,020
	1,75	0,486	0,433	0,444	0,545	0,773	1,156
	2,00	0,469	0,408	0,409	0,506	0,747	1,195
	2,25	0,455	0,386	0,377	0,457	0,670	1,073
	2,50	0,444	0,367	0,348	0,408	0,580	0,903
	2,75	0,434	0,350	0,321	0,362	0,496	0,747
	3,00	0,425	0,336	0,297	0,320	0,423	0,622
	3,25	0,417	0,323	0,276	0,284	0,361	0,524
1,00	0,25	0,498	0,535	0,552	0,569	0,592	0,621
	0,50	0,629	0,609	0,625	0,682	0,789	0,943
	0,75	0,571	0,557	0,579	0,649	0,786	0,997
	1,00	0,520	0,507	0,536	0,620	0,787	1,072
	1,25	0,479	0,460	0,498	0,598	0,779	1,071

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,75	2,75	0,305	0,288	0,324	0,423	0,586	0,760
	3,00	0,292	0,270	0,292	0,362	0,470	0,561
	3,25	0,281	0,253	0,263	0,308	0,374	0,439
2,00	0,25	0,300	0,352	0,418	0,476	0,528	0,573
	0,50	0,579	0,604	0,661	0,764	0,917	1,067
	0,75	0,542	0,569	0,642	0,767	0,946	1,154
	1,00	0,490	0,522	0,607	0,749	0,962	1,243
	1,25	0,445	0,476	0,574	0,734	0,963	1,248
	1,50	0,410	0,435	0,536	0,723	0,980	1,284
	1,75	0,381	0,401	0,497	0,696	1,019	1,421
	2,00	0,358	0,372	0,458	0,650	0,990	1,482
	2,25	0,340	0,346	0,419	0,586	0,883	1,310
	2,50	0,324	0,323	0,381	0,516	0,741	1,001
	2,75	0,311	0,303	0,345	0,445	0,596	0,697
	3,00	0,298	0,284	0,311	0,379	0,468	0,484
	3,25	0,286	0,266	0,280	0,320	0,364	0,380

Как показывают вычисления, M_{22} и M_{33} имеют тот же порядок, что и масса корабля, M_{55} и M_{66} — порядок момента инерции массы корабля относительно центральной поперечной оси. Величина M_{44} составляет обычно 25—40% от момента инерции массы корабля относительно продольной оси.

§ 8. Демпфирование

Демпфирование (сопротивление воды колебаниям) обусловлено тем, что качающийся корабль затрачивает энергию на преодоление сил трения, вихреобразование и волнообразование. Таким образом, демпфирование состоит из вязкостной составляющей, связанной с трением и вихреобразованием, и волновой составляющей.

Как уже говорилось, в гидродинамической теории качки вода рассматривается как идеальная жидкость и вследствие этого принимается во внимание только волновая составляющая демпфирования.

Демпфирующие силы волновой природы линейно зависят от скорости колебаний. Таким образом, коэффициенты демпфирования представляют собой коэффициенты пропорциональности между соответствующими силами (моментами) и первыми степенями линейных или угловых скоростей качки.

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,00	1,50	0,018	0,021	0,018	0,015	0,015	0,023
	1,75	0,018	0,023	0,024	0,022	0,020	0,022
	2,00	0,018	0,024	0,027	0,026	0,023	0,021
	2,25	0,018	0,024	0,028	0,029	0,027	0,022
	2,50	0,018	0,024	0,028	0,030	0,029	0,024
	2,75	0,017	0,023	0,027	0,029	0,029	0,026
	3,00	0,016	0,021	0,025	0,028	0,028	0,026
	3,25	0,016	0,020	0,024	0,026	0,026	0,023
1,25	0,25	10,39	10,63	9,263	8,211	7,550	7,343
	0,50	0,764	0,586	0,451	0,407	0,504	0,503
	0,75	0,123	0,072	0,037	0,028	0,061	0,153
	1,00	0,039	0,020	0,005	0,000	0,013	0,052
	1,25	0,025	0,021	0,010	0,005	0,009	0,026
	1,50	0,015	0,020	0,017	0,012	0,012	0,018
	1,75	0,016	0,021	0,021	0,018	0,015	0,017
	2,00	0,015	0,020	0,023	0,022	0,018	0,016
	2,25	0,014	0,019	0,023	0,023	0,021	0,016
	2,50	0,013	0,018	0,021	0,023	0,022	0,018
	2,75	0,011	0,016	0,019	0,022	0,022	0,019
	3,00	0,010	0,014	0,017	0,019	0,020	0,018
	3,25	0,009	0,012	0,015	0,017	0,017	0,015
1,50	0,25	9,370	9,480	8,225	7,322	6,835	6,804
	0,50	0,693	0,529	0,415	0,396	0,512	3,355
	0,75	0,110	0,063	0,032	0,028	0,061	0,150
	1,00	0,037	0,019	0,005	0,000	0,012	0,050
	1,25	0,025	0,020	0,010	0,005	0,008	0,025
	1,50	0,012	0,019	0,017	0,012	0,011	0,017
	1,75	0,014	0,019	0,020	0,017	0,014	0,016
	2,00	0,012	0,018	0,021	0,020	0,017	0,015
	2,25	0,011	0,017	0,021	0,022	0,019	0,015
	2,50	0,010	0,014	0,019	0,021	0,021	0,017
	2,75	0,008	0,012	0,016	0,019	0,020	0,018
	3,00	0,007	0,010	0,014	0,016	0,018	0,017
	3,25	0,005	0,008	0,011	0,014	0,015	0,013
1,75	0,25	8,469	8,464	7,324	6,561	6,226	6,339
	0,50	0,642	0,490	0,393	0,393	0,521	1,029
	0,75	0,101	0,057	0,030	0,028	0,058	0,147
	1,00	0,035	0,018	0,004	0,000	0,011	0,049
	1,25	0,025	0,020	0,010	0,005	0,008	0,025
	1,50	0,009	0,018	0,017	0,012	0,011	0,017
	1,75	0,012	0,018	0,020	0,017	0,014	0,017
	2,00	0,011	0,017	0,021	0,020	0,017	0,016
	2,25	0,009	0,015	0,019	0,021	0,020	0,016
	2,50	0,007	0,012	0,017	0,020	0,021	0,019

Таблица 5. Значения коэффициента m_{24} для контуров формы Льюиса

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,25	0,25	—2,601	—2,928	—3,099	—3,212	—3,229	—3,100
	0,50	—0,729	—0,772	—0,779	—0,727	—0,590	—0,338
	0,75	—0,254	—0,260	—0,244	—0,194	—0,086	0,107
	1,00	—0,073	—0,061	—0,038	0,008	0,099	0,258
	1,25	0,008	0,034	0,061	0,105	0,183	0,311
	1,50	0,048	0,084	0,117	0,156	0,226	0,330
	1,75	0,070	0,110	0,149	0,190	0,249	0,339
	2,00	0,083	0,125	0,167	0,210	0,262	0,335
	2,25	0,091	0,132	0,176	0,222	0,271	0,331
	2,50	0,096	0,135	0,180	0,227	0,277	0,331
	2,75	0,099	0,137	0,180	0,228	0,279	0,331
	3,00	0,100	0,136	0,178	0,225	0,277	0,330
	3,25	0,102	0,136	0,176	0,221	0,272	0,327
0,50	0,25	—1,906	—2,091	—2,128	—2,090	—1,949	—1,674
	0,50	—0,566	—0,580	—0,553	—0,465	—0,304	—0,075
	0,75	—0,210	—0,208	—0,185	—0,133	—0,042	0,087
	1,00	—0,064	—0,051	—0,031	0,007	0,070	0,157
	1,25	0,006	0,029	0,051	0,082	0,131	0,195
	1,50	0,044	0,075	0,101	0,130	0,170	0,219
	1,75	0,066	0,102	0,133	0,161	0,196	0,237
	2,00	0,080	0,118	0,154	0,184	0,214	0,248
	2,25	0,090	0,128	0,165	0,199	0,229	0,256
	2,50	0,096	0,134	0,172	0,208	0,239	0,265
	2,75	0,101	0,137	0,175	0,212	0,246	0,272
	3,00	0,104	0,139	0,176	0,214	0,249	0,278
	3,25	0,106	0,140	0,176	0,214	0,250	0,281
0,75	0,25	—1,571	—1,697	—1,680	—1,590	—1,408	—1,115
	0,50	—0,444	—0,444	—0,405	—0,314	—0,172	—0,002
	0,75	—0,155	—0,149	—0,126	—0,083	—0,021	0,052
	1,00	—0,042	—0,032	—0,018	0,004	0,035	0,069
	1,25	0,009	0,026	0,036	0,048	0,064	0,078
	1,50	0,037	0,057	0,068	0,075	0,082	0,085
	1,75	0,052	0,074	0,088	0,093	0,095	0,092
	2,00	0,062	0,085	0,100	0,106	0,104	0,097
	2,25	0,068	0,090	0,106	0,114	0,112	0,103
	2,50	0,072	0,093	0,110	0,118	0,118	0,109
	2,75	0,075	0,095	0,111	0,120	0,121	0,114
	3,00	0,076	0,096	0,111	0,120	0,122	0,115
	3,25	0,078	0,096	0,110	0,119	0,120	0,110
1,00	0,25	—1,384	—1,472	—1,424	—1,308	—1,112	—0,827
	0,50	—0,374	—0,369	—0,329	—0,246	—0,127	—0,001
	0,75	—0,120	—0,113	—0,093	—0,060	—0,017	0,030
	1,00	—0,025	—0,017	—0,009	0,002	0,017	0,033
	1,25	0,014	0,025	0,028	0,031	0,033	0,034
	1,50	0,032	0,045	0,049	0,046	0,042	0,035

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,00	0,25	—0,994	—0,974	—0,864	—0,711	—0,510	—0,268
	0,50	—0,268	—0,265	—0,237	—0,186	—0,124	—0,058
	0,75	—0,066	—0,065	—0,057	—0,045	—0,028	—0,001
	1,00	0,001	0,003	0,001	0,000	0,002	0,011
	1,25	0,024	0,029	0,025	0,019	0,015	0,016
	1,50	0,031	0,037	0,035	0,028	0,022	0,018
	1,75	0,031	0,038	0,039	0,033	0,025	0,021
	2,00	0,029	0,036	0,038	0,035	0,028	0,021
	2,25	0,026	0,032	0,036	0,035	0,030	0,022
	2,50	0,022	0,028	0,032	0,032	0,030	0,024
	2,75	0,019	0,024	0,027	0,029	0,028	0,024
	3,00	0,017	0,020	0,023	0,024	0,024	0,021
	3,25	0,014	0,017	0,019	0,020	0,019	0,014

Рассматривая качку удлиненного корабля, можно, как уже упоминалось, не внося в расчет существенной погрешности, положить косинус угла между нормалью к смоченной поверхности и продольной осью равным нулю. Это предположение равносильно допущению о равенстве нулю коэффициентов Λ_{11} , Λ_{13} и Λ_{15} . Таким образом, для корабля большого удлинения (удлиненного корабля) при расчете качки должны приниматься во внимание девять коэффициентов демпфирования: Λ_{22} , Λ_{33} , Λ_{44} , Λ_{55} , Λ_{66} , Λ_{35} , Λ_{24} , Λ_{26} и Λ_{46} .

Сохраним для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости представление (2.2)

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k.$$

В задачах о колебаниях тела, сопровождающихся волнообразованием, функции Φ_k называются функциями излучения, так как через них определяется потенциал скоростей волн, излучаемых телом. Эти функции должны удовлетворять уравнению Лапласа, граничным условиям (2.3) на поверхности тела и (2.36) на свободной поверхности жидкости, условию затухания волнового движения на неограниченной глубине и условиям излучения. Последние условия в пространственной задаче о колебаниях тела и плоской задаче о колебаниях контура несколько различны. В пространственном случае качка вызывает кольцевые волны, расходящиеся во все стороны от колеблющегося тела. Это условие, как указал Н. Е. Кочин, определяется предельным равенством

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial R} + i\nu \Phi_k \right) = 0,$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Напомним, что согласно принятому условию проекции главного вектора и главного момента инерционно-демпфирующих сил обозначаются одной буквой F_j , где значения $j = 1, 2, 3$ приписываются проекциям главного вектора соответственно на оси Ox, Oy, Oz , а $j = 4, 5, 6$ — проекциям главного момента на те же оси. Тогда на основании формул (2.1) и (2.51) получим

$$\begin{aligned} F_j &= -\frac{dN_j}{dt} = -\sum_{k=1}^6 \left(M_{jk} \dot{U}_k - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \dot{U}_k \right) = \\ &= -\sum_{k=1}^6 (M_{jk} \dot{U}_k + \Lambda_{jk} U_k). \end{aligned}$$

Коэффициенты волнового демпфирования Λ_{jk} для корабля в целом определяются через коэффициенты демпфирования λ_{jk} шпангоутных контуров по методу плоских сечений. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше при применении метода плоских сечений к расчету присоединенных масс, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{jk} &= \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{jk} dx, \quad (j, k = 2, 3, 4); \\ \Lambda_{35} &= -\int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{33} dx; \quad \Lambda_{55} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda_{33} dx; \\ \Lambda_{26} &= \int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{22} dx; \quad \Lambda_{46} = \int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{24} dx; \\ \Lambda_{66} &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda_{22} dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Для определения коэффициентов волнового демпфирования следует приравнять работу демпфирующих сил за период качки $\tau = 2\pi/\sigma$ энергии, уносимой за тот же промежуток времени излучаемыми волнами.

Демпфирующие силы, действующие на качающийся контур, определяются формулами:

$$f_2^d = -\lambda_{22} U_2 - \lambda_{24} U_4;$$

$$f_3^d = -\lambda_{33} U_3;$$

$$f_4^d = -\lambda_{24} U_2 - \lambda_{44} U_4.$$

Вследствие принципа равенства действия и противодействия, силы, приложенные контуром к жидкости, будут иметь знаки, обратные демпфирующим силам, действующим на контур.

Для работы сил, приложенных к жидкости, за время dt легко получить формулу

$$\begin{aligned} dA &= -(f_2^d U_2 + f_3^d U_3 + f_4^d U_4) dt = \\ &= (\lambda_{22} U_2^2 + \lambda_{33} U_3^2 + \lambda_{44} U_4^2 + 2\lambda_{24} U_2 U_4) dt. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно записать в более простой форме. Для этого найдем сумму

$$\bar{u}v + u\bar{v} = (u_1 + iu_2)(v_1 - iv_2) + (u_1 - iu_2)(v_1 + iv_2) = 2(u_1v_1 + u_2v_2)$$

и выпишем произведение

$$U\bar{V} = (u_1 + iu_2)e^{i\sigma t}(v_1 - iv_2)e^{-i\sigma t} = u_1v_1 + u_2v_2 + i(u_2v_1 - u_1v_2).$$

Таким образом,

$$u\bar{v} + \bar{u}v = 2 \operatorname{Re}(U\bar{V}) = 2 \operatorname{Re}(u\bar{v})$$

и, следовательно,

$$(UV)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U\bar{V}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u\bar{v}). \quad (2.56)$$

В частности, можем написать

$$U_{\text{cp}}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U\bar{U}) = \frac{1}{2} |U|^2 = \frac{1}{2} |u|^2. \quad (2.57)$$

Вернемся теперь к формуле (2.55) для средней возможности демпфирующих сил. Воспользовавшись для осреднения значений U_2U_4 и U_k^2 равенствами (2.56) и (2.57), получим

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \lambda_{22} |u_2|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{33} |u_3|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{44} |u_4|^2 + \lambda_{24} \operatorname{Re}(u_2\bar{u}_4), \quad (2.58)$$

где $|u_k|$ означает модуль комплексной амплитуды скорости, равный амплитуде скорости в обычном понимании этого термина, т. е. наибольшему значению u_{0k} линейной ($k = 2, 3$) или угловой ($k = 4$) скорости гармонических колебаний. Действительно,

$$|u_k| = \sqrt{u_{k1}^2 + u_{k2}^2} = u_{0k}.$$

Перейдем к определению энергии, уносимой расходящимися от контура волнами. Для этого вычислим энергию, переносимую через расположенные по обе стороны от контура полубесконечные вертикальные полосы, перпендикулярные оси Oy и простирающиеся вдоль оси Oz от $-\infty$ до нуля. Поскольку рассматривается плоская задача, протяженность этих полос вдоль оси Ox , перпендикулярной плоскости контура, принимаем равной единице.

Обозначив амплитуду волн, распространяющихся вдоль положительной оси Oy , через A^+ , а вдоль отрицательной — через A^- , волновое число через v и частоту через σ , на основании формулы (1.12) можем написать следующее выражение для потенциала скоростей расходящихся волн:

$$\Phi = i \frac{g}{\sigma} A^{\pm} e^{vz + i(\sigma t \mp vy)}. \quad (2.59)$$

Здесь, очевидно, верхние знаки относятся к волнам, распространяющимся вдоль положительного, а нижние — вдоль отрицательного направления оси Oy . Далее ограничимся рассмотре-

Тогда, записав давление и скорость в виде:

$$\begin{aligned} p^+ &= \rho g e^{vz} [A_1^+ \cos(\sigma t - vy) - A_2^+ \sin(\sigma t - vy)]; \\ v_y^+ &= \sigma e^{vz} [A_1^+ \cos(\sigma t - vy) - A_2^+ \sin(\sigma t - vy)], \end{aligned}$$

после выкладок, аналогичных проделанным выше, придем к формуле (2.60), в которой комплексная амплитуда должна браться по модулю.

Для того чтобы вычислить энергию, переносимую волнами через всю полубесконечную полосу, необходимо проинтегрировать выражение (2.60) для dE^+ по переменной z . Таким образом, находим

$$E^+ = \pi \rho g |A^+|^2 \int_{-\infty}^0 e^{2vz} dz = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 |A^+|^2,$$

где через

$$c = \frac{\sigma}{v} = \frac{g}{\sigma}$$

обозначена фазовая скорость волн.

Формула для энергии E^- , переносимой волнами в сторону отрицательной оси Oy , будет иметь аналогичный вид

$$E^- = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 |A^-|^2,$$

где A^- — амплитуда волн, распространяющихся вдоль отрицательного направления оси Oy .

Энергия, уносимая волнами в обе стороны от контура, будет

$$E = E^+ + E^- = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 (|A^+|^2 + |A^-|^2). \quad (2.61)$$

Вводя обозначение

$$cA^\pm = \frac{g}{\sigma} A^\pm = B^\pm, \quad (2.62)$$

равенство (2.61) можно переписать в виде

$$E = \frac{1}{2} \pi \rho (|B^+|^2 + |B^-|^2). \quad (2.63)$$

Если теперь приравнять работу демпфирующих сил $A = \tau P_{\text{ср}}$ энергии, уносимой расходящимися волнами, то, воспользовавшись формулами (2.58) и (2.63), найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{22} |u_2|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{33} |u_3|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{44} |u_4|^2 + \lambda_{24} \operatorname{Re}(u_2 \bar{u}_4) = \\ = \frac{1}{4} \rho \sigma (|B^+|^2 + |B^-|^2). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Подставляя это значение $|B^\pm|^2$ в формулу (2.64) и учитывая, что $u_3 = 0$, а $|u_k|^2 = \text{Re}(u_k \bar{u}_k)$, получим общую формулу

$$\lambda_{jk} = \frac{1}{2} \rho \sigma \text{Re}(B_j^+ \bar{B}_k^+ + B_j^- \bar{B}_k^-), \quad (jk = 22, 44, 24). \quad (2.69)$$

Для λ_{22} и λ_{44} ($j = k$) эта формула приобретает такой же вид, как и формула (2.68) для λ_{33} . Таким образом, имеем

$$\lambda_{kk} = \frac{1}{2} \rho \sigma (|B_k^+|^2 + |B_k^-|^2), \quad (k = 2, 3, 4). \quad (2.70)$$

При известных коэффициентах демпфирования шпангоутов коэффициенты демпфирования корабля в целом Λ_{jk} могут быть найдены в соответствии с равенствами (2.54) с помощью квадратурных формул. Вместе с тем целесообразно получать пусть менее точные, но простые выражения для Λ_{jk} . С этой целью, следуя М. Д. Хаскинду, представим коэффициенты демпфирования шпангоутов λ_{jk} следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{22} &= \lambda_{022} \left(\frac{z}{T} \right)^2; & \lambda_{33} &= \lambda_{033} \left(\frac{b}{B} \right)^2; \\ \lambda_{44} &= \lambda_{044} \left(\frac{b}{B} \right)^6; & \lambda_{24} &= \lambda_{024} \frac{z}{T} \left(\frac{b}{B} \right)^3, \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

где λ_{0jk} — коэффициенты демпфирования миделя. Если теперь задать уравнения ватерлинии равновесия и нулевого батокса в виде (2.40), то интегралы в формулах (2.54) легко берутся аналитически. В результате интегрирования получаем:

$$\Lambda_{22} = \lambda_{022} L \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma}; \quad \Lambda_{33} = \lambda_{033} L \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha};$$

$$\Lambda_{55} = \lambda_{033} L^3 \frac{\alpha^2}{6(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)};$$

$$\Lambda_{66} = \lambda_{022} L^3 \frac{\gamma^2}{6(3 - \gamma)(3 - 2\gamma)};$$

$$\Lambda_{44} = \lambda_{044} L \int_0^1 (1 - x^n)^6 dx;$$

$$\Lambda_{24} = \lambda_{024} L \int_0^1 (1 - x^m)(1 - x^n)^3 dx.$$

Для того чтобы определить функции $B_k^\pm$, необходимо предварительно найти асимптотические значения функции Грина при $y \rightarrow \pm \infty$.

Функция Грина G рассматриваемой краевой задачи представляет собой амплитудную (не зависящую от времени) часть потенциала скоростей плоского источника, интенсивность которого изменяется во времени по гармоническому закону. Такой источ-

Подставляя последние равенства в формулу Грина (2.73) и учитывая, что на контуре шпангоута

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \eta} \cos(n, \eta) + \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos(n, \xi),$$

получаем следующее асимптотическое представление функции φ :

$$\varphi = i e^{\mp i v (y \pm iz)} \int_l e^{\pm i v (\eta - i \xi)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - v \varphi [\pm i \cos(n, \eta) + \right. \\ \left. + \cos(n, \xi)] \right\} dl \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (2.74)$$

С другой стороны, руководствуясь формулой (2.66), можем написать

$$\varphi = \Phi e^{-i \delta t} = i B^{\pm} e^{v(z \mp iy)}.$$

Тогда, очевидно, $B^{\pm}$ будет равно контурному интегралу в равенстве (2.74). Учитывая далее, что согласно выражениям (2.65) и (2.67)

$$\varphi = \sum_{k=2}^4 u_k \Phi_k; \quad B^{\pm} = \sum_{k=2}^4 u_k B_k^{\pm}$$

и заменяя для удобства в контурном интеграле η на y и ξ на z (допустимость такой замены обозначений координат точек контура, по которому производится интегрирование, очевидна), получим

$$B_k^{\pm} = \int_l e^{v(z \pm iy)} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - v \Phi_k [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)] \right\} dl \\ \text{при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (2.75)$$

Для приближенного расчета коэффициентов демпфирования при любых значениях частотного параметра v заменим в последнем равенстве функции Φ_k , соответствующие колебаниям шпангоутного контура на свободной поверхности, функциями, соответствующими тем же видам колебаний эллипса в безграничной жидкости. Тогда, пользуясь формулами (2.11), можем написать

$$\Phi_2 = -c_2 y; \quad \Phi_3 = -c_3 z; \quad \Phi_4 = -c_4 yz,$$

где

$$c_2 = \frac{2T}{b}; \quad c_3 = \frac{b}{2T}; \quad c_4 = \frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT}.$$

Подставляя эти значения функций Φ_k и значения их нормальных производных, определяемые выражениями (2.3), в равенство (2.75), получим

$$B_2^{\pm} = \int_l e^{v(z \pm iy)} \{ \cos(n, y) + v c_2 y [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)] \} dl;$$

$$B_3^{\pm} = \int_l e^{v(z \pm iy)} \{ \cos(n, z) + v c_3 z [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)] \} dl;$$

$$B_4^\pm = v(1+c_4) \int_{-T}^0 e^{vz} \int_{-y}^y \eta e^{\pm i v \eta} d\eta dz \mp i v(1-c_4) \times \\ \times \int_{-T}^0 z e^{vz} \int_{-y}^y e^{\pm i v \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{\pm i v \eta} d\eta.$$

Как нетрудно показать,

$$\int_{-y}^y e^{\pm i v \eta} d\eta = \mp \frac{i}{v} e^{\pm i v \eta} \Big|_{-y}^y = \mp \frac{i}{v} (\cos v\eta \pm i \sin v\eta) \Big|_{-y}^y = \\ = \frac{2}{v} \sin vy; \quad (2.77)$$

$$\int_{-y}^y \eta e^{\pm i v \eta} d\eta = \frac{1}{(\pm i v)^2} e^{\pm i v \eta} (\pm i v \eta - 1) \Big|_{-y}^y = -\frac{1}{v^2} (\cos v\eta \pm i \sin v\eta) \times \\ \times (\pm i v \eta - 1) \Big|_{-y}^y = \pm \frac{2i}{v^2} (\sin vy - vy \cos vy) \quad (2.78)$$

и, следовательно,

$$B_2^\pm = \pm 2i(1+c_2) \int_{-T}^0 e^{vz} \sin v y dz; \\ B_3^\pm = 2(1+c_3) \int_{-T}^0 e^{vz} \sin v y dz - \frac{2}{v} \sin \frac{vb}{2}; \\ B_4^\pm = \pm \frac{2i}{v} \left[(1+c_4) \int_{-T}^0 e^{vz} (\sin vy - vy \cos vy) dz - \right. \\ \left. - v(1-c_4) \int_{-T}^0 z e^{vz} \sin v y dz + \frac{1}{v} \left(\sin \frac{vb}{2} - \frac{vb}{2} \cos \frac{vb}{2} \right) \right].$$

Введем следующие безразмерные коэффициенты:

$$\kappa_2 = \frac{2}{v\omega} \int_{-T}^0 e^{vz} \sin v y dz; \quad \kappa_{42} = \frac{2}{v\omega z_\omega} \int_{-T}^0 z e^{vz} \sin v y dz; \\ \kappa_5 = \frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 y e^{vz} \cos v y dz,$$

где z_ω — аппликата центра тяжести площади шпангоута.

В эти коэффициенты введены нормирующие множители $1/\omega$, $1/v\omega$, $1/v\omega z_\omega$, за счет которых при предельно малых частотах колебаний коэффициенты превращаются в единицу. При конечных частотах или, точнее говоря, при конечных значениях безразмерных параметров vT и vb , значения этих коэффициентов оказываются меньше единицы и, таким образом, они играют роль редуционных коэффициентов.

Поскольку волновое число излучаемых волн v связано с их длиной λ соотношением $v = 2\pi/\lambda$, параметры $vT\pi = 2\pi T/\lambda$ и $vb =$

Таблица 6. Значения коэффициента для контуров формы Льюиса

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,25	0,25	0,336	0,454	0,646	0,895	1,217	1,629
	0,50	0,314	0,433	0,603	0,860	1,258	1,870
	0,75	0,281	0,377	0,516	0,719	1,026	1,510
	1,00	0,252	0,338	0,450	0,614	0,859	1,251
	1,25	0,227	0,308	0,406	0,541	0,742	1,052
	1,50	0,208	0,284	0,374	0,489	0,658	0,911
	1,75	0,193	0,263	0,349	0,452	0,594	0,806
	2,00	0,183	0,246	0,327	0,423	0,544	0,716
	2,25	0,175	0,232	0,308	0,399	0,508	0,647
	2,50	0,169	0,221	0,291	0,377	0,480	0,602
	2,75	0,164	0,211	0,276	0,357	0,455	0,569
	3,00	0,161	0,203	0,263	0,339	0,432	0,544
	3,25	0,158	0,197	0,252	0,323	0,413	0,527
0,50	0,25	0,284	0,416	0,636	0,911	1,248	1,655
	0,50	0,461	0,640	0,888	1,247	1,764	2,467
	0,75	0,548	0,733	0,995	1,356	1,849	2,506
	1,00	0,594	0,790	1,044	1,393	1,865	2,506
	1,25	0,614	0,822	1,072	1,400	1,849	2,444
	1,50	0,622	0,837	1,087	1,399	1,820	2,375
	1,75	0,627	0,840	1,094	1,393	1,783	2,298
	2,00	0,632	0,838	1,093	1,386	1,743	2,206
	2,25	0,638	0,834	1,084	1,376	1,712	2,117
	2,50	0,645	0,830	1,073	1,362	1,690	2,062
	2,75	0,653	0,827	1,060	1,346	1,671	2,032
	3,00	0,662	0,826	1,049	1,329	1,655	2,028
	3,25	0,672	0,827	1,041	1,316	1,651	2,077
0,75	0,25	0,180	0,311	0,527	0,786	1,091	1,444
	0,50	0,429	0,602	0,830	1,139	1,549	2,046
	0,75	0,577	0,758	1,000	1,305	1,672	2,092
	1,00	0,681	0,878	1,116	1,411	1,754	2,145
	1,25	0,756	0,970	1,207	1,484	1,809	2,165
	1,50	0,814	1,039	1,278	1,543	1,846	2,176
	1,75	0,864	1,091	1,334	1,588	1,872	2,179
	2,00	0,908	1,132	1,378	1,628	1,890	2,171
	2,25	0,949	1,166	1,412	1,661	1,908	2,159
	2,50	0,989	1,197	1,439	1,688	1,929	2,161
	2,75	1,028	1,226	1,462	1,710	1,951	2,178
	3,00	1,065	1,254	1,484	1,731	1,977	2,216
	3,25	1,102	1,283	1,507	1,756	2,015	2,301
1,00	0,25	0,094	0,223	0,434	0,677	0,954	1,264
	0,50	0,369	0,528	0,726	0,981	1,295	1,646
	0,75	0,527	0,685	0,883	1,114	1,368	1,636
	1,00	0,641	0,806	0,993	1,205	1,430	1,662
	1,25	0,729	0,901	1,079	1,271	1,473	1,675
	1,50	0,800	0,976	1,148	1,323	1,504	1,684

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,00	0,25	-0,078	0,056	0,241	0,434	0,635	0,837
	0,50	0,194	0,314	0,440	0,573	0,701	0,822
	0,75	0,326	0,418	0,509	0,589	0,658	0,724
	1,00	0,406	0,481	0,550	0,614	0,669	0,718
	1,25	0,462	0,527	0,581	0,631	0,676	0,716
	1,50	0,508	0,562	0,605	0,644	0,680	0,714
	1,75	0,544	0,590	0,625	0,655	0,683	0,710
	2,00	0,574	0,613	0,643	0,665	0,686	0,711
	2,25	0,598	0,632	0,658	0,676	0,690	0,709
	2,50	0,617	0,647	0,672	0,688	0,700	0,713
	2,75	0,633	0,660	0,684	0,701	0,714	0,729
	3,00	0,645	0,671	0,695	0,715	0,732	0,763
	3,25	0,656	0,681	0,706	0,731	0,762	0,837

ные в предположении о квадратичной зависимости демпфирующего момента от угловой скорости качки θ . Эта зависимость имеет вид

$$F_4^d = -K\theta^2 \operatorname{sign} \theta, \quad (2.79)$$

где

$$\operatorname{sign} \theta = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta > 0, \\ -1 & \text{при } \theta < 0, \end{cases}$$

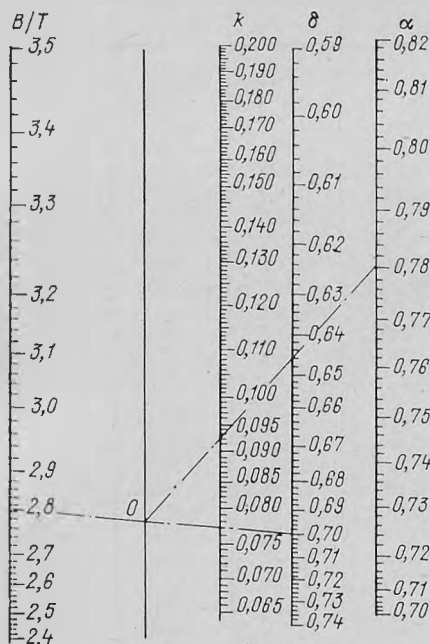
Знаком «минус» здесь учитывается то обстоятельство, что демпфирующий момент противоположен по направлению угловой скорости качки.

Следуя В. В. Луговскому и Ю. И. Фаддееву, используем следующие представления:

$$K = K_0(I_x + M_{44});$$

$$K_0 = k_0 \sqrt[4]{\frac{\rho x}{h}},$$

где $\rho_x^2 = (I_x + M_{44})/m$ — квадрат условного радиуса инерции массы корабля, а h — начальная метacentрическая высота. Значения k_0 определяются по предположенной упомянутыми авто-



2.5. Номограмма В. В. Луговского и Ю. И. Фаддеева.

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,00	1,75	1,199	1,033	0,861	0,676	0,477	0,303
	2,00	1,225	1,046	0,868	0,681	0,486	0,312
	2,25	1,244	1,055	0,869	0,679	0,489	0,320
	2,50	1,259	1,061	0,868	0,680	0,497	0,350
	2,75	1,272	1,064	0,867	0,681	0,514	0,404
	3,00	1,283	1,067	0,865	0,683	0,533	0,465
	3,25	1,292	1,069	0,865	0,688	0,559	0,538
1,25	0,25	—0,074	—0,028	0,052	0,097	0,112	0,106
	0,50	0,554	0,556	0,493	0,377	0,233	0,110
	0,75	0,791	0,700	0,559	0,397	0,243	0,125
	1,00	0,894	0,761	0,600	0,428	0,261	0,127
	1,25	0,947	0,797	0,629	0,452	0,276	0,138
	1,50	0,980	0,819	0,648	0,469	0,289	0,145
	1,75	1,004	0,833	0,659	0,479	0,301	0,165
	2,00	1,022	0,841	0,663	0,484	0,307	0,167
	2,25	1,036	0,847	0,665	0,485	0,314	0,177
	2,50	1,047	0,851	0,666	0,489	0,329	0,215
	2,75	1,056	0,854	0,666	0,495	0,353	0,276
	3,00	1,064	0,856	0,667	0,503	0,379	0,346
	3,25	1,071	0,859	0,670	0,513	0,411	0,426
1,50	0,25	—0,117	—0,076	—0,004	0,036	0,050	0,044
	0,50	0,453	0,459	0,400	0,291	0,162	0,065
	0,75	0,678	0,586	0,446	0,293	0,161	0,073
	1,00	0,768	0,632	0,472	0,312	0,170	0,071
	1,25	0,811	0,656	0,491	0,328	0,179	0,078
	1,50	0,835	0,671	0,504	0,338	0,186	0,080
	1,75	0,851	0,680	0,511	0,345	0,192	0,094
	2,00	0,864	0,685	0,514	0,348	0,196	0,091
	2,25	0,873	0,689	0,516	0,351	0,205	0,102
	2,50	0,880	0,692	0,518	0,358	0,224	0,144
	2,75	0,886	0,694	0,520	0,368	0,252	0,214
	3,00	0,891	0,696	0,523	0,380	0,283	0,292
	3,25	0,897	0,698	0,527	0,394	0,320	0,376
1,75	0,25	—0,133	—0,095	—0,033	0,002	0,013	0,007
	0,50	0,374	0,384	0,330	0,230	0,116	0,040
	0,75	0,589	0,499	0,363	0,221	0,109	0,045
	1,00	0,670	0,533	0,377	0,231	0,113	0,043
	1,25	0,703	0,548	0,389	0,241	0,117	0,046
	1,50	0,719	0,557	0,397	0,247	0,121	0,047
	1,75	0,730	0,561	0,401	0,251	0,124	0,058
	2,00	0,737	0,564	0,403	0,255	0,127	0,052
	2,25	0,742	0,566	0,405	0,259	0,137	0,063
	2,50	0,746	0,568	0,408	0,268	0,158	0,110
	2,75	0,750	0,569	0,411	0,280	0,190	0,189
	3,00	0,753	0,571	0,416	0,294	0,226	0,277
	3,25	0,757	0,574	0,422	0,311	0,266	0,363

Таблица 8. Значения коэффициента l_{44} для контуров формы Льюиса

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,25	0,25	28,62	33,52	33,40	32,73	31,46	29,53
	0,50	1,472	1,457	1,374	1,184	0,862	0,467
	0,75	0,151	0,134	0,104	0,062	0,016	0,011
	1,00	0,016	0,009	0,003	0,000	0,012	0,072
	1,25	0,002	0,001	0,004	0,013	0,039	0,104
	1,50	0,004	0,007	0,013	0,027	0,055	0,114
	1,75	0,007	0,012	0,021	0,065	0,062	0,113
	2,00	0,010	0,016	0,026	0,041	0,065	0,107
	2,25	0,013	0,019	0,029	0,044	0,066	0,101
	2,50	0,014	0,021	0,031	0,046	0,066	0,096
	2,75	0,015	0,022	0,032	0,046	0,066	0,093
	3,00	0,016	0,023	0,032	0,046	0,065	0,091
	3,25	0,017	0,023	0,032	0,046	0,064	0,089
0,50	0,25	28,59	32,35	31,51	29,88	27,50	24,49
	0,50	2,308	2,220	1,987	1,557	0,940	0,355
	0,75	0,322	0,277	0,201	0,104	0,017	0,035
	1,00	0,043	0,025	0,008	0,000	0,030	0,163
	1,25	0,005	0,001	0,008	0,031	0,095	0,245
	1,50	0,010	0,017	0,034	0,070	0,144	0,289
	1,75	0,022	0,036	0,060	0,101	0,176	0,309
	2,00	0,034	0,052	0,080	0,124	0,195	0,313
	2,25	0,044	0,064	0,096	0,141	0,208	0,310
	2,50	0,052	0,074	0,107	0,154	0,219	0,310
	2,75	0,059	0,082	0,116	0,163	0,227	0,312
	3,00	0,066	0,089	0,122	0,170	0,233	0,318
	3,25	0,071	0,094	0,128	0,175	0,240	0,333
0,75	0,25	23,15	25,72	24,65	22,77	20,16	17,10
	0,50	2,283	2,138	1,823	1,303	0,654	0,182
	0,75	0,364	0,301	0,202	0,089	0,008	0,046
	1,00	0,057	0,032	0,009	0,000	0,031	0,151
	1,25	0,008	0,001	0,007	0,031	0,091	0,217
	1,50	0,010	0,018	0,035	0,072	0,139	0,257
	1,75	0,027	0,042	0,066	0,106	0,174	0,279
	2,00	0,044	0,064	0,093	0,135	0,197	0,291
	2,25	0,059	0,083	0,115	0,158	0,216	0,296
	2,50	0,072	0,098	0,133	0,177	0,233	0,303
	2,75	0,084	0,111	0,147	0,192	0,247	0,312
	3,00	0,095	0,123	0,159	0,205	0,260	0,325
	3,25	0,104	0,132	0,169	0,216	0,273	0,348
1,00	0,25	18,16	19,92	18,88	17,01	14,47	11,61
	0,50	2,075	1,907	1,564	1,036	0,440	0,112
	0,75	0,355	0,283	0,177	0,069	0,003	0,050
	1,00	0,060	0,033	0,009	0,000	0,027	0,123
	1,25	0,010	—0,019	0,005	0,025	0,073	0,166
	1,50	0,008	0,015	0,028	0,057	0,108	0,192

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,00	0,25	6,027	6,856	6,560	5,324	3,491	1,546
	0,50	1,324	1,178	0,872	0,462	0,112	0,004
	0,75	0,264	0,192	0,099	0,025	0,000	0,043
	1,00	0,053	0,027	0,007	0,000	0,014	0,057
	1,25	0,013	0,003	0,001	0,009	0,029	0,064
	1,50	— 0,014	0,007	0,010	0,020	0,039	0,069
	1,75	0,012	0,018	0,021	0,030	0,046	0,068
	2,00	0,023	0,029	0,032	0,038	0,051	0,071
	2,25	0,031	0,039	0,042	0,046	0,054	0,070
	2,50	0,038	0,046	0,051	0,054	0,060	0,071
	2,75	0,043	0,052	0,058	0,062	0,067	0,075
	3,00	0,047	0,056	0,063	0,069	0,075	0,085
	3,25	0,050	0,059	0,068	0,075	0,085	0,108

Нижний предел интеграла при этой замене останется нулевым, а верхний будет равняться $\tau/4$. Таким образом, можем написать

$$A_2 = K \int_0^{\tau/4} \theta^3 = dt = K \theta_0^3 \sigma^3 \int_0^{\tau/4} \cos^3 \sigma t dt.$$

Последний интеграл — табличный¹

$$\int \cos^3 \sigma t dt = \frac{1}{\sigma} \sin \sigma t - \frac{1}{3\sigma} \sin^3 \sigma t.$$

Итак, имея в виду, что $\tau = 2\pi/\sigma$, получим

$$\begin{aligned} A_2 &= K \theta_0^3 \sigma^3 \left[\frac{1}{\sigma} \sin \sigma t - \frac{1}{3\sigma} \sin^3 \sigma t \right] \Big|_0^{\pi/2\sigma} = \\ &= K \theta_0^3 \sigma^3 \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{3\sigma} \right) = \frac{2}{3} K \theta_0^3 \sigma^2. \end{aligned}$$

Вычислим теперь работу A_1 демпфирующего момента в случае линейной его зависимости от угловой скорости:

$$A_1 = \Lambda_{44} \int_0^{\theta_0} \dot{\theta} d\theta.$$

Выполняя преобразования, аналогичные приведенным выше, найдем

$$A_1 = \Lambda_{44} \int_0^{\tau/4} \dot{\theta}^2 dt = \Lambda_{44} \theta_0^2 \sigma^2 \int_0^{\tau/4} \cos^2 \sigma t dt.$$

¹ Произвольные постоянные в формулах для неопределенных интегралов опускаются.

νT	$\frac{2T}{b}$	Коэффициент полноты β					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,00	2,25	0,161	0,244	0,333	0,421	0,509	0,601
	2,50	0,185	0,268	0,356	0,444	0,530	0,611
	2,75	0,204	0,285	0,372	0,460	0,545	0,622
	3,00	0,219	0,298	0,383	0,470	0,556	0,635
	3,25	0,232	0,308	0,391	0,478	0,565	0,653
1,25	0,25	—1,771	—1,844	—1,930	—1,987	—1,939	—1,753
	0,50	—0,812	—0,872	—0,891	—0,807	—0,567	—0,170
	0,75	—0,398	—0,390	—0,338	—0,222	—0,033	0,219
	1,00	—0,185	—0,149	—0,085	0,016	0,163	0,351
	1,25	—0,060	—0,009	0,054	0,141	0,259	0,403
	1,50	0,018	0,078	0,142	0,217	0,314	0,428
	1,75	0,071	0,136	0,201	0,268	0,350	0,442
	2,00	0,109	0,176	0,241	0,304	0,372	0,448
	2,25	0,137	0,203	0,268	0,330	0,390	0,451
	2,50	0,158	0,223	0,287	0,348	0,405	0,458
	2,75	0,175	0,237	0,300	0,360	0,416	0,466
	3,00	0,187	0,247	0,308	0,368	0,425	0,476
	3,25	0,197	0,255	0,314	0,374	0,432	0,492
1,50	0,25	—1,377	—1,405	—1,460	—1,471	—1,372	—1,144
	0,50	—0,716	—0,764	—0,768	—0,672	—0,438	—0,086
	0,75	—0,360	—0,347	—0,291	—0,179	—0,014	0,191
	1,00	—0,171	—0,135	—0,076	0,014	0,136	0,283
	1,25	—0,060	—0,014	0,041	0,113	0,207	0,318
	1,50	0,009	0,061	0,113	0,173	0,248	0,334
	1,75	0,057	0,110	0,161	0,212	0,274	0,342
	2,00	0,090	0,143	0,193	0,240	0,290	0,346
	2,25	0,114	0,166	0,215	0,260	0,303	0,346
	2,50	0,132	0,183	0,230	0,274	0,315	0,351
	2,75	0,146	0,194	0,241	0,284	0,323	0,358
	3,00	0,155	0,202	0,247	0,290	0,331	0,368
	3,25	0,163	0,208	0,252	0,295	0,337	0,385
1,75	0,25	—1,056	—1,069	—1,114	—1,102	—0,975	—0,725
	0,50	—0,633	—0,673	—0,668	—0,567	—0,345	—0,035
	0,75	—0,326	—0,310	—0,252	—0,147	—0,002	0,166
	1,00	—0,158	—0,123	—0,067	0,012	0,114	0,231
	1,25	—0,059	—0,017	0,031	0,092	0,169	0,255
	1,50	0,003	0,047	0,091	0,140	0,200	0,265
	1,75	0,045	0,089	0,130	0,171	0,219	0,270
	2,00	0,074	0,118	0,157	0,192	0,230	0,272
	2,25	0,095	0,137	0,175	0,209	0,240	0,272
	2,50	0,111	0,151	0,187	0,220	0,249	0,276
	2,75	0,122	0,160	0,196	0,228	0,257	0,281
	3,00	0,130	0,167	0,202	0,234	0,263	0,292
	3,25	0,136	0,172	0,206	0,238	0,271	0,311
2,00	0,25	—0,803	—0,829	—0,879	—0,859	—0,718	—0,460
	0,50	—0,562	—0,597	—0,586	—0,483	—0,275	—0,004
	0,75	0,297	—0,279	—0,220	—0,121	0,005	0,143

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ
КАЧКИ
НА ТИХОЙ ВОДЕ

§ 9. Системы координат. Уравнения движения корабля

Как известно из теоретической механики, любое движение твердого тела можно представить как состоящее из поступательного движения связанного с ним полюса и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс. При этом дифференциальные уравнения движения приобретают наиболее простой вид в случае, когда в качестве осей подвижной системы координат, неизменно связанной с телом, принимаются главные центральные оси инерции его массы.

Для определения положения главных осей по отношению к кораблю, прежде всего, будем считать его симметричным относительно диаметральной плоскости как в смысле формы обводов, так и распределения масс. Из этого предположения следует, что две главные оси инерции лежат в диаметральной плоскости, а третья (поперечная) — перпендикулярна ей, т. е. в случае отсутствия крена горизонтальна.

Далее, учитывая большое значение отношения длины к высоте борта и полагая, что в положении равновесия корабль сядет на ровный киль (без статического дифферента), а распределение масс по высоте в носовой и кормовой половинах корпуса более или менее однородно, можно считать, что угол, составленный главной продольной осью инерции и основной плоскостью, весьма мал. Это позволяет ввести допущение о том, что в положении равновесия главная продольная ось инерции горизонтальна. Тогда вторая главная ось, лежащая в диаметральной плоскости, будет вертикальной.

При выборе систем координат, в которых изучается качка, следует стремиться не к внешней простоте получающихся в той или иной системе формул, а к удобству численной реализации.

Расположим начало подвижной системы координат $Oxyz$, неизменно связанной с кораблем, в точке пересечения плоскостей миделя, ватерлинии равновесия и диаметральной. Плоскость Oxy совместим с ватерлинией, направив ось Ox в нос по линии пересечения ватерлинии с диаметральной плоскостью. Ось Oy направим на левый борт, ось Oz — вверх (рис. 3.1). В силу приведенных выше соображений эти оси можно считать главными осями инерции массы корабля.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\xi} &= R_x; \\
 m\ddot{\eta} &= R_y; \\
 m\ddot{\zeta} &= R_z; \\
 I_x\ddot{\theta} &= \mathfrak{M}_x; \\
 I_y\ddot{\psi} &= \mathfrak{M}_y; \\
 I_z\ddot{\chi} &= \mathfrak{M}_z,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где m — масса корабля; I_x, I_y, I_z — моменты инерции массы относительно соответствующих подвижных осей; ξ, η, ζ — проекции вектора линейного ускорения точки O на неподвижные оси $O_0\xi, O_0\eta$ и $O_0\zeta$; θ, ψ, χ — проекции вектора углового ускорения на подвижные оси Ox, Oy и Oz ; R_x, R_y, R_z — проекции главного вектора гидродинамических сил¹ на соответствующие подвижные оси; $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ — проекции главного момента гидродинамических сил на эти же оси.

В дифференциальных уравнениях (3.1) и дальнейших формулах линейной теории качки смещения, скорости и ускорения рассматриваются как малые первого порядка, малые высших порядков отбрасываются.

Аналогично тому, как это часто делается в гидромеханике, будем обозначать проекции главного вектора и главного момента гидродинамических сил на подвижные оси одной буквой R с цифровым индексом, придавая этому обозначению следующий смысл:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_x; & R_2 &= R_y; & R_3 &= R_z; \\
 R_4 &= \mathfrak{M}_x; & R_5 &= \mathfrak{M}_y; & R_6 &= \mathfrak{M}_z.
 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения (3.1) примут вид:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\xi} &= R_1; \\
 m\ddot{\eta} &= R_2; \\
 m\ddot{\zeta} &= R_3; \\
 I_x\ddot{\theta} &= R_4; \\
 I_y\ddot{\psi} &= R_5; \\
 I_z\ddot{\chi} &= R_6;
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

¹ В гидродинамические силы не включают среднее сопротивление воды движению корабля по курсу, так как эта сила уравновешивается полезной тягой гребных винтов.

случае, когда амплитуды качки малы и демпфирующие силы линейно зависят от соответствующих скоростей.

Действительно, если амплитуды малы, то можно считать, во-первых, восстанавливающие силы линейно зависящими от смещений корабля и, во-вторых, величину или форму подводной его части изменяющимися настолько мало, что присоединенные массы и коэффициенты демпфирования остаются постоянными, т. е. не зависят от амплитуд. Таким образом, допущения о малости амплитуд и линейном характере демпфирования являются необходимыми и достаточными для построения линейной теории качки на тихой воде.

Введем предположение о том, что вертикальная, бортовая и килевая качка могут существовать независимо друг от друга и от дополнительных видов качки. Для этого требуется, чтобы корабль был симметричен относительно плоскости миделя, центр масс лежал в этой плоскости симметрии, скорость хода равнялась нулю и удлинение было настолько большим, чтобы можно было полагать $M_{13} = M_{15} = \Lambda_{13} = \Lambda_{15} = 0$. Эти условия достаточны для того, чтобы основные виды качки не зависели друг от друга, а килевые и вертикальные колебания, кроме того, не зависели от дополнительных видов качки (продольно-горизонтальной, поперечно-горизонтальной и рысканья). Вместе с тем даже при этих условиях бортовая качка будет сопровождаться поперечно-горизонтальной, так как для корабля M_{24} и Λ_{24} равняться нулю не могут. Однако с целью выяснения некоторых характеристик бортовой качки условимся временно пренебрегать величинами M_{24} и Λ_{24} .

При качке на тихой воде в отсутствие каких-либо периодических возмущений действующие на корабль гидродинамические силы будут состоять из инерционно-демпфирующих F и восстанавливающих F' . Таким образом j -я проекция главного вектора R и главного момента $\mathcal{M}$ действующих сил будет определяться формулой

$$R_j = F_j + F'_j,$$

где, напомним, $j = 3$ приписывается проекции силы на вертикальную ось неизменно связанной с кораблем системы координат, $j = 4$ — проекции момента на продольную, а $j = 5$ — проекции момента на поперечную ось той же системы.

Если основные виды качки протекают независимо друг от друга и не сопровождаются дополнительными видами, то полученная в гл. 2 формула для проекций инерционно-демпфирующих сил

$$F_j = - \sum_{k=1}^6 (M_{jk} \dot{U}_k + \Lambda_{jk} U_k) \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

примет вид

$$F_j = - (M_{ji} \dot{U}_j + \Lambda_{ji} U_j),$$

где $U_3 = \dot{\zeta}$, $U_4 = \dot{\theta}$, $U_5 = \dot{\psi}$.

описывает вертикальную качку, второе — бортовую и третье — килевую.

Разделив эти уравнения на коэффициенты при вторых производных, можем написать

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + 2\nu_3\dot{\zeta} + \omega_3^2\zeta &= 0; \\ \ddot{\theta} + 2\nu_4\dot{\theta} + \omega_4^2\theta &= 0; \\ \ddot{\psi} + 2\nu_5\dot{\psi} + \omega_5^2\psi &= 0;\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}\nu_3 &= \frac{\Lambda_{33}}{2(m + M_{33})}; & \omega_3 &= \sqrt{\frac{\rho g S_0}{m + M_{33}}}; \\ \nu_4 &= \frac{\Lambda_{44}}{2(I_x + M_{44})}; & \omega_4 &= \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44}}}; \\ \nu_5 &= \frac{\Lambda_{55}}{2(I_y + M_{55})}; & \omega_5 &= \sqrt{\frac{mgH}{I_y + M_{55}}}.\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

Обозначив $\zeta = Y_3$, $\theta = Y_4$, $\psi = Y_5$, перепишем последние дифференциальные уравнения в виде

$$\ddot{Y}_j + 2\nu_j\dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = 0, \quad (j = 3, 4, 5).$$

В дальнейшем для простоты записи будем индексы j там, где в них нет необходимости, опускать.

Рассмотрим вначале чисто гипотетический случай отсутствия демпфирования ($\nu = 0$). Тогда получим

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = 0. \quad (3.4)$$

Решение этого уравнения можно записать в самой различной форме. Например,

$$\left. \begin{aligned}Y &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}; \\ Y &= \operatorname{Re} [(C_3 + iC_4) e^{i\omega t}]; \\ Y &= C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t; \\ Y &= C_7 \cos (\omega t - C_8),\end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

где Re — символ действительной части комплексного числа, а C_1 — C_8 —постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

В том, что любое из этих выражений удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.4), можно убедиться непосредственной подстановкой. Кроме того, их эквивалентность нетрудно доказать, определив постоянные интегрирования.

Для этой цели выпишем сначала выражения для смещения Y и скорости $\dot{Y}$ корабля в тригонометрической форме, воспользовав-

вания корабль, отклоненный от положения равновесия и отпущенный с начальной скоростью или без нее, либо корабль, которому в положении равновесия была придана начальная скорость, совершал бы на тихой воде незатухающие свободные гармонические колебания. Их периоды $T_j = 2\pi/\omega_j$ для вертикальной ($j = 3$), бортовой ($j = 4$) и килевой ($j = 5$) качки будут определяться формулами:

$$\begin{aligned} T_3 &= 2\pi \sqrt{\frac{m + M_{33}}{\rho g S_0}}; & T_4 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_x + M_{44}}{mgh}}; \\ T_5 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_y + M_{55}}{mgH}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из этих формул видно, что с ростом поперечной остойчивости корабля период его свободной бортовой качки на тихой воде уменьшается, т. е. угловые скорости качки увеличиваются и она становится более порывистой, более стремительной. Вместе с тем, как известно из теории качки на нерегулярном волнении и практики мореплавания, в реальных морских условиях средний фактический период бортовых колебаний с более или менее значительной амплитудой равен периоду свободных колебаний на тихой воде. Поскольку для обеспечения хорошей мореходности и обитаемости корабля его качка должна быть не стремительной, а плавной, значения поперечной метacentрической высоты не должны быть слишком большими.

Рассмотрим теперь колебания на тихой воде при наличии демпфирования ($\nu \neq 0$). В этом случае уравнение качки будет иметь вид

$$\ddot{Y} + 2\nu\dot{Y} + \omega^2 Y = 0, \quad (3.12)$$

а его решение

$$Y = Be^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta), \quad (3.13)$$

где ω' — частота свободных колебаний с учетом демпфирования, определяемая формулой

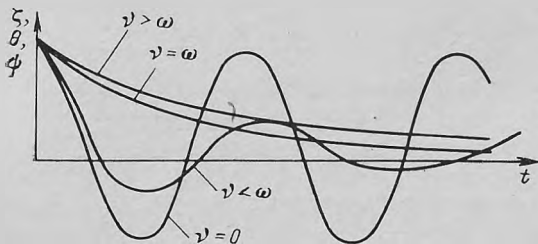
$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}.$$

Поскольку для кораблей величина ν не превышает 10—20% от ω , очевидно, что демпфирование оказывает весьма малое влияние на частоту и, следовательно, при определении частот (периодов) его можно не принимать во внимание.

Наличие в решении дифференциального уравнения качки множителя $e^{-\nu t}$ показывает, что свободные колебания будут носить затухающий характер, т. е. их амплитуды будут с течением времени убывать. Постоянные интегрирования B и β , как и в случае незатухающих колебаний, определяются начальными условиями (начальным отклонением от положения равновесия Y_0 и началь-

С точки зрения изучения качки случаи $\nu \geq \omega$ не представляют практического интереса, ибо, как уже говорилось, для реальных кораблей всегда имеет место неравенство $\nu \ll \omega$.

На рис. 3.2 показан характер наклонов корабля на тихой воде при различных значениях коэффициента затухания ν . Кривая $\nu = 0$ представляет незатухающие колебания, $\nu < \omega$ — затухающие колебания (единственно реальный характер движения); кривые $\nu = \omega$ и $\nu > \omega$ соответствуют аperiodическому (лимитационному) движению.



3.2. Характер движения при различных значениях коэффициента затухания.

§ 11. Логарифмический декремент.

Экспериментальное определение коэффициента затухания

В случае учета демпфирования затухающие колебания корабля описываются равенством (3.13)

$$Y = Be^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta).$$

Для того чтобы определить моменты времени, отвечающие максимальным (амплитудным) значениям Y , найдем производную $\dot{Y}$ и приравняем ее нулю:

$$-\nu Be^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta) - \omega' Be^{-\nu t} \sin(\omega' t - \beta) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{tg}(\omega' t - \beta) = -\frac{\nu}{\omega'}; \quad \cos(\omega' t - \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\omega'}\right)^2}}.$$

Учитывая, что безразмерный коэффициент затухания ν/ω' мал по сравнению с единицей, приближенно можно считать, что смещение корабля достигает амплитудных значений, когда $\cos(\omega' t - \beta) = 1$. Соответствующим выбором начала отсчета времени можно сделать начальную фазу β равной нулю. Тогда получим

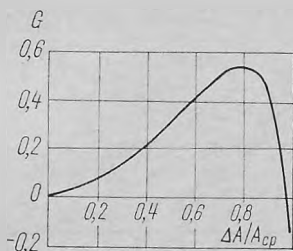
$$\cos \omega' t = 1; \quad \omega' t = 2k\pi; \quad t = \frac{2k\pi}{\omega'} = kT',$$

где $T' = 2\pi/\omega'$ — период затухающих свободных колебаний.

Формулу С. Н. Благовещенского можно переписать в более удобном для практических расчетов виде:

$$v_0 = \frac{1}{\pi} \frac{A_n^2 - A_{n+1/2}^2}{A_n^2 + A_{n+1/2}^2}.$$

Как указывалось в § 8, при бортовой качке вследствие существенной роли вязкостной составляющей демпфирования следует считать, что демпфирующий момент есть квадратичная функция угловой скорости, определяемая равенством (2.79). Для того,



3.4. Функция G для определения коэффициента демпфирования.

чтобы по кривой затухающих колебаний найти безразмерный коэффициент квадратичного демпфирования $K_0 = K/(I_x + M_{44})$, можно воспользоваться формулой Ю. И. Фаддеева:

$$K_0 = \frac{3\Delta A(1+G)}{4A_{ср}^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta A}{A_{ср}} \right)^2 \right]},$$

где G — функция, определяемая по графику, приведенному на рис. 3.4. При малых значениях отношения $\Delta A/A_{ср}$ эту формулу можно упростить, пренебрегая функцией G и величиной $(\Delta A/A_{ср})^2$. Тогда получим

$$K_0 = \frac{3}{4} \frac{\Delta A}{A_{ср}^2}.$$

§ 12. Совместная поперечно-горизонтальная и бортовая качка

Бортовая качка не будет вызывать поперечных гидродинамических сил только при движении так называемой дублированной модели корабля в безграничной жидкости. Такую модель можно получить, считая свободную поверхность жидкости твердой стенкой и зеркально отражая подводную часть корабля в верхнее полупространство. Подобная модель, соответствующая нулевой частоте колебаний, т. е. движению в сверхтяжелой жидкости, используется в теории управляемости и находит себе применение при приближенном определении некоторых присоединенных масс. Для исследования качки такая модель непригодна и бортовая качка, строго говоря, всегда должна рассматриваться совместно с поперечно-горизонтальной.

Учет демпфирующих сил при совместной поперечно-горизонтальной и бортовой качке, не вызывая никаких принципиальных трудностей, приводит к чрезвычайно громоздким выкладкам и кроме тривиального вывода о затухающем характере свободных колебаний не дает никакой существенно новой информации по

Запишем последнее уравнение в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_{42}^2 \theta = 0, \quad (3.17)$$

где через

$$\omega_{42} = \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44} - \frac{M_{24}^2}{m + M_{22}}}}$$

обозначена собственная частота бортовой качки с учетом поперечно-горизонтальной. Этой частоте приписан индекс 42, чтобы отличать ее от частоты гипотетической изолированной бортовой качки ω_4 .

Как легко видеть $\omega_{42} > \omega_4$, т. е. за счет влияния поперечно-горизонтальной качки собственная частота бортовой качки увеличивается, а следовательно, ее период уменьшается.

Общее решение уравнения (3.17) можно записать в виде

$$\theta = C_1 \cos \omega_{42} t + C_2 \sin \omega_{42} t, \quad (3.18)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Выписав угловую скорость бортовой качки

$$\dot{\theta} = \omega_{42} (-C_1 \sin \omega_{42} t + C_2 \cos \omega_{42} t) \quad (3.19)$$

и полагая, что в момент времени $t = 0$ корабль отклонен от положения равновесия на угол θ_0 и имеет начальную угловую скорость $\dot{\theta}_0$, из равенств (3.18) и (3.19) получим:

$$C_1 = \theta_0; \quad C_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}}.$$

Таким образом, свободная бортовая качка, сопровождающаяся поперечно-горизонтальной, будет в случае отсутствия демпфирования описываться выражением

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_{42} t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42} t.$$

Это выражение по своей структуре совершенно аналогично полученному в § 10 выражению (3.10), описывающему изолированную бортовую качку на тихой воде без демпфирования. Поперечно-горизонтальная качка, не изменяя незатухающего гармонического характера свободных бортовых колебаний, приводит лишь к изменению их частоты ω_4 на более высокую ω_{42} .

Рассмотрим теперь характер самой поперечно-горизонтальной качки. Дважды дифференцируя по времени выражение (3.18) для угла бортовой качки, найдем

$$\ddot{\theta} = -\omega_{42}^2 \left(\theta_0 \cos \omega_{42} t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42} t \right).$$

Отметим, что вывод о незатухающем характере колебаний и непрерывном боковом смещении среднего положения корабля является следствием отсутствия учета демпфирующих сил. Если эти силы учитывать, то наряду с затуханием поперечно-горизонтальных и бортовых колебаний боковое смещение быстро прекратится.

С формальной точки зрения коэффициент при второй производной в уравнении (3.16) может стать отрицательным. В этом случае уравнение бортовых наклонов с учетом поперечно-горизонтальной качки приобретает вид

$$\ddot{\theta} - \omega_{42}^2 \theta = 0, \quad (3.21)$$

где

$$\omega_{42} = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{M_{24}^2}{m + M_{22}} - (I_x + M_{44})}}. \quad (3.22)$$

Запишем решение дифференциального уравнения (3.21) в следующей форме:

$$\theta = C_5 e^{\omega_{42} t} + C_6 e^{-\omega_{42} t}. \quad (3.23)$$

Движение, определяемое последней формулой, не носит колебательного характера и если постоянная C_5 отличается от нуля, то наклонение корабля с течением времени должно неограниченно монотонно возрастать.

Выписав производную

$$\dot{\theta} = \omega_{42} (C_5 e^{\omega_{42} t} - C_6 e^{-\omega_{42} t}) \quad (3.24)$$

и положив, что при $t = 0$ отклонение от положения равновесия и угловая скорость корабля равны соответственно θ_0 и $\dot{\theta}_0$, из формул (3.23) и (3.24) найдем:

$$\theta_0 = C_5 + C_6;$$

$$\dot{\theta}_0 = \omega_{42} (C_5 - C_6),$$

откуда

$$C_5 = \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \right).$$

Имея выражения для θ_0 и $\dot{\theta}_0$ через постоянные интегрирования, не составляет никакого труда найти и постоянную C_6 , однако это не представляет интереса, так как за счет отрицательного показателя степени второй член формулы (3.23) с течением времени стремится к нулю.

Поскольку постоянная C_5 не равна нулю и при этом, как показывает опыт, движение носит колебательный характер, а непрерывного монотонного нарастания крена не наблюдается, следует прийти к выводу, что коэффициент при второй производной в диф-

Определение постоянной C_8 не вызывает никаких трудностей, однако оно не представляет интереса, так как за счет отрицательного показателя степени второй член формулы (3.26), так же как и второй член формулы (3.23), с течением времени асимптотически стремится к нулю.

Из выражения (3.27) видно, что при отличных от нуля значениях начального отклонения и начальной скорости (либо одного из этих видов начальных возмущений) постоянная C_7 не обращается в нуль. Это значит, что при отрицательных значениях старшего коэффициента в уравнении (3.16) угол наклонения корабля должен с течением времени монотонно увеличиваться и в случае наличия демпфирования. Поскольку в действительности этого не происходит и на тихой воде движение корабля, отклоненного от положения устойчивого равновесия и затем предоставленного самому себе, носит характер затухающих колебаний, очевидно, что коэффициент при угловом ускорении в дифференциальном уравнении (3.16) всегда остается положительным.

Как показывает численный анализ, для корабля с полуэллиптическими шпангоутами третье слагаемое этого коэффициента составляет примерно 15% от суммы первых двух. Таким образом, различие между частотой свободной бортовой качки, вычисленной на основе изолированного дифференциального уравнения, и действительной частотой, определенной с учетом поперечно-горизонтальных колебаний, составляет 7—8%.

§ 13. Совместная вертикальная и килевая качка

Рассмотрим совместную вертикальную и килевую качку корабля, не имеющего хода, на тихой воде без учета демпфирующих сил. В этом случае действующие на корабль гидродинамические силы будут включать только восстанавливающие и инерционные составляющие.

Проекцию на ось Oz инерционной составляющей гидродинамической силы, действующей на шпангоут с абсциссой x , можно записать в виде

$$f_3 = -\mu_{33}(\ddot{\xi} - x\ddot{\psi}), \quad (3.28)$$

где $\ddot{\xi} - x\ddot{\psi}$ — вертикальное ускорение шпангоута при совместной вертикальной и килевой качке.

Момент этой силы относительно оси Oy будет определяться формулой

$$f_5 = -xf_3. \quad (3.29)$$

Знак минус перед правой частью равенства (3.28) учитывает противоположность направлений инерционной гидродинамической силы и ускорения шпангоута. В равенстве (3.29) этот знак необходим в связи с тем, что положительная (направленная вверх)

от которой отсчитывается абсцисса x_f ее центра тяжести, а через J_f — ее момент инерции относительно центральной поперечной оси.

Как известно из статики корабля, $J_f = VR_0$, где V — объемное водоизмещение, а R_0 — продольный метацентрический радиус. В связи с этим момент инерции J_y можно представить в виде

$$J_y = VR_g,$$

где R_g имеет смысл продольного метацентрического радиуса, исправленного на положение оси вращения корабля, которая в нашем случае не проходит через центр тяжести ватерлинии, как это принято в статике. Таким образом, величина

$$\rho g J_y \psi = \rho g VR_g \psi$$

представляет собой аналог момента остойчивости формы $\rho g VR_0 \psi$. Правая часть выражения (3.30) представляет собой также аналог момента остойчивости формы, вычисленный с учетом не только изменения положения оси вращения, но и вертикального смещения центра тяжести площади ватерлинии. Восстанавливающий момент определяется как разность моментов формы и веса, причем последний момент равен $\rho g Va \psi$, где a — возвышение центра масс корабля над центром величины. Обозначив

$$R_g - a = H_g,$$

можем написать вместо (3.30) следующее более точное выражение для восстанавливающего момента:

$$F_5^r = \rho g (S_0 x_f \xi - V H_g \psi), \quad (3.31)$$

где H_g имеет смысл продольной метацентрической высоты, исправленной на изменение положения оси вращения.

Однако поскольку аналог продольной метацентрической высоты H_g очень мало отличается от аналога продольного метацентрического радиуса R_g (величина a меньше, чем R_g примерно на два порядка), значения момента, определяемые формулами (3.30) и (3.31), практически совпадают.

Подставив полученные выше выражения для сил и моментов в уравнения:

$$m \ddot{\xi} = R_3 = F_3 + F_3^r;$$

$$I_y \ddot{\psi} = R_5 = F_5 + F_5^r$$

и учитывая, что произведение плотности забортной воды ρ на объемное водоизмещение корабля V представляет собой его массу m , получим следующую систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений, описывающих совместную вертикальную и килевую качку на тихой воде:

$$(m + M_{33}) \ddot{\xi} + \rho g S_0 \xi + M_{35} \ddot{\psi} - \rho g S_0 x_f \psi = 0; \quad (3.32)$$

$$M_{35} \ddot{\xi} - \rho g S_0 x_f \xi + (I_y + M_{55}) \ddot{\psi} + m g H_g \psi = 0.$$

($j = 3$ соответствует проекции силы на ось Oz , а $j = 5$ — проекции момента на ось Oy), а через k — номер неизвестного ($k = 3$ соответствует ординате вертикальной качки ζ , а $k = 5$ — углу килевой качки ψ).

Для интегрирования системы (3.35) введем вспомогательную функцию $U(t)$, связанную с неизвестными ζ и ψ следующими соотношениями:

$$\zeta = -c_{35}U; \quad \psi = (D^2 + c_{33})U, \quad (3.37)$$

где $D = d/dt$ — символический оператор дифференцирования по времени. Таким образом,

$$D^2U = \frac{d^2U}{dt^2}.$$

Подставляя выражения (3.37) в систему дифференциальных уравнений (3.35), увидим, что первое из уравнений удовлетворяется при любом выборе функции U . Поэтому указанная функция должна быть выбрана так, чтобы она удовлетворяла второму уравнению. Подстановка выражений (3.37) в это уравнение приводит к дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$[(D^2 + c_{33})(D^2 + c_{55}) - c_{35}c_{53}]U = 0$$

или в обычной записи

$$\frac{d^4U}{dt^4} + (c_{33} + c_{55})\frac{d^2U}{dt^2} + (c_{33}c_{55} - c_{35}c_{53})U = 0. \quad (3.38)$$

Характеристическое уравнение в этом случае будет иметь вид

$$r^4 + a_1r^2 + a_2 = 0,$$

где

$$a_1 = c_{33} + c_{55}; \quad a_2 = c_{33}c_{55} - c_{35}c_{53}.$$

Его корни определяются формулой

$$r = \pm \sqrt{-\frac{c_{33} + c_{55}}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_{33} - c_{55})^2}{4} + c_{35}c_{53}}}. \quad (3.39)$$

Нетрудно убедиться, что эти корни будут мнимыми. Как будет показано в § 14, значения ω_3 и ω_5 очень близки друг к другу; ω_{5g} почти не отличается от ω_5 и, следовательно,

$$(c_{33} - c_{55})^2 = (\omega_3^2 - \omega_{5g}^2)^2 \approx 0.$$

Таким образом, внутренний радикал в формуле (3.39) приближенно равен

$$\sqrt{c_{35}c_{53}} = \omega_3^2 \frac{x_f}{\rho_y}.$$

Абсцисса x_f центра тяжести площади ватерлинии не превышает 2—3% длины корабля. Величина ρ_y , играющая роль радиуса инерции системы, включающей массу корабля и присоединенную массу,

Из выражений (3.40) видно, что в случае, когда центр тяжести площади ватерлинии не лежит на одной вертикали с центром масс корабля, как вертикальная, так и килевая качка представляют собой суперпозицию гармонических колебаний двух различных частот ω_{35} и ω_{53} . Эти частоты несколько отличаются от частот ω_3 и ω_5 ветрикальной и килевой качки, протекающих независимо друг от друга. Амплитуды и начальные фазы совместной качки определяются начальными условиями, как это всегда имеет место для свободных колебаний.

§ 14. Приближенные формулы для моментов инерции массы корабля и периодов качки.

Оперативный контроль остойчивости корабля в море

Для расчета качки необходимо знать моменты инерции массы корабля:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm; \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

где dm — элементарная масса, x, y, z — координаты ее центра. Учитывая большое удлинение корабля, можно в подынтегральных выражениях пренебречь y^2 и z^2 по сравнению с x^2 , т. е. считать I_y и I_z равными и определять их как момент инерции относительно поперечной плоскости, содержащей начало координат

$$I_y = I_z = \int_m x^2 dm.$$

Существуют различные схемы приближенного вычисления момента I_x с использованием конструктивных чертежей и данных по распределению масс, однако они чрезвычайно трудоемки и обладают невысокой точностью, так как вычислить, например, момент инерции наружной обшивки, набора или какого-либо механизма, имеющего сложную конфигурацию, очень тяжело. Поэтому в практике для определения I_x пользуются приближенными формулами. Чаще всего используют формулу Дуайра, полученную для прямоугольного параллелепипеда шириной B и высотой $2z_{g0}$, где z_{g0} — возвышение центра масс над основной плоскостью,

$$I_x = \frac{m}{12} (B^2 + 4z_{g0}^2)$$

или формула Ю. А. Шиманского, полученная для сплошного параболического цилиндра,

$$I_x = m \left(\frac{\alpha^2 B^2}{11,4\delta} + \frac{H_S}{12} \right),$$

где α — коэффициент полноты ватерлинии; B — ширина корабля; H_S — высота борта; δ — коэффициент общей полноты.

на первый взгляд, в связи с тем, что периоды зависят от присоединенных масс, а последние, в свою очередь, зависят от периодов¹. Таким образом, для точного решения задачи должен быть использован метод последовательных приближений (для вертикальной и килевой качки можно также воспользоваться изложенным ниже графоаналитическим способом, предложенным Ф. Тасаи).

Вместе с тем для практики необходимы пусть менее точные, но простые и удобные формулы, позволяющие быстро определить периоды свободных колебаний. Выведем такие приближенные формулы.

Период свободной вертикальной качки T_3 определяется согласно (3.11) равенством

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m + M_{33}}{\rho g S_0}}.$$

Подставляя сюда очевидные выражения

$$m = \rho \delta L B T; \quad S_0 = \alpha L B,$$

представив присоединенную массу в виде $M_{33} = q_3 m$ и имея в виду, что $\sqrt{g}$ численно примерно равен π , получим

$$T_3 = 2 \sqrt{(1 + q_3) \chi T},$$

где $\chi = \delta/\alpha$ — коэффициент вертикальной полноты корабля. Значения линейных размеров здесь и в последующем должны выражаться в метрах, тогда периоды получаются в секундах. Это связано с тем, что при получении приближенных формул мы сокращаем безразмерную величину π и размерную $\sqrt{g}$.

Для наиболее грубых оценочных расчетов можно, полагая $q_3 = 1$, а $\chi = 0,8$, получить формулу

$$T_3 = 2,5 \sqrt{T}. \quad (3.43)$$

Для определения q_3 можно также воспользоваться эмпирической формулой

$$q_3 = 0,4\alpha \frac{B}{T}.$$

Если представить формулу для периода свободной вертикальной качки в виде

$$T_3 = k_\zeta \sqrt{T},$$

то, пользуясь для определения присоединенной массы выражением

$$M_{33} = m_{033} \frac{\rho \pi B^2}{4} L \frac{\alpha^2}{1 + \alpha}$$

¹ Влияние демпфирования на периоды свободных колебаний весьма мало и поэтому не учитывается.

$\frac{B}{T}$	α	Коэффициент общей полноты δ							
		0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85
5,0	0,65	2,84	2,90	2,95	3,00	—	—	—	—
	0,70	2,84	2,89	2,94	2,99	3,04	—	—	—
	0,75	2,85	2,89	2,94	2,98	3,03	3,07	—	—
	0,80	2,85	2,90	2,94	2,98	3,02	3,06	3,11	—
	0,85	2,86	2,90	2,94	2,98	3,02	3,06	3,10	3,14
	0,90	2,87	2,91	2,94	2,98	3,02	3,06	3,09	3,13
	0,95	2,88	2,91	2,95	2,99	3,02	3,06	3,09	3,12
5,5	0,65	2,93	2,98	3,03	3,08	—	—	—	—
	0,70	2,93	2,98	3,03	3,08	3,12	—	—	—
	0,75	2,94	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	—	—
	0,80	2,95	2,99	3,03	3,07	3,11	3,15	3,19	—
	0,85	2,96	3,00	3,04	3,08	3,12	3,15	3,19	3,23
	0,90	2,97	3,01	3,04	3,08	3,12	3,16	3,19	3,22
	0,95	2,98	3,02	3,05	3,10	3,13	3,17	3,20	3,23

и считая $m_{033} = 0,8$, получим

$$k_{\xi} = \sqrt{4,02 \frac{\delta}{\alpha} + 2,53 \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{B}{T}}.$$

Вычисленные согласно последней формуле значения k_{ξ} приведены в табл. 11.

Период свободной килевой качки, как видно из (3.11), определяется выражением

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{I_y + M_{55}}{mgH}}.$$

Пренебрегая крайне незначительной разницей между продольной метацентрической высотой H и продольным метацентрическим радиусом R_0 и учитывая, что

$$R_0 = \frac{\rho J_f}{m},$$

где J_f — продольный момент инерции площади ватерлинии, формулу для T_5 можно переписать в виде

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{I_y + M_{55}}{\rho g J_f}}. \quad (3.44)$$

Обозначив $M_{55} = q_5 I_y$ и сократив π и $\sqrt{g}$, получим

$$T_5 = 2 \sqrt{\frac{(1 + q_5) I_y}{\rho J_f}}.$$

$\frac{B}{T}$	α	Коэффициент общей полноты δ							
		0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85
5,0	0,65	2,48	2,54	2,59	2,64	—	—	—	—
	0,70	2,52	2,57	2,62	2,67	2,71	—	—	—
	0,75	2,56	2,61	2,65	2,70	2,74	2,78	—	—
	0,80	2,61	2,65	2,69	2,73	2,77	2,81	2,85	—
	0,85	2,65	2,69	2,73	2,77	2,80	2,84	2,88	2,91
	0,90	2,70	2,74	2,77	2,81	2,84	2,87	2,90	2,94
	0,95	2,75	2,79	2,82	2,85	2,88	2,91	2,94	2,96
5,5	0,65	2,55	2,61	2,66	2,71	—	—	—	—
	0,70	2,60	2,64	2,69	2,74	2,78	—	—	—
	0,75	2,64	2,69	2,73	2,77	2,82	2,86	—	—
	0,80	2,69	2,73	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	—
	0,85	2,75	2,78	2,82	2,85	2,89	2,93	2,96	2,99
	0,90	2,80	2,83	2,87	2,90	2,93	2,96	2,99	3,03
	0,95	2,86	2,89	2,92	2,95	2,98	3,00	3,03	3,06

Воспользуемся для определения I_y приближенной формулой

$$I_y = \left(\frac{L}{4}\right)^2 m = \left(\frac{L}{4}\right)^2 \rho \delta L B T$$

и положим продольный радиус инерции площади ватерлинии также равным $L/4$. Тогда

$$J_f = \left(\frac{L}{4}\right)^2 S_0 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 \alpha L B$$

и

$$T_5 = 2 \sqrt{(1 + q_5) \chi T}.$$

Полагая для грубых оценок $q_5 = 1$; $\chi = 0,8$, получим

$$T_5 = 2,5 \sqrt{T}.$$

Сопоставляя последнюю формулу с формулой (3.43), видим, что в первом приближении периоды свободной вертикальной и килевой качки оказываются одинаковыми.

Несколько меньшие значения T_5 получаются при использовании эмпирической формулы

$$q_5 = 0,42 \varphi^2 \frac{B}{T},$$

где φ — коэффициент продольной полноты корабля.

Более точные результаты можно получить, аппроксимируя ватерлинию уравнением (2.40). В этом случае продольный момент

где

$$[\ddot{f}] = \frac{J_f}{S_0}; \quad \rho_{oy}^2 = \frac{I_y}{m},$$

вычисляют коэффициенты q_3 и q_5 как функции $\omega^2 T/g$ и на том же рисунке строят соответствующие кривые (пунктир).

Безразмерную частоту вертикальной качки $\omega_3^2 T/g$ находят по графику как абсциссу точки пересечения кривых q_3 , построенных по формулам (3.45) и (3.46), безразмерную частоту килевой качки $\omega_5 T/g$ — аналогичным способом.

Перейдем теперь к получению имеющей важное значение приближенной формулы для периода свободной бортовой качки T_4 . С этой целью представим сумму $I_x + M_{44}$ как произведение массы корабля на квадрат линейного размера ρ_x :

$$I_x + M_{44} = m \rho_x^2 \quad (3.47)$$

Величина ρ_x представляет собой некоторый аналог поперечного радиуса инерции массы, однако в полном смысле радиусом инерции не является, так как в левой части последнего равенства стоит сумма момента инерции массы корабля и присоединенного момента инерции, а в правой — только масса самого корабля.

Подставив равенство (3.47) в формулу для периода бортовой качки (3.11)

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{I_x + M_{44}}{mgh}}$$

и считая $\sqrt{g}$ численно равным π , после соответствующих сокращений получим

$$T_4 = 2 \frac{\rho_x}{\sqrt{h}}.$$

Представляя величину ρ_x как некоторую долю полуширины корабля

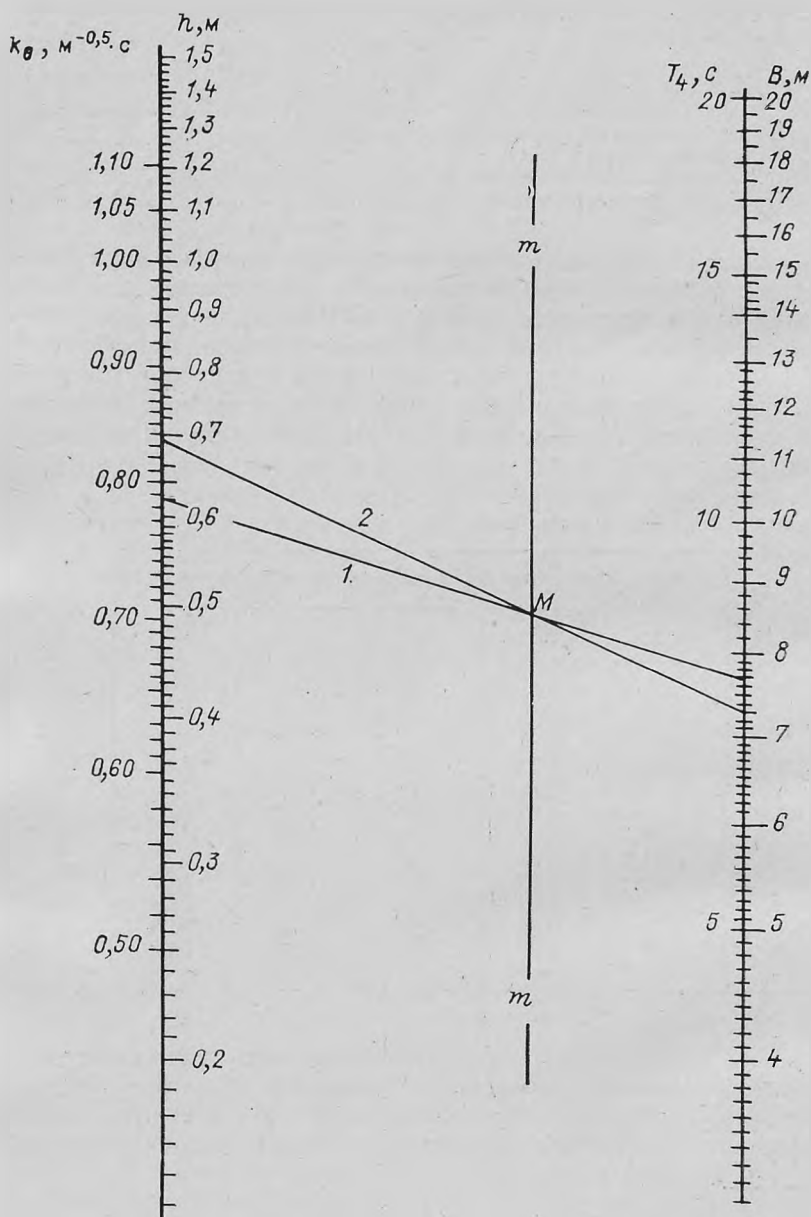
$$\rho_x = k_0 \frac{B}{2},$$

будем иметь

$$T_4 = \frac{k_0 B}{\sqrt{h}}.$$

Аналогично изложенному выше, из-за сокращения безразмерной величины π и размерной $\sqrt{g}$ линейные размеры в эту формулу следует подставлять в метрах, тогда период получается в секундах. Таким образом, коэффициент k_0 , так же как k_ψ и k_ϕ , имеет размерность $m^{-0.5}$ с.

Международная морская организация (ИМО) рекомендует принимать следующие приближенные значения коэффициента k_0 для каботажных и промысловых судов:



3.6. Номограмма ИМО.

корабля, набегающие на него свободно распространяющиеся и дифрагированные волны, обусловленные эффектом присутствия корабля как препятствия на пути распространения набегающих волн, будет безвихревым.

2. Набегающие на корабль свободные волны имеют малую амплитуду. Амплитуды качки, вызываемой такими волнами, также малы, и их квадратами и произведениями можно пренебречь.

3. Удлинение корабля предполагается настолько большим, что амплитуды волн, вызванных его ходом с конечной скоростью, можно рассматривать как малые. Поскольку качка малой амплитуды также вызывает волны малой амплитуды, то возмущенное движение жидкости можно рассматривать в рамках линейной теории волн. Иными словами, в рассматриваемом случае можно пренебречь квадратичными членами в интеграле Лагранжа-Коши и граничные условия на свободной поверхности жидкости записывать в линейной форме, относя их к плоскости, представляющей собой невозмущенную свободную поверхность.

4. Кривизна ватерлиний и скорость хода корабля не оказывают существенного влияния на гидродинамические характеристики качки (присоединенные массы и коэффициенты демпфирования), и последние определяются, главным образом, формой шпангоутов. Таким образом, для определения указанных характеристик может быть использован метод плоских сечений.

Следует напомнить, что вследствие предположения об идеальности жидкости, гидродинамической теорией качки учитывается демпфирование только волновой природы, т. е. демпфирование, обусловленное затратой качающимся кораблем энергии на образование и поддержание системы расходящихся волн. Демпфирование вязкостной природы, которое играет существенную роль при бортовой качке, должно определяться косвенным путем и добавляться к волновому демпфированию, найденному на основе гидродинамической теории.

Полное демпфирование при бортовой качке, включающее как вязкостную, так и волновую составляющие, можно определить на основе экспериментальных данных, полученных В. В. Луговским и Ю. И. Фаддеевым с помощью систематических испытаний моделей. Построенная этими авторами номограмма приведена в § 8.

Рассмотрим теперь общую постановку задач гидродинамической теории качки. Поскольку возмущенное движение жидкости рассматривается как безвихревое, прежде всего требуется определить потенциал скоростей этого движения, т. е. сформулировать и решить соответствующую краевую задачу. Затем, зная потенциал, необходимо определить действующие на корабль гидродинамические силы и рассчитать кинематические характеристики его качки.

Сформулируем краевую задачу в системе координат $Oxyz$, неизменно связанной с кораблем и имеющей свое начало в точке пере-

Таким образом, операторы $\partial_a/\partial t$ и $\partial_a^2/\partial t^2$ приобретают вид:

$$\frac{\partial_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x};$$

$$\frac{\partial_a^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Применение последнего оператора к функции Φ^e в формуле (4.2) и приводит к условию (4.3).

2. На смоченной поверхности корабля S должно выполняться условие обтекания, которое для идеальной жидкости заключается в том, что нормальная по отношению к кораблю компонента скорости частицы, совпадающей с некоторой точкой M поверхности S , должна быть равна нормальной компоненте u_n скорости соответствующей точки этой поверхности. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial n} = u_n \text{ на } S, \quad (4.4)$$

где n — орт внешней (направленной внутрь жидкости) нормали к смоченной поверхности.

Найдем теперь величину u_n . Выберем в качестве полюса начало подвижной системы координат — точку O и обозначим ее скорость через U . Вектор угловой скорости вращения корабля вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, обозначим через Ω , а радиус — вектор точки M поверхности S относительно полюса — через r_S . Тогда вектор скорости u точки M будет определяться формулой

$$u = U + \Omega r_S,$$

а его нормальная компонента u_n — формулой

$$\begin{aligned} u_n &= u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) + u_z \cos(n, z) = \\ &= (U_x + \Omega_y z - \Omega_z y) \cos(n, x) + (U_y + \Omega_z x - \Omega_x z) \cos(n, y) + \\ &\quad + (U_z + \Omega_x y - \Omega_y x) \cos(n, z). \end{aligned}$$

Используя введенные в § 6 обозначения для проекций векторов U и Ω :

$$U_1 = U_x; \quad U_2 = U_y; \quad U_3 = U_z; \quad U_4 = \Omega_x; \quad U_5 = \Omega_y; \quad U_6 = \Omega_z,$$

можем переписать граничное условие для функции Φ^e на смоченной поверхности S в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^e}{\partial n} &= u_n = U_1 \cos(n, x) + U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) + \\ &+ U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + U_5 [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] + \\ &+ U_6 [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

3. Граничное условие на бесконечности состоит, во-первых, в том, что при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ возмущения, вносимые в окружаю-

Сопоставление двух последних равенств показывает, что на смоченной поверхности S функции Φ^* и Φ^0 должны удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = 0$$

или

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = - \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}. \quad (4.7)$$

Последнее условие позволяет, как будет показано ниже, избежать определения функции Φ^0 . Функция Φ^* также не подлежит определению, так как она известна из теории волн. Таким образом, краевая задача должна решаться только для функции Φ .

§ 16. Категории гидродинамических сил

Гидродинамические силы, действующие на корабль при качке, определяют интегрированием давлений по его смоченной поверхности. Для определения давлений при известном потенциале скоростей возмущенного движения жидкости применяют интеграл Лагранжа—Коши, который в линеаризованной форме, т. е. без учета квадратов скоростей возмущенного движения, для тяжелой жидкости имеет вид

$$p_1 = p^e + p^u = -\rho \frac{\partial_a \Phi^e}{\partial t} - \rho g(z + \zeta - x\psi + y\theta).$$

Здесь через

$$p^e = -\rho \frac{\partial_a \Phi^e}{\partial t} = -\rho \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right) \quad (4.8)$$

обозначено избыточное давление, обусловленное возмущенным движением жидкости, а через

$$p^u = -\rho g(z + \zeta - x\psi + y\theta) \quad (4.9)$$

избыточное гидростатическое давление, вычисленное с учетом изменения глубины погружения точки x, y, z смоченной поверхности корабля за счет вертикальной, бортовой и килевой качки.

С точностью, соответствующей требованиям линейной теории качки, интегрирование давления производится по неизменной смоченной поверхности S , отвечающей равновесному положению корабля на тихой воде. Интегралы

$$F^u = - \iint_S p^u n dS \quad \text{и} \quad M^u = - \iint_S p^u (r_S \times n) dS \quad (4.10)$$

определяют собой мгновенную силу плавучести и ее момент, которые вместе с весом корабля дают восстанавливающую силу F^r и восстанавливающий момент M^r . Как уже упоминалось, последние

Итак, в рамках линейной гидродинамической теории качки гидродинамические силы, действующие на корабль, разделяют на инерционно-демпфирующие, восстанавливающие и возмущающие. Последние, в свою очередь, состоят из главной и дифракционной частей.

§ 17. Инерционно-демпфирующие силы

Будем рассматривать корабль как тело с шестью степенями свободы, плавающее в идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Пусть корабль движется по курсу с конечной средней скоростью v и совершает продольно-горизонтальную, поперечно-горизонтальную, вертикальную, бортовую, килевую качку и рысканье. Все виды качки носят гармонический характер и совершаются с одинаковой круговой частотой σ , а их амплитуды представляют собой величины первого порядка малости. Поскольку частота качки конечна, очевидно, что амплитуды скоростей и ускорений также будут малыми первого порядка. Малые высших порядков, как это принято в линейной теории качки, будем отбрасывать.

Представим потенциал скоростей движения жидкости, вызванного ходом и качкой корабля, в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k, \quad (4.13)$$

где $U_1 = U_x$; $U_2 = U_y$; $U_3 = U_z$; $U_4 = \Omega_x$; $U_5 = \Omega_y$; $U_6 = \Omega_z$ — проекции вектора U линейной скорости полюса и вектора Ω угловой скорости вращения корабля вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, а Φ_k — удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} = 0$$

функции координат. Эти функции, как показано в § 6, представляют собой потенциалы скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного k -м видом движения тела с единичной линейной, ($k = 1, 2, 3$) или угловой скоростью ($k = 4, 5, 6$). При колебаниях тела на поверхности или под поверхностью тяжелой жидкости эти функции являются потенциалами скоростей расходящихся волн, излучаемых соответствующим видом колебаний, поэтому в гидродинамической теории качки их принято называть функциями излучения.

Функции излучения должны удовлетворять условию затухания возмущенного движения на бесконечно большом удалении от корабля

$$\text{grad } \Phi_k = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty,$$

условию покоя жидкости на неограниченной глубине

$$\text{grad } \Phi_k = 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty,$$

дующий вид:

$$g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + v^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 0;$$

$$g \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} + \left(i\sigma - v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi_k = 0, \quad (k=2, 3, \dots, 6).$$

Перейдем теперь к рассмотрению граничных условий, которым должны удовлетворять эти функции на смоченной поверхности корабля S . Как указывалось в § 15, в случае отсутствия набегающих и дифрагированных волн функция Φ должна сама по себе удовлетворять всем граничным условиям рассматриваемой краевой задачи, в том числе и условию обтекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_n \quad \text{на } S.$$

Согласно формулам (4.13) и (4.5) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = & U_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + U_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} + U_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} + U_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} + \\ & + U_5 \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} + U_6 \frac{\partial \Phi_6}{\partial n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n = & U_1 \cos(n, x) + U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) + \\ & + U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + U_5 [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] + \\ & + U_6 [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при компонентах скорости с одинаковыми индексами в двух последних выражениях, получим следующие граничные условия для функций излучения Φ_k на смоченной поверхности S :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \cos(n, x); & \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= \cos(n, y); & \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} &= \cos(n, z); \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} &= y \cos(n, z) - z \cos(n, y); \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} &= z \cos(n, x) - x \cos(n, z); \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} &= x \cos(n, y) - y \cos(n, x). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Эти условия совпадают с граничными условиями (2.3) для единичных потенциалов при произвольном движении тела в безграничной жидкости.

Будучи определенными в неизменно связанной с телом системе координат, функции Φ_k зависят от выбора этой системы и формы

где, очевидно, $\text{grad } \Phi$ — вектор скорости жидкости. Применим к этому интегралу преобразование Остроградского-Гаусса, имея в виду, что внешняя нормаль к поверхности S направлена внутрь объема τ и, следовательно, интеграл по этой поверхности должен быть взят с отрицательным знаком. Таким образом,

$$K_{\tau} = \iint_{S'} \rho \Phi n dS - \iint_S \rho \Phi n dS.$$

Согласно закону количества движения, называемому иначе теоремой импульсов, изменение за промежуток времени dt количества движения частиц жидкости, заключенных в некотором объеме τ , равно импульсу массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем за тот же промежуток времени. Обозначим через G главный вектор массовых сил, которые для тяжелой жидкости сводятся только к ее весу. Главный вектор поверхностных сил (сил гидродинамических давлений), приложенных со стороны жидкости к поверхности тела S , обозначим через F . Тогда на основании принципа равенства действия и противодействия к поверхности S жидкости со стороны тела будет приложена сила — F . Если главный вектор сил давлений, приложенных извне к поверхности S' , обозначить F' , то выражение для импульса внешних сил, приложенных к объему τ , можно написать в виде

$$(G + F' - F) dt.$$

Изменение количества движения частиц жидкости, заключенных в объеме τ , будет происходить как за счет изменения их скоростей, так за счет того, что количество движения частиц, вошедших и вышедших за время dt через поверхность S' , будет различным. Однако учет последнего обстоятельства приводит к слагаемому более высокого порядка малости, чем те, которые связаны с изменением скоростей частиц. Отбрасывая это слагаемое, получим следующую формулу для изменения количества движения:

$$dK_{\tau} = d \iint_{S'} \rho \Phi n dS - d \iint_S \rho \Phi n dS.$$

Приравнивая два последних выражения, будем иметь

$$G + F' - F = \frac{d}{dt} \iint_{S'} \rho \Phi n dS - \frac{d}{dt} \iint_S \rho \Phi n dS. \quad (4.16)$$

Для определения силы F' воспользуемся линеаризованным интегралом Лагранжа—Коши. Поскольку поверхность S' неподвижна в пространстве, можно, считая в данный момент времени подвижную и неподвижную системы координат совпадающими, пользоваться для решения задачи координатами той или другой системы. Мы будем пользоваться координатами подвижной системы $Ox_1y_1z_1$.

Если полагать, что в рассматриваемый момент времени положительная ось Oz направлена вертикально вверх, можем, как по-

жем написать

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) [\mathbf{i} \cos(n, x) + \mathbf{j} \cos(n, y) + \mathbf{k} \cos(n, z)] dS = \\ = \iiint_D \left(\mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\tau \end{aligned}$$

или

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathbf{n} dS = \iiint_D \text{grad } f d\tau.$$

Вектор $\text{grad } f$ можно представить как произведение векторного дифференциального оператора

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

называемого оператором Гамильтона, на скаляр f . Это дает возможность переписать предыдущую формулу в виде

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} f(x, y, z) dS = \iiint_D \nabla f d\tau,$$

пользуясь простым и удобным мнемоническим правилом «орту внешней нормали $\mathbf{n}$ в поверхностном интеграле соответствует дифференциальный оператор ∇ в объемном».

Применим теперь полученную модификацию преобразования Остроградского—Гаусса к последнему слагаемому формулы (4.17), помня, что объем τ ограничен не только поверхностью S' , но и поверхностью S , внешняя нормаль к которой направлена внутрь объема τ . Таким образом,

$$\iint_{S'} \mathbf{n} z dS = \iiint_{\tau} \nabla z d\tau + \iint_S \mathbf{n} z dS.$$

Преобразовав в последней формуле интеграл по поверхности тела S в интеграл по его объему V , получим

$$\iint_S \mathbf{n} z dS = \iiint_V \nabla z d\tau.$$

Но, как легко видеть, $\nabla z = \mathbf{k}$ и, следовательно,

$$\iint_S \mathbf{n} z dS = \mathbf{k}(\tau + V). \quad (4.20)$$

Подставляя равенства (4.18), (4.19) и (4.20) в выражение (4.17), будем иметь

$$\mathbf{F}' = -\frac{d}{dt} \iint_{S'} \rho \Phi \mathbf{n} dS + \mathbf{k} \rho g (\tau + V).$$

Помня, что положительная ось Oz направлена вверх, можем написать следующее выражение для силы тяжести, действующей на объем τ :

$$\mathbf{G} = -\mathbf{k} \rho g \tau.$$

точки будет определяться векторным произведением $\Omega \times N$. Следовательно,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \Omega \times N. \quad (4.23)$$

Из последней формулы видно, что абсолютная производная вектора равна геометрической сумме относительной производной и векторного произведения угловой скорости вращения подвижной системы координат на дифференцируемый вектор.

Из формул (4.22) и (4.23) легко получить окончательное выражение для главного вектора инерционно-демпфирующих сил:

$$F = - \frac{\partial N}{\partial t} - \Omega \times N. \quad (4.24)$$

При вычислении главного момента этих сил следует, помимо угловой скорости вращения подвижной системы координат, принимать во внимание поступательную скорость U ее начала — точки O . Обозначим момент количества движения жидкости относительно точки O_0 через Q_0 , момент инерционно-демпфирующих сил относительно той же точки — через M_0 , а радиус-вектор, проведенный из точки O_0 в точку O , — через r . Тогда, учитывая, что момент некоторого вектора относительно точки O_0 равен моменту относительно точки O плюс момент этого же вектора, приложенного в точке O , относительно O_0 , можем написать:

$$Q_0 = Q + r \times N; \quad (4.25)$$

$$M_0 = M + r \times F. \quad (4.26)$$

Поскольку согласно (4.22)

$$F = - \frac{dN}{dt},$$

формула (4.26) примет вид

$$M_0 = M - r \times \frac{dN}{dt}. \quad (4.27)$$

Но с другой стороны по аналогии с (4.22) будем иметь

$$M_0 = - \frac{dQ_0}{dt}.$$

Используя представление Q_0 в форме (4.25) и руководствуясь сформулированным выше правилом вычисления абсолютной производной вектора, перепишем последнее равенство следующим образом:

$$M_0 = - \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \Omega \times Q + \frac{dr}{dt} \times N + r \times \frac{dN}{dt} \right). \quad (4.28)$$

Приравнявая выражения (4.27) и (4.28), получим окончательную

Тогда, введя для проекции векторов N и Q обозначения:

$N_x = N_1$; $N_y = N_2$; $N_z = N_3$; $Q_x = N_4$; $Q_y = N_5$; $Q_z = N_6$,
на основании равенств (4.31) можем написать

$$N_j = \sum_{k=1}^6 \left(-\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \right) U_k, \quad (j = 1, 2, \dots, 6).$$

Но при гармонических колебаниях тела, сопровождающихся волнообразованием,

$$-\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk},$$

где M_{jk} — присоединенная масса; Λ_{jk} — коэффициент демпфирования; σ — частота колебаний. В предельных случаях $\sigma = 0$ и $\sigma \rightarrow \infty$ коэффициенты демпфирования равны нулю, так как при таких частотах тело не образует волн.

С использованием последнего равенства выражение для N_j принимает вид

$$N_j = \sum_{k=1}^6 \left(M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k, \quad (j = 1, 2, \dots, 6). \quad (4.33)$$

Будем в дальнейшем считать удлинение корабля настолько большим, что на его смоченной поверхности можно без существенной погрешности полагать $\cos(n, x) = 0$. Это значит, что $M_{1k} = M_{k1}$, $\Lambda_{1k} = \Lambda_{k1}$ и N_1 также окажутся равными нулю. Таким образом, мы считаем, что продольно-горизонтальная качка удлиненного корабля не вносит возмущений в окружающую жидкость и не оказывает влияния на инерционно-демпфирующие силы при других видах качки. Для такого корабля формула (4.33) принимает вид

$$N_j = \sum_{k=2}^6 \left(M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k, \quad (j = 2, 3, \dots, 6).$$

Вследствие симметрии корабля относительно диаметральной плоскости присоединенные массы M_{jk} и коэффициенты демпфирования Λ_{jk} в тех случаях, когда один из индексов четный, а другой нечетный, равны нулю. По этой причине последняя формула распадается на две:

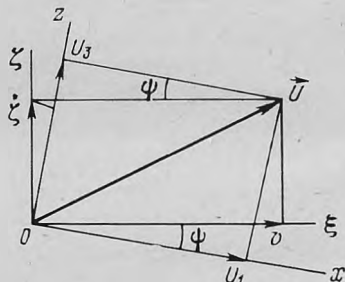
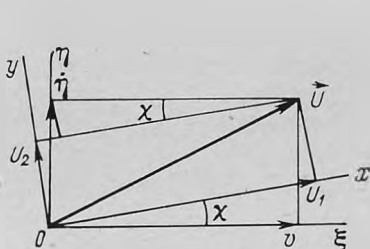
$$\left. \begin{aligned} N_j &= \sum_{k=3,5} \left(M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k & (j = 3, 5); \\ N_j &= \sum_{k=2,4,6} \left(M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k & (j = 2, 4, 6). \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

для F_j малые высших порядков, получим:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0; & F_j &= -\frac{\partial N_j}{\partial t}, & (j=2, 3, 4); \\ F_5 &= -\frac{\partial N_5}{\partial t} + U_1 N_3; \\ F_6 &= -\frac{\partial N_6}{\partial t} - U_1 N_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Определим теперь проекции U_k вектора U на оси подвижной системы координат (рис. 4.1). Проекции этого вектора на оси неподвижной системы будут: $U_\xi = v$; $U_\eta = \dot{\eta}$; $U_\zeta = \dot{\zeta}$. Тогда, заменяя, ввиду малости углов рысканья и килевой качки, их синусы самими углами, а косинусы — единицами, найдем:

$$\left\{ \begin{aligned} U_1 &= U_x = v; & U_2 &= U_y = \dot{\eta} - v\chi; & U_3 &= U_z = \dot{\zeta} + v\psi. \end{aligned} \right. \quad (4.36)$$



4.1. К определению проекций вектора U .

Проекции вектора Ω , учитывая принятые выше обозначения для углов бортовой и килевой качки и рысканья, определяются формулами:

$$U_4 = \Omega_x = \dot{\theta}; \quad U_5 = \Omega_y = \dot{\psi}; \quad U_6 = \Omega_z = \dot{\chi}. \quad (4.37)$$

Иначе, имея в виду, что для величины U_k , изменяющейся по гармоническому закону $U_k = u_k e^{i\sigma t}$, очевидны соотношения:

$$\dot{U}_k = i\sigma U_k; \quad U_k = -\frac{i}{\sigma} \dot{U}_k,$$

можем написать:

$$\left\{ \begin{aligned} U_2 &= i\left(\sigma\eta + \frac{v}{\sigma}\dot{\chi}\right); & U_3 &= i\left(\sigma\zeta - \frac{v}{\sigma}\dot{\psi}\right); \\ U_4 &= i\sigma\dot{\theta}; & U_5 &= i\sigma\dot{\psi}; & U_6 &= i\sigma\dot{\chi}. \end{aligned} \right. \quad (4.38)$$

§ 18. Восстанавливающие силы

Для определения восстанавливающих сил при вертикальной, бортовой и килевой качке найдем соответствующие проекции векторов

$$\mathbf{F}^H = - \iint_S p^H \mathbf{n} dS \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^H = - \iint_S p^H (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS,$$

где p^H — избыточное гидростатическое давление на площадку dS смоченной поверхности корабля.

Обозначив $F_z^H = F_3^H$, $M_x^H = F_4^H$ и $M_y^H = F_5^H$, можем написать:

$$F_3^H = - \iint_S p^H \cos(n, z) dS;$$

$$F_4^H = - \iint_S p^H [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dS;$$

$$F_5^H = - \iint_S p^H [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] dS.$$

Преобразуем эти интегралы в интегралы по погруженному в равновесном положении корабля объему V . При этом следует иметь в виду, что смоченная поверхность S суть незамкнутая поверхность и для применения преобразования Остроградского—Гаусса ее следует предварительно замкнуть ватерлинией равновесия S_0 .

На ватерлинии имеют место следующие очевидные равенства: $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$, $\cos(n, z) = 1$. С учетом этих равенств получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_3^H &= - \iiint_V \frac{\partial p^H}{\partial z} d\tau + \iint_{S_0} p_0^H dS; \\ F_4^H &= - \iiint_V \left(y \frac{\partial p^H}{\partial z} - z \frac{\partial p^H}{\partial y} \right) d\tau + \iint_{S_0} p_0^H y dS; \\ F_5^H &= - \iiint_V \left(z \frac{\partial p^H}{\partial x} - x \frac{\partial p^H}{\partial z} \right) d\tau - \iint_{S_0} p_0^H x dS, \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

где p_0^H — избыточное гидростатическое давление на плоскости $z = 0$, возникающее за счет вертикальной, бортовой и килевой качки. Согласно формуле (4.9)

$$p^H = -\rho g (z + \zeta - x\psi + y\theta)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial p^H}{\partial x} = \rho g \psi; \quad \frac{\partial p^H}{\partial y} = -\rho g \theta; \quad \frac{\partial p^H}{\partial z} = -\rho g.$$

Перейдем к рассмотрению восстанавливающего момента при бортовой качке. Обозначая через r_0 поперечный метацентрический радиус и учитывая, что $J_x = Vr_0$, формулу для момента F_4^H силы плавучести можно переписать в виде

$$F_4^H = -\rho g V (z_c + r_0) \theta = -\rho g V z_m \theta,$$

где, очевидно, z_m — аппликата поперечного метацентра m_0 , которая, напомним, измеряется от ватерлинии равновесия (рис. 4.2). Отрицательный знак в этой формуле связан с тем, что момент силы плавучести относительно оси Ox противоположен по направлению углу наклона корабля. Момент веса относительно той же оси

$$F_4^W = mg z_g \theta$$

берется с положительным знаком, так как направления этого момента и угла наклона одинаковы. Иными словами, момент силы плавучести стремится уменьшить, а момент веса — увеличить угол наклона.

Складывая моменты F_4^H и F_4^W и имея в виду, что $\rho g V = mg$, получим восстанавливающий момент при бортовой качке в виде линеаризованной метацентрической формулы остойчивости:

$$F_4^r = -mgh\theta, \quad (4.45)$$

где h — поперечная метацентрическая высота.

Обратимся теперь к определению восстанавливающего момента, обусловленного совместной вертикальной и килевой качкой.

Момент инерции площади ватерлинии относительно оси Oy , определяется выражением

$$J_y = J_f + S_0 x_f^2, \quad (4.46)$$

где J_f — момент инерции этой площади относительно центральной поперечной оси. Последний можно представить в виде

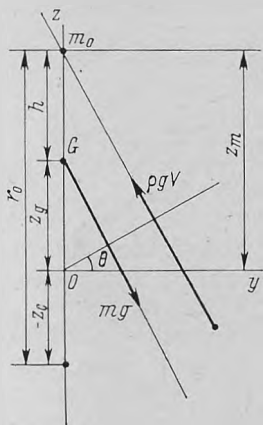
$$J_f = VR_0, \quad (4.47)$$

где R_0 — продольный метацентрический радиус.

Подставляя эти равенства в (4.43), получим

$$\begin{aligned} F_5^H &= -\rho g \{V [x_c + (z_c + R_0) \psi] - S_0 x_f (\zeta - x_f \psi)\} = \\ &= -\rho g [V (x_c - z_M \psi) - S_0 x_f (\zeta - x_f \psi)], \end{aligned}$$

где z_M — возвышение продольного метацентра M_0 над ватерлинией. В последнем выражении член, пропорциональный водоизмещению корабля V , представляет собой момент силы плавучести, обуслов-



4.2. Восстанавливающий момент при бортовой качке.

поверхности корабля, соответствующей его равновесному положению на тихой воде.

Для главной части возмущающих сил, определяемой с использованием гипотезы А. Н. Крылова о независимости поля давлений свободно распространяющихся волн от присутствия корабля как препятствия на их пути справедливы, очевидно, следующие представления:

$$F^* = - \int_S p^* n dS; \quad M^* = - \int_S p^* (r_S \times n) dS,$$

где p^* — давление набегающих на корабль волн. Это давление вычисляется без учета гидростатической составляющей, которая вместе с весом корабля определяет собой восстанавливающие силы.

Если, как обычно, скорость хода корабля обозначить через v , то давление можно определить с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа—Коши

$$p^* = -\rho \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right),$$

где Φ^* — потенциал скоростей набегающих волн, вычисленный в движущейся вдоль оси Ox , но не качающейся системе координат.

В случае неограниченно глубокой жидкости функция Φ^* определяется формулой (1.14)

$$\Phi^* = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}.$$

Здесь r — амплитуда (полувысота) волны; k — волновое число; σ_0 — истинная частота; σ — кажущаяся частота; ε — угол между осью Ox и фазовой скоростью волн. При этом

$$\sigma_0 = \sqrt{gk}; \quad \sigma = \sigma_0 - kv \cos \varepsilon; \quad k = 2\pi/\lambda,$$

где λ — длина волны.

Легко видеть, что производные функции Φ^* будут:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = i\sigma\Phi^*; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = -ik\Phi^* \cos \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = i(\sigma t - kv \cos \varepsilon) \Phi^* = i\sigma_0 \Phi^*.$$

Таким образом, получаем

$$p^* = \rho g r e^{kz+i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}.$$

Введя для краткости письма обозначения

$$k_1 = k \cos \varepsilon; \quad k_2 = k \sin \varepsilon,$$

последнюю формулу можно переписать в виде

$$p^* = \rho g r e^{kz+i(\sigma t - k_1 x - k_2 y)}. \quad (4.49)$$

Еще раз обратим внимание на то, что смоченная часть контура шпангоута l есть кривая незамкнутая. Поэтому, преобразуя интегралы по кривой l в интегралы по площади шпангоута ω , следует предварительно замкнуть эту кривую прямолинейным отрезком $b/2 \leq y \leq b/2, z = 0$. После преобразования интеграл по кривой l находится как разность интегралов по площади шпангоута и по замыкающему отрезку. Учитывая, что на этом отрезке

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \cos(n, y) = 0; \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} = \cos(n, z) = 1;$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial n} = y \cos(n, z) - z \cos(n, y) = y,$$

можем, используя формулу Остроградского—Гаусса для плоскости, переписать равенство (4.51) в виде:

$$h_2 = \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial y} e^{kz - ik_2 y} d\omega; \quad (4.54)$$

$$h_3 = \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial z} e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_2 y} dy; \quad (4.55)$$

$$h_4 = \iint_{\omega} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} y e^{-ik_2 y} dy. \quad (4.56)$$

Для вычисления интегралов по площади шпангоута будем пользоваться следующим представлением:

$$\iint_{\omega} f(y, z) d\omega = \int_{-T}^0 \int_{-y}^y f(\eta, z) d\eta dz. \quad (4.57)$$

Перейдем теперь к определению главной части возмущающих сил при различных видах качки.

Поперечно-горизонтальная качка и рысканье. Пользуясь формулами (4.54) и (4.57), найдем

$$h_2 = \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial y} e^{kz - ik_2 y} d\omega = -ik_2 \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz. \quad (4.58)$$

Подставляя сюда значение внутреннего интеграла

$$\int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2}{k_2} \sin k_2 y, \quad (4.59)$$

получим

$$h_2 = -2i \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz. \quad (4.60)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{matrix} A_j^s \\ A_j^c \end{matrix} \right\} = \int_{-L/2}^{L/2} a_j \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx; \quad (4.66)$$

$$\left. \begin{matrix} A_j^{xs} \\ A_j^{xc} \end{matrix} \right\} = \int_{-L/2}^{L/2} a_j x \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx.$$

Заметим, что, несмотря на некоторую громоздкость, обозначения A_j^s , A_j^c , A_j^{xs} , A_j^{xc} очень удобны. Они построены по следующему принципу: если в подынтегральную функцию входит a_j , то интеграл обозначается через A_j ; наличие в подынтегральной функции сомножителя $\sin k_1 x$ или $\cos k_1 x$ отмечается соответственно первыми буквами s или c названий этих функций в верхнем индексе при A_j ; если подынтегральная функция содержит сомножитель x , то последний также выносится в верхний индекс. Таким образом, само обозначение несет полную информацию об обозначаемой величине. По этому же принципу строим в дальнейшем обозначения интегралов, входящих в формулы для дифракционной части возмущающих сил.

Используя введенные обозначения и принимая во внимание, что $k_2 = k \sin \epsilon$, а $kr = \alpha_0$, где α_0 — наибольший уклон взволнованной поверхности, формулам (4.65) для F_2^* и F_6^* можно придать простой вид:

$$F_2^* = \rho g \alpha_0 \sin \epsilon (A_2^s + i A_2^c) e^{i\sigma t}; \quad (4.67)$$

$$F_6^* = \rho g \alpha_0 \sin \epsilon (A_2^{xs} + i A_2^{xc}) e^{i\sigma t}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении редуцированного коэффициента κ_2 . Представим уравнение положительной ветви шпангоута в форме

$$y(z) = \frac{b}{2} Z(z), \quad (4.68)$$

где $Z(z)$ — уравнение ветви шпангоута, ширина которого по ватерлинии равновесия равна единице. Тогда можно записать

$$k_2 y = \frac{1}{2} k b \sin \epsilon Z(z) = k T H_\epsilon Z(z),$$

где

$$H_\epsilon = \frac{b}{2T} \sin \epsilon.$$

В последнем случае $\sin \varepsilon = 0$ и, как видно из формул (4.67), $F_2^* = F_6^* = 0$. При расположении лагом к волне

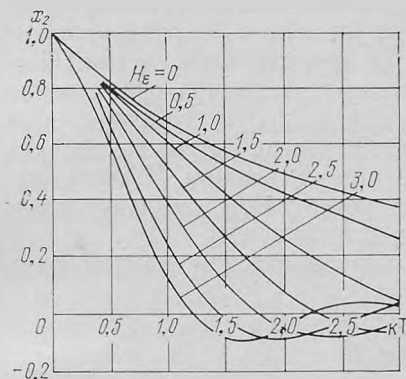
$$k_1 = k \cos \varepsilon = 0, \quad \sin k_1 x = 0, \quad \cos k_1 x = 1$$

и, следовательно,

$$A_2^s = A_2^{xs} = 0; \quad A_2^c = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_2 \omega dx; \quad A_2^{xc} = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_2 \omega x dx. \quad (4.69)$$

Для оценочных расчетов можно осреднить значение κ_2 по длине корабля. При этом имеет смысл использовать наиболее простую эллиптическую аппроксимацию шпангоутов, а под средним значением их ширины по ватерлинии понимать величину αB , где α — коэффициент полноты ватерлинии, а B — ширина корабля по миделю. Таким образом, среднее значение редуцированного коэффициента, будет, помимо kT , зависеть от параметра

$$H_\varepsilon = \frac{\alpha B}{2T}. \quad (4.70)$$



4.4. Редуцированный коэффициент κ_2 .

Сохранив за средним значением редуцированного коэффициента κ_2 то же обозначение (это не приведет к недоразумениям) и вынося его в формулах (4.69) из-под знаков интеграла, можем написать

$$A_2^c = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \omega dx = \kappa_2 V; \quad A_2^{xc} = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \omega x dx = \kappa_2 V x_c,$$

где V — объемное водоизмещение корабля, а x_c — абсцисса центра величины. Подставляя значения A_2^c и A_2^{xc} , определяемые последними формулами, в равенства (4.67) и помня, что в рассматриваемом случае расположения корабля лагом к волне $A_2^s = A_2^{xs} = 0$, получим

$$F_2^* = i \rho g \alpha_0 \kappa_2 V e^{i \sigma t}; \quad F_6^* = i \rho g \alpha_0 \kappa_2 V x_c e^{i \sigma t}. \quad (4.71)$$

Приведенные выше общие соображения, касающиеся характера зависимости коэффициента κ_2 от различных параметров и вычисления его среднего значения, в полной мере относятся и к введенным ниже редуцированным коэффициентам, учитывающим влияние соизмеримости поперечных размеров корабля с длиной волны на остальные виды качки.

Вертикальная и килевая качка. Для того чтобы определить главную часть возмущающей силы при вертикальной и килевой

можем написать

$$h_3 = -b\kappa_3,$$

где

$$\kappa_3 = \int_{-T}^0 e^{kz} \cos k_2 y dZ(z).$$

В случае, когда размеры шпангоута b и T пренебрежимо малы по сравнению с длиной набегающей волны, предельное значение κ_3 определится равенством

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 e^{kz} \cos k_2 y dZ(z) = \int_{-T}^0 dZ(z) = Z(z)|_{-T}^0 = 1.$$

Таким образом, κ_3 представляет собой редукционный коэффициент к главной части возмущающей силы при вертикальных колебаниях шпангоутного контура, учитывающий соизмеримость размеров последнего с длиной волны. График значений этого коэффициента для шпангоутов полуэллиптической формы приведен на рис. 4.5.

Обозначим

$$b\kappa_3 = a_3, \quad (4.72)$$

тогда

$$h_3 = -a_3; \quad h_5 = -\chi h_3 = \chi a_3. \quad (4.73)$$

4.5. Редукционный коэффициент κ_3 .

Подставив теперь значения h_3 и h_5 в формулу (4.52), получим общие выражения для главной части возмущающей силы при вертикальной и килевой качке:

$$\left. \begin{aligned} F_3^* &= \rho g r (A_3^c - i A_3^s) e^{i\sigma t}; \\ F_5^* &= -\rho g r (A_3^{xc} - i A_3^{xs}) e^{i\sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

В этих выражениях использованы обозначения, определяемые равенствами (4.66).

В частном случае расположения корабля лагом к волне ($\varepsilon = \pi/2$, $k_1 = k \cos \varepsilon = 0$) можем написать

$$A_3^s = A_3^{xs} = 0; \quad A_3^c = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_3 b dx; \quad A_3^{xc} = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_3 b x dx.$$

Эта функция табулирована,¹ что дает возможность в случае продольного волнения легко вычислить значения коэффициента κ_3 .

Бортовая качка. Определение главной части возмущающей силы при бортовой качке начнем с нахождения функции h_4 , аналогично тому, как мы делали выше для поперечно-горизонтальной качки, рысканья, килевой и вертикальной качки. Руководствуясь равенствами (4.56) и (4.57), можем написать:

$$\begin{aligned} h_4 &= \iint_{\omega} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} y e^{-ik_2 y} dy = \\ &= k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz + ik_2 \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta. \end{aligned}$$

Обозначим

$$h_4 = h_{41} + ik_2 h_{42}, \quad (4.79)$$

где

$$h_{41} = k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta; \quad (4.80)$$

$$h_{42} = \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz. \quad (4.81)$$

Имея в виду, что согласно (2.78)

$$\int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2i}{k_2^2} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y),$$

получим

$$\begin{aligned} h_{41} &= \frac{2ik}{k_2^2} \int_{-T}^0 e^{kz} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y) dz - \\ &- \frac{2i}{k_2^2} \left(\frac{k_2 b}{2} \cos \frac{k_2 b}{2} - \sin \frac{k_2 b}{2} \right). \end{aligned}$$

Возьмем интеграл, входящий в последнюю формулу по частям, полагая

$$k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y = u; \quad e^{kz} dz = dv$$

и, следовательно,

$$-k_2^2 y \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz = du; \quad \frac{1}{k} e^{kz} = v.$$

¹ Слущкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности χ^2 . М. — Л. Изд. АН СССР, 1950; Пагурова В. И. Таблицы неполной гамма-функции. М.: ВЦ АН СССР, 1963.

где, очевидно,

$$\kappa_{42} = \frac{2}{k_2 \omega z_0} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz. \quad (4.88)$$

Если теперь подставить значения h_{41} и h_{42} , определяемые равенствами (4.83) и (4.87), в формулу (4.79), последняя примет вид

$$h_4 = h_{41} + i k_2 h_{42} = i k_2 \left(\frac{b^3}{12} \kappa_{41} + \omega z_0 \kappa_{42} \right).$$

Обозначив

$$a_4 = \frac{b^3}{12} \kappa_{41} + \omega z_0 \kappa_{42}, \quad (4.89)$$

можем написать

$$h_4 = i k_2 a_4. \quad (4.90)$$

Подставляя последнее выражение в равенство (4.52) и пользуясь обозначениями (4.66), получим окончательную формулу для главной части возмущающей силы при бортовой качке

$$F_4^* = -\rho g \alpha_0 \sin \epsilon (A_4^s + i A_4^c) e^{i \sigma t}. \quad (4.91)$$

4.6. Редукционный коэффициент κ_4 .

Для полуэллиптического шпангоута статический момент погруженной площади относительно ватерлинии определяется равенством

$$\omega z_0 = -\frac{b T^2}{3}$$

и формула (4.88) принимает вид

$$\kappa_{42} = -\frac{6}{k_2 b T^2} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz.$$

Функция $Z(z)$ для такого шпангоута будет

$$Z(z) = \sqrt{1 - \frac{z^2}{T^2}}$$

и, следовательно,

$$dZ^2(z) = -2 \frac{z}{T^2} dz.$$

Подставив это значение дифференциала в соотношение (4.85), получим

$$\kappa_{41} = -\frac{6}{k_2 b T^2} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz.$$

Будем считать корабль симметричным относительно миделя. Тогда A_j^s и A_j^{xc} , как интегралы от нечетных функций, обратятся в нуль. Подынтегральные функции в формулах для A_j^c и A_j^{xs} будут четными, в связи с чем здесь вместо интегралов в пределах от $-L/2$ до $L/2$ можно брать удвоенные интегралы в пределах от нуля до $L/2$. Тогда, учитывая, что согласно равенствам (4.63), (4.72) и (4.89):

$$a_2 = \omega \kappa_2; \quad a_3 = b \kappa_3;$$

$$a_4 = \frac{b^3}{12} \kappa_{41} + \omega z_\omega \kappa_{42},$$

и вынося осредненные значения редуционных коэффициентов из-под знаков интеграла, можем написать:

$$\begin{aligned} A_2^c &= 2\kappa_2 \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx; \\ A_2^{xs} &= 2\kappa_2 \int_0^{L/2} \omega x \sin k_1 x dx; \\ A_3^c &= 2\kappa_3 \int_0^{L/2} b \cos k_1 x dx; \\ A_3^{xs} &= 2\kappa_3 \int_0^{L/2} b x \sin k_1 x dx; \\ A_4^c &= \frac{\kappa_{41}}{6} \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx + 2\kappa_{42} \int_0^{L/2} \omega z_\omega \cos k_1 x dx. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Представим уравнение смоченной поверхности корабля в виде

$$y(x, z) = \frac{B}{2} X(x) Z(z), \quad (4.94)$$

где

$$X(x) = 1 - \left(\frac{2|x|}{L} \right)^n;$$

$$Z(z) = 1 - \left(-\frac{z}{T} \right)^m.$$

Показатели степени n и m , как уже упоминалось, связаны с коэффициентами полноты α и β соотношениями:

$$n = \frac{\alpha}{1-\alpha}; \quad m = \frac{\beta}{1-\beta}. \quad (4.95)$$

Учитывая, что при таком представлении смоченной поверхности

$$\int_{-T}^0 Z(z) dz = \beta T; \quad \int_0^{L/2} X(x) dx = \alpha \frac{L}{2},$$

записи индекс у переменной x_1 , представим эти равенства в следующем виде:

$$A_2^c = \kappa_2 \omega_0 L \int_0^1 (1 - x^n) \cos ax dx;$$

$$A_2^{xs} = \frac{1}{2} \kappa_2 \omega_0 L^2 \int_0^1 (1 - x^n) x \sin ax dx;$$

$$A_3^c = \kappa_3 BL \int_0^1 (1 - x^n) \cos ax dx;$$

$$A_3^{xs} = \frac{1}{2} \kappa_3 BL^2 \int_0^1 (1 - x^n) x \sin ax dx;$$

$$A_4^c = \frac{1}{12} \kappa_{41} B^3 L \int_0^1 (1 - x^n)^3 \cos ax dx - \kappa_{42} \frac{T \omega_0 L}{2(2 - \chi)} \int_0^1 (1 - x^n) \cos ax dx.$$

Таким образом, нахождение главной части возмущающей силы при всех видах качки сводится к вычислению интегралов типа

$$\int_0^1 x^p \sin ax dx \text{ и } \int_0^1 x^p \cos ax dx.$$

Здесь p может принимать значения $0, 1, n, n + 1, 2n, 3n$ где n , вообще говоря, нецелое положительное число, определяемое формулой (4.95).

Интегралы подобного типа могут быть выражены следующим образом¹:

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} \sin ax dx = -\frac{i}{2\gamma} [{}_1F_1(\gamma, \gamma + 1, ia) - {}_1F_1(\gamma, \gamma + 1, -ia)];$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} \cos ax dx = \frac{1}{2\gamma} [{}_1F_1(\gamma, \gamma + 1, ia) + {}_1F_1(\gamma, \gamma + 1, -ia)],$$

где ${}_1F_1(u, v, z)$ — функция,² которая представляется таким рядом:

$${}_1F_1(u, v, z) = 1 + \frac{u}{v} \frac{z}{1!} + \frac{u(u+1)}{v(v+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{u(u+1)(u+2)}{v(v+1)(v+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Подставляя сюда $u = \gamma, v = \gamma + 1$, получим

$${}_1F_1(\gamma, \gamma + 1, z) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{z}{1!} + \frac{\gamma}{\gamma + 2} \frac{z^2}{2!} + \frac{\gamma}{\gamma + 3} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Найдем теперь разность и сумму

$$(ia)^s \mp (-ia)^s = a^s [i^s \mp (-i)^s], (s = 1, 2, 3, \dots).$$

¹ Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, с. 434, 435.

² Эта функция называется вырожденной или конфлюэнтной гипергеометрической функцией.

Численная реализация этих формул на ЭВМ не вызывает затруднений.

Для экспресс-расчетов, выполняемых без применения ЭВМ, целесообразно использовать другой прием. Прежде всего, найдем пределы:

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx = \frac{1}{2} V;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} \omega x \sin k_1 x dx = \frac{1}{2} k_1 J_V;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b \cos k_1 x dx = \frac{1}{2} S_0;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b x \sin k_1 x dx = \frac{1}{2} k_1 J_y;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx = 6 J_x,$$

где J_V — момент инерции погруженного объема корабля относительно миделевого сечения, а J_x и J_y — моменты инерции площади ватерлинии равновесия относительно соответствующих осей.

Введем теперь следующие коэффициенты¹:

$$\left. \begin{aligned} K_1^c(\varphi) &= \frac{2}{V} \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx; & K_1^{xs}(\varphi) &= \frac{2}{k_1 J_V} \int_0^{L/2} \omega x \sin k_1 x dx; \\ K_1^c(\alpha) &= \frac{2}{S_0} \int_0^{L/2} b \cos k_1 x dx; & K_1^{xs}(\alpha) &= \frac{2}{k_1 J_y} \int_0^{L/2} b x \sin k_1 x dx; \\ K_3^c &= \frac{1}{6 J_x} \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

¹ Коэффициенты $K_1^c(\alpha)$ и $K_1^{xs}(\alpha)$ были впервые предложены Г. Е. Павленко.

Для корабля, смоченная поверхность которого описывается уравнением (4.94), легко получить следующие формулы:

$$J_V = 2 \int_0^{L/2} \omega x^2 dx = \frac{L^3 \omega_0}{12} \frac{\varphi}{3 - 2\varphi};$$

$$J_y = 2 \int_0^{L/2} b x^2 dx = \frac{L^3 B}{12} \frac{\alpha}{3 - 2\alpha};$$

$$J_x = \frac{1}{6} \int_0^{L/2} b^3 dx = \frac{LB^3}{12} \frac{\alpha^3}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)}.$$

У такого корабля коэффициент продольной полноты φ и коэффициент полноты ватерлинии α одинаковы. Поэтому для него справедливы равенства $K_1^c(\varphi) = K_1^c(\alpha)$ и $K_1^{xs}(\varphi) = K_1^{xs}(\alpha)$. Графики редукционных коэффициентов $K_1^c = K_1^c(\varphi) = K_1^c(\alpha)$; $K_1^{xs} = K_1^{xs}(\varphi) = K_1^{xs}(\alpha)$ и K_3^c приведены на рис. 4.7—4.9.

Обозначения этих коэффициентов, как и введенных в § 20 редукционных коэффициентов для дифракционной части возмущающих сил, строят по следующему весьма удобному принципу. Нижний индекс при K соответствует степени b (или ω для K_1) в подынтегральной функции; наличие в этой функции сомножителя $\cos k_1 x$ отмечают буквой c , а сомножителя $x \sin k_1 x$ — буквами xs в верхнем индексе.

Теперь, воспользовавшись соотношениями (4.97), можем переписать формулы (4.93) в простом и удобном для практических расчетов виде:

$$\left. \begin{aligned} A_2^c &= \kappa_2 K_1^c V; & A_2^{xs} &= \kappa_2 K_1^{xs} k_1 J_V; \\ A_3^c &= \kappa_3 K_1^c S_0; & A_3^{xs} &= \kappa_3 K_1^{xs} k_1 J_y; \\ A_4^c &= \kappa_{41} K_3^c J_x + \kappa_{42} K_1^c V z_c, \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

где

$$z_c = -\frac{T}{2(2 - \gamma)}$$

При известных значениях A_i^c и A_i^{xs} (напомним, что для корабля, симметричного относительно миделя, A_j^s и A_j^{xc} , как интегралы от нечетных функций, обращаются в нуль) главная часть возмущающих сил для поперечно-горизонтальной качки и рысканья определяется по формулам (4.67), для вертикальной и килевой качки — по формулам (4.74) и для бортовой — по формуле (4.91).

и, следовательно,

$$F_j^0 = \rho (i\sigma Q_j - vR_j) e^{i\sigma t}, \quad (4.100)$$

где

$$Q_j = \iint_S \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS; \quad R_j = \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS.$$

Для определения функции R_j воспользуемся теоремой Стокса о связи линейного интеграла с поверхностным. Согласно этой теореме линейный интеграл от вектора по замкнутому контуру (циркуляция вектора) равен потоку вихря этого вектора через поверхность, опирающуюся на данный контур. Смоченная поверхность корабля S опирается на контур ватерлинии равновесия C . Поэтому можем написать

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{C} = \iint_S \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где $\mathbf{a}$ — непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка векторная функция координат.

Запишем формулу Стокса через проекции:

$$\begin{aligned} \oint_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS. \end{aligned}$$

Поскольку контур ватерлинии лежит в плоскости Oxy , очевидно, что на этом контуре $dz = 0$. Сохраним предположение о большом удлинении корабля, т. е. о том, что на смоченной поверхности S , включая ограничивающий ее контур ватерлинии, $\cos(n, x) = 0$. Тогда $dy = \cos(n, x) dC = 0$. Далее, полагая $a_x = 0$, будем иметь

$$\iint_S \left[-\frac{\partial a_z}{\partial x} \cos(n, y) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cos(n, z) \right] dS = 0. \quad (4.101)$$

Рассмотрим теперь, пользуясь последней формулой, выражения для R_j при $j = 2, 3, \dots, 6$ (очевидно, что R_1 так же, как и Q_1 , при $\cos(n, x) = 0$ обращается в нуль). Пусть $a_z = \varphi^0$, $a_y = 0$. В этом случае формула приобретает вид

$$\iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \cos(n, y) dS = 0.$$

Но согласно (4.15) $\cos(n, y) = \partial \Phi_2 / \partial n$ и, следовательно,

$$R_2 = \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = 0.$$

падают в нуль. Действительно, полагая в формуле (4.101) $a_y = \varphi^0 x$, $a_z = 0$, убедимся, что

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) \cos(n, z) dS = 0.$$

Если же в упомянутой формуле положить $a_z = \varphi^0 x$, $a_y = 0$, будем иметь

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) \cos(n, y) dS = 0.$$

Таким образом, можем написать:

$$R_5 = Q_3; R_6 = -Q_2.$$

С учетом полученных значений R_j формула (4.100) для проекций дифракционной части возмущающей силы примет следующий окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} F_j^0 &= i\rho\sigma Q_j e^{i\sigma t}, \quad (j=2, 3, 4); \\ F_5^0 &= \rho(i\sigma Q_5 - \nu Q_3) e^{i\sigma t} = i(\rho\sigma Q_5 e^{i\sigma t} + \nu\sigma^{-1} F_3^0); \\ F_6^0 &= \rho(i\sigma Q_6 + \nu Q_2) e^{i\sigma t} = i(\rho\sigma Q_6 e^{i\sigma t} - \nu\sigma^{-1} F_2^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

Для вычисления функций Q_j необходимо знать амплитудную часть φ^0 потенциала скоростей дифрагированного волнового движения, определение которой связано со значительными трудностями. Вместе с тем, значения нормальной производной этого потенциала на поверхности S легко определяются через известный потенциал скоростей набегающих волн. По этой причине, воспользовавшись формулой

$$\iint_S \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \iint_S \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS, \quad (4.104)$$

справедливой для двух гармонических функций Φ_j и φ^0 , представим Q_j в виде

$$Q_j = \iint_S \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS. \quad (4.105)$$

Определим теперь нормальную производную функции φ^0 на смоченной поверхности S . Согласно равенствам (4.7) и (4.99)

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial n}; \quad \Phi^0 = \varphi^0 e^{i\sigma t}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} e^{-i\sigma t}. \quad (4.106)$$

При колебаниях контура на свободной поверхности коэффициенты $c_2 \div c_4$ являются комплексными величинами и выражаются через его присоединенные массы μ_{jk} и коэффициенты демпфирования λ_{jk} , в случае безграничной жидкости — действительными и выражаются только через геометрические характеристики контура, или иначе через его присоединенные массы.

Действительно, подставив выражения (4.112) в формулу

$$-\rho \int_l \Phi_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} dl = \mu_{jk} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jk}$$

и учитывая равенства (4.15), получим:

$$\rho c_2 \int_l y \cos(n, y) dl = \mu_{22} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{22};$$

$$\rho c_3 \int_l z \cos(n, z) dl = \mu_{33} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{33}.$$

Поскольку интегралы по отрезку ватерлинии, замыкающему контур, в данном случае равны нулю, можем написать

$$\int_l y \cos(n, y) dl = \int_l z \cos(n, z) dl = \int_{\omega} d\omega = \omega$$

и, следовательно,

$$c_2 = \frac{1}{\rho \omega} \left(\mu_{22} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{22} \right); \quad c_3 = \frac{1}{\rho \omega} \left(\mu_{33} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{33} \right). \quad (4.113)$$

Наконец, используя представление (4.112) для функции Φ_4 будем иметь

$$\rho c_4 \int_l yz \cos(n, y) dl = \mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24},$$

но этот интеграл по отрезку, замыкающему контур l , также равен нулю. Таким образом,

$$\int_l yz \cos(n, y) dl = \int_{\omega} z d\omega = \omega z_{\omega}$$

и

$$c_4 = \frac{1}{\rho \omega z_{\omega}} \left(\mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24} \right), \quad (4.114)$$

где ωz_{ω} — статический момент погруженной площади шпангоута относительно ватерлинии.

Если в формулах (4.113) и (4.114) положить $\lambda_{jk} = 0$, получим выражения, справедливые для движения контура в безграничной жидкости или для колебаний на свободной поверхности с очень малой либо очень большой частотой, когда волнообразование практически отсутствует.

Для определения функции q_{21} воспользуемся формулами (2.77) и (2.78), согласно которым

$$\int_{-y}^y e^{-ik_2\eta} d\eta = \frac{2}{k_2} \sin k_2 y;$$

$$\int_{-y}^y \eta e^{-ik_2\eta} d\eta = \frac{2i}{k_2^2} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y).$$

Таким образом

$$\int_{-y}^y (1 - ik_2\eta) e^{-ik_2\eta} d\eta = 2y \cos k_2 y \quad (4.121)$$

и

$$q_{21} = 2 \int_{-T}^0 e^{kz} y \cos k_2 y dz.$$

Нетрудно показать, что в случае, когда размеры шпангоута пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны, предельным значением функции q_{21} будет погруженная площадь шпангоута ω . Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} 2 \int_{-T}^0 e^{kz} y \cos k_2 y dz &= \\ &= 2 \int_{-T}^0 y dz = \omega. \end{aligned}$$

4.10. Редукционный коэффициент κ_5 .

В связи с этим при произвольном соотношении размеров шпангоута и длины волны представим функцию q_{21} в виде

$$q_{21} = \omega \kappa_5, \quad (4.122)$$

где κ_5 — редукционный коэффициент, определяемый формулой

$$\kappa_5 = \frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 e^{kz} y \cos k_2 y dz. \quad (4.123)$$

График значений этого коэффициента для шпангоутов полуэллиптической формы приведен на рис. 4.10.

Функция q_{22} , как видно из равенств (4.120) и (4.80), полностью совпадает с определенной ранее функцией h_{41} . Поэтому, руководствуясь формулой (4.83), можем написать

$$q_{22} = \frac{ik_2 b^3}{12} \kappa_{41}. \quad (4.124)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_{jk}^s \\ M_{jk}^c \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \mu_{jk} \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx; \\ \left. \begin{aligned} \Lambda_{jk}^s \\ \Lambda_{jk}^c \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \lambda_{jk} \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx; \end{aligned} \right\} (jk = 22, 33, 24) \\ \\ \left. \begin{aligned} M_{jk}^{xs} \\ M_{jk}^{xc} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \mu_{jk} x \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx; \\ \left. \begin{aligned} \Lambda_{jk}^{xs} \\ \Lambda_{jk}^{xc} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \lambda_{jk} x \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx. \end{aligned} \right\} (jk = 22, 33) \quad (4.129)$$

Принцип построения этих обозначений аналогичен принятому ранее при определении главной части возмущающих сил. Если в подынтегральную функцию входит μ_{jk} или λ_{jk} , то интеграл обозначается через M_{jk} или Λ_{jk} . Наличие в подынтегральной функции множителя $\sin k_1 x$ или $\cos k_1 x$ отмечается буквами s или c в верхнем индексе; если под интегралом имеется множитель x , то он тоже выносится в верхний индекс. Кроме того, подынтегральные функции всегда содержат множитель κ_k^0 . Таким образом, вводимые здесь обозначения несут еще более обширную информацию об обозначаемой величине, чем введенные ранее обозначения A_j^s , A_j^c , A_j^{xs} , A_j^{xc} . Дело в том, что для полной расшифровки последних необходимо знать, что понимается под коэффициентом a_j при тригонометрических функциях, тогда как все множители, входящие под интегралы, обозначаемые через M_{jk} и Λ_{jk} с соответствующими верхними индексами, очевидны из самих обозначений.

С использованием этих обозначений формула (4.128) приобретает вид

$$\rho\sigma Q_2 = r\sigma_0 \sin \varepsilon [M_{22}^c \sigma - \Lambda_{22}^s - i (M_{22}^s \sigma + \Lambda_{22}^c)],$$

а формула для $\rho\sigma Q_6$ будет отличаться от последней только наличием символа x в верхних индексах.

Подставив эти значения $\rho\sigma Q_2$ и $\rho\sigma Q_6$ в равенства (4.103), получим следующие окончательные выражения для дифракционной части возмущающей силы при поперечно-горизонтальной качке и рысканьи:

$$\begin{aligned} F_2^0 &= r\sigma_0 \sin \varepsilon [M_{22}^s \sigma + \Lambda_{22}^c + i (M_{22}^c \sigma - \Lambda_{22}^s)] e^{i\sigma t}; \\ F_6^0 &= r\sigma_0 \sin \varepsilon [M_{22}^{xs} \sigma + \Lambda_{22}^{xc} + i (M_{22}^{xc} \sigma - \Lambda_{22}^{xs})] e^{i\sigma t} - i\nu\sigma^{-1} F_2^0. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Интеграл q_{31} , как видно из формулы (4.81), в точности совпадает с рассмотренным при расчете главной части возмущающей силы для бортовой качки интегралом h_{42} . Таким образом, руководствуясь равенством (4.87), можем написать

$$q_{31} = \omega z_{\omega} \kappa_{42}.$$

Воспользовавшись полученными ранее результатами, нетрудно получить простое выражение и для функции q_{32} . Действительно, принимая во внимание равенства (4.58) и (4.61), найдем

$$\int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 n} d\eta dz = \frac{i}{k_2} h_2 = \omega \kappa_2.$$

Тогда

$$q_{32} = \omega \kappa_2 + k q_{31} = \omega (\kappa_2 + k z_{\omega} \kappa_{42})$$

и

$$q_3 = -ic_3 \omega (\kappa_2 + k z_{\omega} \kappa_{42} \cos^2 \varepsilon) = -ic_3 \omega \kappa_3^0, \quad (4.131)$$

где, очевидно,

$$\kappa_3^0 = \kappa_2 + k z_{\omega} \kappa_{42} \cos^2 \varepsilon. \quad (4.132)$$

Хотя последнее выражение вполне пригодно для использования в расчетах, его целесообразно преобразовать к несколько иному виду, более удобному для практических вычислений, особенно при расположении корабля лагом к волне и на продольном волнении. Как видно из формулы (4.88),

$$k z_{\omega} \kappa_{42} = \frac{2k}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz.$$

Возьмем этот интеграл по частям, полагая

$$z \sin k_2 y = u; \quad e^{kz} dz = dv.$$

Тогда, очевидно,

$$\left(\sin k_2 y + k_2 z \cos k_2 y \frac{dy}{dz} \right) dz = du, \quad \frac{1}{k} e^{kz} = v.$$

Учитывая, что в данном случае произведение uv равно нулю как при верхнем, так и при нижнем пределе интегрирования, получим

$$\begin{aligned} k z_{\omega} \kappa_{42} &= -\frac{2}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz - \\ &= -\frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz = -\kappa_2 + \kappa_6, \end{aligned} \quad (4.133)$$

где κ_2 определяется равенством (4.62), а

$$\kappa_6 = -\frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz = -\frac{b}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y dZ(z). \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{33}^c &= \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{33} dx = \kappa_2 \Lambda_{33}; \\ M_{33}^{xc} &= \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} x \mu_{33} dx = -\kappa_2 M_{35}; \\ \Lambda_{33}^{xc} &= \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{33} dx = -\kappa_2 \Lambda_{35}; \\ M_{33}^s &= \Lambda_{33}^s = M_{33}^{xs} = \Lambda_{33}^{xs} = 0.\end{aligned}$$

В этом случае выражения (4.137) для F_3^0 и F_5^0 приводятся к более простому виду:

$$\left. \begin{aligned}F_3^0 &= -r\sigma_0 \kappa_2 (M_{33}\sigma - i\Lambda_{33}) e^{i\sigma t}; \\ F_5^0 &= -r\sigma_0 \kappa_2 (M_{35}\sigma - i\Lambda_{35}) e^{i\sigma t} - i\nu\sigma^{-1}F_3^0.\end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

При ходе корабля на продольном волнении формулы для F_3^0 и F_5^0 сохраняют вид (4.137), однако имеется возможность уточнить значения редукционного коэффициента $\kappa_3^0 = \kappa_6$ за счет перехода от эллиптической аппроксимации шпангоутов к параболической, позволяющей учесть их истинные коэффициенты полноты. В самом деле, при $k_2 = k \sin \varepsilon = 0$ согласно выражению (4.134) имеем

$$\kappa_6 = -\frac{b}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} dZ(z).$$

Если функцию $Z(z)$, характеризующую форму шпангоута, представить в виде (4.77), то нетрудно получить выражение

$$zdZ(z) = z \frac{m}{T^m} (-z)^{m-1} dz.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\zeta = -kz$, можем написать

$$zdZ(z) = \frac{m\zeta^m}{k^{m+1}T^m} d\zeta.$$

Учитывая далее, что

$$\frac{b}{\omega} = \frac{1}{\beta T} = \frac{m+1}{mT},$$

окончательно получим

$$\kappa_6 = \frac{m+1}{(kT)^{m+1}} \int_0^{kT} e^{-\zeta} \zeta^m d\zeta = \frac{m+1}{(kT)^{m+1}} \gamma(m+1, kT),$$

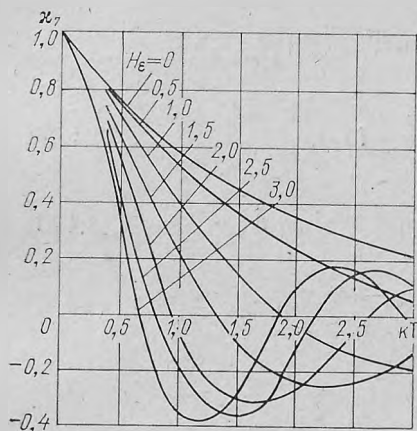
где $\gamma(m+1, kT)$ — неполная гамма-функция, значения которой определяются равенством (4.78).

Перейдем теперь к определению функции q_{42} . Согласно формуле (2.78) имеем

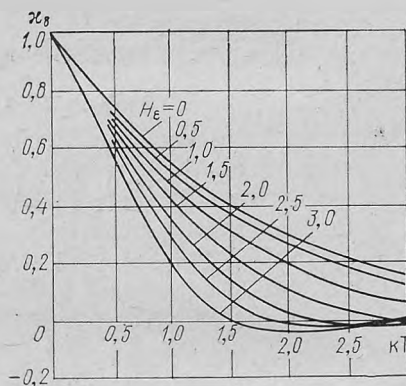
$$\int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2i}{k_2^2} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y).$$

Подставив это значение интеграла в формулу (4.141), получим

$$q_{42} = \frac{2i}{k_2^2} \int_{-T}^0 (1 + kz) e^{kz} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y) dz.$$



4.12. Редукционный коэффициент x_7 .



4.13. Редукционный коэффициент x_8 .

Возьмем последний интеграл по частям, полагая

$$k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y = u; \quad (1 + kz) e^{kz} dz = dv.$$

Тогда, очевидно,

$$-k_2^2 y \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz = du; \quad ze^{kz} = v.$$

Поскольку при нижнем пределе интегрирования обращается в нуль u , а при верхнем v , будем иметь

$$q_{42} = 2i \int_{-T}^0 y z e^{kz} \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz. \quad (4.144)$$

Найдем предел, к которому стремится интеграл в этой формуле при неограниченном убывании размеров шпангоута:

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0 - T}} \int_{-T}^0 y z e^{kz} \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz = k_2 \int_{-T}^0 y^2 z \frac{dy}{dz} dz.$$

Тогда получим

$$q_4 = - \frac{\kappa_4^0}{\rho} \left(\mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24} \right) \sin \varepsilon.$$

Подставим теперь это выражение для q_4 в равенство (4.110). Применяя обозначения (4.129), будем иметь

$$\rho \sigma Q_4 = r \sigma_0 \sin \varepsilon \left[M_{24}^s \sigma - \Lambda_{24}^s - i (M_{24}^s \sigma + \Lambda_{24}^s) \right].$$

Далее на основании (4.103) получим окончательную формулу для дифракционной части возмущающей силы при бортовой качке

$$F_4^0 = r \sigma_0 \sin \varepsilon \left[M_{24}^s \sigma + \Lambda_{24}^s + i (M_{24}^s \sigma - \Lambda_{24}^s) \right] e^{i \sigma t}. \quad (4.148)$$

Переходя к рассмотрению частных случаев расположения корабля на продольном волнении ($\sin \varepsilon = 0$) и лагом к волне ($\sin \varepsilon = 1$), сразу видим, что в первом случае $F_4^0 = 0$. Во втором случае, поскольку $k_1 x = k x \cos \varepsilon = 0$, имеем $M_{24}^s = \Lambda_{24}^s = 0$. Кроме того, вынося для простоты поправочный коэффициент κ_4^0 из-под знаков интеграла, т. е. считая его для всех шпангоутов одинаковым, можем написать

$$M_{24}^s = \kappa_4^0 \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{24} dx = \kappa_4^0 M_{24};$$

$$\Lambda_{24}^s = \kappa_4^0 \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{24} dx = \kappa_4^0 \Lambda_{24}.$$

Таким образом, для случая расположения корабля лагом формула (4.148) принимает следующий весьма простой вид:

$$F_4^0 = r \sigma_0 \kappa_4^0 (\Lambda_{24} + i M_{24} \sigma) e^{i \sigma t}.$$

Отметим, что между коэффициентами κ_2 и κ_8 имеется ряд зависимостей, которые можно установить, применяя правило интегрирования по частям. Например,

$$k_2 \omega \kappa_2 = \frac{2}{k} \sin \frac{k_2 b}{2} - \kappa_3 b \sin \varepsilon;$$

$$k \omega \kappa_5 = b \left(\cos \frac{k_2 b}{2} - \kappa_3 + \frac{k_2^2 b^2}{12} \kappa_{41} \right);$$

$$k z_{\omega} \kappa_7 = \kappa_6 - \kappa_5 - \frac{k_2^2}{\omega} \kappa_8.$$

Поэтому выражения для h_i и q_i могут быть представлены в различной форме. Однако приведенная форма наиболее компактна и удобна для практических расчетов.

Рассмотрим теперь способы реализации решений для дифракционной части возмущающих сил. Как уже указывалось, вычисление интегралов по осадке, входящих в редукционные коэффици-

$$M_{22}^{xs} = \mu_{022} \left(2\kappa_5 \int_0^{L/2} x \sin k_1 x dx - \frac{k\kappa_{41}}{6\beta T} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx \right);$$

$$M_{33}^c = 2\mu_{033} \frac{\kappa_3^0}{B^2} \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx;$$
(4.149)

$$M_{33}^{xs} = 2\mu_{033} \frac{\kappa_3^0}{B^2} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx;$$

$$M_{24}^c = \frac{\mu_{024}}{1 - \left(\frac{B}{2T}\right)^2} \left[2\kappa_7 \int_0^{L/2} \cos k_1 x dx - \left(\frac{\kappa_7}{2T^2} + \frac{3}{32} \frac{k\pi}{T} \kappa_9 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx + \frac{3}{128} \frac{k\pi}{T^3} \kappa_8 \int_0^{L/2} b^4 \cos k_1 x dx \right].$$

Формулы для Λ_{jj}^c и Λ_{jj}^{xs} ($j = 2, 3$) легко получить, заменяя в формулах для M_{ij} с соответствующими верхними индексами μ_{0ij} на λ_{0jj} . Выражение для Λ_{24}^c будет иметь вид

$$\Lambda_{24}^c = \frac{\lambda_{024}}{B^3} \left(2\kappa_7 \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx - \frac{3k\pi}{32T} \kappa_8 \int_0^{L/2} b^5 \cos k_1 x dx \right).$$

Если теперь воспользоваться уравнением ватерлинии в форме

$$b = B \left[1 - \left(\frac{2|x|}{L} \right)^n \right], \quad \left(n = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \quad (4.150)$$

и ввести новую переменную интегрирования $x_1 = 2x/L$, то задача сведется к нахождению интегралов вида¹

$$\int_0^1 x^p \sin ax dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^p \cos ax dx, \quad \left(a = \frac{L}{2} k_1 \right).$$

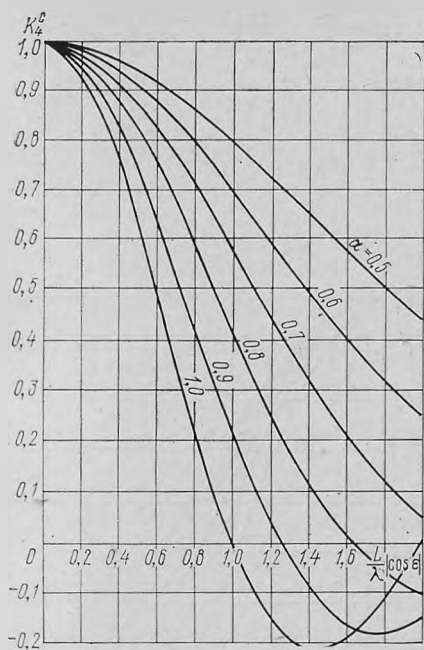
Как показано в § 19, такие интегралы выражаются через ряды, которые легко вычислить на ЭВМ.

Расчет дифракционных сил при вертикальной и килевой качке на косом волнении нетрудно выполнить и вручную. С этой целью найдем пределы:

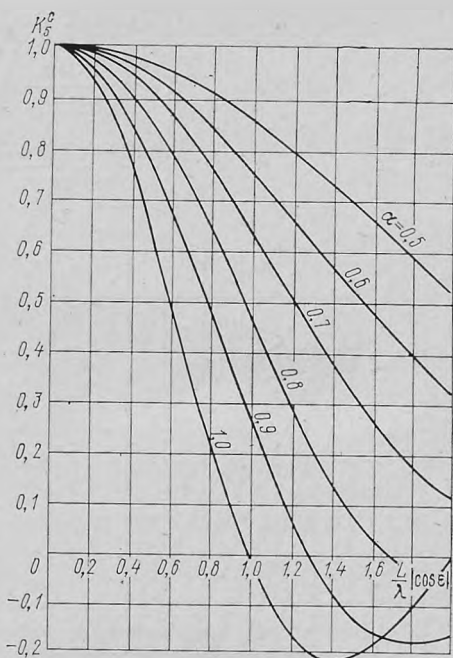
$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx = LB^2 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha};$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx = k_1 L^3 B^2 \frac{\alpha^2}{12(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)}.$$

¹ Поскольку обозначение переменной интегрирования не играет никакой роли, индекс l при x в подынтегральных функциях здесь опущен.



4.16. Редукционный коэффициент K_4^c .



4.17. Редукционный коэффициент K_5^c .

Вследствие этого предыдущие равенства принимают весьма простой вид:

$$M_{33}^c = M_{33}^0 K_2^c; \quad M_{33}^{xs} = k_1 M_{55}^0 K_2^{xs}.$$

Аналогичным способом можно получить

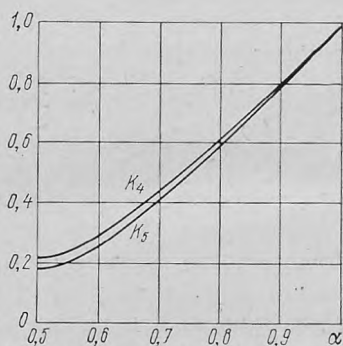
$$\Lambda_{33}^c = \Lambda_{33}^0 K_2^c; \quad \Lambda_{33}^{xs} = k_1 \Lambda_{55}^0 K_2^{xs}.$$

При известных значениях M_{33}^c , M_{33}^{xs} , Λ_{33}^c и Λ_{33}^{xs} дифракционная часть возмущающих сил для вертикальной и килевой качки легко вычислить по формулам (4.137).

Как видно из соотношений (4.149) функции, определяющие дифракционную часть возмущающих сил при поперечно-горизонтальной качке и рысканьи, также можно выразить через редукционные коэффициенты K_2^c и K_2^{xs} .

Для бортовой качки, помимо K_2^c и K_3^c , требуется ввести аналогичные коэффициенты для вычисления интегралов

$$\int_0^{L/2} b^4 \cos k_1 x dx \quad \text{и} \quad \int_0^{L/2} b^5 \cos k_1 x dx. \quad (4.151)$$



4.18. Функции $K_4(\alpha)$ и $K_5(\alpha)$.

Вектор количества движения K получим как произведение массы тела m на вектор скорости центра масс:

$$K = m(U + \Omega \times r_g), \quad (4.154)$$

где r_g — радиус-вектор центра масс относительно начала подвижной системы координат (полюса) O .

Момент количества движения L относительно полюса будет представлять собой сумму момента количества движения L_g относительно центра масс и момента вектора количества движения K , приложенного в центре масс, относительно полюса:

$$L = L_g + r_g \times K.$$

Руководствуясь формулой (4.154), найдем относительную производную вектора K :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times r_g \right). \quad (4.155)$$

Обозначим теперь вектор линейного ускорения полюса через ϖ , а вектор углового ускорения — через ε . Выразим эти векторы, представляющие собой абсолютные производные соответствующих скоростей, через относительные производные:

$$\varpi = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \Omega \times U; \quad (4.156)$$

$$\varepsilon = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \times \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Из формул (4.155) и (4.156) получим

$$\frac{\partial K}{\partial t} = m(\varpi - \Omega \times U + \varepsilon \times r_g). \quad (4.157)$$

Будем считать вектор Ω , а следовательно и его проекции на подвижные оси, обозначаемые через θ , ψ и χ , малыми первого порядка. Положим далее, что оси подвижной системы координат являются главными осями инерции массы тела, и обозначим главные центральные моменты массы через I_{gx} , I_{gy} и I_{gz} . Тогда вектор L_g с проекциями $I_{gx}\theta$, $I_{gy}\psi$ и $I_{gz}\chi$ также будет величиной первого порядка малости. Малыми высших порядков будем в дальнейшем пренебрегать. Таким образом, можем написать

$$\Omega \times K = \Omega \times m(U + \Omega \times r_g) = m\Omega \times U. \quad (4.158)$$

Подставляя теперь выражения (4.157) и (4.158) в (4.152), получим дифференциальное уравнение движения полюса в следующем виде:

$$m(\varpi + \varepsilon \times r_g) = R. \quad (4.159)$$

Далее, имея в виду, что $\varepsilon_x = \bar{\theta}$, $\varepsilon_y = \bar{\psi}$, $\varepsilon_z = \bar{\chi}$ и обозначив проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}_g$ через x_g , 0 и z_g т. е. полагая, что центр масс лежит в диаметральной плоскости, можем написать проекции векторных равенств (4.159) и (4.163) на оси подвижной системы координат в виде:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{\eta} + x_g \ddot{\chi} - z_g \ddot{\theta}) &= R_y; \\ m(\ddot{\xi} - x_g \ddot{\psi}) &= R_z; \\ I_x \ddot{\theta} - m z_g (\ddot{\eta} + x_g \ddot{\chi}) &= \mathfrak{M}_x; \\ I_y \ddot{\psi} - m x_g \ddot{\xi} &= \mathfrak{M}_y; \\ I_z \ddot{\chi} + m x_g (\ddot{\eta} - z_g \ddot{\theta}) &= \mathfrak{M}_z, \end{aligned} \right\} \quad (4.164)$$

где через

$$\begin{aligned} I_x &= I_{gx} + m z_g^2; \\ I_y &= I_{gy} + m (x_g^2 + z_g^2); \\ I_z &= I_{gz} + m x_g^2 \end{aligned}$$

обозначены моменты инерции массы корабля относительно соответствующих осей, а через R и $\mathfrak{M}$ с соответствующими индексами — проекции главного вектора и главного момента гидродинамических сил на эти оси.

Таким образом, мы получили две системы дифференциальных уравнений, одна из которых описывает совместную вертикальную и килевую качку, а вторая — совместную поперечно-горизонтальную качку, бортовую качку и рысканье. Совокупность вертикальной и килевой качки, как уже говорилось, принято называть продольной качкой, а совокупность поперечно-горизонтальной качки, бортовой качки и рысканья — боковой.

На первый взгляд представляется заманчивым совместить начало подвижной системы координат (полюс) с центром масс корабля. В самом деле, если положить $\mathbf{r}_g = 0$, то системы уравнений, описывающих продольную и боковую качку, как видно из формул (4.164), должны распасться на изолированные дифференциальные уравнения для каждого вида качки (поперечно-горизонтальной, вертикальной, бортовой, килевой и рысканья). Однако этот вывод был бы справедливым если бы гидродинамические силы при данном виде качки не зависели от кинематических характеристик (смещений, скоростей, ускорений) других ее видов. В действительности гидродинамические силы таким свойством не обладают. Как видно из формул (4.39) и (4.40) для инерционно-демпфирующих сил, независимо от того, где расположено начало подвижной системы координат, дифференциальные уравнения качки всегда образуют две системы, одна из которых описывает продольную, а другая — боковую качку. Более того, если координатная пло-

Таблица 14. Коэффициенты дифференциальных уравнений качки

Виды качки	jk	a_{jk}	b_{jk}	c_{jk}
Продольная	33	$m + M_{33}$	Λ_{33}	$\rho g S_0$
	35	$M_{35} - m x_g$	$\Lambda_{35} + v M_{33}$	$-\rho g S_0 x_f + v \Lambda_{33}$
	53	$M_{35} - m x_g$	$\Lambda_{35} - v M_{33}$	$-\rho g S_0 x_f - v \Lambda_{33}$
	55	$I_y + M_{55}$	$\Lambda_{55} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{33}$	$\rho g I_y - v^2 M_{33}$
Боковая	22	$m + M_{22}$	Λ_{22}	0
	24	$M_{24} - m z_g$	Λ_{24}	0
	26	$M_{26} + m x_g$	$\Lambda_{26} - v M_{22}$	$-v \Lambda_{22}$
	42	$M_{24} - m z_g$	Λ_{24}	0
	44	$I_x + M_{44}$	Λ_{44}	mgh
	46	$M_{46} - m x_g z_g$	$\Lambda_{46} - v M_{24}$	$-v \Lambda_{24}$
	62	$M_{26} + m x_g$	$\Lambda_{26} + v M_{22}$	$v \Lambda_{22}$
	64	$M_{46} - m x_g z_g$	$\Lambda_{46} + v M_{24}$	$v \Lambda_{24}$
	66	$I_z + M_{66}$	$\Lambda_{66} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{22}$	$-v^2 M_{22}$

Проекции возмущающих сил представим в виде

$$F_j^* + F_j^0 = (\alpha_j + i\beta_j) e^{i\sigma t}. \quad (4.166)$$

Действительные и мнимые части комплексных амплитуд возмущающих сил при продольной качке можно определить, используя равенства (4.74) и (4.137), при поперечно-горизонтальной качке и рыскании — (4.67) и (4.130), при бортовой — (4.91) и (4.148). Тогда, учитывая, что наибольший уклон взволнованной поверхности $\alpha_0 = \sigma_0^2 r / g$, можем написать следующие выражения для α_j и β_j :

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 &= r [\rho g A_3^c - \sigma_0 (M_{33}^c \sigma - \Lambda_{33}^s)]; \\
 \beta_3 &= r [-\rho g A_3^s + \sigma_0 (M_{33}^s \sigma + \Lambda_{33}^c)]; \\
 \alpha_5 &= r [-\rho g A_3^{xc} + \sigma_0 [M_{33}^{xc} \sigma - \Lambda_{33}^{xs} - v (M_{33}^s + \Lambda_{33}^c \sigma^{-1})]]; \\
 \beta_5 &= r [\rho g A_3^{xs} - \sigma_0 [M_{33}^{xs} \sigma + \Lambda_{33}^{xc} - v (M_{33}^c - \Lambda_{33}^s \sigma^{-1})]]; \\
 \alpha_2 &= r \sigma_0 (\rho A_2^s \sigma_0 + M_{22}^s \sigma + \Lambda_{22}^c) \sin \varepsilon; \\
 \beta_2 &= r \sigma_0 (\rho A_2^c \sigma_0 + M_{22}^c \sigma - \Lambda_{22}^s) \sin \varepsilon; \\
 \alpha_4 &= r \sigma_0 (-\rho A_4^s \sigma_0 + M_{24}^s \sigma + \Lambda_{24}^c) \sin \varepsilon; \\
 \beta_4 &= r \sigma_0 (-\rho A_4^c \sigma_0 + M_{24}^c \sigma - \Lambda_{24}^s) \sin \varepsilon; \\
 \alpha_6 &= r \sigma_0 [\rho A_2^{xs} \sigma_0 + M_{22}^{xs} \sigma + \Lambda_{22}^{xc} + v (M_{22}^c - \Lambda_{22}^s \sigma^{-1})] \sin \varepsilon; \\
 \beta_6 &= r \sigma_0 [\rho A_2^{xc} \sigma_0 + M_{22}^{xc} \sigma - \Lambda_{22}^{xs} - v (M_{22}^s + \Lambda_{22}^c \sigma^{-1})] \sin \varepsilon.
 \end{aligned} \quad (4.167)$$

Поскольку на регулярном волнении, как и на тихой воде, свободные колебания корабля быстро затухают, ограничимся отыска-

удаётся, то вычисления продолжают в аналогичном порядке до тех пор, пока в каком-то приближении амплитуда не окажется близкой к полученной в предыдущем. В первом приближении можно учитывать только волновую компоненту Λ_{44} , определенную методами гидродинамической теории.

При расчете продольной качки можно вычислить действительные и мнимые части комплексных амплитуд, избежав решения системы (4.170). С целью вывода соответствующих формул напомним систему дифференциальных уравнений совместной килевой и вертикальной качки:

$$\begin{aligned} a_{33}\ddot{\zeta} + b_{33}\dot{\zeta} + c_{33}\zeta + a_{35}\ddot{\psi} + b_{35}\dot{\psi} + c_{35}\psi &= (\alpha_3 + i\beta_3)e^{i\sigma t}; \\ a_{53}\ddot{\zeta} + b_{53}\dot{\zeta} + c_{53}\zeta + a_{55}\ddot{\psi} + b_{55}\dot{\psi} + c_{55}\psi &= (\alpha_5 + i\beta_5)e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (4.172)$$

и представим ее частные решения в виде:

$$\zeta = \zeta_a e^{i\sigma t}; \quad \psi = \psi_a e^{i\sigma t}, \quad (4.173)$$

где

$$\zeta_a = \zeta_1 + i\zeta_2; \quad \psi_a = \psi_1 + i\psi_2.$$

Подставив значения ζ и ψ , определяемые равенствами (4.173), в формулы (4.172) и воспользовавшись обозначениями (4.169), получим следующую систему двух алгебраических уравнений относительно ζ_a и ψ_a :

$$\begin{aligned} (d_{33} + ie_{33})\zeta_a + (d_{35} + ie_{35})\psi_a &= \alpha_3 + i\beta_3; \\ (d_{53} + ie_{53})\zeta_a + (d_{55} + ie_{55})\psi_a &= \alpha_5 + i\beta_5. \end{aligned}$$

Корни этой системы будут иметь вид:

$$\zeta_a = \frac{\Delta_\zeta}{\Delta}; \quad \psi_a = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}, \quad (4.174)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} d_{33} + ie_{33} & d_{35} + ie_{35} \\ d_{53} + ie_{53} & d_{55} + ie_{55} \end{vmatrix}; \\ \Delta_\zeta &= \begin{vmatrix} \alpha_3 + i\beta_3 & d_{35} + ie_{35} \\ \alpha_5 + i\beta_5 & d_{55} + ie_{55} \end{vmatrix}; \\ \Delta_\psi &= \begin{vmatrix} d_{33} + ie_{33} & \alpha_3 + i\beta_3 \\ d_{53} + ie_{53} & \alpha_5 + i\beta_5 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Раскрыв эти определители, получим

$$\Delta = a_0 + ib_0; \quad \Delta_\zeta = c_0 + id_0; \quad \Delta_\psi = e_0 + if_0,$$

Таким образом, амплитуды и углы сдвига фаз будут определяться равенствами:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \sqrt{\frac{c_0^2 + d_0^2}{a_0^2 + b_0^2}}; \\ \psi_0 &= \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \sqrt{\frac{e_0^2 + f_0^2}{a_0^2 + b_0^2}}; \\ \operatorname{tg} \gamma_3 &= -\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{b_0 c_0 - a_0 d_0}{a_0 c_0 + b_0 d_0}; \\ \operatorname{tg} \gamma_5 &= -\frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{b_0 e_0 - a_0 f_0}{a_0 e_0 + b_0 f_0}.\end{aligned}\quad (4.177)$$

Для того чтобы однозначно определить угол сдвига фаз при известном значении его тангенса, необходимо еще знать четверть, в которой лежит этот угол, т. е. знак синуса или косинуса, определяемый формулами (4.176). Как видно из этих формул:

$$\operatorname{sign} \cos \gamma_3 = \operatorname{sign} \xi_1;$$

$$\operatorname{sign} \cos \gamma_5 = \operatorname{sign} \psi_1,$$

где символ sign означает «знак».

Для боковой качки применять прием, позволяющий без решения системы шести алгебраических уравнений найти значения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд, нецелесообразно. Дело в том, что в отличие от продольной качки, которая состоит из двух видов колебаний, боковая включает три вида и нахождение их комплексных амплитуд сводится к решению системы трех алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Выражения для ее корней оказываются настолько громоздкими, что для практики их использовать нельзя. Поэтому в случае необходимости выполнения экспресс-расчетов боковой качки без использования ЭВМ следует исключить из рассмотрения рысканье. После этого для определения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд поперечно-горизонтальной и бортовой качки может быть использован такой же прием, как и для продольной.

Отметим, что независимо от того, каким путем найдены действительные и мнимые части комплексных амплитуд какого-либо вида качки, нахождение амплитуд и углов сдвига фаз не представляет никаких трудностей и выполняется с помощью формул, аналогичных приведенным выше.

определяются следующими выражениями:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\rho g S_0}{m + M_{33}}}; \quad \nu_3 = \frac{\Lambda_{33}}{2(m + M_{33})};$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{M_{33}}{m + M_{33}}.$$

Будем искать частное решение уравнения (4.179) в форме

$$\zeta = \zeta_a e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.180)$$

где $\zeta_a = \zeta_1 + i\zeta_2$ — комплексная амплитуда. После подстановки (4.180) в это уравнение получим

$$(\omega_3^2 - \sigma_0^2 + 2i\nu_3\sigma_0)\zeta_a = \alpha_3 + i\beta_3,$$

где

$$\alpha_3 = r(\omega_3^2 - f_3\sigma_0^2); \quad \beta_3 = 2r\nu_3\sigma_0.$$

Таким образом, имеем

$$\zeta_a = \frac{\alpha_3 + i\beta_3}{\omega_3^2 - \sigma_0^2 + 2i\nu_3\sigma_0}.$$

Избавившись в последнем равенстве от мнимости в знаменателе и отделив действительную и мнимую части, найдем:

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_3(\omega_3^2 - \sigma_0^2) + 2\beta_3\nu_3\sigma_0}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2};$$

$$\zeta_2 = \frac{\beta_3(\omega_3^2 - \sigma_0^2) - 2\alpha_3\nu_3\sigma_0}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2}.$$

Если теперь представить ординату¹ вертикальной качки в виде

$$\zeta = \zeta_0 \cos(\sigma t - \gamma_3)$$

то, как видно из формул (4.177),

$$\zeta_0 = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma_3 = -\frac{\zeta_2}{\zeta_1}.$$

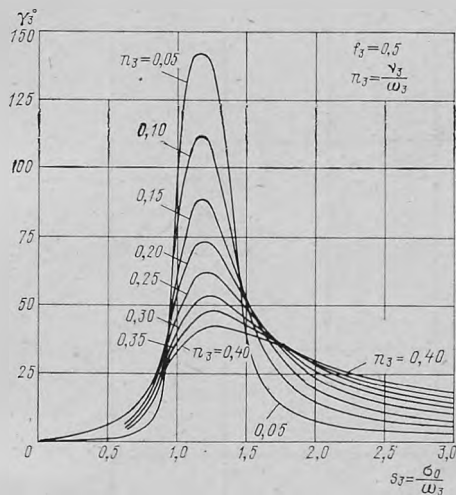
Подставив в последние равенства выражения для ζ_1 и ζ_2 , получим:

$$\zeta_0 = r \sqrt{\frac{(\omega_3^2 - f_3\sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \gamma_3 = \frac{2(1 - f_3)\nu_3\sigma_0^3}{(\omega_3^2 - f_3\sigma_0^2)(\omega_3^2 - \sigma_0^2) + (2\nu_3\sigma_0)^2}.$$

¹ Мгновенные значения поступательного перемещения или углов наклона корабля часто называют ординатами соответствующего вида качки.

определяемые вторыми членами левых частей изолированных дифференциальных уравнений качки, а с другой — растут амплитуды возмущающих сил. Последнее обстоятельство связано с тем, что коэффициенты демпфирования входят в дифракционные составляющие этих сил. В итоге при различных соотношениях между параметрами f_3 и σ_0/ω_3 влияние демпфирования на коэффициент динамичности оказывается различным. Так, при



4.20. Фазово-частотная характеристика вертикальной качки.

в случае отсутствия демпфирования дифференциальное уравнение (4.179) вертикальной качки на волнении будет иметь вид

$$\ddot{\xi} + \omega_3^2 \xi = r (\omega_3^2 - f_3 \sigma_0^2) e^{i \sigma_0 t}.$$

Отсюда видно, что при $\sigma_0^2 = \omega_3^2/f_3$ амплитуда возмущающей силы, а с ней и амплитуда вынужденных колебаний обращаются в нуль. Предельное значение коэффициента динамичности при $\sigma_0 \rightarrow \infty$ равно не нулю, как у обычного гармонического осциллятора, а величине f_3 .

Фазово-частотная характеристика качки, т. е. график зависимости угла γ_3 от σ_0/ω_3 (рис. 4.20) также отличается от фазово-частотной характеристики обычного гармонического осциллятора. В частности, если для последнего при неограниченном возрастании σ_0/ω_3 угол γ_3 стремится к π , то для качки он стремится к нулю.

Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики бортовой и килевой качки имеют такой же вид, как аналогичные характеристики вертикальной качки. Под коэффициентами динамичности при этом понимаются следующие отношения:

$$a_4 = \frac{\theta_0}{\alpha_0}; \quad a_5 = \frac{\psi_0}{\alpha_0},$$

$$\frac{\sigma_0}{\omega_3} = \sqrt{\frac{2}{1 + f_3}}$$

демпфирование вообще не оказывает влияния на коэффициент динамичности и он равен единице при любых, в том числе и при нулевых значениях коэффициента затухания. При значениях σ_0/ω_3 меньших, чем определяемые последним соотношением, с ростом демпфирования коэффициент динамичности уменьшается, при больших — увеличивается.

Отметим еще некоторые особенности коэффициента динамичности качки. Так,

Ограничимся для простоты рассмотрением корабля с полуэллиптическими шпангоутами, расположенного лагом к волне. Тогда, как видно из формулы (4.92):

$$F_4^* = -i\rho g \alpha_0 \kappa_4 V z_m e^{i\sigma_0 t} = -i\alpha_0 \kappa_4 m g z_m e^{i\sigma_0 t}. \quad (4.182)$$

Это выражение определяет собой момент гидродинамических давлений набегающих на корабль волн относительно оси Ox , лежащей в плоскости ватерлинии равновесия. Вместе с тем «укороченное» уравнение бортовой качки приобретает более удобный вид, если вычислять этот момент относительно продольной оси, проходящей через центр масс. Обозначив момент относительно этой оси через F_{4g}^* , можем написать

$$F_{4g}^* = F_4^* + z_g F_2^*,$$

где, очевидно, z_g — аппликата центра масс. Подставляя сюда выражения (4.182) и (4.71), получим

$$F_{4g}^* = -i\alpha_0 m g (\kappa_4 z_m - \kappa_2 z_g) e^{i\sigma_0 t}.$$

Если рассматривать корабль, поперечные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны, то κ_2 и κ_4 окажутся равными единице и выражение, стоящее в последней формуле в скобках, будет представлять собой начальную метacentрическую высоту. Применяя эту формулу к кораблю, поперечные размеры которого сравнимы с длиной волны, следует иметь в виду, что обычно центр масс лежит в районе ватерлинии и, следовательно, z_g оказывается значительно меньше, чем z_m . Поэтому можно, не внося существенной погрешности в результат, заменить редуцированный коэффициент κ_2 на κ_4 . Тогда получим следующее равенство:

$$F_{4g}^* = -i\alpha_0 \kappa_4 m g h e^{i\sigma_0 t}.$$

Введя допущение о независимости бортовой качки от поперечно-горизонтальной, мы предполагаем, что $M_{24} = \Lambda_{24} = 0$. В этом случае при переносе начала координат в центр масс корабля следует в левой части укороченного уравнения качки под I_x понимать I_{gx} , и, кроме того, заменить M_{44} на M_{44g} и Λ_{44} на Λ_{44g} , руководствуясь соотношениями:

$$M_{44g} = M_{44} + z_g^2 M_{22}$$

и

$$\Lambda_{44g} = \Lambda_{44} + z_g^2 \Lambda_{22}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (4.181) и отбрасывая для простоты записи g в индексе, получим укороченное уравнение бортовой качки в виде

$$(I_x + M_{44}) \ddot{\theta} + \Lambda_{44} \dot{\theta} + m g h \theta = -i\alpha_0 \kappa_4 m g h e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.183)$$

или

$$\ddot{\theta} + 2\nu_4 \dot{\theta} + \omega_4^2 \theta = -i\alpha_0 \kappa_4 \omega_4^2 e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.184)$$

Коэффициент динамичности a_4 в данном случае можно представлять либо как θ_0/α_0 , либо как $\theta_0/\alpha_0\kappa_4$.

Амплитудно-частотная характеристика, соответствующая второму представлению коэффициента динамичности, и фазово-частотная характеристика, рассчитанные на основе «укороченного» уравнения качки, приведены на рис. 4.22 и 4.23. Эти характеристики ничем не отличаются от аналогичных характеристик обычного гармонического осциллятора с одной степенью свободы.

§ 24. Продольно-горизонтальная качка

Имея в виду большое удлинение корабля, при рассмотрении продольно-горизонтальной качки можно пренебречь инерционно-демпфирующими и дифракционными силами, а также взаимодействием этого вида качки с остальными. Таким образом, дифференциальное уравнение продольно-горизонтальной качки можно записать в простейшем виде:

$$m\ddot{\xi} = F_1^* \quad (4.188)$$

где F_1^* — проекция главной части возмущающей силы на ось Ox неизменно связанной с кораблем системы координат. Ограничиваясь для простоты случаем отсутствия хода, под ξ будем понимать абсолютное горизонтальное смещение корабля вдоль продольной оси.

Учитывая, что $\partial\Phi_1/\partial n = \cos(n, x)$ и применив к формуле (4.50) преобразование Остроградского—Гаусса, получим следующее выражение для силы F_1^* :

$$F_1^* = i\rho g k_1 r e^{i\sigma_0 t} \iiint_V e^{kz - i(k_1 x + k_2 y)} dV,$$

где V — объем подводной части корабля в положении равновесия на тихой воде. Интеграл по объему V можно записать в виде

$$\iiint_V e^{kz - i(k_1 x + k_2 y)} dV = \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_1 x} \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz dx.$$

Воспользовавшись равенствами (4.59) и (4.62), получим

$$\int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz = \kappa_2 \omega,$$

где, напомним, через ω обозначена погруженная площадь шпангоута. Значения коэффициента κ_2 для шпангоута полуэллиптической формы определяются по графику, приведенному на рис. 4.4. Таким образом,

$$\iiint_V e^{kz - i(k_1 x + k_2 y)} dV = \int_{-L/2}^{L/2} a_2 (\cos k_1 x - i \sin k_1 x) dx = A_2^c - i A_2^s,$$

Таким образом, для симметричного относительно миделя корабля

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = -\kappa_2 K_1^c r \cos \varepsilon; \quad \xi_0 = |\xi_2|.$$

Значения K_1^c определяют по графику, приведенному на рис. 4.7, как функции коэффициента продольной полноты корабля φ .

Особенно простой вид имеет решение для прямоугольного понтона на встречном волнении ($\varepsilon = \pi$, $k_2 = k \sin \varepsilon = 0$). В этом случае

$$\kappa_2 = \frac{2}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz = \frac{1}{kT} (1 - e^{-kT});$$

$$K_1^c = \frac{2}{V} \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx = \frac{2}{kL} \sin \frac{kL}{2}$$

и, следовательно,

$$\xi_2 = \frac{2r}{k^2 L T} (1 - e^{-kT}) \sin \frac{kL}{2}.$$

При расчетах на ЭВМ можно находить значения A_2^c и A_2^s по теоретическому чертежу, либо, ограничиваясь параболической аппроксимацией строевой по шпангоутам, считать $A_2^s = 0$, а функцию A_2^c вычислять, как указано в § 19, пользуясь разложением (4.96).

§ 25. Параметрический резонанс

При изучении основных видов качки на тихой воде мы рассматривали собственные колебания корабля, а на регулярном волнении — вынужденные. При собственных колебаниях корабль, выведенный из положения равновесия некоторым начальным возмущением, затем изолирован от каких-либо внешних воздействий. Вынужденные же колебания происходят под непрерывным воздействием внешних сил, изменяющихся во времени по величине и направлению.

Однако возможен и третий вид колебаний, возникающий вследствие того, что под действием внешних сил в процессе движения изменяются параметры самой колебательной системы (качающегося корабля). В этом случае коэффициенты дифференциальных уравнений, зависящие от параметров системы, становятся явными функциями времени. Такие колебания называются параметрически возбуждаемыми или просто параметрическими. Они могут быть как затухающими, так и нарастающими во времени. В первом случае говорят, что система устойчива, а во втором — что неустойчива.

При вычислении производной от метацентрического радиуса будем считать, что в районе изменения ватерлинии борта корабля вертикальны, или, иначе говоря, что момент инерции площади ватерлинии J_x не зависит от осадки. В этом случае

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{dr}{dV} \frac{dV}{d\zeta} = J_x \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \right) \frac{dV}{d\zeta} = \frac{rS_0}{V}.$$

Аппликата центра величины будет определяться формулой

$$z_c = \frac{M_V}{V},$$

где M_V — статический момент погруженного объема корабля относительно плоскости мгновенной ватерлинии. Тогда, очевидно,

$$\frac{dz_c}{d\zeta} = \frac{1}{V^2} \left(\frac{dM_V}{d\zeta} V - \frac{dV}{d\zeta} M_V \right).$$

Учитывая, что

$$M_V = \int_{-T}^{-\zeta} S_z (z + \zeta) dz,$$

где S_z — площадь ватерлинии с аппликатой z , и, пользуясь теоремой о производной интеграла по параметру, получим

$$\frac{dM_V}{d\zeta} = V$$

и, следовательно,

$$\frac{dz_c}{d\zeta} = 1 + \frac{S_0 z_c}{V}.$$

Таким образом,

$$\frac{dh}{d\zeta} = 1 + \frac{S_0}{V} (r + z_c).$$

Если теперь подставить выражения для производных водоизмещения и метацентрической высоты в (4.192), будем иметь

$$\frac{d(Vh)}{d\zeta} = V + S_0 z_g.$$

Тогда согласно (4.191) можем написать

$$Vh = V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_g) \zeta$$

и дифференциальное уравнение (4.190) примет вид

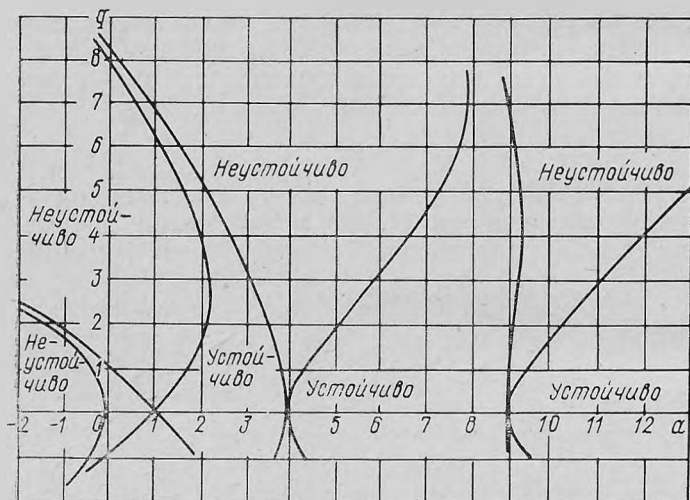
$$(I_x + M_{44}) \ddot{\theta} + K_{44} \dot{\theta} + \rho g [V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_g) \zeta] \theta = (\alpha_4 + i\beta_4) e^{i\sigma_0 t}.$$

Разделив на коэффициент при второй производной, получим

$$\ddot{\theta} + 2\nu\dot{\theta} + \omega^2 (1 + \rho\zeta) \theta = (\alpha_{04} + i\beta_{04}) e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.193)$$

положения равновесия, когда ϑ есть отклонение от этого положения, и устойчивость какого-либо вида движения, например гармонической бортовой качки, когда под ϑ следует понимать вариацию угла качки θ .

На рис. 4.24 приведена так называемая диаграмма устойчивости, на которой показаны области сочетаний параметров a и q , отвечающие устойчивым и неустойчивым состояниям системы. Поскольку диаграмма симметрична относительно оси a , на рисунке показана только верхняя ее часть. Эта диаграмма не связана с физической природой системы, и поэтому с ее помощью можно сделать заключение об устойчивости или неустойчивости состояния любой



4.24. Диаграмма устойчивости.

системы, описываемой уравнением Матве. При известных значениях a и q для такого заключения никаких вычислений не требуется. Из диаграммы видно, что при

$$a = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

области неустойчивости непосредственно примыкают к оси a , т. е. параметрический резонанс возникает при сколь угодно малых значениях q . Поскольку

$$a \approx \frac{4\omega^2}{\sigma_0^2},$$

легко видеть, что в данном случае

$$\frac{\sigma_0}{\omega} = \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

матических моделей реальных физических процессов, представляет собой чаще всего употребляемую в практике и наиболее быстро развивающуюся часть теории вероятностей.

Зародившись как наука о вероятности появления тех или иных случайных событий, теория вероятностей по мере своего развития перешла к изучению случайных величин, а затем и случайных процессов.

Как известно, случайным называется такое событие, которое при осуществлении определенного комплекса условий может произойти либо не произойти. Обобщением понятия случайного события является понятие случайной величины, т. е. такой величины, которая в результате опыта принимает одно из множества возможных значений — заранее неизвестно, какое именно. Случайная величина, зависящая от некоторого аргумента, называется случайной функцией. Иначе можно сказать, что случайной функцией называется такая функция, значение которой при каждом данном значении аргумента (или нескольких аргументов) является случайной величиной. Аргументами случайных функций могут быть произвольные скалярные или векторные величины. Если единственным аргументом случайной функции является время, то она называется случайным процессом. Случайные функции нескольких аргументов, например координат и времени, образуют случайные поля. Так, скорость частиц жидкости в любой точке взволнованного моря образует случайное векторное поле, а давление — случайное скалярное поле.

Вероятностные характеристики случайных функций (законы распределения, статистические моменты) тесно связаны с вероятностными характеристиками случайных величин.

Для полной характеристики случайной величины необходимо знать закон распределения, устанавливающий зависимость между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями. Различают два вида закона распределения: интегральную функцию (или просто функцию) распределения и дифференциальную функцию распределения, иначе называемую плотностью распределения или плотностью вероятности.

Интегральная функция распределения $F(x)$ случайной величины X определяет вероятность того, что X примет значения, меньшие, чем x . Обозначив вероятность события A через $P(A)$, можем написать

$$F(x) = P(X < x).$$

Интегральная функция (рис. 5.1) обладает следующими свойствами:

$$F(x_2) \geq F(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1; \quad F(\infty) = 1; \\ F(-\infty) = 0.$$

Для непрерывных случайных величин более удобна дифференциальная функция распределения $f(x)$, которая связана с интег-

Первый начальный момент ($n = 1$) называется математическим ожиданием или средним значением случайной величины X :

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = m_x = M(X),$$

где $M(X)$ и m_x — символы математического ожидания величины X .

Абсцисса центра тяжести площади, ограниченной кривой $f(x)$, будет

$$x_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = m_x, \text{ так как } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины равно абсциссе центра тяжести площади, ограниченной кривой, выражающей дифференциальный закон распределения.

Центральным моментом порядка n называют интеграл вида

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n f(x) dx.$$

Как легко видеть, первый центральный момент $\mu_1 = 0$. Второй центральный момент

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = M[(X - m_x)^2] = D_x$$

называется дисперсией случайной величины X . В механическом смысле дисперсия представляет собой момент инерции площади, ограниченной кривой $f(x)$, относительно центральной оси, т. е. оси, проходящей через точку с абсциссой m_x . Дисперсия характеризует разброс возможных значений случайной величины относительно среднего ее значения. Чем дисперсия больше, тем больше разброс.

В тех случаях, когда отклонения случайной величины от ее среднего значения не подвержены какому-либо систематическому влиянию или ограничению, плотность вероятности описывается так называемым нормальным законом распределения (законом Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D_x}} \quad (5.1)$$

Очевидно, что нормальный закон полностью определяется математическим ожиданием и дисперсией. Несколько забегаая вперед, отметим, что этому закону подчиняются ординаты реального морского волнения и нерегулярной качки.

или

$$x_0 = \sqrt{-2 \ln Q(x_0) D_x} = k_0 \sqrt{D_x}, \quad (5.3)$$

где

$$k_0 = \sqrt{-2 \ln Q(x_0)} = \sqrt{2 \ln \frac{1}{Q(x_0)}}. \quad (5.4)$$

Найдем среднее значение случайной величины x_0 , распределенной по закону Релея, и соответствующую ему обеспеченность. Поскольку при $x_0 < 0$ плотность вероятности $f(x_0) = 0$, то среднее значение (математическое ожидание, начальный момент первого порядка) величины x_0 будет определяться интегралом

$$x_{0\text{ ср}} = \int_0^{\infty} x_0 f(x_0) dx_0 = 2 \int_0^{\infty} \frac{x_0^2}{2D_x} e^{-\frac{x_0^2}{2D_x}} dx_0.$$

Введем новую переменную интегрирования z , связанную с x_0 соотношением

$$z = \frac{x_0^2}{2D_x}.$$

Тогда, очевидно,

$$x_0 = \sqrt{2D_x z}; \quad dx_0 = \sqrt{\frac{D_x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

и, следовательно,

$$x_{0\text{ ср}} = \sqrt{2D_x} \int_0^{\infty} \sqrt{z} e^{-z} dz.$$

Возьмем последний интеграл по частям, полагая

$$\sqrt{z} = u; \quad e^{-z} dz = dv.$$

В этом случае

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = du; \quad -e^{-z} = v$$

и

$$\int_0^{\infty} \sqrt{z} e^{-z} dz = -\sqrt{z} e^{-z} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, известен¹

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}.$$

¹ Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, с. 329.

ные величины всегда некоррелированы. Однако обратное утверждение неверно: некоррелированные величины могут быть и зависимыми.

Переходя к вероятностным характеристикам случайных процессов, условимся называть конкретный вид, который приобретает случайный процесс $x(t)$ в результате того или иного опыта, реализацией. Если рассмотреть совокупность значений $x(t)$ во всех реализациях при фиксированном t , то мы получим случайную величину, называемую сечением случайного процесса. При неограниченном возрастании числа реализаций эта величина будет непрерывной. Ее вероятностные характеристики можно использовать для описания случайного процесса.

Рассмотрим случайную величину $x(t_1)$ — сечение случайного процесса в момент времени t_1 . Эта величина обладает законом распределения, который в общем случае зависит от времени. Обозначим плотность распределения этой величины через $f(x_1, t_1)$ и будем называть ее одномерной плотностью вероятности случайного процесса.

Очевидно, что функция $f(x_1, t_1)$ характеризует распределение только в данный момент времени и ничего не говорит о распределении при других t . Более полную информацию о случайном процессе $x(t)$ дает так называемая двумерная плотность распределения случайного процесса

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, t_1, x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x < x_1 \text{ при } t = t_1 \text{ и } x < x_2 \text{ при } t = t_2).$$

Для исчерпывающей характеристики случайного процесса необходимо знать его n -мерную плотность вероятности при $n \rightarrow \infty$, однако практически она никогда не бывает известна. Вместе с тем, существуют такие случайные процессы, которые полностью характеризуют n -мерной плотностью при конечных значениях n .

В ряде случаев нет необходимости отыскивать многомерную плотность вероятности случайного процесса, если даже можно ее определить. Для практических целей достаточно бывает найти числовые характеристики процесса, аналогичные рассмотренным выше числовым характеристикам случайных величин. Такие характеристики в общем случае будут уже не числами, а функциями времени.

Рассмотрим сечение случайного процесса $x(t)$ в определенный момент времени t . Это будет, как уже говорилось, случайная величина. Определим ее начальный момент первого порядка (математическое ожидание)

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t) dx.$$

Очевидно, что оно, вообще говоря, зависит от t . Итак, математическим ожиданием случайного процесса называется неслучайная

мени t_2 . Таким образом, можем написать

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] [y_2 - m_y(t_2)] f(x_1, t_1, y_2, t_2) dx_1 dy_2 = \\ = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] [y(t_2) - m_y(t_2)] \}, \quad (5.6)$$

где $f(x_1, t_1, y_2, t_2)$ — двумерная плотность вероятности случайных величин $x(t_1)$ и $y(t_2)$.

Развитое морское волнение и качка корабля принадлежат к большому классу случайных процессов, называемых стационарными. Этот термин можно применять как в строгом, так и в широком смысле.

Стационарными в строгом смысле называются такие процессы, многомерная плотность вероятности которых не зависит от изменения начала отсчета времени, т. е.

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; \\ \dots; x_n, t_n + \tau),$$

где τ — некоторый фиксированный произвольный промежуток времени.

Учитывая произвольность этого промежутка, положим $\tau = -t_1$. Тогда, как легко видеть, одномерная плотность вероятности стационарного случайного процесса оказывается одинаковой для всех моментов времени

$$f(x_1, t_1) = f(x_1, t_1 + \tau) = f(x_1, 0) = f(x_1)$$

и его математическое ожидание постоянно

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 = \text{const.}$$

Двумерная плотность вероятности в этом случае зависит только от разности $t_2 - t_1$

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = f(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$$

и, следовательно, корреляционная функция процесса также будет зависеть только от этой разности:

$$K_x(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = K_x(t_2 - t_1),$$

а дисперсия его, которая определяется как корреляционная функция при $t_2 = t_1$, не будет зависеть от времени

$$D_x = K_x(0) = \text{const.}$$

Приведенное выше строгое определение стационарности процесса в случае, когда ограничиваются корреляционной теорией, можно заменить более широким понятием. Согласно А. Я. Хинчину случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия постоянны, а кор-

синусов) кратных углов

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_j t \sin \omega_k t dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_j t \cos \omega_k t dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{при } k=j \\ 0 & \text{при } k \neq j \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_j t \sin \omega_k t dt = 0,$$

получим следующие формулы для коэффициентов ряда:

$$A_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_j t dt; \quad B_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_j t dt. \quad (5.8)$$

Если коэффициенты определены по этим формулам, то при сохранении любого конечного числа N членов ряда он дает наименьшее квадратичное отклонение от точного значения функции $f(t)$. С увеличением числа членов аппроксимация улучшается, и при $N \rightarrow \infty$ ряд дает точное значение функции.

Ряд Фурье представляет собой разложение периодической функции. Это разложение может быть обобщено и на случай непериодической функции с помощью предельного перехода к $T \rightarrow \infty$. Действительно, непериодическую функцию можно рассматривать как предельный случай периодической функции при неограниченно возрастающем периоде. Для получения соответствующих формул подставим выражения (5.8) для коэффициентов A_j и B_j в ряд (5.7). Тогда получим

$$f(t) = \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\cos \omega_j t \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_j t dt + \sin \omega_j t \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_j t dt \right).$$

Теперь сделаем предельный переход, считая $T \rightarrow \infty$. В этом случае сумма в последней формуле перейдет в интеграл, частота $\omega_1 = 2\pi/T$ станет бесконечно малой величиной, которую обозначим через $d\omega$, а $\omega_j = j\omega_1$ из дискретной превратится в непрерывную величину (текущую частоту) ω . Таким образом, будем иметь

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) d\omega, \quad (5.9)$$

где

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad b = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (5.10)$$

Учитывая, что a есть четная, а b — нечетная функция ω , вместо (5.9) можем написать

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) d\omega. \quad (5.11)$$

Для нечетной функции $f(t)$ получим соотношения:

$$I(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega t d\omega;$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt,$$

выражающие синус-преобразования Фурье.

Функция $f(t)$ может быть представлена интегралом Фурье, если с ростом своего аргумента она убывает настолько быстро, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (5.16)$$

где вертикальные черточки есть символ модуля (абсолютного значения) функции. Для выполнения этого условия требуется, в частности, чтобы среднее значение функции $f(t)$ равнялось нулю.

Корреляционная функция нерегулярного морского волнения ¹ $K(\tau)$ условию (5.16) удовлетворяет и, кроме того, она является четной функцией своего аргумента. Это дает возможность, заменив в общих выражениях косинус-преобразований Фурье (5.15) функцию $f(t)$ на $K(\tau)$, получить соотношения, связывающие корреляционную функцию волнения со спектром волновых ординат $S(\omega)$, в виде:

$$\left. \begin{aligned} K(\tau) &= \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \\ S(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Эти соотношения справедливы, если функция $S(\omega)$ абсолютно интегрируема, т. е. удовлетворяет условию, аналогичному (5.16).

Как показано в § 26, при $\tau = 0$ корреляционная функция стационарного случайного процесса переходит в его дисперсию, т. е.

$$D = K(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (5.18)$$

Таким образом, дисперсия равна площади под кривой $S(\omega)$. Иначе говоря, ординаты кривой $S(\omega)$, характеризуют распределение дисперсии по частотам. По этой причине функцию $S(\omega)$ иногда называют спектральной плотностью дисперсий. В механическом смысле дисперсия стационарного случайного процесса представляет собой его мощность, и функция $S(\omega)$, характеризующая распределение дисперсий по частотам, одновременно характеризует

¹ Поскольку здесь рассматривается один случайный процесс, его спектральная плотность и корреляционная функция обозначены через $S(\omega)$ и $K(\tau)$ без каких-либо индексов. При рассмотрении нескольких процессов во избежание путаницы будут использоваться соответствующие индексы.

Поскольку спектр трехмерного волнения $S(\sigma_0, \delta)$ зависит от двух переменных — частоты σ_0 и угла δ — его (спектр) называют двухмерным. Для функции $\varphi(\delta)$, характеризующей угловое распределение энергии, различными авторами предложены формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\delta) &= \frac{1}{2} \cos \delta; \\ \varphi(\delta) &= \frac{2}{\pi} \cos^2 \delta; \\ \varphi(\delta) &= \frac{8}{3\pi} \cos^4 \delta. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Наиболее широкое применение в практике расчетов находят вторая и третья формулы.

Если двухмерный спектр $S(\sigma_0, \delta)$ проинтегрировать по углу δ в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то получим одномерный спектр $S(\sigma_0)$. Дисперсия трехмерного волнения определяется соотношением

$$D = \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S(\sigma_0, \delta) d\delta d\sigma_0 = \int_0^\infty S(\sigma_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\delta) d\delta d\sigma_0 = \int_0^\infty S(\sigma_0) d\sigma_0.$$

Таким образом, должно иметь место равенство

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\delta) d\delta = 1.$$

Очевидно, что все приведенные выше представления функции $\varphi(\delta)$ тому равенству удовлетворяют.

§ 28. Связь спектральных и вероятностных характеристик волнения

Спектральная плотность случайного процесса не определяет собой законов его распределения. При одном и том же законе распределения спектральные плотности могут быть разными. И наоборот, процессы с одинаковыми законами распределения могут иметь различные спектры. Вместе с тем, некоторые вероятностные характеристики волнения можно определить по его спектральным характеристикам, в частности, по так называемым моментам спектра.

Моментом спектра порядка q называется интеграл

$$m_q = \int_0^\infty \sigma_0^q S(\sigma_0) d\sigma_0, \quad (5.21)$$

а шириной спектра — величина

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}}, \quad (5.22)$$

заклученная в пределах $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Из равенств (5.18) и (5.21)

Тогда

$$\frac{m_2^2}{m_0 m_4} \approx 1$$

и, как видно из формулы (5.22), ширина спектра ε близка к нулю.

Реализация процессов с узким спектром близки по форме к синусоиде¹ (см. рис. 5.3), и если их ординаты распределяются по нормальному закону, то распределение амплитуд подчиняется закону Релея, согласно которому плотность вероятности амплитуд зависит только от одного параметра — дисперсии ординат процесса. Такой подход дает вполне удовлетворительные результаты

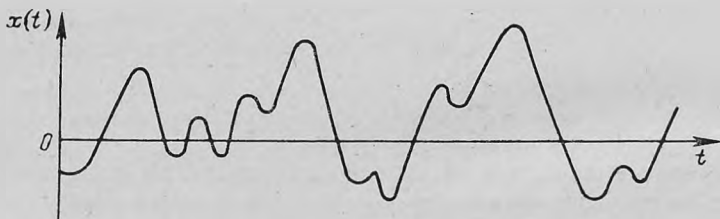
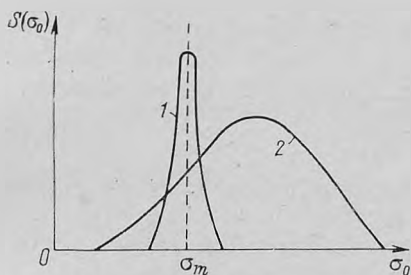
при $\varepsilon < 0,4$. Хотя ширина спектра нерегулярного волнения не всегда удовлетворяет этому ограничению, в практике расчетов качки считают, что амплитуды волн r распределяются по закону Релея

$$f(r) = \frac{r}{D} e^{-\frac{r^2}{2D}},$$

где, как и в (5.25), D — дисперсия волновых ординат.

5.5. Узкий и широкий спектры.

Если энергия процесса не сосредоточена вблизи какой-либо определенной частоты, а «размазана» по относительно большому диапазону, то говорят, что процесс обладает широким спектром (рис. 5.5, кривая 2). У таких процессов кривая спектральной плот-



5.6. Реализация случайного процесса с широким спектром.

ности имеет значительные ординаты при высоких частотах. Вследствие этого момент четвертого порядка

$$m_4 = \int_0^{\infty} \sigma_0^4 S(\sigma_0) d\sigma_0$$

достигает больших значений, отношение $m_2^2/m_0 m_4$ оказывается малым по сравнению с единицей, а ширина спектра ε , определяемая

¹ Спектр гармонических колебаний представляет собой одну вертикальную линию.

нижним пределом интегрирования по переменной t станет бесконечность, а верхним — нуль. Таким образом, имеем

$$m_q = \frac{1}{n} AB \frac{q-k+1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{k-q-1-n}{n}} dt.$$

Используя специальную функцию

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (x > 0),$$

называемую гамма-функцией, можем написать

$$m_q = \frac{1}{n} AB \frac{q-k+1}{n} \Gamma\left(\frac{k-q-1}{n}\right).$$

Выпишем моменты нулевого, второго и четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{n} AB \frac{1-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right); \\ m_2 &= \frac{1}{n} AB \frac{3-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right); \\ m_4 &= \frac{1}{n} AB \frac{5-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-5}{n}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Считая спектр волнения узким¹ и распределение амплитуд подчиняющимся закону Релея, нетрудно выразить через эти моменты статистические характеристики волн. Так, в соответствии с (5.5) средняя амплитуда волны будет определяться формулой

$$r_{cp} = \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0} = 1,25 \sqrt{m_0},$$

где $m_0 = D$ — дисперсия волновых ординат. Таким образом, средняя высота волны

$$h_{cp} = 2r_{cp} = \sqrt{2\pi m_0} = 2,5 \sqrt{m_0}.$$

Средний период τ_{cp} и средняя частота σ_{cp} согласно (5.23) и (5.24) будут:

$$\tau_{cp} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}; \quad \sigma_{cp} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}. \quad (5.29)$$

Для определения частоты σ_m , отвечающей максимуму спектра (5.26), приравняем нулю производную функции $S_3(\sigma_0)$ по частоте

$$\frac{dS_3(\sigma_0)}{d\sigma_0} = A (-k\sigma_0^{-k-1} + nB\sigma_0^{-k-n-1}) e^{-B\sigma_0^{-n}} = 0.$$

¹ При известных значениях m_0 , m_2 и m_4 ширину спектра легко определить по формуле (5.22).

Используя косинус-преобразование Фурье (5.17), можно показать, что формуле (5.31) соответствует следующее выражение для спектра нерегулярного волнения:

$$S_{\dot{s}}(\sigma_0) = \frac{2}{\pi} D\alpha \frac{\sigma_0^2 + b^2}{\sigma_0^4 + 2a^2\sigma_0^2 + b^4},$$

где $a^2 = \beta^2 - \alpha^2$; $b^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Дисперсию волновых ординат $D = m_0$ можно, пользуясь формулами (5.3) и (5.4), выразить через высоту волны 3 %-ной обеспеченности, которая в отечественной практике принята в качестве критерия степени волнения (табл. 17). Подставляя в формулу (5.4) значение обеспеченности $Q = 3 \% = 0,03$, найдем

$$k_0^2 = 2 \ln \frac{100}{3} = 7,014.$$

Таблица 17. Шкала степени волнения Главного управления гидрометслужбы, 1953 г.

Степень волнения, баллы	Высота волны 3%-ной обеспеченности, м	Словесная характеристика волнения
I	0—0,25	Слабое
II	0,25—0,75	Умеренное
III	0,75—1,25	Значительное
IV	1,25—2,00	»
V	2,0—3,5	Сильное
VI	3,5—6,0	»
VII	6,0—8,5	Очень сильное
VIII	8,5—11,0	» »
IX	Более 11,0	Исключительное

Тогда, учитывая, что амплитуда волны равна ее полувысоте, на основании (5.3) можем написать

$$D = \frac{1}{k_0^2} \left(\frac{h_{3\%}}{2} \right)^2 = 0,143 \left(\frac{h_{3\%}}{2} \right)^2 \quad (5.33)$$

Типичные графики спектров волнения приведены на рис. 5.7. Во многих практических приложениях более удобным, чем спектр (5.26), оказывается нормированный спектр $s_{\dot{s}}$, связанный со спектром $S_{\dot{s}}(\sigma_0)$ соотношением:

$$s_{\dot{s}} = \frac{S_{\dot{s}}(\sigma_0) \sigma_{ср}}{m_0}.$$

Поскольку величины m_0 , $S_{\dot{s}}(\sigma_0)$ и σ_0 будут соответственно иметь размерность м^2 , $\text{м}^2\text{с}$ и с^{-1} , очевидно, что нормированный спектр будет безразмерным. Этот спектр является функцией безразмерной частоты σ_0/σ_m и зависит только от двух параметров k и n . Выясним характер этой зависимости.

будем иметь

$$\frac{\sigma_{\text{ср}}}{\sigma_m} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}. \quad (5.36)$$

Подставив последнее соотношение в (5.35), получим окончательное выражение для безразмерной нормированной спектральной плотности

$$s_3\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m}, k, n\right) = C\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^k e^{-\frac{k}{n}\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^n},$$

где

$$C = \frac{n}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}.$$

В нормированной форме выражения для спектральной плотности приобретают весьма простой вид. Действительно, обозначив безразмерную частоту σ_m/σ_0 через ω_0 , можем написать:

спектр Неймана ($k=6; n=2$)

$$s_3 = 33,2\omega_0^6 e^{-3\omega_0^2};$$

спектры Пирсона и Московица и Второго международного конгресса по конструкции и прочности судов ($k=5; n=4$)

$$s_3 = 7,03\omega_0^5 e^{-1,25\omega_0^4};$$

5.8. Нормированный спектр А. И. Вознесенского и Ю. А. Нецветаева.

спектр А. И. Вознесенского и Ю. А. Нецветаева ($k=6; n=4$)

$$s_3 = 9,43\omega_0^6 e^{-1,5\omega_0^4};$$

спектр Ю. М. Крылова ($k=7; n=4$)

$$s_3 = 12,8\omega_0^7 e^{-1,75\omega_0^4}.$$

График спектра А. И. Вознесенского и Ю. А. Нецветаева в безразмерном виде приведен на рис. 5.8.

Для использования этого спектра при заданной высоте волны 3 %-ной обеспеченности¹ по формулам (5.32) и (5.33) находим

¹ Если задана степень волнения, то в расчет следует принимать значения высоты волны 3 %-ной обеспеченности, наибольшие для данного балла.

Система, обладающая линейным оператором, называется *линейной*. Так, если рассматривать качку корабля в рамках линейной теории, то корабль будет линейной динамической системой, ибо его движение будет описываться линейным дифференциальным уравнением, которое, очевидно, является линейным оператором.

Линейные системы можно характеризовать их реакциями на различные виды элементарных возмущений (входных сигналов). При этом характеристика получает особенно простой вид, если в качестве входных сигналов берутся инвариантные функции данной системы, т. е. такие функции, которые при бесконечно долгом действии проходят через систему без искажения формы, лишь умножаясь на некоторые независимые от времени коэффициенты.

Пусть $x(t, \lambda)$ — инвариантная функция, зависящая от параметра λ , поступающая на вход системы. Тогда, согласно определению, выходная функция $y(t)$ будет иметь вид

$$y(t) = \Phi(\lambda) x(t, \lambda).$$

Множитель $\Phi(\lambda)$, на который умножается входная инвариантная функция при прохождении через систему, в случае, когда она подается на вход в течение бесконечно большого времени, называется *передаточной функцией* линейной динамической системы. Заметим, что условие о бесконечно долгом времени подачи входного сигнала равносильно условию о затухании в системе всех переходных процессов. Таким образом, передаточная функция представляет собой отношение выходного сигнала к входному в данный момент времени. Сама передаточная функция от времени не зависит.

Найдем передаточную функцию системы, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$Ay(t) = Bx(t), \quad (5.37)$$

где A и B — дифференциальные операторы следующего вида:

$$A = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k}; \quad B = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k}.$$

Будем полагать, что рассматриваемая система устойчива, т. е. ни один из корней характеристического уравнения не имеет положительной действительной части. В качестве инвариантной функции примем показательную функцию $x(t) = e^{\lambda t}$.

Представим решение уравнения (5.37) в виде

$$y(t) = \Phi(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Учитывая, что для любого k имеет место соотношение

$$\frac{d^k e^{\lambda t}}{dt^k} = \lambda^k e^{\lambda t},$$

Таким образом, имеем

$$\Phi_1(\omega) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{x_1^2 + x_2^2}; \quad \Phi_2(\omega) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

и, следовательно,

$$|\Phi(i\omega)| = \sqrt{\Phi_1^2(\omega) + \Phi_2^2(\omega)} = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2}{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Из последней формулы видно, что модуль частотной характеристики представляет собой отношение амплитуд выходного и входного процессов или, что то же самое, амплитуду выходного процесса при подаче на вход гармонического возмущения единичной амплитуды.

Частотную характеристику можно также представить в форме

$$\Phi(i\omega) = |\Phi(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = |\Phi(i\omega)| [\cos \varphi(\omega) + i \sin \varphi(\omega)], \quad (5.39)$$

где $\varphi(\omega)$ — аргумент комплексной функции $\Phi(i\omega)$. Приравнявая действительные и мнимые части в выражениях (5.38) и (5.59), получим:

$$\Phi_1(\omega) = |\Phi(i\omega)| \cos \varphi(\omega);$$

$$\Phi_2(\omega) = |\Phi(i\omega)| \sin \varphi(\omega)$$

или

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\Phi_2(\omega)}{\Phi_1(\omega)}.$$

Модуль частотной характеристики $|\Phi(i\omega)|$ называют амплитудно-частотной характеристикой динамической системы, а аргумент $\varphi(\omega)$ — фазово-частотной характеристикой.

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании линейными динамическими системами спектра стационарного случайного процесса.

Ординаты спектра, как упоминалось в § 27, характеризуют распределение дисперсии процесса по частотам или, иными словами, представляют собой дисперсии составляющих его гармоник. Нетрудно показать, что дисперсии этих гармоник пропорциональны квадратам их амплитуд.

Пусть нам задан процесс, ординаты которого определяются формулой

$$x(t) = x_0(\omega) \cos \omega t.$$

Найдем дисперсию этого процесса как среднее за период $T = 2\pi/\omega$ значение квадрата его ординат:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{x_0^2(\omega)}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \\ &= \frac{x_0^2(\omega)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{x_0^2(\omega)}{2}. \end{aligned}$$

(м²с), а спектральные плотности бортовой, килевой качки и рысканья будут иметь размерность с.

Амплитудно-частотную характеристику продольно-горизонтальной качки $\alpha_1(\sigma_0)$ вычисляют по формуле

$$\alpha_1(\sigma_0) = \frac{\xi_0}{r},$$

где ξ_0 — амплитуда качки на регулярном волнении, определяемая равенством (4.189), а r — амплитуда волны. Для нахождения амплитудно-частотных характеристик остальных видов качки корабля, не имеющего хода, требуется решить системы алгебраических уравнений (4.170) и (4.171), полагая $\sigma = \sigma_0$, после чего функции $\alpha_j(\sigma_0)$ находят по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_2(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}; & a_3(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}; \\ a_4(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}; & a_5(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}; \\ a_6(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

При расчете продольной качки можно вместо решения системы уравнений (4.170) воспользоваться выражениями (4.177).

Для обеспечения необходимой точности вычисление ординат амплитудно-частотных характеристик и спектров качки следует производить для 30—40 значений частоты. Такие расчеты в связи с большой трудоемкостью выполняют на ЭВМ.

При известных значениях спектральной плотности дисперсия j -го вида качки определяется интегралом

$$D_j = \int_0^{\infty} S_j(\sigma_0) d\sigma_0, \quad (5.42)$$

для вычисления которого используется какое-либо правило приближенных квадратур.

Амплитуды качки заданной обеспеченности находят по формуле (5.3). Если обозначить амплитуду n %-ной обеспеченности j -го вида качки через $y_{jn\%}$, то эту формулу можно написать в виде

$$y_{jn\%} = k_0 \sqrt{D_j}, \quad (5.43)$$

где множитель k_0 определяют по табл. 15, либо по формуле (5.4), в которой следует считать $Q = 0,01 n$.

Получим теперь выражение для дисперсии качки в условиях трехмерного нерегулярного волнения. Будем полагать, что продольная ось неизменно связанной с кораблем системы координат составляет угол β с генеральным направлением распространения волн. Тогда элементарная дисперсия качки, вызванной вол-

или

$$a_{41}(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^2}{g} a_{42}(\sigma_0).$$

Функция $a_{42}(\sigma_0)$ на основании формулы (4.186) может быть записана в виде

$$a_{42}(\sigma_0) = \frac{\kappa_4 \omega_4^2}{\sqrt{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2}},$$

где, напомним, ω_4 представляет собой частоту собственной бортовой качки корабля, а κ_4 — редуцированный коэффициент, определяемый по графику (рис. 4.6). При использовании этого графика для расчета амплитудно-частотной характеристики следует считать, что по оси абсцисс отложено отношение $\sigma_0^2 T/g$, где T — осадка корабля. Таким образом, спектральная плотность углов изолированной бортовой качки, вычисленная с помощью «укороченного» уравнения, может быть записана в виде

$$S_4(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^4}{g^2} \frac{\kappa_4^2 \omega_4^4}{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2} S_3(\sigma_0), \quad (5.45)$$

или

$$S_4(\sigma_0) = \frac{\kappa_4^2 \omega_4^4}{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2} S_\alpha(\sigma_0), \quad (5.46)$$

где через $S_\alpha(\sigma_0)$ обозначена спектральная плотность уклонов взволнованной поверхности. Но, как видно из равенства (5.44), передаточной функцией между процессами изменения волновых ординат и уклонов взволнованной поверхности служит волновое число, равное σ_0^2/g . В связи с этим, учитывая аналогию между передаточной функцией и модулем частотной характеристики, на основании (5.40) можем написать

$$S_\alpha(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^4}{g^2} S_3(\sigma_0). \quad (5.47)$$

Отсюда следует, что формулы (5.45) и (5.46) идентичны.

При известной спектральной плотности качки дисперсию и амплитуду заданной обеспеченности вычисляют с помощью выражений (5.42) и (5.43).

При наличии хода корабля расчет качки на нерегулярном волнении значительно усложняется. В этом случае реакцией корабля на гармоническое возмущение с частотой σ_0 будут колебания с частотой σ , которая, напомним, называется кажущейся. Если обозначить угол между вектором скорости корабля и генеральным направлением распространения волн через β , а угол между направлением

Заметим, что при расчете спектров или псевдоспектров бортовой качки для учета квадратичного характера демпфирования систему (4.170) или «укороченное» уравнение следует решать методом последовательных приближений.

Хотя псевдоспектры $S_j^*(\sigma_0)$ не характеризуют распределения дисперсий по частотам, т. е. не являются энергетическими спектрами качки, они оказываются очень удобными интегральными характеристиками, ибо, как можно доказать, однозначно определяют дисперсии соответствующих видов качки:

$$D_j = \int_0^{\infty} S_j(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} S_j^*(\sigma_0) d\sigma_0.$$

Наряду с псевдоспектрами ординат процессов качки $S_j^*(\sigma_0)$, могут быть вычислены псевдоспектры скоростей и ускорений качки $S_{vj}^*(\sigma_0)$ и $S_{wj}^*(\sigma_0)$ и их дисперсии D_{vj} и D_{wj} :

$$\begin{aligned} S_{vj}^*(\sigma_0) &= \sigma^2(\sigma_0) S_j^*(\sigma_0); \\ S_{wj}^*(\sigma_0) &= \sigma^2(\sigma_0) S_{vj}^*(\sigma_0) = \sigma^4(\sigma_0) S_j^*(\sigma_0); \\ D_{vj} &= \int_0^{\infty} S_{vj}(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} S_{vj}^*(\sigma_0) d\sigma_0; \\ D_{wj} &= \int_0^{\infty} S_{wj}(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} S_{wj}^*(\sigma_0) d\sigma_0. \end{aligned}$$

Средний период качки корабля на нерегулярном волнении определяют соотношением

$$T_{jcp} = 2\pi \sqrt{\frac{D_j}{D_{vj}}}.$$

Вероятностные характеристики качки на трехмерном нерегулярном волнении при постоянных скорости хода v и курсовом угле β относительно генерального направления распространения волн рассчитывают в следующем порядке:

1. Для ряда значений истинной частоты σ_0 и угла δ вычисляют значения кажущейся частоты σ . Величины v и β здесь и в дальнейшем ходе расчета рассматриваются как параметры.

2. Определяют гидродинамические характеристики качки (присоединенные массы и коэффициенты демпфирования) как функции кажущейся частоты для всех рассматриваемых сочетаний σ_0 и δ .

3. Для каждого сочетания σ_0 и δ находят возмущающие силы на регулярном волнении. При этом под углом ε всюду понимается $|\beta - \delta|$.

4. Вычисляют значения амплитудно-частотных характеристик каждого вида качки как функции истинной частоты σ_0 при различных углах δ .

5. Выбирают двухмерный спектр волновых ординат $S_j(\sigma_0, \delta)$.

6. Каждую ординату спектра $S_j(\sigma_0, \delta)$ умножают на квадрат

занной с кораблем системы координат; при этом первой записывают проекцию на ось Ox , второй — на ось Oy , третьей — на ось Oz .

Проекции вектора ω_m на эти оси будут:

$$\omega_{mx} = \ddot{\psi}z_m - \ddot{\chi}y_m;$$

$$\omega_{my} = \ddot{\eta} + \ddot{\chi}x - \ddot{\theta}z_m;$$

$$\omega_{mz} = \ddot{\xi} + \ddot{\theta}y_m - \ddot{\psi}x.$$

Вектор $f^m(0, f_2^m, f_3^m)$ и момент $l^m(f_4^m, f_5^m, f_6^m)$ сил инерции массы m определяют по формулам:

$$f^m = -m\omega_m; \quad l^m = -m(r_m \times \omega_m).$$

Таким образом, имеем:

$$f_2^m = -m(\ddot{\eta} + x\ddot{\chi} - z_m\ddot{\theta});$$

$$f_3^m = -m(\ddot{\xi} + y_m\ddot{\theta} - x\ddot{\psi});$$

$$f_4^m = -m[(y_m^2 + z_m^2)\ddot{\theta} - z_m(\ddot{\eta} + x\ddot{\chi}) + y_m(\ddot{\xi} - x\ddot{\psi}) - i_{mx}\ddot{\theta}]; \quad (6.1)$$

$$f_5^m = -m[(x^2 + z_m^2)\ddot{\psi} - x\ddot{\xi} - y_m(x\ddot{\theta} + z_m\ddot{\chi})];$$

$$f_6^m = -m[(x^2 + y_m^2)\ddot{\chi} + x(\ddot{\eta} - z_m\ddot{\theta}) - y_m z_m \ddot{\psi}].$$

Найдем теперь момент $l_0^m(f_{04}^m, f_{05}^m, f_{06}^m)$ относительно точки, имеющей по отношению к началу координат радиус-вектор $r_0(x_0, 0, z_0)$. Как легко видеть,

$$l_0^m = -m[(r_m - r_0) \times \omega_m] = l^m - r_0 \times f^m$$

или

$$\left. \begin{aligned} f_{04}^m &= f_4^m + z_0 f_2^m; \\ f_{05}^m &= f_5^m - x_0 f_3^m; \\ f_{06}^m &= f_6^m - x_0 f_2^m. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Далее, интегрируя f_2^m и f_3^m по переменной x в пределах от $-L/2$ до x_0 , найдем компоненты перерезывающей силы F_{20}^m и F_{30}^m , обусловленные инерцией массы корабля, затем, интегрируя f_{04}^m , найдем компоненту крутящего момента F_{040}^m , интегрирование же f_{05}^m и f_{06}^m даст компоненты вертикального и горизонтального изгибающих моментов, обозначаемые соответственно через F_{050}^m и F_{060}^m .

Поясним принцип построения применяемой здесь и далее системы цифровых индексов. Последние состоят из некоторой цифры $j = 2, 3, \dots, 6$ и могут включать нули как перед, так и после j . Символ j , как обычно, употребляется для определения вида проекции силы или момента. Нуль перед этой цифрой в проекциях сил ($j = 2, 3$) отсутствует, а в проекциях моментов ($j = 4, 5, 6$) означает, что они берутся относительно осей, проходящих параллельно

Учитывая, что масса корабля в целом распределена симметрично относительно диаметральной плоскости, т. е. $y_g = 0$, и полагая оси Ox , Oy и Oz главными осями инерции, найдем:

$$I_{xy} = 0; \quad I_{yz} = I; \quad I_{xz} = Mx_g z_g$$

и, следовательно, для корабля в целом:

$$F_2^m = -M(\ddot{\eta} - z_g \ddot{\theta} + x_g \ddot{\chi});$$

$$F_3^m = -M(\ddot{\xi} - x_g \ddot{\psi});$$

$$F_{04}^m = F_4^m + z_0 F_2^m;$$

$$F_{05}^m = F_5^m + \frac{L}{2} F_3^m;$$

$$F_{06}^m = F_6^m - \frac{L}{2} F_2^m,$$

где через F_j^m ($j = 4, 5, 6$) обозначены моменты сил инерции относительно координатных осей Ox , Oy и Oz соответственно. Как видно из (6.3), эти моменты определяют по следующим формулам:

$$F_4^m = -[I_x \ddot{\theta} - Mz_g(\ddot{\eta} + x_g \ddot{\chi})];$$

$$F_5^m = -(I_y \ddot{\psi} - Mx_g \ddot{\xi});$$

$$F_6^m = -[I_z \ddot{\chi} + Mx_g(\ddot{\eta} - z_g \ddot{\theta})].$$

Полученные выражения для сил инерции F_j^m ($j = 2, \dots, 6$) полностью совпадают с соответствующими членами дифференциальных уравнений движения (4.164).

Если, учитывая значительное удлинение корабля, при вычислении момента f_5^m пренебречь произведением $z_m \omega_{mx}$ по сравнению с $x \omega_{mz}$, а при вычислении f_6^m пренебречь $y_m \omega_{mx}$ по сравнению с $x \omega_{mz}$, то выражения для f_5^m и f_6^m примут вид:

$$f_5^m = -x f_3^m = mx(\ddot{\xi} + y_m \ddot{\theta} - x \ddot{\psi});$$

$$f_6^m = x f_2^m = -mx(\ddot{\eta} - z_m \ddot{\theta} + x \ddot{\chi}).$$

Тогда компоненты вертикального и горизонтального изгибающих моментов, обусловленные инерцией масс корабля, в сечении с абсциссой x_0 можно определить по формулам:

$$F_{050}^m = \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_5^m dx dx = - \int_{-L/2}^{x_0} x f_3^m dx + x_0 F_{30}^m;$$

$$F_{060}^m = - \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_6^m dx dx = \int_{-L/2}^{x_0} x f_2^m dx - x_0 F_{20}^m.$$

Интегрируя выражения для f_3^r и f_{05}^r в пределах от $-L/2$ до x_0 , получим компоненты перерезывающей силы F_{30}^r и изгибающего момента F_{050}^r , обусловленные силами тяжести и поддержания:

$$F_{30}^r = -g [M_0 - \rho (V_0 - S_0 \xi + S_0 x_{f0} \psi)];$$

$$F_{050}^r = g [(M_0 z_{g0} - \rho V_0 z_{c0}) \psi + M_0 x_{g0} - \rho (V_0 x_{c0} - S_0 x_{f0} \xi + J_{y0} \psi)] + x_0 F_{30}^r,$$

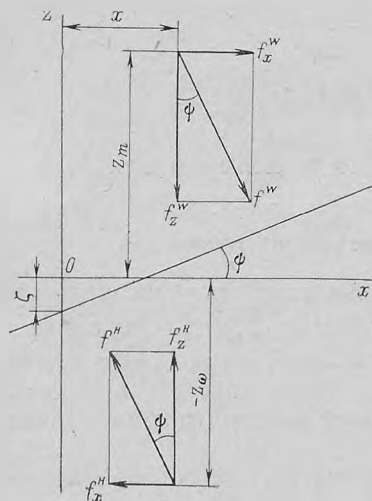
где

$$V_0 = \int_{-L/2}^{x_0} \omega dx; \quad S_0 = \int_{-L/2}^{x_0} b dx;$$

$$x_{f0} = \frac{1}{S_0} \int_{-L/2}^{x_0} b x dx; \quad J_{y0} = \int_{-L/2}^{x_0} b x^2 dx;$$

$$x_{c0} = \frac{1}{V_0} \int_{-L/2}^{x_0} \omega x dx;$$

$$z_{c0} = \frac{1}{V_0} \int_{-L/2}^{x_0} \omega z_{\omega} dx.$$



6.1. Силы тяжести и поддержания, действующие на шпангоут при продольной качке.

Очевидно, что V_0 представляет собой объем погруженной части корабля, расположенной в корму от шпангоута, с абсциссой x_0 , а x_{c0} и z_{c0} — координаты центра величины этой части. Аналогично, S_0 представляет собой площадь кормовой по отношению к шпангоуту с абсциссой x_0 части ватерлинии, x_{f0} — абсциссу ее центра тяжести, а J_{y0} — момент инерции относительно оси Oy .

Компоненты перерезывающей силы и изгибающего момента для корабля в целом будут определяться выражениями:

$$F_3^r = -\rho g S (\xi - x_f \psi); \quad F_{05}^r = F_5^r + \frac{L}{2} F_3^r,$$

где

$$F_5^r = -MgH\psi + \rho g S x_f (\xi - x_f \psi) + Mg (x_g - x_c).$$

Здесь H — продольная метацентрическая высота, S и x_f — площадь и абсцисса центра тяжести площади ватерлинии, x_g и x_c — абсциссы центра массы корабля и центра величины, которые в положении равновесия одинаковы. При получении последней формулы использовано известное соотношение

$$J_y = J_f + S x_f^2 = VR + S x_f^2,$$

где J_f — момент инерции площади ватерлинии равновесия относительно поперечной оси, проходящей через ее центр тяжести; V —

где $z_{\text{мц}}$ — аппликата метacentра для данного шпангоута, определяемая формулой

$$z_{\text{мц}} = z_{\omega} + \frac{b^3}{12\omega}.$$

С учетом полученных соотношений можем написать

$$f_4^r = -g \left\{ my_m - \left[mz_m - \rho\omega \left(z_{\omega} + \frac{b^3}{12\omega} \right) \right] \theta \right\}.$$

Элементарный момент относительно продольной оси с аппликацией z_0 будет

$$f_{04}^r = f_4^r + z_0 f_2^r.$$

Интегрируя выражения для f_2^r и f_{04}^r в пределах от $-L/2$ до x_0 , получим формулы для компонент горизонтальной перерезывающей силы и крутящего момента, обусловленных весом и плавучестью корабля:

$$F_{20}^r = -g (M_0 - \rho V_0) \theta;$$

$$F_{040}^r = -g [M_0 y_{g0} - [M_0 z_{g0} - \rho (V_0 z_{c0} + J_{x0})] \theta] + z_0 F_{20}^r, \quad (6.7)$$

где в дополнение к ранее принятым обозначениям через J_{x0} обозначен поперечный момент инерции кормовой по отношению к шпангоуту с абсциссой x_0 части площади ватерлинии, т. е.

$$J_{x0} = \frac{1}{12} \int_{-L/2}^{x_0} b^3 dx.$$

Компонента горизонтального изгибающего момента, обусловленная весом и плавучестью, в сечении с абсциссой x_0 будет

$$F_{060}^r = \int_{-L/2}^{x_0} f_2^r (x - x_0) dx = -g (M_0 x_{g0} - \rho V_0 x_{c0}) \theta - x_0 F_{20}^r, \quad (6.8)$$

или иначе

$$F_{060}^r = \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_2^r dx dx.$$

Для корабля в целом получим

$$F_2^r = 0; \quad F_{04}^r = F_4^r = -Mgh\theta;$$

$$F_{06}^r = F_6^r = -Mg(x_g - x_c)\theta = 0,$$

где h — поперечная метacentрическая высота.

Введем следующие обозначения для проекций сил и моментов:

$$\left. \begin{aligned} F_{0y}^e &= F_{20}^e; \quad F_{0z}^e = F_{30}^e; \quad M_{0x}^e = F_{40}^e; \quad M_{0y}^e = F_{50}^e; \\ M_{0z}^e &= F_{60}^e; \quad L_{0x}^e = F_{040}^e; \quad L_{0y}^e = F_{050}^e; \quad L_{0z}^e = F_{060}^e. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Цифровые индексы при F^e здесь построены по принципу, описанному в § 32.

Таким образом, на основании равенств (6.10) — (6.12) и (4.15) можем написать следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} F_{j0}^e &= - \int_{\Sigma_0} p^e \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (j = 2, 3, \dots, 6); \\ F_{040}^e &= F_{40}^e + z_0 F_{20}^e; \quad F_{050}^e = F_{50}^e + x_0 F_{30}^e; \quad F_{060}^e = F_{60}^e - x_0 F_{20}^e. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Учитывая (6.9) и (4.6), будем иметь

$$p^e = p + p^* + p^0.$$

В этом случае, как видно из (6.14),

$$F_{j0}^e = F_{j0} + F_{j0}^* + F_{j0}^0; \quad F_{0j0}^e = F_{0j0} + F_{0j0}^* + F_{0j0}^0.$$

Здесь, как и ранее, через F обозначены инерционно-демпфирующие компоненты гидродинамической нагрузки, а через F^* и F^0 — волновые.

Приступим теперь непосредственно к выводу формул для инерционно-демпфирующих компонент, сохраняя предположение о большом удлинении корабля. Тогда, имея в виду, что для такого корабля имеют место приближенные зависимости:

$$\Phi_5 = -x\Phi_3; \quad \Phi_6 = x\Phi_2,$$

и подставляя в (4.13) значения U_j , определяемые равенствами (4.36) и (4.37), получим

$$\Phi = (\ddot{\eta} - v\dot{\chi} + x\ddot{\chi})\Phi_2 + (\ddot{\zeta} + v\dot{\psi} - x\ddot{\psi})\Phi_3 + \dot{\theta}\Phi_4.$$

В этом случае на основании интеграла Лагранжа—Коши (6.9) будем иметь

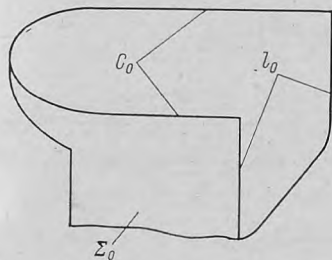
$$\begin{aligned} p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = -\rho [& (\ddot{\eta} - 2v\dot{\chi} - x\ddot{\chi})\Phi_2 - \\ & - v(\dot{\eta} - v\dot{\chi} + x\ddot{\chi}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + (\ddot{\zeta} + 2v\dot{\psi} - x\ddot{\psi})\Phi_3 - \\ & - v(\dot{\zeta} + v\dot{\psi} - x\ddot{\psi}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \dot{\theta}\Phi_4 - v\dot{\theta} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Подстановка последнего равенства и выражений

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = -x \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}; \quad \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} = x \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$

$$\begin{aligned}
 -\rho \iint_{\Sigma_0} x \Phi_2 \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} dS &= M_{460} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{460}; \\
 -\rho \iint_{\Sigma_0} x \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= -M_{350} + \frac{i}{\sigma} \Lambda_{350}; \\
 -\rho \iint_{\Sigma_0} x^2 \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= M_{550} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{550}.
 \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:



6.4. К формуле Стокса.

$$\left. \begin{aligned} M_{260} \\ \Lambda_{260} \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{22} \\ \lambda_{22} \end{aligned} \right\} x dx;$$

$$\left. \begin{aligned} M_{660} \\ \Lambda_{660} \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{22} \\ \lambda_{22} \end{aligned} \right\} x^2 dx;$$

$$\left. \begin{aligned} M_{460} \\ \Lambda_{460} \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{24} \\ \lambda_{24} \end{aligned} \right\} x dx;$$

$$\left. \begin{aligned} M_{350} \\ \Lambda_{350} \end{aligned} \right\} = - \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{33} \\ \lambda_{33} \end{aligned} \right\} x dx, \quad \left. \begin{aligned} M_{550} \\ \Lambda_{550} \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{33} \\ \lambda_{33} \end{aligned} \right\} x^2 dx.$$

Для вычисления интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dS$$

воспользуемся формулой Стокса, вычисляя линейный интеграл по замкнутому контуру, состоящему из части C_0 контура ватерлинии, расположенной в корму от шпангоута с абсциссой x_0 , и смоченной части l_0 контура этого шпангоута (рис. 6.4). С учетом направления координатной оси Ox формула Стокса в нашем случае примет вид

$$- \int_{C_0 + l_0} \overline{a} \cdot dC = \iint_{\Sigma_0} \text{rot } \overline{a} \cdot n dS,$$

или

$$\begin{aligned}
 - \int_{C_0 + l_0} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) &= \iint_{\Sigma_0} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS.
 \end{aligned}$$

Поскольку для удлиненного корабля полагаем $\cos(n, x) = 0$, то на контуре ватерлинии $dy = \cos(n, x) dC = 0$. Кроме того, так

$$\begin{aligned}
& - \iint_{\Sigma_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = x_0 \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl - \iint_{\Sigma_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS; \\
& \iint_{\Sigma_0} x^2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \Phi_k) \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS - \\
& - 2 \iint_{\Sigma_0} x \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = x_0^2 \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl - 2 \iint_{\Sigma_0} x \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS.
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$- \rho \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl = \mu_{jk0} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jk0}.$$

Очевидно, что μ_{jk0} и λ_{jk0} представляют собой присоединенные массы и коэффициенты демпфирования шпангоута с абсциссой x_0 . Таким образом, интегралы вида

$$\iint_{\Sigma_0} x^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (n=0, 1, 2)$$

могут быть выражены через присоединенные массы и коэффициенты демпфирования шпангоута с абсциссой x_0 и присоединенные массы и коэффициенты демпфирования части корабля, расположенной между кормовым перпендикуляром и этим шпангоутом. Так, например,

$$\begin{aligned}
& - \rho \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = \mu_{330} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{330}; \\
& - \rho \iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = x_0 \left(\mu_{330} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{330} \right) - \left(M_{330} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{330} \right); \\
& - \rho \iint_{\Sigma_0} x^2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = x_0^2 \left(\mu_{330} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{330} \right) + 2 \left(M_{350} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{350} \right).
\end{aligned}$$

Если теперь подставить выражения (6.15) в (6.16) и воспользоваться найденными соотношениями для интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} x^n \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma_0} x^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS,$$

получим следующие формулы для инерционно-демпфирующих компонент перерезывающих сил, крутящего и изгибающих моментов

корабль волн, определяемое равенством (4.49). Для удлиненного корабля формула (6.19) принимает вид, аналогичный (4.52), с той лишь разницей, что теперь верхним пределом интеграла будет не $L/2$, а x_0 . Таким образом, имеем

$$F_{j0}^* = -\rho g r e^{i\sigma t} \int_{-L/2}^{x_0} e^{-ik_1 x} h_j dx, \quad (k_1 = k \cos \varepsilon), \quad (6.20)$$

где k — волновое число; h_j — функции, определяемые равенством (4.51). Для этих функций нами получены соотношения (4.64), (4.73) и 4.90), согласно которым

$$\begin{aligned} h_2 &= -ik_2 a_2; \quad h_3 = -a_3; \quad h_4 = ik_2 a_4. \\ h_5 &= -x h_3; \quad h_6 = x h_2; \quad (k_2 = k \sin \varepsilon), \end{aligned} \quad (6.21)$$

Значения a_2 , a_3 и a_4 , входящие в эти соотношения, определяются формулами (4.63), (4.72) и (4.89).

Подставляя (6.21) в (6.20) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} A_{j0}^s \\ A_{j0}^c \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} a_j \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx; \\ \left. \begin{aligned} A_{j0}^{xs} \\ A_{j0}^{xc} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} a_j x \begin{Bmatrix} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{Bmatrix} dx, \end{aligned}$$

можем написать следующие выражения для компонентов перерезывающих сил, крутящего и изгибающих моментов, обусловленных гидродинамическим давлением набегающих на корабль свободно распространяющихся волн:

$$\left. \begin{aligned} F_{20}^* &= \rho g k r \sin \varepsilon (A_{20}^s + i A_{20}^c) e^{i\sigma t}; \\ F_{30}^* &= \rho g r (\bar{A}_{30}^c - i A_{30}^s) e^{i\sigma t}; \\ F_{040}^* &= -\rho g k r \sin \varepsilon [A_{40}^s - z_0 A_{20}^s + i (A_{40}^c - z_0 A_{20}^c)] e^{i\sigma t}; \\ F_{050}^* &= -\rho g r [A_{30}^{xc} - x_0 A_{30}^c - i (A_{30}^{xs} - x_0 A_{30}^s)] e^{i\sigma t}; \\ F_{060}^* &= \rho g k r \sin \varepsilon [A_{20}^{xs} - x_0 A_{20}^s + i (A_{20}^{xc} - x_0 A_{20}^c)] e^{i\sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Заменяя в последних выражениях A_{j0} на A_j с соответствующими верхними индексами и полагая $x_0 = z_0 = 0$, получим формулы для главной части возмущающих сил, действующих на весь корабль, и моментов относительно осей координат $Oxuz$.

Для проекций дифракционных сил, действующих на кормовую по отношению к шпангоуту с абсциссой x_0 часть корабля, можно написать следующее аналогичное (6.19) выражение:

$$F_{j0}^0 = - \iint_{\Sigma_0} p^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS,$$

где p^0 — гидродинамическое давление дифрагированных волн. Обо-

Поправочные коэффициенты κ_k^0 , учитывающие влияние конечности размеров шпангоутного контура, определяются выражениями (4.126), (4.135) и (4.147).

Интегралы R_{j0} можно преобразовать с помощью формулы Стокса. Соответствующие выкладки полностью совпадают с приведенными выше при преобразовании интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dS$$

и требуют лишь замены символа Φ_k на Φ^0 . Таким образом, по аналогии с формулой (6.17) можем написать

$$R_{j0} = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dS = \int_{l_0} \Phi^0 \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dl, \quad (6.28)$$

где, напомним, l_0 — смоченная часть контура шпангоута с абсциссой x_0 . Применяя к последнему интегралу формулу

$$\int_{l_0} \Phi^0 \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dl = \int_{l_0} \Phi_l \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} dl,$$

будем иметь

$$R_{j0} = \int_{l_0} \Phi_l \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} dl.$$

Обратим внимание на то, что выражение (6.25) можно переписать в виде

$$Q_{j0} = \int_{-L/2}^{x_0} \int_l \Phi_l \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} dl dx.$$

Таким образом,

$$R_{j0} = \frac{\partial Q_j}{\partial x} \Big|_{x=x_0}.$$

Учитывая (6.26), окончательно находим

$$R_{j0} = -r\sigma_0 e^{-ik_1 x_0} q_{j0}, \quad (j=2, 3, 4), \quad (6.29)$$

где через q_{j0} обозначена функция q_j для шпангоута с абсциссой x_0 .

С целью нахождения функций R_{50} и R_{60} , которые для удлиненного корабля определяются формулами

$$R_{50} = - \iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS; \quad R_{60} = \iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS,$$

используем очевидное тождество

$$x \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x \Phi^0) - \Phi^0.$$

Далее в соответствии с (6.27) можем написать

$$q_{20} = -\frac{\kappa_{20}^0}{\rho} \left(\mu_{220} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{220} \right) \sin \varepsilon,$$

где через κ_{20}^0 обозначен поправочный коэффициент κ_2^0 для шпангоута с абсциссой x_0 . Тогда на основании (6.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \rho R_{20} &= r \sigma_0 \kappa_{20}^0 e^{-ik_1 x_0} \left(\mu_{220} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{220} \right) \sin \varepsilon = \\ &= r \sigma_0 \kappa_{20}^0 \left[\mu_{220} \cos k_1 x_0 - \lambda_{220} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0 - \right. \\ &\quad \left. - i (\mu_{220} \sin k_1 x_0 + \lambda_{220} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0) \right] \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Подставив (6.32) и (6.33) в (6.23), получим окончательную формулу для F_{20}^0

$$\begin{aligned} F_{20}^0 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \{ M_{220}^s \sigma + \Lambda_{220}^c - v \kappa_{20}^0 (\mu_{220} \cos k_1 x_0 - \\ &\quad - \lambda_{220} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0) + i [M_{220}^c \sigma - \Lambda_{220}^s + v \kappa_{20}^0 (\mu_{220} \sin k_1 x_0 + \\ &\quad + \lambda_{220} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0)] \} e^{i \sigma t}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Аналогичным путем могут быть получены формулы для дифракционных составляющих вертикальной перерезывающей силы, крутящего, вертикального изгибающего и горизонтального изгибающего моментов. Эти формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{30}^0 &= -r \sigma_0 \{ M_{330}^c \sigma - \Lambda_{330}^s + v \kappa_{30}^0 (\mu_{330} \sin k_1 x_0 + \\ &\quad + \lambda_{330} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0) - i [M_{330}^s \sigma + \Lambda_{330}^c - \\ &\quad - v \kappa_{30}^0 (\mu_{330} \cos k_1 x_0 - \lambda_{330} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0)] \} e^{i \sigma t}; \\ F_{040}^0 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \{ M_{240} \sigma + \Lambda_{240}^c - v \kappa_{40}^0 (\mu_{240} \cos k_1 x_0 - \\ &\quad - \lambda_{240} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0) + i [M_{240}^c \sigma - \Lambda_{240} + v \kappa_{40}^0 \times \\ &\quad \times (\mu_{240} \sin k_1 x_0 + \lambda_{240} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0)] \} e^{i \sigma t} + z_0 F_{20}^0; \\ F_{050}^0 &= r \sigma_0 \{ M_{330}^{xc} \sigma - \Lambda_{330}^{xs} - v (M_{330}^s + \Lambda_{330}^c \sigma^{-1}) - \\ &\quad - x_0 (M_{330}^c \sigma - \Lambda_{330}^s) - i [M_{330}^s \sigma + \Lambda_{330}^c + \\ &\quad + v (M_{330}^c - \Lambda_{330}^s \sigma^{-1}) - x_0 (M_{330}^s \sigma + \Lambda_{330}^c)] \} e^{i \sigma t}; \\ F_{060}^0 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \{ M_{220}^{xs} \sigma + \Lambda_{220}^{xc} + v (M_{220}^c - \Lambda_{220}^s \sigma^{-1}) - \\ &\quad - x_0 (M_{220}^s \sigma + \Lambda_{220}^c) + i [M_{220}^{xc} \sigma - \Lambda_{220}^{xs} - \\ &\quad - v (M_{220}^s + \Lambda_{220}^c \sigma^{-1}) - x_0 (M_{220}^c \sigma - \Lambda_{220}^s)] \} e^{i \sigma t}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Если в формулах для F_{j0}^0 и F_{0j0}^0 положить $x_0 = z_0 = 0$, $\mu_{jk0} = \lambda_{jk0} = 0$ и заменить M_{jk0} и Λ_{jk0} с верхними индексами s , c x_s и x_c на M_{jk} и Λ_{jk} с соответствующими верхними индексами, то

уравнения, полученные приравниванием нулю крутящего и изгибающих моментов на носовом перпендикуляре, оказываются эквивалентными соответствующим уравнениям систем (4.165). Таким образом, вынужденные колебания корабля будут описываться выражением (4.168), а действительные и мнимые части комплексных амплитуд качки — определяться как корни систем линейных алгебраических уравнений (4.170) и (4.171).¹

Подставляя теперь выражения для перемещений, скоростей и ускорений корабля в формулы для F_{j0}^m , F_{j0}^r и F_{j0} и пользуясь полученными ранее соотношениями для F_{j0}^* и F_{j0}^0 , на основании (6.36) можем написать

$$N_j(x_0) = [N_{j1}(x_0) + iN_{j2}(x_0)]e^{i\sigma t} + N_{j3}(x_0),$$

где N_{j3} — перерезывающие силы, крутящий и изгибающие моменты, действующие на корабль, находящийся в положении равновесия на тихой воде. Если при этом корабль сидит прямо, то, как видно из формул (6.7) и (6.8), $N_{23} = N_{63} = 0$. Для корабля, сидящего в положении равновесия на ровный киль, вертикальная перерезывающая сила на тихой воде N_{33} и изгибающий момент N_{53} будут определяться не зависящими от ξ и ψ слагаемыми выражений (6.5):

$$N_{33}(x_0) = -g(M_0 - \rho V_0);$$

$$N_{53}(x_0) = g[M_0(x_{g0} - x_0) - \rho V_0(x_{c0} - x_0)].$$

Для того чтобы определить крутящий момент при прямой посадке на тихой воде, следует, положив в (6.6) $\theta = 0$, проинтегрировать функцию f_4 в пределах от $-L/2$ до x_0 . Тогда получим

$$N_{43}(x_0) = -g(M_0 y_{g0} - \rho V_0 y_{c0}).$$

Формулы для действительных и мнимых частей комплексных амплитуд перерезывающих сил, крутящего и изгибающих моментов можно получить, подставляя выражения

$$\eta = (\eta_1 + i\eta_2)e^{i\sigma t}; \quad \dot{\eta} = i\sigma\eta; \quad \ddot{\eta} = i\sigma\dot{\eta} = -\sigma^2\eta$$

и аналогичные соотношения для ζ , θ , ψ и χ в равенства (6.3), (6.5), (6.7), (6.18) с последующим суммированием всех компонентов нагрузки и отделением в результатах действительных и мнимых частей. Эти формулы имеют следующий вид: вертикальная перерезывающая сила

$$N_{31}(x_0) = b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 + b_3\psi_1 + b_4\psi_2 + b_5\theta_1 + b_6\theta_2 + \alpha_{30};$$

$$N_{32}(x_0) = -b_2\zeta_1 + b_1\zeta_2 - b_4\psi_1 + b_3\psi_2 - b_6\theta_1 + b_5\theta_2 + \beta_{30},$$

где

$$b_1 = (M_0 + M_{330})\sigma^2 - \rho g S_0 + \nu \lambda_{330};$$

$$b_2 = (\Lambda_{330} - \nu \mu_{330})\sigma;$$

¹ Для продольной качки можно вместо решения системы (4.170) воспользоваться формулами (4.175).

$$\begin{aligned}
p_2 &= (\Lambda_{220} - v\mu_{220}) \sigma; \\
p_3 &= (M_{240} - M_0 z_{g0}) \sigma^2 + g(\rho V_0 - M_0) + v\lambda_{240}; \\
p_4 &= (\Lambda_{240} - v\mu_{240}) \sigma; \\
p_5 &= (M_0 x_{g0} + M_{260}) \sigma^2 + v(\Lambda_{220} + x_0 \lambda_{220} - v\mu_{220}); \\
p_6 &= [\Lambda_{260} - v(M_{220} + x_0 \mu_{220}) - v^2 \sigma^{-2} \lambda_{220}] \sigma;
\end{aligned}$$

горизонтальный изгибающий момент

$$\begin{aligned}
N_{61}(x_0) &= r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2 + r_3 \theta_1 + r_4 \theta_2 + r_5 \chi_1 + r_6 \chi_2 + r_7 \psi_1 + r_8 \psi_2 + \alpha_{060}; \\
N_{62}(x_0) &= -r_2 \eta_1 + r_1 \eta_2 - r_4 \theta_1 + r_3 \theta_2 - r_6 \chi_1 + r_5 \chi_2 - r_8 \psi_1 + r_7 \psi_2 + \beta_{060},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
r_1 &= [M_0 x_{g0} + M_{260} - x_0 (M_0 + M_{220})] \sigma^2 - v\Lambda_{220}; \\
r_2 &= (\Lambda_{260} + vM_{220} - x_0 \Lambda_{220}) \sigma; \\
r_3 &= [M_{460} - I_{x20} - x_0 (M_{240} - M_0 z_{g0})] \sigma^2 + x_0 g(\rho V_0 - M_0) - v\Lambda_{240}; \\
r_4 &= (\Lambda_{460} + vM_{240} - x_0 \Lambda_{240}) \sigma; \\
r_5 &= [M_{660} + I_{z0} - x_0 (M_0 x_{g0} + M_{260})] \sigma^2 + v(vM_{220} - x_0 \Lambda_{220}); \\
r_6 &= [\Lambda_{660} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{220} - x_0 (\Lambda_{260} - vM_{220})] \sigma; \\
r_7 &= -I_{y20} \sigma^2; \quad r_8 = 0.
\end{aligned}$$

Значения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд волновых составляющих гидродинамической нагрузки, входящие в выражения для $N_{j1}(x_0)$ и $N_{j2}(x_0)$, определяются из равенств (6.22), (6.34) и (6.35).

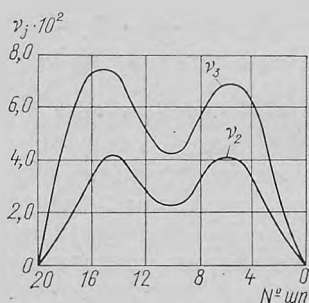
Как уже упоминалось, для удлиненного корабля можно пренебречь произведениями $z_m \omega_{mx}$ по сравнению с $x \omega_{mz}$ и $y_m \omega_{mx}$ по сравнению с $x \omega_{my}$ и не учитывать различия между продольной метацентрической высотой и продольным метацентрическим радиусом. Это равносильно отождествлению входящих в выражения для c_3 и r_5 моментов инерции массы относительно осей Oy и Oz с моментами инерции относительно плоскости Oyz . Кроме того, при рассматриваемом подходе значения c_7 и r_7 оказываются равными нулю, а в выражении для c_3 должно быть опущено слагаемое, включающее z_{g0} и z_{c0} . Тогда вертикальный и горизонтальный изгибающие моменты могут быть вычислены как интегралы от соответствующих перерезывающих сил.

Ордината n_j амплитудно-частотной характеристики j -го вида динамической нагрузки¹ будет представлять собой отношение ее амплитуды к амплитуде волны r :

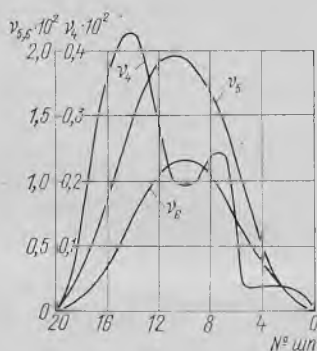
$$n_j = \frac{1}{r} \sqrt{N_{j1}^2 + N_{j2}^2}.$$

¹ Под динамическими нагрузками понимаются дополнительные по отношению к действующим на тихой воде перерезывающие силы ($j = 2, 3$), крутящий ($j = 4$) и изгибающие ($j = 5, 6$) моменты, возникающие за счет волнения и качки.

Для лихтеровоза рассчитывались безразмерные амплитуды v_j динамических перерезывающих сил ($j = 2, 3$), крутящего ($j = 4$) и изгибающих ($j = 5, 6$) моментов. При этом под безразмерными амплитудами сил и моментов понимались следующие отношения:



6.5. Безразмерные амплитуды динамических перерезывающих сил для лихтеровоза.

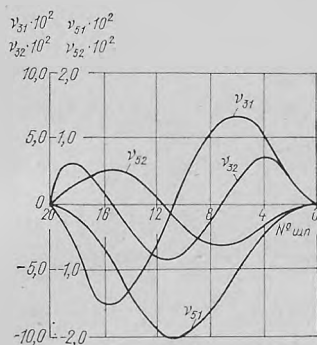


6.6. Безразмерные амплитуды динамических моментов для лихтеровоза.

$$v_j = |v_{j1} + iv_{j2}| = \frac{\sqrt{N_{j1}^2 + N_{j2}^2}}{\rho g r L B}, \quad (j = 2, 3);$$

$$v_j = |v_{j1} + iv_{j2}| = \frac{\sqrt{N_{j1}^2 + N_{j2}^2}}{\rho g r L^2 B}, \quad (j = 4, 5, 6).$$

На рис. 6.5 и 6.6 приведены графики значений v_j в шпангоутных сечениях при нулевой скорости на волне длиной 171 м, набегающей со стороны носа (угол $\varepsilon = 150^\circ$).



6.7. Действительные и мнимые части безразмерных комплексных амплитуд вертикальных перерезывающей силы и изгибающего момента для лихтеровоза.

Обратим внимание на то, что кривые амплитуды изгибающих моментов не являются интегральными по отношению к кривым амплитуд перерезывающих сил. Интегральными будут кривые действительных частей N_{51} и N_{61} комплексных амплитуд изгибающих моментов по отношению соответственно к действительным частям N_{31} и N_{21} комплексных амплитуд перерезывающих сил. Точно такое же соотношение будет и для мнимых частей комплексных амплитуд изгибающих моментов и перерезывающих сил: кривые N_{52} и N_{62} будут интегральными по отношению к кривым N_{32} и N_{22} .

мических сил от кинематических характеристик движения приобретает линейный характер. Вследствие этого обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие качку, оказываются линейными и их интегрирование не вызывает затруднений.

Значительно сложнее обстоит дело с определением гидродинамических сил при качке конечной амплитуды. Такая постановка задачи требует учета конечности амплитуд набегающих и вынужденных волн, сохранения в интеграле Лагранжа—Коши для гидродинамических давлений квадратов скоростей возмущенного движения жидкости, учета изменения площади смоченной поверхности качающегося корабля в процессе наклонения. В столь общей постановке решения задач нелинейной теории качки до настоящего времени не получены.

Эффективное приближенное решение нелинейных краевых задач для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости получено с помощью метода малого параметра. Напомним сущность этого метода. Она состоит в том, что граничные условия, потенциал скоростей вынужденных волн, смещения корабля при качке, площадь смоченной поверхности, гидродинамические силы представляются в виде рядов по степеням одного или нескольких малых параметров. Отбрасывая в полученных рядах члены, содержащие высшие степени этих параметров, можно получить конструктивные решения, причем с тем большей точностью, чем более высокие степени сохраняются в рядах. Однако теоретически сходимость метода малого параметра не доказана, а решение уже во втором приближении обычно имеет весьма громоздкий вид, что затрудняет его практическое использование.

Построение строгой нелинейной теории затрудняется еще и тем, что в ней неприменимо разделение гидродинамических сил на отдельные категории, как это делается в линейной теории качки.

По указанным выше причинам нелинейная теория до настоящего времени развивалась главным образом по пути решения отдельных задач с использованием далеко идущих упрощающих допущений, в частности допущения о возможности упомянутого разделения гидродинамических сил.

Простейшей задачей нелинейной теории качки является задача об определении периода бортовой качки конечной амплитуды на тихой воде без учета демпфирования. Этой задаче посвящены исследования многих авторов, и в настоящее время найдены простые и удобные способы ее решения. Рассматривалась также бортовая качка на тихой воде при нелинейной зависимости демпфирующего момента от угловой скорости. При этом выяснилось, что замена линейного закона демпфирования на квадратичный либо линейно-квадратичный слабо влияет на результаты расчета качки. В то же время отказ от использования линеаризованной метацентрической формулы и переход к определению восстанавливающего момента по диаграмме статической остойчивости существенно изменяет результаты не только с количественной, но и с качественной стороны.

где функция $F(\theta) = M(\theta)/(I_x + M_{44})$ имеет размерность c^{-2} и определяется кривой восстанавливающего момента, ординаты которой разделены на $I_x + M_{44}$.

Проинтегрируем это уравнение в пределах от θ_0 — амплитудного значения угла крена, отвечающего моменту времени $t = 0$, до некоторого произвольного угла θ :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta) d\theta. \quad (7.2)$$

Сделаем замену переменной в левой части последнего равенства, перейдя от интегрирования по углу θ к интегрированию по угловой скорости $\dot{\theta}$. Используя очевидные соотношения

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}; \quad d\theta = \dot{\theta} dt$$

и учитывая, что при $\theta = \theta_0$ угловая скорость обращается в нуль а при произвольном угле θ равна $\dot{\theta}$, имеем

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta} d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2.$$

Теперь выразим правую часть равенства (7.2) через ординаты диаграммы динамической остойчивости. Как известно, интеграл от восстанавливающего момента, взятый в пределах от нуля до θ , представляет собой потенциальную энергию корабля, наклоненного на угол θ , т. е. ординату диаграммы динамической остойчивости при этом угле крена. Итак, получаем

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_0} F(\theta) d\theta - \int_0^{\theta} F(\theta) d\theta = \Psi(\theta_0) - \Psi(\theta),$$

где $\Psi(\theta_0)$ и $\Psi(\theta)$ представляют собой ординаты диаграммы динамической остойчивости при соответствующих углах крена, разделенные на $I_x + M_{44}$.

Подставив полученные результаты в выражение (7.2), будем иметь

$$\dot{\theta}^2 = 2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)],$$

или

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}.$$

В данном случае перед корнем должен быть выбран знак минус, так как $\theta_0 > \theta$ и полученная формула отвечает процессу выпрямления корабля, при котором угловая скорость отрицательна. Таким образом,

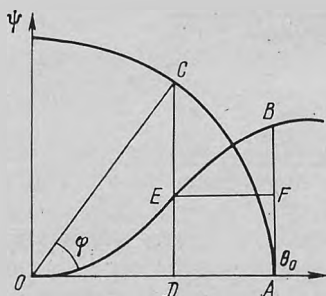
$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}$$

и воспользовавшись правилом Лопиталья, можем написать

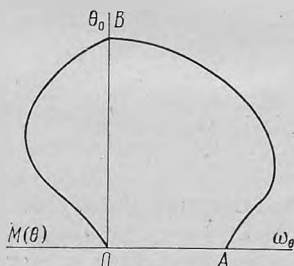
$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} f^2(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \varphi}{\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta_0 \cos \varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{-\frac{d\Psi}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi}}.$$

Поскольку

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = F(\theta) = F(\theta_0 \cos \varphi); \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = -\theta_0 \sin \varphi,$$



7.1. К определению периода бортовой качки корабля с заданной диаграммой устойчивости.



7.2. Кривая зависимости частоты колебаний [от амплитуды.

полагая $\cos \varphi = 1$, получим

$$f^2(\varphi)|_{\varphi=0} = \frac{2}{\theta_0 F(\theta_0)}, \quad \text{или} \quad f(\varphi)|_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{2}{\theta_0 F(\theta_0)}}.$$

Для определения подкоренного выражения функции $f(\varphi)$ удобно пользоваться следующим графическим приемом, предложенным В. Г. Сизовым (рис. 7.1).

Строится кривая $\Psi(\theta)$, представляющая собой диаграмму динамической устойчивости, ординаты которой разделены на $I_x + M_{44}$. Затем из начала координат проводится четверть окружности радиусом $OA = \theta_0$. В точке A восстанавливается перпендикуляр к оси θ до пересечения с кривой в точке B . Отрезок AB будет равен $\Psi(\theta_0)$. Далее из начала координат проводится под углом φ к оси θ радиус OC . Тогда отрезок OD будет равен $\theta_0 \cos \varphi$, а DE будет представлять собой $\Psi(\theta_0 \cos \varphi)$. Разность AB и DE , которая изображается отрезком BF , и будет равна $\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta_0 \cos \varphi)$. Значение $F(\theta_0)$ определяется исходя из диаграммы статической устойчивости, ординаты которой также должны быть разделены на $I_x + M_{44}$.

Задаваясь разными значениями φ в пределах от нуля до θ_0 , можно найти $f(\varphi)$, а затем по любой из квадратурных формул вычислить значение периода T_0 для данной амплитуды θ_0 . Найдя T_0 как функцию θ_0 , можно построить кривую частот свободных ко-

лось, при бортовой качке играют значительно меньшую роль, чем при других видах качки. Будем учитывать единственный вид нелинейности — нелинейность восстанавливающего момента. Такую задачу принято называть задачей о качке корабля с заданной диаграммой остойчивости.

В рамках сделанных допущений качка будет описываться «укороченным» уравнением, в котором восстанавливающий момент $M(\theta)$ будет определяться не по линеаризованной метацентрической формуле, а по диаграмме статической остойчивости. В этом случае «укороченное» уравнение (4.183) примет вид

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + A_{44}\dot{\theta} + M(\theta) = -i\alpha_0 \kappa_4 m g h e^{i\sigma_0 t}. \quad (7.5)$$

Ограничиваясь в целях упрощения задачи рассмотрением качки корабля, поперечные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с длиной набегающих волн, т. е. считая $\kappa_4 = 1$, перепишем последнее уравнение в форме

$$\ddot{\theta} + 2\nu\dot{\theta} + F(\theta) = -i\alpha_0 \omega^2 e^{i\sigma_0 t}, \quad (7.6)$$

где значения коэффициента затухания $\nu = \nu_4$ и частоты свободных колебаний малой амплитуды $\omega = \omega_4$ определяются равенствами (4.185).

Если диаграмма статической остойчивости не имеет точек перегиба, т. е. целиком располагается ниже касательной, проведенной в начале координат, то значения восстанавливающего момента при любых углах крена будут меньше, чем определяемые линеаризованной метацентрической формулой. Если диаграмма имеет S-образную форму, т. е. на некотором участке проходит выше начальной касательной, то на этом участке восстанавливающий момент будет превышать определяемый метацентрической формулой. В первом случае нелинейность принято называть *мягкой*, во втором — *жесткой*.

Происхождение этих терминов нелинейной механики связано с рассмотрением деформации пружины. При заданной силе у мягкой пружины деформация будет больше, а у жесткой — меньше, чем у «нормальной» пружины, деформация которой связана с действующей силой линейной зависимостью.

Если провести аналогию между наклоном корабля и деформацией пружины, то аналогом силы будет момент $M(\theta)$, а аналогом деформации — угол крена θ .

Как видно из рис. 7.3, между углами θ_1 , θ_2 и θ_3 , первый из которых соответствует диаграмме остойчивости без точек перегиба, второй — линеаризованной метацентрической формуле и третий S-образной диаграмме, существует соотношение

$$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3.$$

Таким образом, диаграмма без точек перегиба аналогична нелинейной характеристике мягкой, а S-образная диаграмма —

Амплитуда качки θ_0 будет, очевидно, определяться соотношением

$$\theta_0 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu\sigma_0)^2}}. \quad (7.8)$$

Это соотношение, несмотря на внешнее сходство, по существу отличается от равенства (4.186), соответствующего линейной теории качки. Их различие заключается в том, что в равенстве (4.186) частота свободных колебаний ω_1 от амплитуды качки не зависит, а в соотношении (7.8) частота ω_0 является функцией амплитуды. Последнее обстоятельство затрудняет непосредственное использование (7.8) для построения амплитудно-частотной характеристики, и ее рассчитывают несколько иначе.

С помощью элементарных преобразований соотношение (7.8) можно представить в виде биквадратного уравнения относительно σ_0

$$\sigma_0^4 - 2(\omega_0^2 - 2\nu^2)\sigma_0^2 + \omega_0^4 - \frac{A^2}{\theta_0^2} = 0.$$

Положительные корни этого уравнения

$$\sigma_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\nu^2 \pm \sqrt{-4\nu^2(\omega_0^2 - \nu^2) + \frac{A^2}{\theta_0^2}}} \quad (7.9)$$

определяют собой два значения частоты возмущающей силы, отвечающие данной амплитуде качки. Таким образом, для расчета амплитудно-частотной характеристики следует, задавшись рядом значений амплитуды θ_0 , по кривой частот свободных колебаний найти соответствующие значения ω_0 и затем по формуле (7.9) вычислить частоты возмущающей силы σ_0 .

Если в формуле (7.9) пренебречь малой величиной $4\nu^4$, то при

$$\theta_0 = \frac{A}{2\nu\omega_0} \quad (7.10)$$

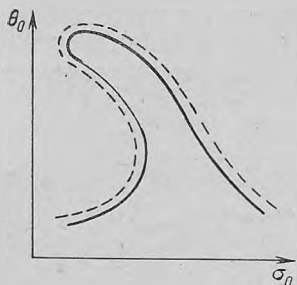
выражение под внутренним радикалом обратится в нуль. Таким образом, данному значению амплитуды будет соответствовать не два, а одно значение σ_0 . Иными словами, значение амплитуды, определяемое выражением (7.10), при данных A и ν будет максимальным. Как видно из (7.9), это значение достигается при

$$\sigma_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\nu^2}. \quad (7.11)$$

Поскольку $\nu^2 \ll \omega_0^2$, можно заменить (7.11) приближенным равенством $\sigma_0 \approx \omega_0$, т. е. считать, что максимум амплитудно-частотной характеристики располагается на кривой частот свободных колебаний.

Для того чтобы выяснить, какая именно из установившихся амплитуд будет иметь место при данном значении частоты возмущающей силы σ_0 , необходимо располагать сведениями об истории колебательного процесса.

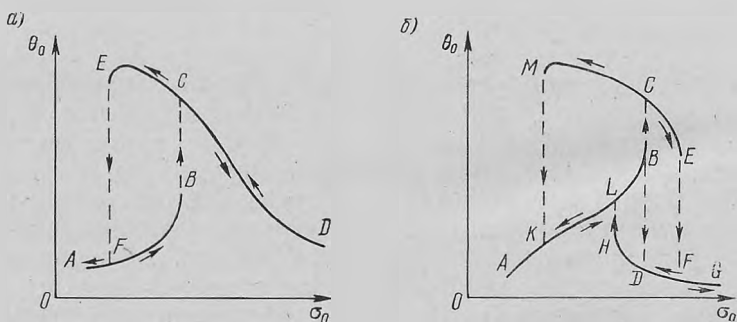
Если при мягкой нелинейности (рис. 7.6, а) частота σ_0 будет увеличиваться, начиная с малых значений, то амплитуда будет плавно возрастать по кривой AFB , в точке B скачком увеличится до точки C и затем будет плавно уменьшаться по кривой CD . При уменьшении частоты амплитуда будет расти по кривой DCE , в точке E скачкообразно упадет до точки F и затем будет плавно уменьшаться по кривой FA .



7.5. К определению устойчивости нелинейных колебаний.

В случае жесткой нелинейности (рис. 7.6, б) при увеличении частоты амплитуда качки будет сначала плавно увеличиваться по кривой $AKLB$, а при достижении точки B изменится скачком. Поскольку при частоте, отвечающей точке B , существуют два установившихся режима, один из которых характеризуется точкой C , а другой — точкой D , то в зависимости от случайных возмущений в момент скачка может установиться любой из этих режимов.

Если установился режим D , то дальнейшее изменение амплитуды будет происходить по кривой DFG , а если режим C , то после плавного



7.6. Устойчивые режимы колебаний при мягкой и жесткой нелинейностях.

уменьшения по кривой CE произойдет скачок амплитуды до точки F , за которым вновь последует плавное уменьшение — теперь уже по кривой FG .

Рассмотрим теперь характер изменения амплитуды при уменьшении частоты. Если режим качки характеризуется какой-либо точкой кривой $GFDH$, то в точке H амплитуда скачкообразно увеличится до точки L , а затем будет плавно убывать по кривой LKA .

Вместо $M(\theta)$ нам удобнее рассматривать случайную функцию $F(\theta)$, определяемую равенством

$$F(\theta) = \frac{M(\theta)}{I_x + M_{44}}.$$

Представим эту функцию в виде полинома по нечетным степеням угла наклона

$$F(\theta) = a_1\theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5, \quad (7.12)$$

а аппроксимирующую ее линейную функцию в виде простейшей зависимости

$$F_l(\theta) = \omega_l^2 \theta.$$

Нам необходимо определить значения ω_l^2 так, чтобы функция $F_l(\theta)$ была по тому или иному критерию эквивалентна функции $F(\theta)$.

Полагая, что угол наклона θ распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, т. е. имеет плотность вероятности

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}}, \quad (7.13)$$

где, очевидно, через D_θ обозначена дисперсия угла θ , вычислим дисперсию случайной функции $F(\theta)$:

$$D[F(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta) f(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1\theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5)^2 e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta.$$

Ограничиваясь шестой степенью θ , можем написать

$$D[F(\theta)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} [a_1^2\theta^2 + 2a_1a_3\theta^4 + (a_3^2 + 2a_1a_5)\theta^6] e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta. \quad (7.14)$$

Возьмем по частям интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 e^{-c\theta^2} d\theta,$$

полагая

$$e^{-c\theta^2} = u; \quad \theta^2 d\theta = dv.$$

Тогда

$$-2c\theta e^{-c\theta^2} d\theta = du; \quad \frac{\theta^3}{3} = v$$

В этом выражении можно поменять местами операции дифференцирования и определения математического ожидания, так как производная от математического ожидания случайной функции равна математическому ожиданию производной этой функции. Таким образом, получаем

$$-2M[F(\theta)\theta] + 2\omega_l^2 M[\theta^2] = 0.$$

Отсюда, имея в виду, что $M[\theta^2] = D_\theta$, находим

$$\omega_l^2 = \frac{1}{D_\theta} M[F(\theta)\theta].$$

Здесь $M[F(\theta)\theta]$ представляет собой взаимную корреляционную функцию случайных процессов $F(\theta)$ и θ в один и тот же момент времени. В этом случае можно, задавшись плотностью вероятности угла θ , найти $M[F(\theta)\theta]$ по общему правилу вычисления математического ожидания. Тогда будем иметь

$$\omega_l^2 = \frac{1}{D_\theta} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)\theta f(\theta) d\theta. \quad (7.19)$$

Будем, по-прежнему полагать, что функция $F(\theta)$ может быть представлена полиномом (7.12), а угол наклона распределяется по нормальному закону (7.13). Подставляя эти выражения в (7.19), получим

$$\omega_l^2 = \frac{1}{D_\theta \sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1\theta^2 + a_3\theta^4 + a_5\theta^6) e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta$$

или с учетом соотношений (7.15) — (7.17)

$$\omega_l^2 = a_1 + 3a_3 D_\theta + 15a_5 D_\theta^2. \quad (7.20)$$

Эта формула определяет значение ω_l^2 , удовлетворяющее второму критерию статистической линеаризации. Методов оценки погрешности, получаемой при использовании того или иного критерия, не существует, и поэтому выбор последнего, по существу, произволен. Часто рекомендуется принимать в расчет полусумму результатов, полученных по обоим критериям.

«Укороченное» нелинейное уравнение изолированной бортовой качки корабля, располагающегося лагом к волне, имеет вид (7.5). Подставив в это уравнение линеаризованное выражение для восстанавливающего момента

$$M(\theta) = (I_x + M_{44}) F(\theta) = (I_x + M_{44}) \omega_l^2 \theta$$

и разделив все члены на инерционный коэффициент $I_x + M_{44}$, будем иметь

$$\ddot{\theta} + 2\nu_4 \dot{\theta} + \omega_l^2 \theta = -i\alpha_0 \alpha_4 \omega_4^2 e^{i\sigma_0 t}, \quad (7.21)$$

где ω_l — частота свободных колебаний конечной амплитуды, определяемая по методу статистической линеаризации, а ω_4 — частота свободных колебаний малой амплитуды.

По отношению к бортовой качке корабль представляет собой систему с весьма резко выраженными резонансными свойствами. Если в спектре возмущающих сил присутствует частота, достаточно близкая к частоте свободных колебаний такой системы, то воздействие этой спектральной составляющей будет резко превалировать над воздействием всех остальных и система будет вести себя примерно так, как будто на нее действует только гармоническая возмущающая сила резонансной частоты. Этим объясняется хорошо известный из практики мореплавания имеющий место при любом курсе и скорости факт равенства среднего периода бортовой качки на нерегулярном волнении, в спектре которого присутствуют все частоты, в том числе и резонансная, и периода свободных колебаний корабля. Поэтому для обеспечения хорошей мореходности остойчивость должна ограничиваться не только снизу, но и сверху.

В отличие от периода амплитуда качки на нерегулярном волнении существенно зависит от курса и скорости корабля. Если частоты свободной бортовой или килевой качки ω_4 или ω_5 заметно отличаются от кажущейся частоты максимума спектра волнения σ_m , то энергия резонансных гармоник возмущающей силы будет небольшой и амплитуды качки умеренными. Если же ω_4 или ω_5 близки к σ_m , то энергия резонансных гармоник и амплитуды соответствующих видов качки резко возрастут.

Это подтверждается численным экспериментом, который показывает, что на нерегулярном волнении амплитуды бортовой или килевой качки существенно увеличиваются при равенстве ω_4 или ω_5 и кажущейся частоты гармоник, соответствующей максимуму спектра уклонов взволнованной поверхности. Будем называть такое явление резонансом нерегулярной качки по аналогии с качкой на регулярном волнении, где под резонансом понимается резкое увеличение амплитуд при равенстве частот (периодов) собственных колебаний и возмущающей силы.

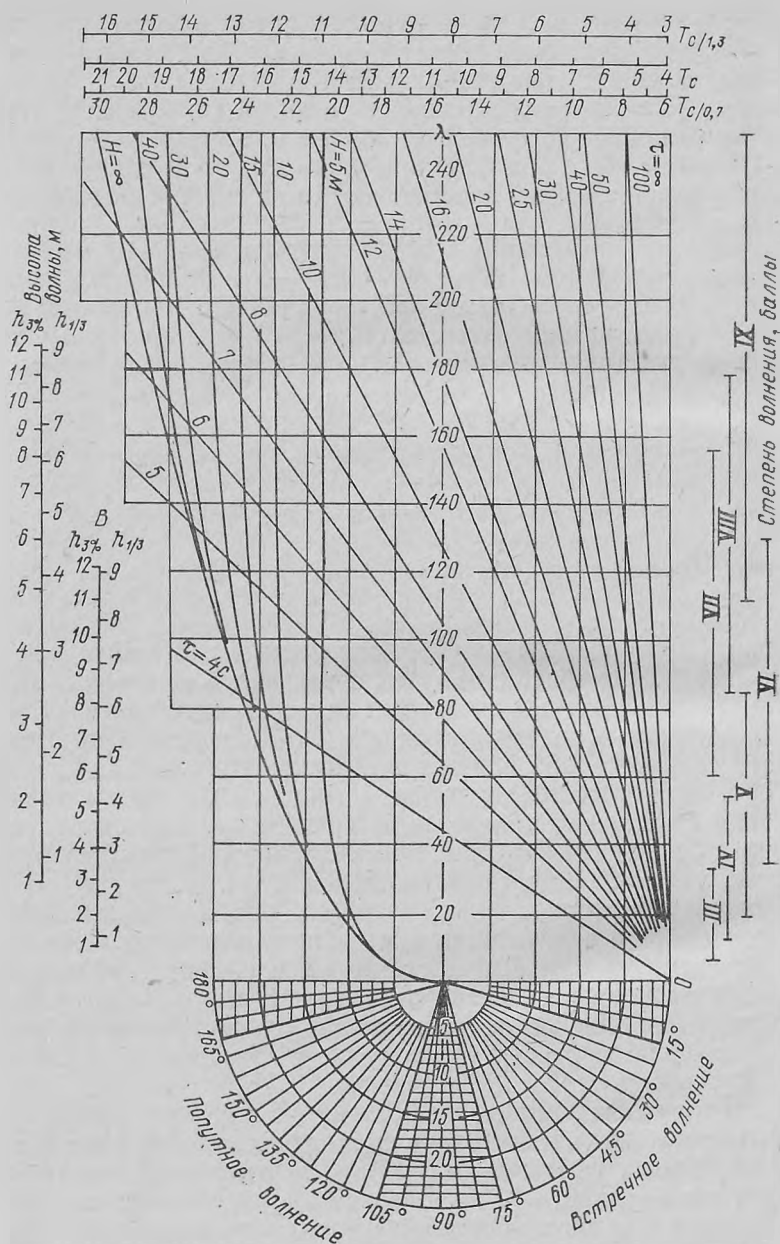
Период возмущающей силы (кажущийся период волны) зависит от скорости и курса корабля по отношению к волне. Следовательно, за счет целенаправленного выбора курса и скорости можно уклониться от резонанса и избежать опасного усиления качки.

Для решения задачи о выборе курсов и скоростей, обеспечивающих умеренную качку, рядом специалистов предлагались диаграммы, называемые диаграммами качки или штормовыми диаграммами. Рассмотрим одну из них — универсальную штормовую диаграмму, пригодную для любого корабля при любой глубине моря.

Выражение для кажущегося периода волны можно записать в виде

$$\tau = \frac{1,95\lambda}{c + v \cos q}, \quad (8.1)$$

где λ — длина волны, м; c — фазовая скорость волн, уз; v —



8.1. Универсальная штормовая диаграмма для произвольных глубин.

Таким образом, между периодами τ_m и τ_{cp} существует соотношение

$$\tau_m = \tau_{cp} \sqrt[n]{\frac{k-4}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}$$

Если, следуя А. И. Вознесенскому и Ю. А. Нещетаеву, принять $k = 6$, $n = 4$, то отношение τ_m/τ_{cp} окажется равным 0,98. Приняв $k = 5$, $n = 4$ (см. Второй международный конгресс по конструкции и прочности судов: Пирсон и Московиц и другие авторы), получим $\tau_m/\tau_{cp} = 0,94$. Следуя Ю. М. Крылову ($k = 7$, $n = 4$), будем иметь $\tau_m/\tau_{cp} = 0,99$. Таким образом, отношение периода, отвечающего максимуму кривой спектральной плотности уклонов взволнованной поверхности, к среднему истинному периоду волнения настолько близко к единице, что с практической точки зрения эти периоды можно считать равными. Что касается отношения соответствующих кажущихся периодов, то оно может отличаться от единицы и на большую и на меньшую величину. Однако с точностью, удовлетворяющей практике мореплавания, их также можно считать равными. Это дает возможность, входя в диаграмму по среднему кажущемуся периоду, т. е. используя шкалу длин волн, с успехом определять сочетания курсов и скоростей, отвечающие резонансным режимам бортовой или килевой качки на реальном морском волнении, которое всегда носит нерегулярный характер.

Для определения зависимости наибольших τ_{cp1} и наименьших τ_{cp2} значений среднего периода волнения от высоты волн 3 %-ной обеспеченности используем данные Н. Н. Рахманина, полученные с помощью обработки результатов измерений, проведенных на различных морях и океанах. Наибольшее τ_{m1} и наименьшее τ_{m2} значения периода, отвечающего максимуму спектра уклонов взволнованной поверхности, исходя из приведенных выше соображений, считаем равными соответственно τ_{cp1} и τ_{cp2} .

При неограниченной глубине моря длина волны λ и ее истинный период τ_0 связаны зависимостью

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} \tau_0^2 = 1,56 \tau_0^2. \quad (8.6)$$

Таким образом, длины волн, имеющих периоды τ_{m1} и τ_{m2} , будут

$$\lambda_1 = 1,56 \tau_{m1}^2; \quad \lambda_2 = 1,56 \tau_{m2}^2.$$

Поскольку на диаграмме имеются не две, а одна шкала длин волн, ей приведены в соответствие две шкалы высот.

В условиях нерегулярного волнения формула, связывающая среднюю длину и средний период волны, имеет вид, аналогичный (8.6). Однако коэффициент в ней может в зависимости от степени развитости волнения несколько отличаться от 1,56. Для того чтобы это обстоятельство не вносило заметных искажений в выходную

углом $\arctg (\tau_{\phi}/1,95)$ к положительному направлению оси абсцисс. Иными словами, эта прямая должна составлять такой же угол с положительным направлением оси абсцисс, какой имеющаяся на диаграмме прямая $\tau = \tau_{\phi}$ составляет с отрицательным направлением этой оси. Однако этот случай обычно не представляет практического интереса.

Рассмотрим теперь вопрос об определении резонансных сочетаний курсов и скоростей на встречном волнении или на попутном волнении при $|v \cos q| < c$, т. е. в случае, когда волны обгоняют корабль. Для этого по горизонтали, соответствующей определенной длине волны λ , измеряется расстояние от правого края диаграммы до прямой $\tau = T_c$ и затем это расстояние откладывается по той же горизонтали вправо от кривой x_1 , отвечающей данной глубине H . Через полученную таким образом точку, абсцисса которой определяется выражением

$$x = v \cos q = -c + \frac{1,95\lambda}{T_c},$$

проводится вертикальная линия. Лежащие на этой линии точки нижнего графика соответствуют резонансным сочетаниям v и q .

Для определения границ резонансной зоны по вспомогательной шкале, помещенной над диаграммой, прочитываются значения $T_c/0,7$ и $T_c/1,3$ при данном T_c и затем производится такое же построение, как и для резонанса: по горизонтали, отвечающей рассматриваемой длине волны, измеряют расстояния от правого края диаграммы до прямых $\tau = T_c/0,7$ и $\tau = T_c/1,3$, эти расстояния откладывают по той же горизонтали вправо от кривой x_1 для данной глубины и через полученные точки проводят вертикальные прямые, ограничивающие резонансную зону. Так, например, для корабля, имеющего период свободных колебаний $T_c = 14$ с, при глубине моря $H = 15$ м и длине волны $\lambda = 100$ м, выполнив указанные построения, найдем, что резонанс наступает при $v \cos q = -7$ уз, а границам резонансной зоны соответствуют значения $v \cos q$, равные -3 и -11 уз.

Заметим, что корабль может испытывать резонансную качку и при обгоне волны, т. е. при $\cos q < 0$ и $|v \cos q| > c$. В этом случае определение сочетаний v и q , отвечающих резонансу и границам резонансной зоны, выполняют способом, аналогичным приведенному выше, только отрезки $\tau = T_c$, $\tau = T_c/0,7$ и $\tau = T_c/1,3$ откладывают не вправо, а влево от кривых x_1 .

Для малых кораблей серьезную опасность представляет уменьшение остойчивости на вершине попутной волны, длина которой равна длине корабля L или близка к ней. Чтобы не допустить этого, следует, проводя вертикаль через точку пересечения кривой x_1 для данной глубины и горизонтальной прямой $\lambda = L$, избегать таких скоростей, при которых точка, соответствующая определенным значениям v и q , будет располагаться на указанной вертикали или вблизи нее в вертикально заштрихованном секторе нижнего

зирующий эффект при этом достигается за счет создания момента, противоположного по фазе возмущающему моменту. Если при таком сочетании фаз стабилизирующий и возмущающий моменты окажутся равными по величине, то корабль вообще качаться не будет. Заметим сразу, что полная ликвидация качки на нерегулярном волнении практически неосуществима. Поэтому целью стабилизации является уменьшение амплитуд до пределов, обеспечивающих удовлетворительную обитаемость корабля и возможность выполнять соответствующие его назначению задачи. В практике применяют успокоители только для бортовой качки. Создать эффективные успокоители килевой качки пока не удалось.

Из многочисленных видов успокоителей, предлагавшихся различными авторами, жизнеспособными и применяемыми в настоящее время оказались только скуловые кили, бортовые управляемые рули и жидкостные цистерны. Если классифицировать эти успокоители по природе сил, создающих стабилизирующий момент, то скуловые кили и бортовые рули следует отнести к гидродинамическим успокоителям, а жидкостные цистерны — к гравитационным. В меньшей мере для успокоения качки применяют гироскопы.

Успокоители качки бывают пассивными или активными. Первые (за исключением гироскопов) лишены каких-либо силовых приводов и систем управления и создают стабилизирующий момент лишь как реакцию на наклонение корабля. Вторые имеют силовые приводы и системы автоматического управления, что повышает их эффективность. Однако при этом увеличивается их стоимость и в известной мере уменьшается надежность.

Существует два принципа стабилизации бортовой качки. Согласно первому из них успокоение производится таким образом, чтобы палуба все время оставалась почти горизонтальной (стабилизация относительно горизонта). Согласно второму палуба должна быть параллельна касательной к волновому профилю. Этот принцип называется стабилизацией относительно динамической вертикали¹ и является предпочтительным с точки зрения улучшения обитаемости корабля. Последнее обстоятельство объясняется тем, что действующая на качающийся корабль, находящихся на нем людей и грузы так называемая кажущаяся сила тяжести, представляющая собой геометрическую сумму веса и силы инерции, направлена параллельно динамической вертикали. Таким образом, при использовании второго принципа стабилизации экипажу легче оставаться на своих местах, люди не выпадают из коек, уменьшается опасность смещения грузов и т. п.

Рассмотрим бортовую качку при так называемой параметрической стабилизации относительно горизонта. В этом случае стабилизирующий момент определяется зависимостью

$$M_{\text{ст}} = -(A\theta + B\dot{\theta} + C\ddot{\theta}), \quad (8.7)$$

¹ Динамической вертикалью называется нормаль к волновому профилю.

то дифференциальное уравнение (8.8) приобретает вид

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + mgh\theta = -i \frac{\alpha_0}{1+F} \kappa_4 mgh e^{i\omega t}.$$

Такое управление успокоителем, называемое регулированием по моменту, равносильно уменьшению уклона взволнованной поверхности или, что то же самое, уменьшению возмущающего момента. В условиях регулярного волнения оно является оптимальным, так как приводит к уменьшению амплитуд качки при всех частотах.

Важнейшими критериями эффективности успокоителя является его статическая характеристика и достигаемая кратность умерения качки. Различают номинальную и используемую статические характеристики успокоителя. Под номинальной статической характеристикой φ_s понимают угол крена, который получит корабль, плавающий на тихой воде, при статическом приложении к нему максимального момента, развиваемого успокоителем:

$$\varphi_s = \frac{M_{\max}}{mgh},$$

где, очевидно, $M_{\max}$ — максимальный стабилизирующий момент. Используемой статической характеристикой φ_s^* называется отношение амплитуды M_a стабилизирующего момента, развиваемого успокоителем при качке на волнении, к коэффициенту поперечной остойчивости корабля mgh .

При конструировании успокоителя стремятся повысить используемую характеристику до уровня номинальной, однако добиться этого не удастся и практически всегда $\varphi_s^* < \varphi_s$. Только в идеальном случае имеет место равенство этих характеристик. Таким образом, можем написать

$$M_a = mgh\varphi_s^* \leq mgh\varphi_s. \quad (8.9)$$

Кратностью умерения качки на регулярном волнении называется отношение резонансных амплитуд качки нестабилизированного и стабилизированного корабля. На нерегулярном волнении под кратностью умерения понимается корень квадратный из отношения дисперсий углов наклона нестабилизированного и стабилизированного корабля. Наибольшие значения кратности умерения, достижимые в практике, не превосходят 3—4.

В условиях нерегулярного волнения стабилизирующий момент, зависящий от случайных функций времени θ , $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$, также будет случайной функцией времени (случайным процессом). В соответствии с (8.7) его дисперсия определяется выражением

$$D_M = A^2 D_\theta + B^2 D_{\dot{\theta}} + C^2 D_{\ddot{\theta}} + 2ABK_{\theta\dot{\theta}} + 2ACK_{\theta\ddot{\theta}} + 2BCK_{\dot{\theta}\ddot{\theta}}, \quad (8.10)$$

где D_θ , $D_{\dot{\theta}}$, $D_{\ddot{\theta}}$ — дисперсии углов наклона, угловых скоро-

С целью уменьшения отрицательного влияния килей на ходкость корабля их устанавливают вдоль линий тока. В этом случае при движении без дифферента на тихой воде сопротивление килей будет состоять только из трения; добавочного сопротивления формы и волнового сопротивления возникать не будет. Однако даже при такой установке килей скорость на тихой воде будет уменьшаться на 2—3 % от скорости полного хода. Учитывая, что при наличии дифферента направление линий тока изменяется, особенно вблизи оконечностей корабля, скуловые кили устанавливают только в средней части на протяжении 30—40 % длины. Установка их в средней части наиболее целесообразна и с точки зрения эффективности стабилизации, так как в этом случае кили оказываются на максимально возможном расстоянии друг от друга, что увеличивает стабилизирующий момент и уменьшает их взаимное экранирование.

Стабилизирующее действие килей обусловлено увеличением демпфирования бортовой качки за счет отрывного обтекания в поперечной плоскости. В связи с этим применение килей приводит к существенному уменьшению амплитуды в области резонанса, и они бывают весьма эффективны как на ходу корабля, так и в условиях стоянки. На ходу они оказывают дополнительное стабилизирующее действие, работая как крылья предельно малого удлинения.¹ Однако возникающий при этом дополнительный момент весьма мал. Более того, на стоянке стабилизирующий эффект килей оказывается большим, чем на ходу. Это связано с тем, что на ходу возрастает демпфирование самого корпуса и доля демпфирования килей в общем комплекс «корпус—кили» уменьшается.

Эффективность килей, принципиально говоря, можно несколько повысить, ставя их ближе к ватерлинии. В этом случае они будут вызывать дополнительные волнообразование, что приведет к еще большему демпфированию и уменьшению амплитуд. Однако, как уже упоминалось, выносить кили за габаритные размеры корпуса нельзя по условиям швартовки.

Скуловые кили применяют на всех кораблях, где это допускается условиями эксплуатации. В первую очередь их ставят на кораблях с большими радиусами закругления скул, так как в этом случае демпфирование самого корпуса мало и резонансные амплитуды достигают очень больших значений. При острых скулах или малых радиусах скуловых закруглений роль килей существенно уменьшается.

С целью повышения стабилизирующего момента на ходу предпринимались попытки делать кили разрезными, состоящими из ряда отдельных крыльев с расстоянием между ними в 3—4 хорды. Ожидалось, что за счет значительного удлинения этих крыльев

¹ Геометрическое удлинение кия — отношение его высоты к протяженности вдоль корабля — составляет 0,01—0,02. Эффективное удлинение с учетом влияния корпуса корабля вдвое больше геометрического.

вместо геометрического в расчет следует принимать эффективное удлинение, которое больше геометрического и при отсутствии зазора между крылом и корпусом превышает его в два раза. Под α_0 в последней формуле понимается суммарный угол атаки, приближенно равный

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{l\dot{\theta}}{v},$$

где α — угол перекладки; l — отстояние середины размаха руля от оси наклона корабля; v — скорость судна; $\dot{\theta}$ — угловая скорость бортовой качки.

При известной величине C_y подъемная сила определяется по формуле

$$Y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S_r,$$

где ρ — плотность воды, а S_r — площадь руля в плане. Зная подъемные силы, легко определить стабилизирующий момент, создаваемый рулями.

Необходимую площадь рулей выбирают исходя из минимальной скорости судна, при которой необходимо получить стабилизирующий момент определенной величины. При этом удлинение определяют из условия уборки рулей внутрь корпуса и обеспечения прочности баллеров. Для вытягивающихся рулей удлинение обычно составляет 1,5—2,0; для заваливающихся 2,0—2,5.

При удлинении, характерном для вытягивающихся рулей, критический угол атаки не превосходит 25° . На практике во избежание кавитации обычно ограничивают максимальный угол перекладки величиной 20 — 22° . Для заваливающихся рулей эти углы несколько меньше.

Ввиду того, что рули должны одинаково эффективно работать при наклонении на любой борт, для них выбирают симметричные профили. Однако такие профили создают значительно меньшую подъемную силу, чем изогнутые. Для того чтобы, сохраняя симметричную форму профиля, увеличить его подъемную силу, рули часто делают разрезными, состоящими из основной части и закрылка. Основная часть и закрылок поворачиваются в одну и ту же сторону, причем закрылок поворачивается на большей угол, что и приводит к увеличению подъемной силы.

Эксперименты показывают, что при средней степени волнения с помощью бортовых управляемых рулей можно почти полностью стабилизировать корабль. На сильном нерегулярном волнении бортовые рули обеспечивают примерно трехкратное умерение качки.

§ 44. Гравитационные успокоители

В гравитационных успокоителях стабилизирующий эффект создается с помощью перемещения грузов. Попытки использовать для этой цели твердые грузы оказались несостоятельными; пригодными

амплитуд качки в нерезонансных условиях, снижения грузоподъемности и грузовместимости и других недостатков. Кроме того, открытые цистерны заметно снижают скорость корабля, так как часть мощности силовой установки расходуется на придание вытекающей воде кинетической энергии, которая при вытекании безвозвратно теряется.

Активизация цистерн может быть достигнута установкой компрессора в воздушном канале или насоса переменной производительности в жидкостном. Очевидно, что компрессор может ставиться как в открытых, так и в закрытых цистернах, а насос, перекачивающий жидкость из цистерны в цистерну, — только в закрытых.

Активные цистерны оказываются значительно эффективнее пассивных. Они создают стабилизирующий момент не только при резонансе, но и при любом соотношении частот, что играет существенную роль в условиях нерегулярного волнения. Их можно использовать для стабилизации корабля, имеющего статический крен, для раскочки на тихой воде и т. п. Однако вследствие своей сложности, большой стоимости, необходимости затрачивать мощность, чтобы привести в движение стабилизирующую жидкость, высоких требований к системе автоматического управления, активные цистерны на кораблях не устанавливают.

Чаше, чем пассивные цистерны, применяют другой вид успокоителей гравитационного типа — цистерны типа «Флюм»

(«Флюм»-система). Эта система состоит из двух бортовых цистерн, соединенных каналом, высота которого одинакова с высотой цистерн. В средней части канал имеет уширенный отсек (рис. 8.5). Цистерны и канал заполняются жидкостью так, что в них всегда имеется свободная поверхность. Систему проектируют таким образом, чтобы период свободных колебаний стабилизирующей жидкости равнялся периоду свободных колебаний корабля при некотором характерном для условий его эксплуатации состоянии нагрузки. Изменение уровня налива жидкости на периоде ее свободных колебаний отражается слабо. Таким образом, цистерны типа «Флюм» сочетают в себе свойства, присущие плоским цистернам, уменьшающим устойчивость, и пассивным цистернам закрытого типа, стабилизирующий эффект которых основан на принципе вторичного резонанса. Поток жидкости в этих цистернах по меньшей мере дважды резко изменяет площадь своего сечения, испытывая внезапное сужение и расширение. При этом, как известно из гидравлики, поток теряет часть своей кинетической энергии, т. е. имеет место демпфирование колебаний стабилизирующей жидкости. Это, с одной стороны, ос-

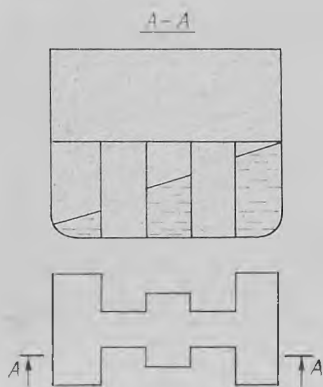


рис. 8.5. «Флюм» — система.

прецессия, а рысканье — как изменение угловой скорости вращения ротора. Это может привести к потере устойчивости системы «корабль — успокоитель». Для того чтобы избежать этой опасности, предлагались спаренные гиростабилизаторы с противоположными направлениями вращения роторов. Однако из-за их сложности такие успокоители использовались лишь в единичных случаях.

Высокая стоимость, большая масса и габариты, сложность систем управления и другие причины привели к почти полному отказу от применения гироскопов для общей стабилизации корабля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
§ 1. Общие сведения о мореходности и качке корабля	5
§ 2. Краткий исторический очерк и современное состояние теории качки	10
<i>Глава 1</i>	
ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ	23
§ 3. Основные уравнения теории гравитационных волн малой амплитуды	23
§ 4. Плоские прогрессивные волны	27
§ 5. Характеристики прогрессивных волн в подвижной системе координат	33
<i>Глава 2</i>	
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧКИ	36
§ 6. Общие формулы для присоединенных масс. Метод плоских сечений	36
§ 7. Присоединенные массы шпангоутных контуров	46
§ 8. Демпфирование	70
<i>Глава 3</i>	
ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ НА ТИХОЙ ВОДЕ	102
§ 9. Системы координат. Уравнения движения корабля	102
§ 10. Изолированные дифференциальные уравнения основных видов качки	105
§ 11. Логарифмический декремент. Экспериментальное определение коэффициента затухания	112
§ 12. Совместная поперечно-горизонтальная и бортовая качка	114
§ 13. Совместная вертикальная и килевая качка	120
§ 14. Приближенные формулы для моментов инерции массы корабля и периодов качки. Оперативный контроль остойчивости корабля в море	126
<i>Глава 4</i>	
ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ НА РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНЕНИИ	137
§ 15. Основные гипотезы и общая постановка задачи гидродинамической теории качки	137
§ 16. Категории гидродинамических сил	142
§ 17. Инерционно-демпфирующие силы	144
§ 18. Восстанавливающие силы	158
§ 19. Главная часть возмущающих сил	161
§ 20. Дифракционная часть возмущающих сил	183
§ 21. Уравнения движения твердого тела в подвижной системе координат. Общий вид дифференциальных уравнений качки	205

Юлий Вульфович Ремез

Качка корабля

Редактор *М. П. Александрова*
Художественный редактор *О. П. Андреев*
Технические редакторы *А. П. Ширяева,*
Е. А. Полякова
Корректоры *С. Х. Кумачева, И. П. Остро-*
горова, В. Ю. Самохина
ИБ № 802

Сдано в набор 4.01.83. Подписано в печать 31.03.83. М-28931. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Гарнитура шрифта литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 20,5. Усл. кр.-отт. 20,5. Уч.-изд. л. 19,9. Тираж 5500 экз. Изд. № 3720—81. Заказ 134. Цена 90 коп. Издательство «Судостроение», 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 196126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.