0741

СПРАВОЧНИК ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ КОРАБЛЯ

ТОМ I

Под общей редакцией
академика Ю. А. ШИМАНСКОГО

000 94911

БИБЛИОТЕКА
Новосибирского ин[illegible]
инженеров водного транспорта

СУДПРОМ ГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ СОЮЗНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
Ленинград 1958

В настоящем первом томе Справочника по строительной механике корабля содержится справочный материал, относящийся к области математики, теории упругости и расчетам прочности на изгиб различного вида балочных конструкций.

Справочник предназначается для инженерно-технических работников судостроения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вышедшие в 1934 г. второй и третий томы «Справочника по судостроению», посвященные строительной механике корабля, являются в настоящее время библиографической редкостью и уже не вполне отвечают назначению, так как за истекший большой период времени в области строительной механики корабля накопилось много новых данных, находящих применение в современной практике судостроения.

Оба этих обстоятельства вполне оправдывают необходимость нового издания специального «Справочника по строительной механике корабля», значительно пополненного по сравнению с изданными в 1934 г. двумя томами «Справочника по судостроению».

«Справочник по строительной механике корабля» будет издан в трех томах. Первые два тома Справочника будут содержать, помимо сведений чисто справочного характера, те выводы из общей строительной механики, которые находят применение в строительной механике корабля; третий том будет посвящен методам расчета прочности корпусных конструкций применительно к различным типам судов и других плавучих сооружений.

Первый том «Справочника по строительной механике корабля», содержание которого видно из его оглавления, составлен А. Б. Знаменским, А. З. Локшиным, В. Н. Серовым, Н. Л. Сиверсом, М. К. Смирновой, Г. О. Таубиным, В. С. Чувиковским под моей общей редакцией.

Академик *Ю. Шиманский*

РАЗДЕЛ I

МАТЕМАТИКА

ГЛАВА I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

§ 1. Степени, корни, натуральные логарифмы, обратные величины, окружности и площади круга

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,69315	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	1,09861	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	1,38629	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	1,60944	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	1,79176	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	1,94591	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	2,07944	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	2,19722	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	2,30259	100.000	31,416	78,5398	**10**
11	121	1331	3,3166	2,2240	2,39790	90,9091	34,558	95,033	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	2,48491	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	2,56495	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	2,63906	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	2,70805	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	2,77259	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	2,83321	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	2,89037	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	2,94444	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	2,99573	50,0000	62,832	314,159	**20**
21	441	9261	4,5826	2,7589	3,04452	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	3,09104	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	3,13549	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	3,17805	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	3,21888	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17576	5,0990	2,9625	3,25810	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	3,29584	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	3,33220	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	3,36730	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	3,40120	33,3333	94,248	706,858	**30**
31	961	29791	5,5678	3,1414	3,43399	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	3,46574	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	3,49651	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	3,52636	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	3,55535	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	3,58352	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	3,61092	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	3,63759	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	3,66356	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	3,68888	25,0000	125,664	1256,64	**40**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
40	1600	64000	6,3246	3,4200	3,68888	25,0000	125,664	1256,64	**40**
41	1681	68921	6,4031	3,4482	3,71357	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74088	6,4807	3,4760	3,73767	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	3,76120	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	3,78419	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	3,80666	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	3,82864	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	3,85015	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	3,87120	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	3,89182	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	1963,50	**50**
51	2601	132651	7,1414	3,7084	3,93183	19,6078	160,22	2042,82	51
52	2704	140608	7,2111	3,7325	3,95124	19,2308	163,36	2123,72	52
53	2809	148877	7,2801	3,7563	3,97029	18,8679	166,50	2206,18	53
54	2916	157464	7,3485	3,7798	3,98898	18,5185	169,65	2290,22	54
55	3025	166375	7,4162	3,8030	4,00733	18,1818	172,79	2375,83	55
56	3136	175616	7,4833	3,8259	4,02535	17,8571	175,93	2463,01	56
57	3249	185193	7,5498	3,8485	4,04305	17,5439	179,07	2551,76	57
58	3364	195112	7,6158	3,8709	4,06044	17,2414	182,21	2642,08	58
59	3481	205379	7,6811	3,8930	4,07754	16,9492	185,35	2733,97	59
60	3600	216000	7,7460	3,9149	4,09434	16,6667	188,50	2827,43	**60**
61	3721	226981	7,8102	3,9365	4,11087	16,3934	191,64	2922,47	61
62	3844	238328	7,8740	3,9579	4,12713	16,1290	194,78	3019,07	62
63	3969	250047	7,9373	3,9791	4,14313	15,8730	197,92	3117,25	63
64	4096	262144	8,0000	4,0000	4,15888	15,6250	201,06	3216,99	64
65	4225	274625	8,0623	4,0207	4,17439	15,3846	204,20	3318,31	65
66	4356	287496	8,1240	4,0412	4,18965	15,1515	207,35	3421,19	66
67	4489	300763	8,1854	4,0615	4,20469	14,9254	210,49	3525,65	67
68	4624	314432	8,2462	4,0817	4,21951	14,7059	213,63	3631,68	68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	4,23411	14,4928	216,77	3739,28	69
70	4900	343000	8,3666	4,1213	4,24850	14,2857	219,91	3848,45	**70**
71	5041	357911	8,4261	4,1408	4,26268	14,0845	223,05	3959,19	71
72	5184	373248	8,4853	4,1602	4,27667	13,8889	226,19	4071,50	72
73	5329	389017	8,5440	4,1793	4,29046	13,6986	229,34	4185,39	73
74	5476	405224	8,6023	4,1983	4,30407	13,5135	232,48	4300,84	74
75	5625	421875	8,6603	4,2172	4,31749	13,3333	235,62	4417,86	75
76	5776	438976	8,7178	4,2358	4,33073	13,1579	238,76	4536,46	76
77	5929	456533	8,7750	4,2543	4,34381	12,9870	241,90	4656,63	77
78	6084	474552	8,8318	4,2727	4,35671	12,8205	245,04	4778,36	78
79	6241	493039	8,8882	4,2908	4,36945	12,6582	248,19	4901,67	79
80	6400	512000	8,9443	4,3089	4,38203	12,5000	251,33	5026,55	**80**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
80	6400	512000	8,9443	4,3089	4,38203	12,5000	251,33	5026,55	**80**
81	6561	531441	9,0000	4,3267	4,39445	12,3457	254,47	5153,00	81
82	6724	551368	9,0554	4,3445	4,40672	12,1951	257,61	5281,02	82
83	6889	571787	9,1104	4,3621	4,41884	12,0482	260,75	5410,61	83
84	7056	592704	9,1652	4,3795	4,43082	11,9048	263,89	5541,77	84
85	7225	614125	9,2195	4,3968	4,44265	11,7647	267,04	5674,50	85
86	7396	636056	9,2736	4,4140	4,45435	11,6279	270,18	5808,80	86
87	7569	658503	9,3274	4,4310	4,46591	11,4943	273,32	5944,68	87
88	7744	681472	9,3808	4,4480	4,47734	11,3636	276,46	6082,12	88
89	7921	704969	9,4340	4,4647	4,48864	11,2360	279,60	6221,14	89
90	8100	729000	9,4868	4,4814	4,49981	11,1111	282,74	6361,73	**90**
91	8281	753571	9,5394	4,4979	4,51086	10,9890	285,88	6503,88	91
92	8464	778688	9,5917	4,5144	4,52179	10,8696	289,03	6647,61	92
93	8649	804357	9,6437	4,5307	4,53260	10,7527	292,17	6792,91	93
94	8836	830584	9,6954	4,5468	4,54329	10,6383	295,31	6939,78	94
95	9025	857375	9,7468	4,5629	4,55388	10,5263	298,45	7088,22	95
96	9216	884736	9,7980	4,5789	4,56435	10,4167	301,59	7238,23	96
97	9409	912673	9,8489	4,5947	4,57471	10,3093	304,73	7389,81	97
98	9604	941192	9,8995	4,6104	4,58497	10,2041	307,88	7542,96	98
99	9801	970299	9,9499	4,6261	4,59512	10,1010	311,02	7697,69	99
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	7853,98	**100**
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	4,61512	9,90099	317,30	8011,85	101
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	4,62497	9,80392	320,44	8171,28	102
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	4,63473	9,70874	323,58	8332,29	103
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	4,64439	9,61538	326,73	8494,87	104
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	4,65396	9,52381	329,87	8659,01	105
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	4,66344	9,43396	333,01	8824,73	106
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	4,67283	9,34579	336,15	8992,02	107
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	4,68213	9,25926	339,29	9160,88	108
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	4,69135	9,17431	342,43	9331,32	109
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	4,70048	9,09091	345,58	9503,32	**110**
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	4,70953	9,00901	348,72	9676,89	111
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	4,71850	8,92857	351,86	9852,03	112
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	4,72739	8,84956	355,00	10028,7	113
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	4,73620	8,77193	358,14	10207,0	114
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	4,74493	8,69565	361,28	10386,9	115
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	4,75359	8,62069	364,42	10568,3	116
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	4,76217	8,54701	367,57	10751,3	117
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	4,77068	8,47458	370,71	10935,9	118
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	4,77912	8,40336	373,85	11122,0	119
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	4,78749	8,33333	376,99	11309,7	**120**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	4,78749	8,33333	376,99	11309,7	**120**
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	4,79579	8,26446	380,13	11499,0	121
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	4,80402	8,19672	383,27	11689,9	122
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	4,81218	8,13008	386,42	11882,3	123
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	4,82028	8,06452	389,56	12076,3	124
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	4,82831	8,00000	392,70	12271,8	125
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	4,83628	7,93651	395,84	12469,0	126
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	4,84419	7,87402	398,98	12667,7	127
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	4,85203	7,81250	402,12	12868,0	128
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	4,85981	7,75194	405,27	13069,8	129
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	4,86753	7,69231	408,41	13273,2	**130**
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	4,87520	7,63359	411,55	13478,2	131
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	4,88280	7,57576	414,69	13684,8	132
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	4,89035	7,51880	417,83	13892,9	133
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	4,89784	7,46269	420,97	14102,6	134
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	4,90527	7,40741	424,12	14313,9	135
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	4,91265	7,35294	427,26	14526,7	136
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	4,91998	7,29927	430,40	14741,1	137
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	4,92725	7,24638	433,54	14957,1	138
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	4,93447	7,19424	436,68	15174,7	139
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	4,94164	7,14286	439,82	15393,8	**140**
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	4,94876	7,09220	442,96	15614,5	141
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	4,95583	7,04225	446,11	15836,8	142
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	4,96284	6,99301	449,25	16060,6	143
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	4,96981	6,94444	452,39	16286,0	144
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	4,97673	6,89655	455,53	16513,0	145
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	4,98361	6,84932	458,67	16741,5	146
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	4,99043	6,80272	461,81	16971,7	147
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	4,99721	6,75676	464,96	17203,4	148
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	5,00395	6,71141	468,10	17436,6	149
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	17671,5	**150**
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	5,01728	6,62252	474,38	17907,9	151
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	5,02388	6,57895	477,52	18145,8	152
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	5,03044	6,53595	480,66	18385,4	153
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	5,03695	6,49351	483,81	18626,5	154
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	5,04343	6,45161	486,95	18869,2	155
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	5,04986	6,41026	490,09	19113,4	156
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	5,05625	6,36943	493,23	19359,3	157
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	5,06260	6,32911	496,37	19606,7	158
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	5,06890	6,28931	499,51	19855,7	159
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	20106,2	**160**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	20106,2	**160**
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	5,08140	6,21118	505,80	20358,3	161
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	5,08760	6,17284	508,94	20612,0	162
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	5,09375	6,13497	512,08	20867,2	163
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	5,09987	6,09756	515,22	21124,1	164
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	5,10595	6,06061	518,36	21382,5	165
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	5,11199	6,02410	521,50	21642,4	166
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	5,11799	5,98802	524,65	21904,0	167
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	5,12396	5,95238	527,79	22167,1	168
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	5,12990	5,91716	530,93	22431,8	169
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	5,13580	5,88235	534,07	22698,0	**170**
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	5,14166	5,84795	537,21	22965,8	171
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	5,14749	5,81395	540,35	23235,2	172
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	5,15329	5,78035	543,50	23506,2	173
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	5,15906	5,74713	546,64	23778,7	174
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	5,16479	5,71429	549,78	24052,8	175
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	5,17048	5,68182	552,92	24328,5	176
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	5,17615	5,64972	556,06	24605,7	177
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	5,18178	5,61798	559,20	24884,6	178
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	5,18739	5,58659	562,35	25164,9	179
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	5,19296	5,55556	565,49	25446,9	**180**
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	5,19850	5,52486	568,63	25730,4	181
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	5,20401	5,49451	571,77	26015,5	182
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	5,20949	5,46448	574,91	26302,2	183
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	5,21494	5,43478	578,05	26590,4	184
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	5,22036	5,40541	581,19	26880,3	185
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	5,22575	5,37634	584,34	27171,6	186
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	5,23111	5,34759	587,48	27464,6	187
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	5,23644	5,31915	590,62	27759,1	188
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	5,24175	5,29101	593,76	28055,2	189
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	5,24702	5,26316	596,90	28352,9	**190**
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	5,25227	5,23560	600,04	28652,1	191
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	5,25750	5,20833	603,19	28952,9	192
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	5,26269	5,18135	606,33	29255,3	193
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	5,26786	5,15464	609,47	29559,2	194
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	5,27300	5,12821	612,61	29864,8	195
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	5,27811	5,10204	615,75	30171,9	196
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	5,28320	5,07614	618,89	30480,5	197
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	5,28827	5,05051	622,04	30790,7	198
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	5,29330	5,02513	625,18	31102,6	199
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	31415,9	**200**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	31415,9	**200**
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	5,30330	4,97512	631,46	31730,9	201
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	5,30827	4,95050	634,60	32047,4	202
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	5,31321	4,92611	637,74	32365,5	203
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	5,31812	4,90196	640,88	32685,1	204
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	5,32301	4,87805	644,03	33006,4	205
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	5,32788	4,85437	647,17	33329,2	206
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	5,33272	4,83092	650,31	33653,5	207
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	5,33754	4,80769	653,45	33979,5	208
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	5,34233	4,78469	656,59	34307,0	209
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	5,34711	4,76190	659,73	34636,1	**210**
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	5,35186	4,73934	662,88	34966,7	211
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	5,35659	4,71698	666,02	35298,9	212
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	5,36129	4,69484	669,16	35632,7	213
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	5,36598	4,67290	672,30	35968,1	214
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	5,37064	4,65116	675,44	36305,0	215
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	5,37528	4,62963	678,58	36643,5	216
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	5,37990	4,60829	681,73	36983,6	217
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	5,38450	4,58716	684,87	37325,3	218
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	5,38907	4,56621	688,01	37668,5	219
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	5,39363	4,54545	691,15	38013,3	**220**
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	5,39816	4,52489	694,29	38359,6	221
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	5,40268	4,50450	697,43	38707,6	222
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	5,40717	4,48430	700,58	39057,1	223
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	5,41165	4,46429	703,72	39408,1	224
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	5,41610	4,44444	706,86	39760,8	225
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	5,42053	4,42478	710,00	40115,0	226
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	5,42495	4,40529	713,14	40470,8	227
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	5,42935	4,38596	716,28	40828,1	228
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	5,43372	4,36681	719,42	41187,1	229
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	5,43808	4,34783	722,57	41547,6	**230**
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	5,44242	4,32900	725,71	41909,6	231
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	5,44674	4,31034	728,85	42273,3	232
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	5,45104	4,29185	731,99	42638,5	233
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	5,45532	4,27350	735,13	43005,3	234
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	5,45959	4,25532	738,27	43373,6	235
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	5,46383	4,23729	741,42	43743,5	236
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	5,46806	4,21941	744,56	44115,0	237
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	5,47227	4,20168	747,70	44488,1	238
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	5,47646	4,18410	750,84	44862,7	239
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	5,48064	4,16667	753,98	45238,9	**240**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	5,48064	4,16667	753,98	45238,9	**240**
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	5,48480	4,14938	757,12	45616,7	241
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	5,48894	4,13223	760,27	45996,1	242
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	5,49306	4,11523	763,41	46377,0	243
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	5,49717	4,09836	766,55	46759,5	244
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	5,50126	4,08163	769,69	47143,5	245
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	5,50533	4,06504	772,83	47529,2	246
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	5,50939	4,04858	775,97	47916,4	247
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	5,51343	4,03226	779,11	48305,1	248
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	5,51745	4,01606	782,26	48695,5	249
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	49087,4	**250**
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	5,52545	3,98406	788,54	49480,9	251
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	5,52943	3,96825	791,68	49875,9	252
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	5,53339	3,95257	794,82	50272,6	253
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	5,53733	3,93701	797,96	50670,7	254
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	5,54126	3,92157	801,11	51070,5	255
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	5,54518	3,90625	804,25	51471,9	256
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	5,54908	3,89105	807,39	51874,8	257
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	5,55296	3,87597	810,53	52279,2	258
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	5,55683	3,86100	813,67	52685,3	259
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	5,56068	3,84615	816,81	53092,9	**260**
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	5,56452	3,83142	819,96	53502,1	261
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	5,56834	3,81679	823,10	53912,9	262
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	5,57215	3,80228	826,24	54325,2	263
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	5,57595	3,78788	829,38	54739,1	264
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	5,57973	3,77358	832,52	55154,6	265
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	5,58350	3,75940	835,66	55571,6	266
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	5,58725	3,74532	838,81	55990,2	267
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	5,59099	3,73134	841,95	56410,4	268
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	5,59471	3,71747	845,09	56832,2	269
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	5,59842	3,70370	848,23	57255,5	**270**
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	5,60212	3,69004	851,37	57680,4	271
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	5,60580	3,67647	854,51	58106,9	272
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	5,60947	3,66300	857,65	58534,9	273
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	5,61313	3,64964	860,80	58964,6	274
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	5,61677	3,63636	863,94	59395,7	275
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	5,62040	3,62319	867,08	59828,5	276
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	5,62402	3,61011	870,22	60262,8	277
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	5,62762	3,59712	873,36	60698,7	278
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	5,63121	3,58423	876,50	61136,2	279
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	5,63479	3,57143	879,65	61575,2	**280**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	5,63479	3,57143	879,65	61575,2	**280**
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	5,63835	3,55872	882,79	62015,8	281
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	5,64191	5,54610	885,93	62458,0	282
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	5,64545	3,53357	889,07	62901,8	283
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	5,64897	3,52113	892,21	63347,1	284
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	5,65249	3,50877	895,35	63794,0	285
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	5,65599	3,49650	898,50	64242,4	286
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	5,65948	3,48432	901,64	64692,5	287
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	5,66296	3,47222	904,78	65144,1	288
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	5,66643	3,46021	907,92	65597,2	289
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	5,66988	3,44828	911,06	66052,0	**290**
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	5,67332	3,43643	914,20	66508,3	291
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	5,67675	3,42466	917,35	66966,2	292
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	5,68017	3,41297	920,49	67425,6	293
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	5,68358	3,40136	923,63	67886,7	294
295	87025	25672375	17,1756	6,65[illegible]9	5,68698	3,38983	926,77	68349,3	295
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	5,69036	3,37838	929,91	68813,4	296
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	5,69373	3,36700	933,05	69279,2	297
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	5,69709	3,35570	936,19	69746,5	298
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	5,70044	3,34448	939,34	70215,4	299
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	70685,8	**300**
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	5,70711	3,32226	945,62	71157,9	301
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	5,71043	3,31126	948,76	71631,5	302
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	5,71373	3,30033	951,90	72106,6	303
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	5,71703	3,28947	955,04	72583,4	304
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	5,72031	3,27869	958,19	73061,7	305
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	5,72359	3,26797	961,33	73541,5	306
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	5,72685	3,25733	964,47	74023,0	307
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	5,73010	3,24675	967,61	74506,0	308
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	5,73334	3,23625	970,75	74990,6	309
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	5,73657	3,22581	973,89	75476,8	**310**
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	5,73979	3,21543	977,04	75964,5	311
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	5,74300	3,20513	980,18	76453,8	312
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	5,74620	3,19489	983,32	76944,7	313
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	5,74939	3,18471	986,46	77437,1	314
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	5,75257	3,17460	889,60	77931,1	315
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	5,75574	3,16456	992,74	78426,7	316
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	5,75890	3,15457	995,88	78923,9	317
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	5,76205	3,14465	999,03	79422,6	318
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	5,76519	3,13480	1002,2	79922,9	319
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	5,76832	3,12500	1005,3	80424,8	**320**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	5,76832	3,12500	1005,3	80424,8	**320**
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	5,77144	3,11526	1008,5	80928,2	321
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	5,77455	3,10559	1011,6	81433,2	322
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	5,77765	3,09598	1014,7	81939,8	323
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	5,78074	3,08642	1017,9	82448,0	324
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	5,78383	3,07692	1021,0	82957,7	325
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	5,78690	3,06748	1024,2	83469,0	326
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	5,78996	3,05810	1027,3	83981,8	327
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	5,79301	3,04878	1030,4	84496,3	328
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	5,79606	3,03951	1033,6	85012,3	329
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	5,79909	3,03030	1036,7	85529,9	**330**
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	5,80212	3,02115	1039,9	86049,0	331
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	5,80513	3,01205	1043,0	86569,7	332
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	5,80814	3,00300	1046,2	87092,0	333
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	5,81114	2,99401	1049,3	87615,9	334
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	5,81413	2,98507	1052,4	88141,3	335
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	5,81711	2,97619	1055,6	88668,3	336
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	5,82008	2,96736	1058,7	89196,9	337
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	5,82305	2,95858	1061,9	89727,0	338
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	5,82600	2,94985	1065,0	90258,7	339
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	5,82895	2,94118	1068,1	90792,0	**340**
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	5,83188	2,93255	1071,3	91326,9	341
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	5,83481	2,92398	1074,4	91863,3	342
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	5,83773	2,91545	1077,6	92401,3	343
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	5,84064	2,90698	1080,7	92940,9	344
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	5,84354	2,89855	1083,8	93482,0	345
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	5,84644	2,89017	1087,0	94024,7	346
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	5,84932	2,88184	1090,1	94569,0	347
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	5,85220	2,87356	1093,3	95114,9	348
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	5,85507	2,86533	1096,4	95662,3	349
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	96211,3	**350**
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	5,86079	2,84900	1102,7	96761,8	351
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	5,86363	2,84091	1105,8	97314,0	352
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	5,86647	2,83286	1109,0	97867,7	353
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	5,86930	2,82486	1112,1	98423,0	354
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	5,87212	2,81690	1115,3	98979,8	355
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	5,87493	2,80899	1118,4	99538,2	356
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	5,87774	2,80112	1121,5	100098	357
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	5,88053	2,79330	1124,7	100660	358
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	5,88332	2,78552	1127,8	101223	359
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	5,88610	2,77778	1131,0	101788	**360**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	5,88610	2,77778	1131,0	101788	**360**
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	5,88888	2,77008	1134,1	102354	361
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	5,89164	2,76243	1137,3	102922	362
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	5,89440	2,75482	1140,4	103491	363
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	5,89715	2,74725	1143,5	104062	364
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	5,89990	2,73973	1146,7	104635	365
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	5,90263	2,73224	1149,8	105209	366
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	5,90536	2,72480	1153,0	105784	367
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	5,90808	2,71739	1156,1	106362	368
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	5,91080	2,71003	1159,2	106941	369
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	5,91350	2,70270	1162,4	107521	**370**
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	5,91620	2,69542	1165,5	108103	371
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	5,91889	2,68817	1168,7	108687	372
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	5,92158	2,68097	1171,8	109272	373
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	5,92426	2,67380	1175,0	109858	374
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	5,92693	2,66667	1178,1	110447	375
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	5,92959	2,65957	1181,2	111036	376
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	5,93225	2,65252	1184,4	111628	377
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	5,93489	2,64550	1187,5	112221	378
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	5,93754	2,63852	1190,7	112815	379
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	5,94017	2,63158	1193,8	113411	**380**
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	5,94280	2,62467	1196,9	114009	381
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	5,94542	2,61780	1200,1	114608	382
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	5,94803	2,61097	1203,2	115209	383
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	5,95064	2,60417	1206,4	115812	384
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	5,95324	2,59740	1209,5	116416	385
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	5,95584	2,59067	1212,7	117021	386
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	5,95842	2,58398	1215,8	117628	387
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	5,96101	2,57732	1218,9	118237	388
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	5,96358	2,57069	1222,1	118847	389
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	5,96615	2,56410	1225,2	119459	**390**
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	5,96871	2,55754	1228,4	120072	391
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	5,97126	2,55102	1231,5	120687	392
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	5,97381	2,54453	1234,6	121304	393
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	5,97635	2,53807	1237,8	121922	394
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	5,97889	2,53165	1240,9	122542	395
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	5,98141	2,52525	1244,1	123163	396
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	5,98394	2,51889	1247,2	123786	397
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	5,98645	2,51256	1250,4	124410	398
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	5,98896	2,50627	1253,5	125036	399
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	125664	**400**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	160000	64000000	20,,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	125664	**400**
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	5,99396	2,49377	1259,8	126293	401
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	5,99645	2,48756	1262,9	126923	402
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	5,99894	2,48139	1266,1	127556	403
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	6,00141	2,47525	1269,2	128190	404
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	6,00389	2,46914	1272,3	128825	405
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	6,00635	2,46305	1275,5	129462	406
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	6,00881	2,45700	1278,6	130100	407
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	6,01127	2,45098	1281,8	130741	408
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	6,01372	2,44499	1284,9	131382	409
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	6,01616	2,43902	1288,1	132025	**410**
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	6,01859	2,43309	1291,2	132670	411
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	6,02102	2,42718	1294,3	133317	412
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	6,02345	2,42131	1297,5	133965	413
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	6,02587	2,41546	1300,6	134614	414
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	6,02828	2,40964	1303,8	135265	415
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	6,03069	2,40385	1306,9	135918	416
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	6,03309	2,39808	1310,0	136572	417
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	6,03548	2,39234	1313,2	137228	418
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	6,03787	2,38663	1316,3	137885	419
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	6,04025	2,38095	1319,5	138544	**420**
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	6,04263	2,37530	1322,6	139205	421
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	6,04501	2,36967	1325,8	139867	422
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	6,04737	2,36407	1328,9	140531	423
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	6,04973	2,35849	1332,0	141196	424
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	6,05209	2,35294	1335,2	141863	425
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	6,05444	2,34742	1338,3	142531	426
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	6,05678	2,34192	1341,5	143201	427
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	6,05912	2,33645	1344,6	143872	428
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	6,06146	2,33100	1347,7	144545	429
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	6,06379	2,32558	1350,9	145220	**430**
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	6,06611	2,32019	1354,0	145896	431
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	6,06843	3,31481	1357,2	146574	432
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	6,07074	2,30947	1360,3	147254	433
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	6,07304	2,30415	1363,5	147934	434
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	6,07535	2,29885	1366,6	148617	435
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	6,07764	2,29358	1369,7	149301	436
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	6,07993	2,28833	1372,9	149987	437
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	6,08222	2,28311	1376,0	150674	438
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	6,08450	2,27790	1379,2	151363	439
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	6,08677	2,27273	1382,3	152053	**440**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	6,08677	2,27273	1382,3	152053	**440**
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	6,08904	2,26757	1385,4	152745	441
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	6,09131	2,26244	1388,6	153439	442
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	6,09357	2,25734	1391,7	154134	443
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	6,09582	2,25225	1394,9	154830	444
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	6,09807	2,24719	1398,0	155528	445
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	6,10032	2,24215	1401,2	156228	446
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	6,10256	2,23714	1404,3	156930	447
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	6,10479	2,23214	1407,4	157633	448
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	6,10702	2,22717	1410,6	158337	449
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	159043	**450**
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	6,11147	2,21729	1416,9	159751	451
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	6,11368	2,21239	1420,0	160460	452
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	6,11589	2,20751	1423,1	161171	453
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	6,11810	2,20264	1426,3	161883	454
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	6,12030	2,19780	1429,4	162597	455
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	6,12249	2,19298	1432,6	163313	456
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	6,12468	2,18818	1435,7	164030	457
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	6,12687	2,18341	1438,8	164748	458
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	6,12905	2,17865	1442,0	165468	459
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	6,13123	2,17391	1445,1	166190	**460**
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	6,13340	2,16920	1448,3	166914	461
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	6,13556	2,16450	1451,4	167639	462
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	6,13773	2,15983	1454,6	168365	463
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	6,13988	2,15517	1457,7	169093	464
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	6,14204	2,15054	1460,8	169823	465
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	6,14419	2,14592	1464,0	170554	466
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	6,14633	2,14133	1467,1	171287	467
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	6,14847	2,13675	1470,3	172021	468
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	6,15060	2,13220	1473,4	172757	469
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	6,15273	2,12766	1476,5	173494	**470**
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	6,15486	2,12314	1479,7	174234	471
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	6,15698	2,11864	1482,8	174974	472
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	6,15910	2,11416	1486,0	175716	473
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	6,16121	2,10970	1489,1	176460	474
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	6,16331	2,10526	1492,3	177205	475
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	6,16542	2,10084	1495,4	177952	476
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	6,16752	2,09644	1498,5	178701	477
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	6,16961	2,09205	1501,7	179451	478
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	6,17170	2,08768	1504,8	180203	479
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	6,17379	2,08333	1508,0	180956	**480**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	6,17379	2,08333	1508,0	180956	**480**
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	6,17587	2,07900	1511,1	181711	481
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	6,17794	2,07469	1514,2	182467	482
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	6,18002	2,07039	1517,4	183225	483
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	6,18208	2,06612	1520,5	183984	484
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	6,18415	2,06186	1523,7	184745	485
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	6,18621	2,05761	1526,8	185508	486
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	6,18826	2,05339	1530,0	186272	487
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	6,19032	2,04918	1533,1	187038	488
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	6,19236	2,04499	1536,2	187805	489
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	6,19441	2,04082	1539,4	188574	**490**
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	6,19644	2,03666	1542,5	189345	491
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	6,19848	2,03252	1545,7	190117	492
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	6,20051	2,02840	1548,8	190890	493
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	6,20254	2,02429	1551,9	191665	494
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	6,20456	2,02020	1555,1	192442	495
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	6,20658	2,01613	1558,2	193221	496
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	6,20859	2,01207	1561,4	194000	497
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	6,21060	2,00803	1564,5	194782	498
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	6,21261	2,00401	1567,7	195565	499
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	196350	**500**
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	6,21661	1,99601	1573,9	197136	501
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	6,21860	1,99203	1577,1	197923	502
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	6,22059	1,98807	1580,2	198713	503
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	6,22258	1,98413	1583,4	199504	504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	6,22456	1,98020	1586,5	200296	505
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	6,22654	1,97628	1589,6	201090	506
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	6,22851	1,97239	1592,8	201886	507
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	6,23048	1,96850	1595,9	202683	508
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	6,23245	1,96464	1599,1	203482	509
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	6,23441	1,96078	1602,2	204282	**510**
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	6,23637	1,95695	1605,4	205084	511
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	6,23832	1,95312	1608,5	205887	512
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	6,24028	1,94932	1611,6	206692	513
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	6,24222	1,94553	1614,8	207499	514
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	6,24417	1,94175	1617,9	208307	515
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	6,24611	1,93798	1621,1	209117	516
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	6,24804	1,93424	1624,2	209928	517
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	6,24998	1,93050	1627,3	210741	518
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	6,25190	1,92678	1630,5	211556	519
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	6,25383	1,92308	1633,6	212372	**520**

94911

БИБЛИОТЕКА
НОВОСИБИРСКОГО ИНСТИТУТА
ИНЖЕНЕРОВ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	6,25383	1,92308	1633,6	212372	**520**
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	6,25575	1,91939	1636,8	213189	521
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	6,25767	1,91571	1639,9	214008	522
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	6,25958	1,91205	1643,1	214829	523
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	6,26149	1,90840	1646,2	215651	524
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	6,26340	1,90476	1649,3	216475	525
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	6,26530	1,90114	1652,5	217301	526
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	6,26720	1,89753	1655,6	218128	527
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	6,26910	1,89394	1658,8	218956	528
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	6,27099	1,89036	1661,9	219787	529
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	6,27288	1,88679	1665,0	220618	**530**
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	6,27476	1,88324	1668,2	221452	531
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	6,27664	1,87970	1671,3	222287	532
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	6,27852	1,87617	1674,5	223123	533
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	6,28040	1,87266	1677,6	223961	534
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	6,28227	1,86916	1680,8	224801	535
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	6,28413	1,86567	1683,9	225642	536
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	6,28600	1,86220	1687,0	226484	537
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	6,28786	1,85874	1690,2	227329	538
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	6,28972	1,85529	1693,3	228175	539
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	6,29157	1,85185	1696,5	229022	**540**
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	6,29342	1,84843	1699,6	229871	541
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	6,29527	1,84502	1702,7	230722	542
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	6,29711	1,84162	1705,9	231574	543
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	6,29895	1,83824	1709,0	232428	544
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	6,30079	1,83486	1712,2	233283	545
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	6,30262	1,83150	1715,3	234140	546
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	6,30445	1,82815	1718,5	234998	547
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	6,30628	1,82482	1721,6	235858	548
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	6,30810	1,82149	1724,7	236720	549
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	237583	**550**
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	6,31173	1,81488	1731,0	238448	551
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	6,31355	1,81159	1734,2	239314	552
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	6,31536	1,80832	1737,3	240182	553
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	6,31716	1,80505	1740,4	241051	554
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	6,31897	1,80180	1743,6	241922	555
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	6,32077	1,79856	1746,7	242795	556
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	6,32257	1,79533	1749,9	243669	557
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	6,32436	1,79211	1753,0	244545	558
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	6,32615	1,78891	1756,2	245422	559
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	6,32794	1,78571	1759,3	246301	**560**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	6,32794	1,78571	1759,3	246301	**560**
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	6,32972	1,78253	1762,4	247181	561
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	6,33150	1,77936	1765,6	248063	562
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	6,33328	1,77620	1768,7	248947	563
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	6,33505	1,77305	1771,9	249832	564
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	6,33683	1,76991	1775,0	250719	565
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	6,33859	1,76678	1778,1	251607	566
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	6,34036	1,76367	1781,3	252497	567
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	6,34212	1,76056	1784,4	253388	568
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	6,34388	1,75747	1787,6	254281	569
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	6,34564	1,75439	1790,7	255176	**570**
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	6,34739	1,75131	1793,8	256072	571
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	6,34914	1,74825	1797,0	256970	572
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	6,35089	1,74520	1800,1	257869	573
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	6,35263	1,74216	1803,3	258770	574
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	6,35437	1,73913	1806,4	259672	575
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	6,35611	1,73611	1809,6	260576	576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	6,35784	1,73310	1812,7	261482	577
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	6,35957	1,73010	1815,8	262389	578
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	6,36130	1,72712	1819,0	263298	579
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	6,36303	1,72414	1822,1	264208	**580**
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	6,36475	1,72117	1825,3	265120	581
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	6,36647	1,71821	1828,4	266033	582
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	6,36819	1,71527	1831,5	266948	583
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	6,36990	1,71233	1834,7	267865	584
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	6,37161	1,70940	1837,8	268783	585
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	6,37332	1,70648	1841,0	269703	586
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	6,37502	1,70358	1844,1	270624	587
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	6,37673	1,70068	1847,3	271547	588
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	6,37843	1,69779	1850,4	272471	589
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	6,38012	1,69492	1853,5	273397	**590**
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	6,38182	1,69205	1856,7	274325	591
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	6,38351	1,68919	1859,8	275254	592
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	6,38519	1,68634	1863,0	276184	593
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	6,38688	1,68350	1866,1	277117	594
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	6,38856	1,68067	1869,2	278051	595
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	6,39024	1,67785	1872,4	278986	596
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	6,39192	1,67504	1875,5	279923	597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	6,39359	1,67224	1878,7	280862	598
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	6,39526	1,66945	1881,8	281802	599
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	282743	**600**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	282743	**600**
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	6,39859	1,66389	1888,1	283687	601
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	6,40026	1,66113	1891,2	284631	602
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	6,40192	1,65837	1894,4	285578	603
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	6,40357	1,65563	1897,5	286526	604
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	6,40523	1,65289	1900,7	287475	605
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	6,40688	1,65017	1903,8	288426	606
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	6,40853	1,64745	1906,9	289379	607
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	6,41017	1,64474	1910,1	290333	608
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	6,41182	1,64204	1913,2	291289	609
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	6,41346	1,63934	1916,4	292247	**610**
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	6,41510	1,63666	1919,5	293206	611
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	6,41673	1,63399	1922,7	294166	612
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	6,41836	1,63132	1925,8	295128	613
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	6,41999	1,62866	1928,9	296092	614
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	6,42162	1,62602	1932,1	297057	615
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	6,42325	1,62338	1935,2	298024	616
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	6,42487	1,62075	1938,4	298992	617
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	6,42649	1,61812	1941,5	299962	618
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	6,42811	1,61551	1944,6	300934	619
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	6,42972	1,61290	1947,8	301907	**620**
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	6,43133	1,61031	1950,9	302882	621
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	6,43294	1,60772	1954,1	303858	622
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	6,43455	1,60514	1957,2	304836	623
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	6,43615	1,60256	1960,4	305815	624
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	6,43775	1,60000	1963,5	306769	625
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	6,43935	1,59744	1966,6	307779	626
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	6,44095	1,59490	1969,8	308763	627
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	6,44254	1,59236	1972,9	309748	628
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	6,44413	1,58983	1976,1	310736	629
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	6,44572	1,58730	1979,2	311725	**630**
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	6,44731	1,58479	1982,3	312715	631
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	6,44889	1,58228	1985,5	313707	632
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	6,45047	1,57978	1988,6	314700	633
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	6,45205	1,57729	1991,8	315696	634
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	6,45362	1,57480	1994,9	316692	635
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	6,45520	1,57233	1998,1	317690	636
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	6,45677	1,56986	2001,2	318690	637
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	6,45834	1,56740	2004,3	319692	638
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	6,45990	1,56495	2007,5	320695	639
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	6,46147	1,56250	2010,6	321699	**640**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	6,46147	1,56250	2010,6	321699	**640**
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	6,46303	1,56006	2013,8	322705	641
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	6,46459	1,55763	2016,9	323713	642
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	6,46614	1,55521	2020,0	324722	643
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	6,46770	1,55280	2023,2	325733	644
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	6,46925	1,55039	2026,3	326745	645
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	6,47080	1,54799	2029,5	327759	646
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	6,47235	1,54560	2032,6	328775	647
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	6,47389	1,54321	2035,8	329792	648
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	6,47543	1,54083	2038,9	330810	649
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	331831	**650**
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	6,47851	1,53610	2045,2	332853	651
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	6,48004	1,53374	2048,3	333876	652
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	6,48158	1,53139	2051,5	334901	653
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	6,48311	1,52905	2054,6	335927	654
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	6,48464	1,52672	2057,7	336955	655
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	6,48616	1,52439	2060,9	337985	656
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	6,48768	1,52207	2064,0	339016	657
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	6,48920	1,51976	2067,2	340049	658
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	6,49072	1,51745	2070,3	341084	659
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	6,49224	1,51515	2073,5	342119	**660**
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	6,49375	1,51286	2076,6	343157	661
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	6,49527	1,51057	2079,7	344196	662
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	6,49677	1,50830	2082,9	345237	663
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	6,49828	1,50602	2086,0	346279	664
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	6,49979	1,50376	2089,2	347323	665
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	6,50129	1,50150	2092,3	348368	666
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	6,50279	1,49925	2095,4	349415	667
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	6,50429	1,49701	2098,6	350464	668
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	6,50578	1,49477	2101,7	351514	669
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	6,50728	1,49254	2104,9	352565	**670**
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	6,50877	1,49031	2108,0	353618	671
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	6,51026	1,48810	2111,2	354673	672
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	6,51175	1,48588	2114,3	355730	673
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	6,51323	1,48368	2117,4	356788	674
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	6,51471	1,48148	2120,6	357847	675
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	6,51619	1,47929	2123,7	358908	676
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	6,51767	1,47710	2126,9	359971	677
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	6,51915	1,47493	2130,0	361035	678
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	6,52062	1,47275	2133,1	362101	679
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	6,52209	1,47059	2136,3	363168	**680**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	6,52209	1,47059	2136,3	363168	**680**
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	6,52356	1,46843	2139,4	364237	681
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	6,52503	1,46628	2142,6	365308	682
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	6,52649	1,46413	2145,7	366380	683
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	6,52796	1,46199	2148,8	367453	684
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	6,52942	1,45985	2152,0	368528	685
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	6,53088	1,45773	2155,1	369605	686
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	6,53233	1,45560	2158,3	370684	687
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	6,53379	1,45349	2161,4	371764	688
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	6,53524	1,45138	2164,6	372845	689
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	6,53669	1,44928	2167,7	373928	**690**
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	6,53814	1,44718	2170,8	375013	691
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	6,53959	1,44509	2174,0	376099	692
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	6,54103	1,44300	2177,1	377187	693
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	6,54247	1,44092	2180,3	378276	694
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	6,54391	1,43885	2183,4	379367	695
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	6,54535	1,43678	2186,5	380459	696
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	6,54679	1,43472	2189,7	381553	697
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	6,54822	1,43266	2192,8	382649	698
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	6,54965	1,43062	2196,0	383746	699
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	384845	**700**
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	6,55251	1,42653	2202,3	385945	701
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	6,55393	1,42450	2205,4	387047	702
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	6,55536	1,42248	2208,5	388151	703
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	6,55678	1,42045	2211,7	389256	704
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	6,55820	1,41844	2214,8	390363	705
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	6,55962	1,41643	2218,0	391471	706
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	6,56103	1,41443	2221,1	392580	707
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	6,56244	1,41243	2224,2	393692	708
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	6,56386	1,41044	2227,4	394805	709
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	6,56526	1,40845	2230,5	395919	**710**
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	6,56667	1,40647	2233,7	397035	711
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	6,56808	1,40449	2236,8	398153	712
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	6,56948	1,40252	2240,0	399272	713
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	6,57088	1,40056	2243,1	400393	714
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	6,57228	1,39860	2246,2	401515	715
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	6,57368	1,39665	2249,4	402639	716
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	6,57508	1,39470	2252,5	403765	717
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	6,57647	1,39276	2255,7	404892	718
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	6,57786	1,39082	2258,8	406020	719
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	6,57925	1,38889	2261,9	407150	**720**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	6,57925	1,38889	2261,9	407150	**720**
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	6,58064	1,38696	2265,1	408282	721
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	6,58203	1,38504	2268,2	409415	722
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	6,58341	1,38313	2271,4	410550	723
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	6,58479	1,38122	2274,5	411687	724
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	6,58617	1,37931	2277,7	412825	725
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	6,58755	1,37741	2280,8	413965	726
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	6,58893	1,37552	2283,9	415106	727
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	6,59030	1,37363	2287,1	416248	728
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	6,59167	1,37174	2290,2	417393	729
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	6,59304	1,36986	2293,4	418539	**730**
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	6,59441	1,36799	2296,5	419686	731
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	6,59578	1,36612	2299,6	420835	732
733	537289	393823837	27,0740	9,0164	6,59715	1,36426	2302,8	421986	733
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	6,59851	1,36240	2305,9	423138	734
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	6,59987	1,36054	2309,1	424293	735
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	6,60123	1,35870	2312,2	425447	736
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	6,60259	1,35685	2315,4	426604	737
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	6,60394	1,35501	2318,5	427762	738
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	6,60530	1,35318	2321,6	428922	739
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	6,60665	1,35135	2324,8	430084	**740**
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	6,60800	1,34953	2327,9	431247	741
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	6,60935	1,34771	2331,1	432412	742
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	6,61070	1,34590	2334,2	433578	743
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	6,61204	1,34409	2337,3	434746	744
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	6,61338	1,34228	2340,5	435916	745
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	6,61473	1,34048	2343,6	437087	746
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	6,61607	1,33869	2346,8	438259	747
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	6,61740	1,33690	2349,9	439433	748
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	6,61874	1,33511	2353,1	440609	749
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	441786	**750**
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	6,62141	1,33156	2359,3	442965	751
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	6,62274	1,32979	2362,5	444146	752
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	6,62407	1,32802	2365,6	445328	753
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	6,62539	1,32626	2368,8	446511	754
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	6,62672	1,32450	2371,9	447697	755
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	6,62804	1,32275	2375,0	448883	756
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	6,62936	1,32100	2378,2	450072	757
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	6,63068	1,31926	2381,3	451262	758
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	6,63200	1,31752	2384,5	452453	759
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	6,63332	1,31579	2387,6	453646	**760**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	6,63332	1,31579	2387,6	453646	**760**
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	6,63463	1,31406	2390,8	454841	761
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	6,63595	1,31234	2393,9	456037	762
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	6,63726	1,31062	2397,0	457234	763
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	6,63857	1,30890	2400,2	458434	764
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	6,63988	1,30719	2403,3	459635	765
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	6,64118	1,30548	2406,5	460837	766
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	6,64249	1,30378	2409,6	462041	767
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	6,64379	1,30208	2412,7	463247	768
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	6,64509	1,30039	2415,9	464454	769
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	6,64639	1,29870	2419,0	465663	**770**
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	6,64769	1,29702	2422,2	466873	771
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	6,64898	1,29534	2425,3	468085	772
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	6,65028	1,29366	2428,5	469298	773
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	6,65157	1,29199	2431,6	470513	774
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	6,65286	1,29032	2434,7	471730	775
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	6,65415	1,28866	2437,9	472948	776
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	6,65544	1,28700	2441,0	474168	777
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	6,65673	1,28535	2444,2	475389	778
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	6,65801	1,28370	2447,3	476612	779
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	6,65929	1,28205	2450,4	477836	**780**
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	6,66058	1,28041	2453,6	479062	781
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	6,66185	1,27877	2456,7	480290	782
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	6,66313	1,27714	2459,9	481519	783
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	6,66441	1,27551	2463,0	482750	784
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	6,66568	1,27389	2466,2	483982	785
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	6,66696	1,27226	2469,3	485216	786
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	6,66823	1,27065	2472,4	486451	787
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	6,66950	1,26904	2475,6	487688	788
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	6,67077	1,26743	2478,7	488927	789
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	6,67203	1,26582	2481,9	490167	**790**
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	6,67330	1,26422	2485,0	491409	791
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	6,67456	1,26263	2488,1	492652	792
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	6,67582	1,26103	2491,3	493897	793
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	6,67708	1,25945	2494,4	495143	794
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	6,67834	1,25786	2497,6	496391	795
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	6,67960	1,25628	2500,7	497641	796
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	6,68085	1,25471	2503,8	498892	797
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	6,68211	1,25313	2507,0	500145	798
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	6,68336	1,25156	2510,1	501399	799
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	502655	**800**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	502655	**800**
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	6,68586	1,24844	2516,4	503912	801
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	6,68711	1,24688	2519,6	505171	802
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	6,68835	1,24533	2522,7	506432	803
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	6,68960	1,24378	2525,8	507694	804
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	6,69084	1,24224	2529,0	508958	805
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	6,69208	1,24069	2532,1	510223	806
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	6,69332	1,23916	2535,3	511490	807
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	6,69456	1,23762	2538,4	512758	808
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	6,69580	1,23609	2541,5	514028	809
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	6,69703	1,23457	2544,7	515300	**810**
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	6,69827	1,23305	2547,8	516573	811
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	6,69950	1,23153	2551,0	517848	812
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	6,70073	1,23001	2554,1	519124	813
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	6,70196	1,22850	2557,3	520402	814
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	6,70319	1,22699	2560,4	521681	815
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	6,70441	1,22549	2563,5	522962	816
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	6,70564	1,22399	2566,7	524245	817
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	6,70686	1,22249	2569,8	525529	818
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	6,70808	1,22100	2573,0	526814	819
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	6,70930	1,21951	2576,1	528102	**820**
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	6,71052	1,21803	2579,2	529391	821
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	6,71174	1,21655	2582,4	530681	822
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	6,71296	1,21507	2585,5	531973	823
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	6,71417	1,21359	2588,7	533267	824
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	6,71538	1,21212	2591,8	534562	825
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	6,71659	1,21065	2595,0	535858	826
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	6,71780	1,20919	2598,1	537157	827
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	6,71901	1,20773	2601,2	538456	828
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	6,72022	1,20627	2604,4	539758	829
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	6,72143	1,20482	2607,5	541061	**830**
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	6,72263	1,20337	2610,7	542365	831
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	6,72383	1,20192	2613,8	543671	832
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	6,72503	1,20048	2616,9	544979	833
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	6,72623	1,19904	2620,1	546288	834
835	677225	582182875	28,8964	9,4166	6,72743	1,19760	2623,2	547599	835
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	6,72863	1,19617	2626,4	548912	836
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	6,72982	1,19474	2629,5	550226	837
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	6,73102	1,19332	2632,7	551541	838
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	6,73221	1,19190	2635,8	552858	839
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	6,73340	1,19048	2638,9	554177	**840**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	6,73340	1,19048	2638,9	554177	**840**
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	6,73459	1,18906	2642,1	555497	841
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	6,73578	1,18765	2645,2	556819	842
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	6,73697	1,18624	2648,4	558142	843
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	6,73815	1,18483	2651,5	559467	844
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	6,73934	1,18343	2654,6	560794	845
846	715716	605495736	29 0861	9,4578	6,74052	1,18203	2657,8	562122	846
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	6,74170	1,18064	2660,9	563452	847
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	6,74288	1,17925	2664,1	564783	848
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	6,74406	1,17786	2667,2	566116	849
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	567450	**850**
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	6,74641	1,17509	2673,5	568786	851
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	6,74759	1,17371	2676,6	570124	852
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	6,74876	1,17233	2679,8	571463	853
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	6,74993	1,17096	2682,9	572803	854
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	6,75110	1,16959	2686,1	574146	855
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	6,75227	1,16822	2689,2	575490	856
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	6,75344	1,16686	2692,3	576835	857
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	6,75460	1,16550	2695,5	578182	858
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	6,75577	1,16414	2698,6	579530	859
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	6,75693	1,16279	2701,8	580880	**860**
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	6,75809	1,16144	2704,9	582232	861
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	6,75926	1,16009	2708,1	583585	862
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	6,76041	1,15875	2711,2	584940	863
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	6,76157	1,15741	2714,3	586297	864
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	6,76273	1,15607	2717,5	587655	865
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	6,76388	1,15473	2720,6	589014	866
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	6,76504	1,15340	2723,8	590375	867
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	6,76619	1,15207	2726,9	591738	868
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	6,76734	1,15075	2730,0	593102	869
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	6,76849	1,14943	2733,2	594468	**870**
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	6,76964	1,14811	2736,3	595835	871
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	6,77079	1,14679	2739,5	597204	872
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	6,77194	1,14548	2742,6	598575	873
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	6,77308	1,14416	2745,8	599947	874
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	6,77422	1,14286	2748,9	601320	875
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	6,77537	1,14155	2752,0	602696	876
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	6,77651	1,14025	2755,2	604073	877
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	6,77765	1,13895	2758,3	605451	878
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	6,77878	1,13766	2761,5	606831	879
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	608212	**880**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	608212	**880**
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	6,78106	1,13507	2767,7	609595	881
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	6,78219	1,13379	2770,9	610980	882
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	6,78333	1,13250	2774,0	612366	883
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	6,78446	1,13122	2777,2	613754	884
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	6,78559	1,12994	2780,3	615143	885
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	6,78672	1,12867	2783,5	616534	886
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	6,78784	1,12740	2786,6	617927	887
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	6,78897	1,12613	2789,7	619321	888
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	6,79010	1,12486	2792,9	620717	889
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	6,79122	1,12360	2796,0	622114	**890**
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	6,79234	1,12233	2799,2	623513	891
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	6,79347	1,12108	2802,3	624913	892
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	6,79459	1,11982	2805,4	626315	893
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	6,79571	1,11857	2808,6	627718	894
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	6,79682	1,11732	2811,7	629124	895
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	6,79794	1,11607	2814,9	630530	896
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	6,79906	1,11483	2818,0	631938	897
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	6,80017	1,11359	2821,2	633348	898
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	6,80128	1,11235	2824,3	634760	899
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	636173	**900**
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	6,80351	1,10988	2830,6	637587	901
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	6,80461	1,10865	2833,7	639003	902
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	6,80572	1,10742	2836,9	640421	903
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	6,80683	1,10619	2840,0	641840	904
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	6,80793	1,10497	2843,1	643261	905
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	6,80904	1,10375	2846,3	644683	906
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	6,81014	1,10254	2849,4	646107	907
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	6,81124	1,10132	2852,6	647533	908
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	6,81235	1,10011	2855,7	648960	909
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	6,81344	1,09890	2858,8	650388	**910**
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	6,81454	1,09769	2862,0	651818	911
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	6,81564	1,09649	2865,1	653250	912
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	6,81674	1,09529	2868,3	654684	913
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	6,81783	1,09409	2871,4	656118	914
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	6,81892	1,09290	2874,6	657555	915
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	6,82002	1,09170	2877,7	658993	916
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	6,82111	1,09051	2880,8	660433	917
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	6,82220	1,08932	2884,0	661874	918
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	6,82329	1,08814	2887,1	663317	919
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	6,82437	1,08696	2890,3	664761	**920**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	6,82437	1,08696	2890,3	664761	**920**
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	6,82546	1,08578	2893,4	666207	921
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	6,82655	1,08400	2896,5	667654	922
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	6,82763	1,08342	2899,7	669103	923
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	6,82871	1,08225	2902,8	670554	924
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	6,82979	1,08108	2906,0	672006	925
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	6,83087	1,07991	2909,1	673460	926
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	6,83195	1,07875	2912,3	674915	927
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	6,83303	1,07759	2915,4	676372	928
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	6,83411	1,07643	2918,5	677831	929
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	6,83518	1,07527	2921,7	679291	**930**
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	6,83626	1,07411	2924,8	680752	931
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	6,83733	1,07296	2928,0	682216	932
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	6,83841	1,07181	2931,1	683680	933
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	6,83948	1,07066	2934,2	685147	934
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	6,84055	1,06952	2937,4	686615	935
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	6,84162	1,06838	2940,5	688084	936
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	6,84268	1,06724	2943,7	689555	937
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	6,84375	1,06610	2946,8	691028	938
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	6,84482	1,06496	2950,0	692502	939
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	6,84588	1,06383	2953,1	693978	**940**
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	6,84694	1,06270	2956,2	695455	941
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	6,84801	1,06157	2959,4	696934	942
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	6,84907	1,06045	2962,5	698415	943
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	6,85013	1,05932	2965,7	699897	944
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	6,85118	1,05820	2968,8	701380	945
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	6,85224	1,05708	2971,9	702865	946
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	6,85330	1,05597	2975,1	704352	947
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	6,85435	1,05485	2978,2	705840	948
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	6,85541	1,05374	2981,4	707330	949
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	708822	**950**
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	6,85751	1,05152	2987,7	710315	951
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	6,85857	1,05042	2990,8	711809	952
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	6,85961	1,04932	2993,9	713306	953
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	6,86066	1,04822	2997,1	714803	954
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	6,86171	1,04712	3000,2	716303	955
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	6,86276	1,04603	3003,4	717804	956
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	6,86380	1,04493	3006,5	719306	957
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	6,86485	1,04384	3009,6	720810	958
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	6,86589	1,04275	3012,8	722316	959
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	6,86693	1,04167	3015,9	723823	**960**

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	6,86693	1,04167	3015,9	723823	**960**
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	6,86797	1,04058	3019,1	725332	961
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	6,86901	1,03950	3022,2	726842	962
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	6,87005	1,03842	3025,4	728354	963
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	6,87109	1,03734	3028,5	729867	964
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	6,87213	1,03627	3031,6	731382	965
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	6,87316	1,03520	3034,8	732899	966
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	6,87420	1,03413	3037,9	734417	967
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	6,87523	1,03306	3041,1	735937	968
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	6,87626	1,03199	3044,2	737458	969
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	6,87730	1,03093	3047,3	738981	**970**
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	6,87833	1,02987	3050,5	740506	971
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	6,87936	1,02881	3053,6	742032	972
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	6,88038	1,02775	3056,8	743559	973
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	6,88141	1,02669	3059,9	745088	974
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	6,88244	1,02564	3063,1	746619	975
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	6,88346	1,02459	3066,2	748151	976
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	6,88449	1,02354	3069,3	749685	977
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	6,88551	1,02249	3072,5	751221	978
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	6,88653	1,02145	3075,6	752758	979
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	6,88755	1,02041	3078,8	754296	**980**
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	6,88857	1,01937	3081,9	755837	981
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	6,88959	1,01833	3085,0	757378	982
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	6,89061	1,01729	3088,2	758922	983
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	6,89163	1,01626	3091,3	760466	984
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	6,89264	1,01523	3094,5	762013	985
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	6,89366	1,01420	3097,6	763561	986
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	6,89467	1,01317	3100,8	765111	987
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	6,89568	1,01215	3103,9	766662	988
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	6,89669	1,01112	3107,0	768214	989
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	6,89770	1,01010	3110,2	769769	**990**
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	6,89871	1,00908	3113,3	771325	991
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	6,89972	1,00806	3116,5	772882	992
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	6,90073	1,00705	3119,6	774441	993
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	6,90174	1,00604	3122,7	776002	994
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	6,90274	1,00503	3125,9	777564	995
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	6,90375	1,00402	3129,0	779128	996
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	6,90475	1,00301	3132,2	780693	997
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	6,90575	1,00200	3135,3	782260	998
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	6,90675	1,00100	3138,5	783828	999
1000	100000	1000000000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	785398	**1000**

§ 2. Квадраты и кубы четырехзначных чисел от 10,00 до 15,00

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
10,00	100,0	1000	10,41	108,4	1128	10,82	117,1	1267	11,23	126,1	1416
10,01	100,2	1003	10,42	108,6	1131	10,83	117,3	1270	11,24	126,3	1420
10,02	100,4	1006	10,43	108,8	1135	10,84	117,5	1274	11,25	126,6	1424
10,03	100,6	1009	10,44	109,0	1138	10,85	117,7	1277	11,26	126,8	1428
10,04	100,8	1012	10,45	109,2	1141	10,86	117,9	1281	11,27	127,0	1431
10,05	101,0	1015	10,46	109,4	1144	10,87	118,2	1284	11,28	127,2	1435
10,06	101,2	1018	10,47	109,6	1148	10,88	118,4	1288	11,29	127,5	1439
10,07	101,4	1021	10,48	109,8	1151	10,89	118,6	1291	11,30	127,7	1443
10,08	101,6	1024	10,49	110,0	1154	10,90	118,8	1295	11,31	127,9	1447
10,09	101,8	1027	10,50	110,3	1158	10,91	119,0	1299	11,32	128,1	1451
10,10	102,0	1030	10,51	110,5	1161	10,92	119,2	1302	11,33	128,4	1454
10,11	102,2	1033	10,52	110,7	1164	10,93	119,5	1306	11,34	128,6	1458
10,12	102,4	1036	10,53	110,9	1168	10,94	119,7	1309	11,35	128,8	1462
10,13	102,6	1040	10,54	111,1	1171	10,95	119,9	1313	11,36	129,0	1466
10,14	102,8	1043	10,55	111,3	1174	10,96	120,1	1317	11,37	129,3	1470
10,15	103,0	1046	10,56	111,5	1178	10,97	120,3	1320	11,38	129,5	1474
10,16	103,2	1049	10,57	111,7	1181	10,98	120,6	1324	11,39	129,7	1478
10,17	103,4	1052	10,58	111,9	1184	10,99	120,8	1327	11,40	130,0	1482
10,18	103,6	1055	10,59	112,1	1188	11,00	121,0	1331	11,41	130,2	1485
10,19	103,8	1058	10,60	112,4	1191	11,01	121,2	1335	11,42	130,4	1489
10,20	104,0	1061	10,61	112,6	1194	11,02	121,4	1338	11,43	130,6	1493
10,21	104,2	1064	10,62	112,8	1198	11,03	121,7	1342	11,44	130,9	1497
10,22	104,4	1067	10,63	113,0	1201	11,04	121,9	1346	11,45	131,1	1501
10,23	104,7	1071	10,64	113,2	1205	11,05	122,1	1349	11,46	131,3	1505
10,24	104,9	1074	10,65	113,4	1208	11,06	122,3	1353	11,47	131,6	1509
10,25	105,1	1077	10,66	113,6	1211	11,07	122,5	1357	11,48	131,8	1513
10,26	105,3	1080	10,67	113,8	1215	11,08	122,8	1360	11,49	132,0	1517
10,27	105,5	1083	10,68	114,1	1218	11,09	123,0	1364	11,50	132,3	1521
10,28	105,7	1086	10,69	114,3	1222	11,10	123,2	1368	11,51	132,5	1525
10,29	105,9	1090	10,70	114,5	1225	11,11	123,4	1371	11,52	132,7	1529
10,30	106,1	1093	10,71	114,7	1228	11,12	123,7	1375	11,53	132,9	1533
10,31	106,3	1096	10,72	114,9	1232	11,13	123,9	1379	11,54	133,2	1537
10,32	106,5	1099	10,73	115,1	1235	11,14	124,1	1382	11,55	133,4	1541
10,33	106,7	1102	10,74	115,3	1239	11,15	124,3	1386	11,56	133,6	1545
10,34	106,9	1106	10,75	115,6	1242	11,16	124,5	1390	11,57	133,9	1549
10,35	107,1	1109	10,76	115,8	1246	11,17	124,8	1394	11,58	134,1	1553
10,36	107,3	1112	10,77	116,0	1249	11,18	125,0	1397	11,59	134,3	1557
10,37	107,5	1115	10,78	116,2	1253	11,19	125,2	1401	11,60	134,6	1561
10,38	107,7	1118	10,79	116,4	1256	11,20	125,4	1405	11,61	134,8	1565
10,39	108,0	1122	10,80	116,6	1260	11,21	125,7	1409	11,62	135,0	1569
10,40	108,2	1125	10,81	116,9	1263	11,22	125,9	1412	11,63	135,3	1573

Продолжение

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
11,64	135,5	1577	12,09	146,2	1767	12,54	157,3	1972	12,99	168,7	2192
11,65	135,7	1581	12,10	146,4	1772	12,55	157,5	1977	13,00	169,0	2197
11,66	136,0	1585	12,11	146,7	1776	12,56	157,8	1981	13,01	169,3	2202
11,67	136,2	1589	12,12	146,9	1780	12,57	158,0	1986	13,02	169,5	2207
11,68	136,4	1593	12,13	147,1	1785	12,58	158,3	1991	13,03	169,8	2212
11,69	136,7	1598	12,14	147,4	1789	12,59	158,5	1996	13,04	170,0	2217
11,70	136,9	1602	12,15	147,6	1794	12,60	158,8	2000	13,05	170,3	2222
11,71	137,1	1606	12,16	147,9	1798	12,61	159,0	2005	13,06	170,6	2228
11,72	137,4	1610	12,17	148,1	1802	12,62	159,3	2010	13,07	170,8	2233
11,73	137,6	1614	12,18	148,4	1807	12,63	159,5	2015	13,08	171,1	2238
11,74	137,8	1618	12,19	148,6	1811	12,64	159,8	2019	13,09	171,3	2243
11,75	138,1	1622	12,20	148,8	1816	12,65	160,0	2024	13,10	171,6	2248
11,76	138,3	1626	12,21	149,1	1820	12,66	160,3	2029	13,11	171,9	2253
11,77	138,5	1631	12,22	149,3	1825	12,67	160,5	2034	13,12	172,1	2258
11,78	138,8	1635	12,23	149,6	1829	12,68	160,8	2039	13,13	172,4	2264
11,79	139,0	1639	12,24	149,8	1834	12,69	161,0	2044	13,14	172,7	2269
11,80	139,2	1643	12,25	150,1	1838	12,70	161,3	2048	13,15	172,9	2274
11,81	139,5	1647	12,26	150,3	1843	12,71	161,5	2053	13,16	173,2	2279
11,82	139,7	1651	12,27	150,6	1847	12,72	161,8	2058	13,17	173,4	2284
11,83	139,9	1656	12,28	150,8	1852	12,73	162,1	2063	13,18	173,7	2290
11,84	140,2	1660	12,29	151,0	1856	12,74	162,3	2068	13,19	174,0	2295
11,85	140,4	1664	12,30	151,3	1861	12,75	162,6	2073	13,20	174,2	2300
11,86	140,7	1668	12,31	151,5	1865	12,76	162,8	2078	13,21	174,5	2305
11,87	140,9	1672	12,32	151,8	1870	12,77	163,1	2082	13,22	174,8	2310
11,88	141,1	1677	12,33	152,0	1875	12,78	163,3	2087	13,23	175,0	2316
11,89	141,4	1681	12,34	152,3	1879	12,79	163,6	2092	13,24	175,3	2321
11,90	141,6	1685	12,35	152,5	1884	12,80	163,8	2097	13,25	175,6	2326
11,91	141,8	1689	12,36	152,8	1888	12,81	164,1	2102	13,26	175,8	2331
11,92	142,1	1694	12,37	153,0	1893	12,82	164,4	2107	13,27	176,1	2337
11,93	142,3	1698	12,38	153,3	1897	12,83	164,6	2112	13,28	176,4	2342
11,94	142,6	1702	12,39	153,5	1902	12,84	164,9	2117	13,29	176,6	2347
11,95	142,8	1706	12,40	153,8	1907	12,85	165,1	2122	13,30	176,9	2353
11,96	143,0	1711	12,41	154,0	1911	12,86	165,4	2127	13,31	177,2	2358
11,97	143,3	1715	12,42	154,3	1916	12,87	165,6	2132	13,32	177,4	2363
11,98	143,5	1719	12,43	154,5	1920	12,88	165,9	2137	13,33	177,7	2369
11,99	143,8	1724	12,44	154,8	1925	12,89	166,2	2142	13,34	178,0	2374
12,00	144,0	1728	12,45	155,0	1930	12,90	166,4	2147	13,35	178,2	2379
12,01	144,2	1732	12,46	155,3	1934	12,91	166,7	2152	13,36	178,5	2385
12,02	144,5	1737	12,47	155,5	1939	12,92	166,9	2157	13,37	178,8	2390
12,03	144,7	1741	12,48	155,8	1944	12,93	167,2	2162	13,38	179,0	2395
12,04	145,0	1745	12,49	156,0	1948	12,94	167,4	2167	13,39	179,3	2401
12,05	145,2	1750	12,50	156,3	1953	12,95	167,7	2172	13,40	179,6	2406
12,06	145,4	1754	12,51	156,5	1958	12,96	168,0	2177	13,41	179,8	2411
12,07	145,7	1758	12,52	156,8	1963	12,97	168,2	2182	13,42	180,1	2417
12,08	145,9	1763	12,53	157,0	1967	12,98	168,5	2187	13,43	180,4	2422

Продолжение

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
13,44	180,6	2428	13,83	191,3	2645	14,22	202,2	2875	14,61	213,5	3119
13,45	180,9	2433	13,84	191,5	2651	14,23	202,5	2882	14,62	213,7	3125
13,46	181,2	2439	13,85	191,8	2657	14,24	202,8	2888	14,63	214,1	3131
13,47	181,4	2444	13,86	192,1	2663	14,25	203,1	2894	14,64	214,3	3138
13,48	181,7	2449	13,87	192,4	2668	14,26	203,3	2900	14,65	214,6	3144
13,49	182,0	2455	13,88	192,7	2674	14,27	203,6	2906	14,66	214,9	3151
13,50	182,3	2460	13,89	192,9	2680	14,28	203,9	2912	14,67	215,2	3157
13,51	182,5	2466	13,90	193,2	2686	14,29	204,2	2918	14,68	215,5	3164
13,52	182,8	2471	13,91	193,5	2691	14,30	204,5	2924	14,69	215,8	3170
13,53	183,1	2477	13,92	193,8	2697	14,31	204,8	2930	14,70	216,1	3177
13,54	183,3	2482	13,93	194,0	2703	14,32	205,1	2936	14,71	216,4	3183
13,55	183,6	2488	13,94	194,3	2709	14,33	205,3	2943	14,72	216,7	3190
13,56	183,9	2493	13,95	194,6	2715	14,34	205,6	2949	14,73	217,0	3196
13,57	184,1	2499	13,96	194,9	2721	14,35	205,9	2955	14,74	217,3	3203
13,58	184,4	2504	13,97	195,2	2726	14,36	206,2	2961	14,75	217,6	3209
13,59	184,7	2510	13,98	195,4	2732	14,37	206,5	2967	14,76	217,9	3216
13,60	185,0	2515	13,99	195,7	2738	14,38	206,8	2974	14,77	218,2	3222
13,61	185,2	2521	14,00	196,0	2744	14,39	207,1	2980	14,78	218,4	3229
13,62	185,5	2527	14,01	196,3	2750	14,40	207,4	2986	14,79	218,7	3235
13,63	185,8	2532	14,02	196,6	2756	14,41	207,7	2992	14,80	219,0	3242
13,64	186,1	2538	14,03	196,8	2762	14,42	207,9	2998	14,81	219,3	3248
13,65	186,3	2543	14,04	197,1	2768	14,43	208,2	3005	14,82	219,6	3255
13,66	186,6	2549	14,05	197,4	2774	14,44	208,5	3011	14,83	219,9	3262
13,67	186,9	2555	14,06	197,7	2779	14,45	208,8	3017	14,84	220,2	3268
13,68	187,1	2560	14,07	198,0	2785	14,46	209,1	3024	14,85	220,5	3275
13,69	187,4	2566	14,08	198,2	2791	14,47	209,4	3030	14,86	220,8	3281
13,70	187,7	2571	14,09	198,5	2797	14,48	209,7	3036	14,87	221,1	3288
13,71	188,0	2577	14,10	198,8	2803	14,49	210,0	3042	14,88	221,4	3295
13,72	188,2	2583	14,11	199,1	2809	14,50	210,3	3049	14,89	221,7	3301
13,73	188,5	2588	14,12	199,4	2815	14,51	210,5	3055	14,90	222,0	3308
13,74	188,8	2594	14,13	199,7	2821	14,52	210,8	3061	14,91	222,3	3315
13,75	189,1	2600	14,14	199,9	2827	14,53	211,1	3068	14,92	222,6	3321
13,76	189,3	2605	14,15	200,2	2833	14,54	211,4	3074	14,93	222,9	3328
13,77	189,6	2611	14,16	200,5	2839	14,55	211,7	3080	14,94	223,2	3335
13,78	189,9	2617	14,17	200,8	2845	14,56	212,0	3087	14,95	223,5	3341
13,79	190,2	2622	14,18	201,1	2851	14,57	212,3	3093	14,96	223,8	3348
13,80	190,4	2628	14,19	201,4	2857	14,58	212,6	3099	14,97	224,1	3355
13,81	190,7	2634	14,20	201,6	2863	14,59	212,9	3106	14,98	224,4	3362
13,82	191,0	2640	14,21	201,9	2869	14,60	213,2	3112	14,99	224,7	3368
									15,00	225,0	3375

§ 3. Четырехзначные десятичные логарифмы

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	42
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	38
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	35
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	32
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	30
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	28
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	26
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	25
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	24
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	22
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	19
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	18
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	14
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	11
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	5
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
96	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	5
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	5
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00345	00389	43
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817	43
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242	42
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662	42
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078	42
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02407	02449	02490	41
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898	41
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03303	40
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703	40
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100	40
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336	04376	04415	04454	04493	39
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

§ 4. Перевод градусных измерений углов в линейные

	Градусы	Минуты	Секунды		Градусы	Минуты	Секунды
1	0,0175	0,0003	0,0000	31	0,5411	0,0090	0,0001
2	0,0349	0,0006	0,0000	32	0,5585	0,0093	0,0002
3	0,0524	0,0009	0,0000	33	0,5760	0,0096	0,0002
4	0,0698	0,0012	0,0000	34	0,5934	0,0099	0,0002
5	0,0873	0,0015	0,0000	35	0,6109	0,0102	0,0002
6	0,1047	0,0017	0,0000	36	0,6283	0,0105	0,0002
7	0,1222	0,0020	0,0000	37	0,6458	0,0108	0,0002
8	0,1396	0,0023	0,0000	38	0,6632	0,0111	0,0002
9	0,1571	0,0026	0,0000	39	0,6807	0,0113	0,0002
10	0,1745	0,0029	0,0000	**40**	0,6981	0,0116	0,0002
11	0,1920	0,0032	0,0001	41	0,7156	0,0119	0,0002
12	0,2094	0,0035	0,0001	42	0,7330	0,0122	0,0002
13	0,2269	0,0038	0,0001	43	0,7505	0,0125	0,0002
14	0,2443	0,0041	0,0001	44	0,7680	0,0128	0,0002
15	0,2618	0,0044	0,0001	45	0,7854	0,0131	0,0002
16	0,2793	0,0047	0,0001	46	0,8029	0,0134	0,0002
17	0,2967	0,0049	0,0001	47	0,8203	0,0137	0,0002
18	0,3142	0,0052	0,0001	48	0,8378	0,0140	0,0002
19	0,3316	0,0055	0,0001	49	0,8552	0,0143	0,0002
20	0,3491	0,0058	0,0001	**50**	0,8727	0,0145	0,0002
21	0,3665	0,0061	0,0001	51	0,8901	0,0148	0,0002
22	0,3840	0,0064	0,0001	52	0,9076	0,0151	0,0003
23	0,4014	0,0067	0,0001	53	0,9250	0,0154	0,0003
24	0,4189	0,0070	0,0001	54	0,9425	0,0157	0,0003
25	0,4363	0,0073	0,0001	55	0,9599	0,0160	0,0003
26	0,4538	0,0076	0,0001	56	0,9774	0,0163	0,0003
27	0,4712	0,0079	0,0001	57	0,9948	0,0166	0,0003
28	0,4887	0,0081	0,0001	58	1,0123	0,0169	0,0003
29	0,5061	0,0084	0,0001	59	0,0297	0,0172	0,0003
30	0,5236	0,0087	0,0001	**60**	1,0472	0,0175	0,0003

Пример. $20°26'18'' = 0{,}5236 + 0{,}0076 + 0{,}0001 = 0{,}5313$.

§ 5. Круговые функции

Град.	Синусы 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	**60**
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	**50**
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Град.
	Косинусы							

Продолжение

Град.	Косинусы 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,96964	0,95882	0,95799	0,95717	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Град.
	Синусы							

Продолжение

Град.	Тангенсы 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	**45**
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Град.
	Котангенсы							

Продолжение

Град.	Котангенсы 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10338	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Град.
	Тангенсы							

§ 6. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00
01	0,01000	0,99995	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000	0,57
02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	1,15
03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	1,72
04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	2,29
05	0,04998	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	2,86
06	0,05996	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	3,44
07	0,06994	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	4,01
08	0,07991	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	4,58
09	0,08988	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	5,16
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5,73
11	0,10978	0,99396	0,11045	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	6,30
12	0,11971	0,99281	1,12058	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	6,88
13	0,12963	0,99156	0,13074	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	7,45
14	0,13954	0,99022	0,14092	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	8,02
15	0,14944	0,98877	0,15114	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	8,59
16	0,15932	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865	9,17
17	0,16918	0,98558	0,17166	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	9,74
18	0,17903	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	10,31
19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	10,89

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11,46
21	0,20846	0,97803	0,21314	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	12,03
22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652	12,61
23	0,22798	0,97367	0,23414	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	13,18
24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	13,75
25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	14,32
26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	14,90
27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	15,47
28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	16,04
29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	16,62
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17,19
31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	17,76
32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	18,33
33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	18,91
34	0,33349	0,94275	0,35374	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	19,48
35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	20,05
36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	20,63
37	0,36162	0,93233	0,38786	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	21,20
38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	21,77
39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	22,35
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92
41	0,39861	0,91712	0,43463	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	23,49
42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	24,06
43	0,41687	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	24,64
44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	25,21
45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	25,78
46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	26,36
47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	26,93
48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	27,50
49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	28,07
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65
51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	29,22
52	0,49688	0,86782	0,57256	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770	29,79
53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	30,37
54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	30,94
55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	31,51
56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	32,09
57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	32,66
58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	33,23
59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	33,80

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	34,38
61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	34,95
62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	35,52
63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	36,10
64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	36,67
65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	37,24
66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	37,82
67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	38,39
68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	38,96
69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	39,53
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40,11
71	0,65183	0,75836	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	40,68
72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	41,25
73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	41,83
74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	42,40
75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	42,97
76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	43,54
77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	44,12
78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	44,69
79	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	45,26
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84
81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	46,41
82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	46,98
83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	47,56
84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	48,13
85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	48,70
86	0,75784	0,65244	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	49,27
87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	49,85
88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	50,42
89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	50,99
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51,57
91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	52,14
92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	52,71
93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	53,29
94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	53,86
95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	54,43
96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	55,00
97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	55,58
98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	56,15
99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	56,72

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30
01	0,84683	0,53186	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	57,87
02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	58,44
03	0,85730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	59,01
04	0,86240	0,50622	1,70361	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	59,59
05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	60,16
06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	60,73
07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	61,31
08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320	61,88
09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	62,45
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	63,03
11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	63,60
12	0,90010	0,43568	2,06596	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	64,17
13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	64,74
14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	65,32
15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	65,89
16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104	66,46
17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	67,04
18	0,92461	0,38092	2,42727	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	67,61
19	0,92837	0,37166	2,49790	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	68,18
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$ $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75
21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	69,33
22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	69,90
23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	70,47
24	0,94578	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	71,05
25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	71,62
26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	72,19
27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	72,77
28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	73,34
29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	73,91
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	74,48
31	0,96618	0,25785	3,74708	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	75,06
32	0,96872	0,24818	3,90335	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	75,63
33	0,97115	0,23848	4,07231	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	76,20
34	0,97348	0,22875	4,25562	3,81904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167	76,78
35	0,97572	0,21901	4,45522	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405	77,35
36	0,97786	0,20924	4,67344	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	77,92
37	0,97991	0,19945	4,91306	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	78,50
38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	79,07
39	0,98370	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	79,64

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
1,40	0,98545	0,16997	5,79789	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	80,21
41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	80,79
42	0,98865	0,15023	6,58112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	81,36
43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	81,93
44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	82,51
45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	83,08
46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	83,65
47	0,99492	0,10063	9,91550	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	84,22
48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	84,80
49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	85,37
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35242	0,90515	85,94
51	0,99815	0,06076	16,42809	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	86,52
52	0,99871	0,05077	19,66966	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870	87,09
53	0,99917	0,04079	24,49841	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042	87,66
54	0,99953	0,03079	32,46114	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	88,24
55	0,99978	0,02079	48,07849	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379	88,81
56	0,99994	0,01080	92,62050	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	89,37
57	1,00000	+0,00080	+1255,766	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	89,95
*									
1,60	0,99957	—0,02920	—34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,67

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
1,60	0,99957	—0,02920	—34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,67
70	0,99166	—0,12884	—7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	97,40
80	0,97385	—0,22720	—4,28626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	103,13
90	0,94630	—0,32329	—2,92710	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	108,86
2,00	0,90930	—0,41615	—2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	114,59
10	0,86321	—0,50485	—1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	120,32
20	0,80850	—0,58850	—1,37382	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574	126,05
*30	0,74571	—0,66628	—1,11921	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010	131,78
40	0,67546	—0,73739	—0,91601	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367	137,51
50	0,59847	—0,80114	—0,74702	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661	143,24
60	0,51550	—0,85689	—0,60160	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903	148,97
70	0,42738	—0,90407	—0,47273	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101	154,70
80	0,33499	—0,94222	—0,35553	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263	160,43
90	0,23925	—0,97096	—0,24641	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396	166,16
3,00	0,14112	—0,98999	—0,14255	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	171,89
*10	+0,04158	—0,99914	—0,04162	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595	177,62
20	—0,05837	—0,99829	+0,05847	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668	183,35
30	—0,15775	—0,98748	0,15975	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728	189,08
40	—0,25554	—0,96680	0,26442	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777	194,81
50	—0,35078	—0,93646	0,37470	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	200,54
60	—0,44252	—0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851	206,26
70	—0,52984	—0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878	211,99
80	—0,61186	—0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900	217,72
*90	—0,68777	—0,72593	0,94742	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918	223,45

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Продолжение

(Аргумент в дуговых единицах и градусах *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
4,00	—0,75680	—0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933	229,18
10	—0,81828	—0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945	234,91
20	—0,87158	—0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955	240,64
30	—0,91617	—0,40080	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	246,37
40	—0,95160	—0,30733	3,09632	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	252,10
50	—0,97753	—0,21080	4,63733	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975	257,83
60	—0,99369	—0,11215	8,86018	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	263,56
*70	—0,99992	—0,01239	+80,71280	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983	269,29
80	—0,99616	+0,08750	—11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986	275,02
90	—0,98245	0,18651	—5,26749	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	280,75
5,00	—0,95892	0,28366	—3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991	286,48
10	—0,92581	0,37798	—2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	292,21
20	—0,88345	0,46852	—1,88564	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994	297,94
30	—0,83227	0,55437	—1,50128	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995	303,67
*40	—0,77276	0,63469	—1,21754	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996	309,40
50	—0,70554	0,70867	—0,99558	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	315,13
60	—0,63127	0,77557	—0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997	320,86
70	—0,55069	0,83471	—0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	326,59
80	—0,46460	0,88552	—0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	332,32
90	—0,37388	0,92748	0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999	338,05
6,00	—0,27942	0,96017	—0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999	343,77
*30	+0,01681	0,99986	+0,01681	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999	360,96

* Дополнительную таблицу значений $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π см. стр. 51.

Дополнительная таблица значений аргумента $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π

(Аргумент в дуговых единицах и градусах)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x, град.
$\pi/_4 = 0{,}7854$	0,70711	0,70711	1	2,19328	0,45594	0,86867	1,32461	0,65579	45,00
$\pi/_2 = 1{,}5708$	1,00000	0,00000	$\pm\infty$	4,81049	0,20788	2,30130	2,50918	0,91717	90,00
$^3/_4\pi = 2{,}3562$	0,70711	—0,70711	—1	10,55072	0,09478	5,22797	5,32275	0,98219	135,00
$\pi = 3{,}1416$	0,00000	—1,00000	0	23,14069	0,04321	11,54874	11,59195	0,99627	180,00
$^5/_4\pi = 3{,}9270$	—0,70717	—0,70711	1	50,75402	0,01970	25,36716	25,38686	0,99922	225,00
$^3/_2\pi = 4{,}7124$	—1,00000	0,00000	$\pm\infty$	111,3178	0,00898	55,65440	55,66338	0,99984	270,00
$^7/_4\pi = 5{,}4978$	—0,70711	0,70711	—1	244,1511	0,00410	122,0735	122,0776	0,99997	315,00
$2\pi = 6{,}2832$	0,00000	1,00000	0	535,4917	0,00187	267,7449	267,7468	0,99999	360,00

Примечание. Для значений $x > 6{,}3$ будет: $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} e^x$ (по крайней мере на три десятичных знака); $\operatorname{th} x \approx 1{,}00000$.

§ 7. Длина дуги, стрелки, хорды и площадь сегмента для радиуса, равного единице

Центр. угол, град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,04448
48	0,8378	0,7865	9,69	0,8135	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025

Продолжение

Центр. угол, град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,81	1,0000	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,23578
85	1,4835	0,2627	6,65	1,3512	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,37009

Продолжение

Центр. угол, град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,04275

Продолжение

Центр. угол, град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,39621
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,46617
175	3,0544	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

Примечание. Радиус r для данной длины дуги l и стрелки h определяется из $r = l/l_0$, где l_0 — длина дуги, которая при радиусе равном единице соответствует заданному $l : h$, помещенному в графе 4 таблицы. Если r — радиус круга, а φ — центральный угол в градусах, то получим:

1) длина хорды $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$;

2) стрелка $h = r\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$;

3) длина дуги $l = \pi r \frac{\varphi^\circ}{180^\circ} = 0{,}017453\, r\varphi \approx \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$;

4) площадь сегмента $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi^\circ - \sin \varphi\right)$;

5) площадь сектора $= \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} \pi r^2 = 0{,}00872665 \varphi r^2$;

6) $l = r$ соотв. $\varphi = 57^\circ 17' 44{,}806'' = 57{,}2957795^\circ = 206264{,}806''$;

7) arc $1^\circ = \pi : 180 = 0{,}01745329252$; lg arc $1^\circ = 0{,}2418773676 - 2$;

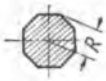
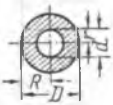
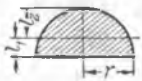
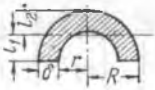
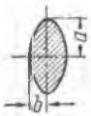
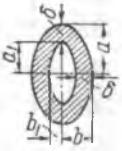
8) arc $1' = \pi : 10\,800 = 0{,}00029088821$; lg arc $1' = 0{,}4637261172 - 4$;

9) arc $1'' = \pi : 648\,000 = 0{,}00000484814$; lg arc $1'' = 0{,}6855748668 - 6$.

§ 8. Экваториальные моменты инерции и моменты сопротивления некоторых сечений

Форма сечения	Момент инерции	Момент сопротивления
	$J = \frac{bh^3}{12}$	$W = \frac{bh^2}{6}$
	$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$
	$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{6}}{12} h^3 = 0{,}1179h^3$
	$J = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$
	$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$
	$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H} = 0{,}1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$
	$J = \frac{bh^3}{36}$ $l = \frac{2}{3} h$	$W = \frac{bh^2}{24}$
	$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0{,}5413R^4$	$W = \frac{5}{8} R^3$

Продолжение

Форма сечения	Момент инерции	Момент сопротивления
	$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0{,}5413R^4$	$W = 0{,}5413R^3$
	$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 = 0{,}6381R^4$	$W^* = 0{,}6906R^3$
	$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} = 0{,}0491d^4 = 0{,}7854r^4 = F\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{F^{**}}{4} r^2$ $J \approx 0{,}05d^4$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4} = 0{,}0982d^3 = 0{,}7854r^3 = \frac{F}{4} r$ $W \approx 0{,}1d^3$
	$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = {}^1/_4 F(R^2 + r^2)$ $J \approx 0{,}05(D^4 - d^4)$	$W = \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{4}\frac{R^4 - r^4}{R}$
	$J = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = 0{,}1098r^4$	$W_1 = 0{,}2587r^3$ $W_2 = 0{,}1908r^3$ $l_1 = 0{,}4244r$
	$J = 0{,}1098(R^4 - r^4) - \frac{0{,}283R^2r^2(R - r)}{R + r}$ $J \approx 0{,}3\delta r_1^3$	$l_1 = \frac{4}{3\pi}\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $l_2 = R - l_1$
	$J = \frac{\pi a^3 b}{4} = 0{,}7854a^3b$	$W = \frac{\pi a^2 b}{4} = 0{,}7854a^2b$
	$J = \frac{\pi}{4}\left(a^3b - a_1^3b_1\right) \approx \frac{\pi}{4}a^2(a + 3b)\delta$	$W \approx \frac{\pi}{4}a(a + 3b)\delta$

* Относительно диагонали $W = 0{,}6381R^3$.
** F — площадь сечения.

§ 9. Экваториальные моменты инерции $J = \frac{\pi d^4}{64}$ и моменты сопротивления $W = \frac{\pi d^3}{32}$ для круглого сечения

d	J	W	d	J	W	d	$J \cdot 10^{-3}$	$W \cdot 10^{-2}$
1	0,0491	0,098	26	22 430	1 726	51	332,1	130,2
2	0,785	0,735	27	26 090	1 932	52	358,9	138,0
3	3,976	2,651	28	30 170	2 155	53	387,3	146,2
4	12,57	6,28	29	34 720	2 394	54	417,4	154,6
5	30,68	12,27	30	39 760	2 651	55	449,2	163,3
6	63,6	21,21				56	482,8	172,4
7	117,9	33,67	31	45 330	2 925	57	518,2	181,8
8	201,1	50,27	32	51 470	3 217	58	555	191,5
9	322,1	71,6	33	58 210	3 528	59	595	201,6
10	490,9	98,2	34	65 600	3 859	60	636	212,1
			35	73 700	4 209			
11	719	130,7	36	82 400	4 580	61	680	222,8
12	1 018	169,6	37	92 000	4 973	62	725	234,0
13	1 402	215,7	38	102 400	5 390	63	773	245,5
14	1 886	269,4	39	113 600	5 820	64	824	257,4
15	2 485	331,3	40	125 700	6 280	65	876	269,6
16	3 217	402,1				66	931	282,2
17	4 100	482,3	41	138 700	6 770	67	989	295,3
18	5 153	573	42	152 700	7 270	68	1050	308,7
19	6 400	673	43	167 800	7 810	69	1113	322,5
20	7 850	785	44	184 000	8 360	70	1179	336 7
			45	201 300	8 950			
21	9 550	909	46	219 800	9 560	71	1247	351,4
22	11 500	1045	47	239 500	10 190	72	1319	366,4
23	13 740	1194	48	260 600	10 860	73	1394	381,9
24	16 290	1357	49	283 000	11 550	74	1472	397,8
25	19 180	1534	50	306 800	12 270	75	1553	414,2

Продолжение

d	$J \cdot 10^{-3}$	$W \cdot 10^{-2}$	d	$J \cdot 10^{-4}$	$W 10^{-2}$	d	$J \cdot 10^{-4}$	$W \cdot 10^{-2}$
76	1638	431,0	101	511	1012	126	1237	1964
77	1726	448,2	102	531	1042	127	1277	2011
78	1817	465,9	103	552	1073	128	1318	2059
79	1912	484,0	104	574	1104	129	1359	2107
80	2011	502,6	105	597	1136	130	1402	2157
			106	620	1169			
81	2113	522	107	643	1203	131	1446	2207
82	2219	541	108	668	1237	132	1490	2258
83	2330	561	109	693	1271	133	1536	2310
84	2444	582	110	719	1307	134	1583	2362
85	2562	603				135	1620	2415
86	2685	624	111	745	1343	136	1679	2469
87	2812	646	112	772	1379	137	1729	2524
88	2944	669	113	800	1417	138	1780	2580
89	3080	692	114	829	1454	139	1832	2637
90	3221	716	115	859	1493	140	1886	2694
			116	889	1532			
91	3366	740	117	920	1572	141	1940	2752
92	3517	764	118	952	1613	142	1996	2811
93	3672	790	119	984	1654	143	2053	2871
94	3832	815	120	1018	1696	144	2111	2931
95	3998	842				145	2170	2993
96	4169	869	121	1052	1739	146	2230	3055
97	4346	896	122	1087	1783	147	2292	3119
98	4528	924	123	1124	1827	148	2355	3183
99	4715	953	124	1161	1872	149	2419	3248
100	4909	982	125	1198	1917	150	2485	3313

§ 10. Перевод мер

1. Линейные меры

Метры	Милли-метры	Дюймы	Футы	Сажени	Вершки	Аршины
1	1000	39,3708	3,28090	0,46870	22,4976	1,40610
0,001	1	0,03937	0,00328	0,00047	0,02250	0,00141
0,02540	25,3995	1	0,08333	0,01191	0,57142	0,03571
0,30479	304,794	12	1	0,14286	6,85714	0,42857
2,13357	2133,57	84	7	1	48	3
0,04445	44,4494	1,75	0,14583	0 02083	1	0,06250
0,71119	711,190	28	2,33333	0,33333	16	1

1 морская сажень = 6 футам.

1 кабельтов = 100 морским саженям.

1 километр = 0,9374 версты = 0,54 англ. мили.

1 верста = 1,067 километра = 0,5757 англ. мили.

1 фр. миля (морская) = 1,852 километра = 1,736 версты.

1 англ. миля (морская) = 1,853 километра = 1,737 версты.

1 геогр. миля = 7,422 километра = 6,957 версты.

Перевод кабельтовых в морские мили и метры

Кабельтовы	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Морские мили	0,990	1,980	2,970	3,960	4,95	5,94	6,93	7,92	8,91
Метры	1828	3657	5486	7315	9143	10 970	12 801	14 630	16 460

Перевод футов в метры

Футы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,305	0,610	0,914	1,219	1,524	1,829	2,134	2,438	2,743
10	3,048	3,353	3,658	3,962	4,267	4,572	4,877	5,182	5,486	5,791
20	6,096	6,401	6,705	7,010	7,315	7,620	7,925	8,229	8,534	8,839
30	9,144	9,449	9,753	10,06	10,36	10,67	10,97	11,28	11,58	11,89
40	12,19	12,50	12,80	13,11	13,41	13,72	14,02	14,32	14,63	14,93
50	15,24	15,55	15,85	16,15	16,46	16,76	17,07	17,37	17,67	17,98
60	18,29	18,59	18,89	19,20	19,51	19,81	20,12	20,42	20,73	21,03
70	21,34	21,64	21,94	22,25	22,55	22,86	23,16	23,47	23,77	24,08
80	24,38	24,69	24,99	25,30	25,60	25,91	26,21	26,52	26,82	27,13
90	27,43	27,74	28,04	28,35	28,65	28,96	29,26	29,56	29,87	30,17

Перевод метров в футы и дюймы

Метры	Футы	Дюймы	Метры	Футы	Дюймы
1	3	$3^{3}/_{8}$	20	65	$7^{3}/_{8}$
2	6	$6^{23}/_{32}$	30	98	$5^{1}/_{16}$
3	9	$10^{3}/_{32}$	40	131	$2^{13}/_{16}$
4	13	$1^{15}/_{32}$	50	164	$0^{1}/_{2}$
5	16	$4^{27}/_{32}$	60	196	$10^{3}/_{16}$
6	19	$8^{7}/_{32}$	70	229	$7^{7}/_{8}$
7	22	$11^{19}/_{32}$	80	262	$5^{5}/_{8}$
8	26	$2^{31}/_{32}$	90	295	$3^{5}/_{16}$
9	29	$6^{10}/_{32}$	100	328	1
10	32	$9^{22}/_{32}$			

Перевод дюймов с долями в миллиметры

$\left(\text{с точностью} > \frac{1}{10}\ \%\right)$

Дюймы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Миллиметры											
0	0	25,40	50,8	76,2	101,6	127,0	152,4	177,8	203,2	228,6	254,0	279,4
1/32	0,794	26,19	51,6	77,0	102,4	127,8	153,2	178,6	204,0	229,4	254,8	280,2
1/16	1,587	26,99	52,4	77,8	103,2	128,6	154,0	179,4	204,8	230,2	255,6	281,0
3/32	2,381	27,78	53,2	78,6	104,0	129,4	154,8	180,2	205,6	231,0	256,4	281,8
1/8	3,175	28,57	54,0	79,4	104,8	130,2	155,6	181,0	206,4	231,8	257,2	282,6
5/32	3,969	29,37	54,8	80,2	105,6	131,0	156,4	181,8	207,2	232,6	258,0	283,4
3/16	4,762	30,16	55,6	81,0	106,4	131,8	157,2	182,6	208,0	233,4	258,8	284,2
7/32	5,56	30,96	56,4	81,8	107,1	132,6	157,9	183,3	208,7	234,1	259,5	284,9
1/4	6,35	31,75	57,2	82,6	107,9	133,3	158,7	184,1	209,5	234,9	260,3	285,7
9/32	7,14	32,54	57,9	83,3	108,7	134,1	159,5	184,9	210,3	235,7	261,1	286,5
5/16	7,94	33,34	58,7	84,1	109,5	134,9	160,3	185,7	211,1	236,5	261,9	287,3
11/32	8,73	34,13	59,5	84,9	110,3	135,7	161,1	186,5	211,9	237,3	262,7	288,1
3/8	9,52	34,92	60,3	85,7	111,1	136,5	161,9	187,3	212,7	238,1	263 5	288,9
13/32	10,32	35,72	61,1	86,5	111,9	137,3	162,7	188,1	213,5	238,9	264,3	289,7
7/16	11,11	36,51	61,9	87,3	112,7	138,1	163,5	188,9	214,3	239,7	265,1	290,5
15/32	11,91	37,31	62,7	88,1	113,5	138,9	164,3	189,7	215,1	240,5	265,9	291,3
1/2	12,70	38,10	63,5	88,9	114,3	139,7	165,1	190,5	215,9	241,3	266,7	292,1
17/32	13,49	38,89	64,3	89,7	115,1	140,5	165,9	191,3	216,7	242,1	267,5	292,9
9/16	14,29	39,69	65,1	90,5	115,9	141,3	166,7	192,1	217,5	242,9	268,3	293,7
19/32	15,08	40,48	65,9	91,3	116,7	142,1	167,5	192,9	218,3	243,7	269,1	294,5
5/8	15,87	41,27	66,7	92,1	117,5	142,9	168,3	193,7	219,1	244,5	269,9	295,3
21/32	16,67	42,07	67,5	92,9	118,3	143,7	169,1	194,5	219,9	245,3	270,7	296,1
11/16	17,46	42,86	68,3	93,7	119,1	144,5	169,9	195,3	220,7	246,1	271,5	296,9
23/32	18,26	43,66	69,1	94,4	119,9	145,2	170,6	196,0	221,4	246,8	272,2	297,6
3/4	19,05	44,45	69,9	95,2	120,6	146,0	171,4	196,8	222,2	247,6	273,0	298,4
25/32	19,84	45,24	70,6	96,0	121,4	146,8	172,2	197,6	223,0	248,4	273,8	299,2
13/16	20,64	46,04	71,4	96,8	122,2	147,6	173,0	198,4	223,8	249,2	274,6	300,0
27/32	21,43	46,83	72,2	97,6	123,0	148,4	173,8	199,2	224,6	250,0	275,4	300,8
7/8	22,22	47,62	73,0	98,4	123,8	149,2	174 6	200,0	225,4	250,8	276,2	301,6
29/32	23,02	48,42	73,8	99,2	124,6	150,0	175,4	200,8	226,2	251,6	277,0	302,4
15/16	23,81	49,21	74,6	100,0	125,4	150,8	176,2	201,6	227,0	252,4	277,8	303,2
31/32	24,61	50,0	75,4	100,8	126,2	151 6	177,0	202,4	227,8	253,2	278,6	304,0

2. Квадратные меры

Кв. метры	Кв. сантиметры	Кв. дюймы	Кв. футы	Кв. сажени	Кв. вершки	Кв. аршины
1	10000	1550,06	10,7643	0,21968	506,143	1,97712
0,0001	1	0,15501	0,00108	0,000022	0,05061	0,000103
0,00065	6,45137	1	0,00694	0,00014	0,32653	5,00128
0,09290	928,994	144	1	0,02041	47,0195	0,18367
4,55210	45521,0	7056	49	1	2304	9
0,00198	19,7538	3,06250	0,02127	0,000434	1	0,00391
0,50579	5057,90	784	5,44444	0,11111	256	1

Перевод кв. футов в кв. метры

Кв. футы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,093	0,1858	0,279	0,373	0,464	0,557	0,650	0,743	0,836
10	0,929	1,022	1,115	1,208	1,301	1,393	1,486	1,579	1,672	1,765
20	1,858	1,951	2,044	2,137	2,230	2,322	2,415	2,508	2,601	2,694
30	2,787	2,871	2,973	3,066	3,159	3,251	3,344	3,437	3,530	3,623
40	3,716	3,809	3,902	3,995	4,088	4,180	4,273	4,366	4,459	4,552
50	5,645	4,738	4,831	4,924	5,017	5,109	5,202	5,295	5,388	5 481
60	5,574	5,667	5,760	5,853	5,946	6,038	6,131	6,224	6,317	6,410
70	6,503	6,596	6,689	6,782	6,875	6,967	7,069	7,153	7,246	7,339
80	7,432	7,525	7,618	7,711	7,804	7,896	7,989	8,082	8,175	8,268
90	8,361	8,454	8,541	8,640	8,733	8,825	8,918	9,011	9,104	9,197

100 кв. фут. = 9,29 кв. метра

Перевод кв. метров в кв. футы

Кв. метры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	10,76	21,53	32,29	43,06	53,82	64,58	75,35	86,11	96,88
10	107,6	118,4	129,2	139,9	150,7	161,5	172,2	183,0	193,8	204,5
20	215,3	226,0	236,9	247,6	258,3	269,1	279,9	290,6	301,4	312,2
30	322,9	333,7	344,4	355,2	366,0	376,7	387,5	398,3	409,0	419,8
40	430,5	441,3	452,1	462,8	473,6	484,4	495,1	505,9	516,7	527,4
50	538,2	549,0	560,0	570,5	581,2	592,0	602,8	613,5	624,3	635,1
60	645,8	656,6	667,4	678,1	688,9	699,7	710,4	721,2	731,9	742,7
70	753,4	764,2	775,0	785,8	796,5	807,3	818,0	828,8	839,6	850,3
80	861,1	871,9	882,6	893,4	904,2	914,9	925,7	936,5	947,2	958,0
90	968,8	979,5	990,3	1001	1012	1023	1033	1044	1055	1066

3. Кубические меры

1 куб. метр = 2,78 куб. аршина = 35,31 куб. фута = 61 020 куб. дюймов = = 11 386 куб. вершкам = 0,103 куб. сажени.

1 куб. фут = 0,02832 куб. метра = 1728 куб. дюймам = 0,7872 куб. аршина = 322,4 куб. вершка.

1 куб. дюйм = 16,39 куб. сантиметра; 1 куб. сантиметр = 0,06102 куб. дюйма.

1 англ. тонна (регистровая) = 100 куб. футам = 2,83 куб. метра.

1 российский ласт = 200 куб. футам = 5,66 куб. метра.

1 ведро = 12,3 литра.

Таблица взаимного перевода кубических мер

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Куб. дюймы в куб. сантиметры	16,39	32,77	49,16	65,53	81,93	98,32	114,7	131,1	147,5
Куб. сантиметры в куб. дюймы	0,06102	0,1220	0,1831	0,2441	0,3051	0,3661	0,4272	0,4882	0,5492
Куб. футы в куб. метры	0,0283	0,0566	0,0849	0,1133	0,1416	0,1699	0,198	0,2265	0,2548
Куб. метры в куб. футы	35,32	70,63	105,9	141,3	176,6	211,9	247,2	282,5	317 8

4. Весовые меры

Пуды	Фунты	Тонны метрич.	Килограммы	Тонны англ.	Фунты англ.
1	40	$1638 \cdot 10^{-5}$	$1638 \cdot 10^{-2}$	$1612 \cdot 10^{-5}$	$3611 \cdot 10^{-2}$
$25 \cdot 10^{-3}$	1	$4095 \cdot 10^{-7}$	$4095 \cdot 10^{-4}$	$40303 \cdot 10^{-8}$	$9028 \cdot 10^{-4}$
$6105 \cdot 10^{-2}$	2442	1	1000	$9842 \cdot 10^{-4}$	2205
$6105 \cdot 10^{-5}$	$2442 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	1	$9842 \cdot 10^{-7}$	$2205 \cdot 10^{-3}$
$6203 \cdot 10^{-2}$	2481	$1016 \cdot 10^{-3}$	1016	1	2240
$2769 \cdot 10^{-5}$	$11076 \cdot 10^{-4}$	$4535 \cdot 10^{-7}$	$4536 \cdot 10^{-4}$	$4464 \cdot 10^{-7}$	1

Перевод килограммов в пуды

Килограммы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,061	0,122	0,183	0,244	0,305	0,366	0,427	0,489	0,550
10	0,610	0,672	0,733	0,794	0,855	0,916	0,977	1,038	1,099	1,160
20	1,221	1,282	1,343	1,404	1,465	1,526	1,587	1,648	1,700	1,770
30	1,832	1,893	1,954	2,015	2,076	2,137	2,198	2,259	2,320	2,381
40	2,442	2,503	2,564	2,623	2,686	2,747	2,808	2,869	2,931	2,992
50	3,053	3,114	3,175	3,236	3,297	3,358	3,419	3,480	3,541	3,602
60	3,663	3.724	3,785	3,846	3,907	3,968	4,029	4,090	4,151	4,213
70	4,274	4,335	4,396	4,457	4,518	4,579	4,640	4,701	4,762	4,823
80	4,884	4,945	5,006	5,067	5,128	5,189	5,250	5,311	5,372	5,435
90	5,494	5,555	5,616	5,678	5,739	5,799	5,860	5,921	5,982	6,044

Перевод килограммов в фунты

Килограммы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	2,44	4,88	7,33	9,77	12,21	14,65	17,09	19,54	21,98
10	24,42	26,86	29,30	31,75	34,19	36,63	39,07	41,51	43,96	46,40

Перевод пудов и фунтов в килограммы

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Пуды	0	—	16,38	32,76	49,14	65,52	81,90	98,29	114,6	131,0	147,4
	10	163,8	180,2	196,6	212,9	229,3	245,7	262,1	278,5	294,8	311,2
	20	327,6	344,0	360,4	376,8	393,1	409,5	425 9	442,3	458,7	475,0
	30	491,4	507,8	524,2	540,6	556,9	573,3	589,7	606,1	622,5	638,9
	40	655,2	671,6	688,0	704,5	720,8	737,1	753,5	769,9	786,3	802,7
	50	819,0	835,4	851,8	868,2	884,6	900,9	917,3	933,7	950,1	966,5
	60	982,9	999,2	1015	1032	1048	1065	1081	1097	1114	1130
	70	1147	1163	1179	1196	1212	1228	1245	1261	1278	1294
	80	1310	1327	1343	1359	1376	1392	1409	1425	1441	1458
	90	1474	1491	1507	1523	1540	1556	1572	1589	1605	1622
Фунты	0	—	0,410	0,819	1,229	1,638	2,048	2,457	2,867	3,276	3,686
	10	4,095	4,505	4,914	5,324	5,733	6,143	6,552	6,962	7,371	7,781
	20	8,190	8,600	9,009	9,419	9,828	10,14	10,649	11,06	11,46	11,87
	30	12,28	12,69	13,10	13,51	13,92	14,33	14,74	15,15	15,56	15,97

5. Меры давления

Атмосфера новая, килограмм на кв. сантиметр	Высота вод. ст., метры	Русск. фунт на кв. дюйм	Пуд на кв. дюйм	Англ. фунт на кв. дюйм	Англ. тонна на кв. дюйм
1	10	15,75	0,394	14,22	0,00635
0,1	1	1,575	0,0394	1,422	0,000635
0,0635	0,635	1	0,0250	0,9028	0,0004
2,54	25,4	40	1	36,11	0,01612
0,0703	0,703	1,107	0,0277	1	0,000446
157,5	1575	2481	62,03	2240	1

1 килограмм на 1 кв. метр = 0,00567 пуда на 1 кв. фут = 0,000091 англ. тонны на 1 кв. фут.

1 пуд на 1 кв. фут = 176,3 килограмма на 1 кв. метр = 0,01612 англ. тонна на 1 кв. фут.

1 англ. тонна на 1 кв. фут = 10 940 килограммам на 1 кв. метр = 62,03 пуда на 1 кв. фут.

1 метрическая тонна на 1 кв. метр = 1 метру вод. ст. = 0,1 атмосферы.

1 старая атмосфера = 1,033 килограмма на кв. сантиметр.

1 новая атмосфера = 0,9678 старой атмосферы.

Перевод килограммов на кв. сантиметр в пуды на кв. дюйм

Килограмм на кв. сантиметр	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	—	3 9	7,9	11,8	15,8	19,7	23,6	27,6	31,5	35,4
100	39,4	43,3	47,3	51,2	55,2	59,1	63,1	67,0	71,0	74,9
200	78,8	82,7	86,7	90,6	94,6	98,5	102,5	106,4	110,4	114,3
300	118,2	122,1	126,1	130,0	134,0	137,8	141,8	145,7	149,7	153,6
400	157,5	161,4	165,4	169,3	173,3	177,2	181,2	185,1	189,0	193,0
500	196,9	200,8	204,8	208,7	212,7	216,6	220,6	224,5	228,5	232,4
600	236,3	240,2	244,2	248,1	252,1	256,0	260,0	263,9	267,9	271,8
700	275,7	279,6	283,6	287,5	291,5	295,4	299,4	303,3	307,3	311,2
800	315,1	319,0	323,0	326,9	330,9	334,8	338,8	342,7	346,7	350,6
900	354,5	358,4	362,4	366,3	370,3	374,1	378,1	382,0	386,0	390,0

6. Нагрузка на погонные единицы

Килограммы на пог. метры	Пуды на пог. футы	Фунты на пог. футы	Англ. тонны на пог. футы	Пуды на пог. сажени
1	0,01861	0,7443	0,0003	0,1303
53,74	1	40	0,01612	7
1,344	0,0250	1	0,000403	0,1750
3333	62,03	2481	1	434,2
7,678	0,1429	5,714	0,002303	1

7. Меры скорости

Километров в час	Верст в час	Узлов	Метров в секунду	Футов в секунду
1	0,9374	0,54	0,2778	0,9115
1,067	1	0,576	0,2964	0,972
1,853	1,737	1	0,5148	1,688
3,60	3,375	1,942	1	3,281
1,097	1,029	0,5920	0,3048	1

1 фр. узел = 1 англ. узлу = 1 англ. миле в час = 6080 фут. в час.

Перевод узлов в километры в час, в версты в час, в метры в сек., в футы в мин.

Узлы	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1	2	3	4	5	6	7	8
Километры в час	0,46	0,93	1,39	1,85	3,71	5,56	7,41	9,27	11,1	13,0	14,8
Версты в час	0,43	0,87	1,30	1,74	3,47	5,21	6,95	8,69	10,4	12,2	13,9
Метры в секунду	0,129	0,257	0,386	0,515	1,03	1,54	2,06	2,57	3,09	3,60	4,12
Футы в минуту	**25,3**	**50,7**	**76**	**101**	**203**	**304**	**405**	**507**	**608**	**709**	**811**

8. Перевод в различные системы единиц изгибающего момента, момента сопротивления, мощности, веса и объема воды, работы

Изгибающий момент:

1 пудо-фут = 4,993 килограммометра; 1 пудо-дюйм = 0,4161 килограммометра; 1 килограммометр = 0,2003 пудо-фута; 1 килограммосантиметр = = 0,02402 пудо-дюйма.

Момент сопротивления:

1 куб. сантиметр = 0,061 куб. дюйма; 1 куб. дюйм = 16,39 куб. сантиметра.

Мощность:

1HP (англ. лошадиная сила) = 550 англ. фунто-футам в сек. = 76,04 килограммометра в сек. = 746 ваттам = 1,0139 лошадиной силы.

1 лошадиная сила (метрическая лошадиная сила) = 75 килограммометрам в сек. = 15 пудо-футам в сек. = 735,7 ватта = 0,9863 HP.

Вес и объем воды:

1 куб. фут воды = 69,14 фунта = 1,7286 пуда = 2,302 ведра;

1 ведро воды = 30,034 фунта = 0,7509 пуда = 12,3 килограмма = = 0,4345 куб. фута.

Работа:

1 килограммометр = 8,01 фунто-фута = 0,00323 англ. тонно-фута = = $0,81 \cdot 10^7$ эрга = 9,81 джоуля.

Перевод пудо-футов в килограммометры и килограммометров в пудо-футы

	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Пудо-футы в килограммометры	49,93	99 86	149 8	199.7	249 6	299 6	249 5	399 4	449,4
Килограммометры в пудо-футы	2,003	4,006	6,008	8,011	10.01	12,02	14,02	16,02	18,03

§ 11. Численные значения часто встречающихся величин

Величина	Численное значение	Величина	Численное значение
π	3,14159	g	9.81
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	g^2	96,236
$\frac{\pi}{3}$	1,04720	$\sqrt{g}$	3,132
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$\frac{1}{2g}$	0,051
π^2	9,86960	$\sqrt{2g}$	4,43
π^3	31,00628	$\pi\sqrt{g}$	9,84
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	$\pi\sqrt{2g}$	13,916
$\frac{1}{\pi^2}$	0,10132	$\lg g$	0,992
$\sqrt{\pi}$	1,77245	e	2,71828
$\sqrt{2\pi}$	2,50663	$\frac{1}{e}$	0,36788
$\pi\sqrt{2}$	4,44288	e^2	7,38906
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,25331	$\sqrt{e}$	1,64872
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10}$	0,43429
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$	1,16245	$\frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e} = \ln 10$	2,30258
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,84526	arc $1^\circ = \frac{\pi}{180}$	0,017453
$\lg \pi$	0,49715	1 радиан	$57^\circ 17' 45'' = 57{,}2958^\circ$
$\ln \pi$	1,14473		

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Aa	— а	*Nn*	— эн
Bb	— бэ	*Oo*	— о
Cc	— цэ	*Pp*	— пэ
Dd	— дэ	*Qq*	— ку
Ee	— е	*Rr*	— эр
Ff	— эф	*Ss*	— эс
Gg	— ге (же)	*Tt*	— тэ
Hh	— ха (аш)	*Uu*	— у
Ii	— и	*Vv*	— вэ
Jj	— йот (жи)	*Ww*	— дубль-вэ
Kk	— ка	*Xx*	— икс
Ll	— эль	*Yy*	— игрек
Mm	— эм	*Zz*	— зэт

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Αα	— альфа	Νν	— ню
Ββ	— бэта	Ξξ	— кси
Γγ	— гамма	Οο	— омикрон
Δδ	— дельта	Ππ	— пи
Εε	— эпсилон	Ρρ	— ро
Ζζ	— дзэта	Σσ	— сигма
Ηη	— эта	Ττ	— тау
Θϑ (θ)	— тэта	Φφ	— фи
Ιι	— иота	Χχ	— хи
Κκ	— каппа	Υυ	— ипсилон
Λλ	— ламбда	Ψφ	— пси
Μμ	— мю	Ωω	— омега

ГЛАВА 2

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 12. Общие правила операций над приближенными величинами

Основные принципы

Всякий расчет в конечном итоге связан с числовыми действиями над приближенными величинами, а потому основан на приближенных величинах. Погрешность в вычислении и в данных расчета можно рассматривать с двух точек зрения:

1) абсолютная погрешность величины a: Δa.

2) относительная погрешность величины a: $\frac{\Delta a}{a}$.

Абсолютные погрешности определяются точностью измерений над данными, входящими в расчет; например, если деталь весом $a = 5$ *кг* взвешена на весах, дающих точность до 10 *г*, то $\Delta a = 0{,}01$ *кг*; относительная ошибка при этом $\frac{\Delta a}{a} = 0{,}002$, или 0,2%.

Точность производства самого расчета лучше всего характеризуется относительной ошибкой.

Число верных знаков

Обыкновенно в приближенном числе последняя цифра справа является сомнительной. Так, если число 2634,5 известно с точностью до 0,5%, мы должны писать 2630, причем число 3 — сомнительно.

Если в каком-либо числе оставить n цифр слева, а справа от них поставить нули, то абсолютная ошибка при этом будет меньше единицы первой оставленной цифры, относительная же меньше $\frac{1}{10^{n-1}}$.

Так, например, взяв вместо 564 312 число 564 300, делаем абсолютную ошибку меньше 100, относительную — меньше $\frac{1}{10^2} = 0{,}001$.

Правило дополнения

Если первая отбрасываемая цифра $\geqslant 5$, то надо прибавить к последней оставляемой цифре единицу; тогда относительная ошибка $< \frac{5}{10^n}$. Так, имея 564 373, возьмем 564 400 с абсолютной ошибкой < 100 и относительной $< \frac{5}{10^4} = 0{,}0005$ $\left(\text{точнее} < \frac{5}{5 \cdot 10^4} = 0{,}0001\right)$.

Установление степени достаточной точности

Приступая к расчету, надо сначала установить, с какой степенью точности он будет производиться, т. е. задать общую относительную погрешность. Последняя устанавливается, исходя из точности данных, с которыми придется иметь дело, и из количества и рода действий над ними. В большинстве технических расчетов точность 0,001, а иногда и 0,01, бывает вполне достаточна. Сообразуясь с этим, не надо гоняться за лишней точностью в данных и большой точностью в вычислениях, чтобы не затрачивить труд впустую. Точно так же, если среди данных задачи есть величина с большой относительной погрешностью, то остальные величины, сообразуясь с нижеприведенными правилами, надо задавать примерно с той же погрешностью.

§ 13. Погрешность результатов простейших действий

Погрешность суммы и разности

Абсолютные и относительные погрешности результатов простейших действий над приближенными величинами могут быть каждый раз легко вычислены, если абсолютную ошибку Δa будем считать равной как бы приращению или дифференциалу величины a. Тогда стоит лишь продифференцировать формулу и мы найдем абсолютную погрешность.

Если a, b, c — приближенные числа и

$$A = a + b + c,$$

то

$$\Delta A = \Delta a + \Delta b + \Delta c,$$

т. е. абсолютные погрешности складываются арифметически.

Относительная погрешность

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b + c},$$

таким образом $\frac{\Delta A}{A}$ меньше большей из погрешностей $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ и $\frac{\Delta c}{c}$, если a, b и c все больше нуля.

Если среди слагаемых есть числа меньше нуля, то относительная погрешность может сильно возрасти. Так, в случае если

$$A = a - b,$$

где a и b больше нуля, причем a близко к b, то

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a - \Delta b}{a - b}.$$

Но так как Δa и Δb могут быть разных знаков и $a - b$ мало, то $\frac{\Delta A}{A}$ может быть велико (потеря точности). Чтобы не потерять точности при этих обстоятельствах, надо, как правило, находить разность двух близких по численному значению величин по возможности непосредственно.

Что касается суммирования, то всегда желательно, чтобы абсолютные погрешности слагаемых были примерно одного порядка.

Следовательно, складывая числа, нужно выписать наибольшее слагаемое, вычислив его по возможности точнее; остальные, меньшие слагаемые нужно брать с точностью до единиц того разряда, которому соответствует последняя значащая цифра большего числа, или до единиц следующего младшего разряда.

Погрешность произведения $A = ab$

$$\Delta A = a\Delta b + b\Delta a \text{ и } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

т. е. относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

Погрешность частного $A = \frac{a}{b}$

$$\Delta A = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2} \text{ и } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b},$$

т. е. относительная погрешность частного меньше или равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя. Здесь Δa и Δb должны считаться с разными знаками.

Погрешность степени и корня $A = a^n$

$$\Delta A = na^{n-1}\,\Delta a \text{ и } \frac{\Delta A}{A} = \frac{n\Delta a}{a},$$

т. е. возвышение в степень ($n > 1$) увеличивает погрешность и извлечение корня ($n < 1$) ее уменьшает.

Пример 1. Найти погрешность модуля Юнга E, определяемого по прогибу f стержня прямоугольного сечения, опертого концами

$$E = \frac{1}{4}\,\frac{Pl^3}{ah^3f},$$

где P — сосредоточенная сила; l — пролет; h и a — стороны поперечного сечения; f — стрелка прогиба.

Логарифмируем и дифференцируем

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta P}{P} + 3\,\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta a}{a} - 3\,\frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta f}{f}.$$

Пусть относительные погрешности

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} = 0{,}01;\quad \frac{\Delta P}{P} = 0{,}0001 \text{ и } \frac{\Delta f}{f} = 0{,}05.$$

Тогда

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 0{,}12.$$

Из приведенных данных видно, что стрелки следовало бы измерять точнее, а веса можно измерять и не так точно.

Пример 2. Найти $\sin 5°$ с точностью до 0,00001. С какой точностью нужно перевести 5° в радианы? По формуле Маклорена

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Ориентировочно $5° \approx 0{,}1$. Следовательно, в ряде достаточно взять два первых члена; чтобы получить нужную точность, учитывая, что абсолютная ошибка меньше или равна сумме таковых в каждом слагаемом, можно взять x с точностью до 0,000005, т. е.

$$x = 3{,}1416\,\frac{5}{180} = 0{,}08727;\quad \frac{x^3}{3!} = 0{,}00011.$$

Следовательно, $\sin 5° = 0{,}08716$. Ошибка будет меньше

$$\frac{x^5}{5!} < 10^{-7} < 5\cdot 10^{-6}.$$

Погрешность в вычислении $\sin x$, $\cos$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

$$\frac{\Delta(\sin x)}{\sin x} = \operatorname{ctg} x\,\Delta x,\quad \frac{\Delta(\cos x)}{\cos x} = -\operatorname{tg} x\,\Delta x,\quad \frac{\Delta(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{2\Delta x}{\sin 2x} \text{ и } \frac{\Delta(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} x} = -\frac{2\Delta x}{\sin 2x},$$

т. е. если абсолютная ошибка в отсчете углов одинакова, то выгоднее вычислять синусы больших углов, косинусы малых, тангенсы и котангенсы углов, близких к 45°.

§ 14. Некоторые приближенные формулы

Для упрощения вычислений с числами, близкими к единице, полезно пользоваться следующими формулами:

1) $(1+\alpha)(1+\beta) \approx 1+\alpha+\beta$;
2) $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1-\alpha$;
3) $\frac{1+\alpha}{1+\beta} \approx 1+\alpha-\beta$;
4) $\frac{1}{1-\alpha} \approx 1+\alpha$;
5) $(1+\alpha)^n \approx 1+n\alpha$,
6) $(1+\alpha)^2 \approx 1+2\alpha$;
7) $(1-\alpha)^3 \approx 1-3\alpha$;
8) $\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{2}$;
9) $\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{3}$;
10) $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \approx 1-\frac{\alpha}{2}$;
11) $\ln(1+\alpha) \approx \alpha-\frac{\alpha^2}{2}$;
12) $\ln N = 2{,}302585 \lg N$;
13) $\sin\alpha \approx \alpha$ (точность 1% для углов до 14°);
14) $\cos\alpha = 1$ (точность 1% для углов до 8°);
15) $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ (точность 1% для углов до 9,7°);
16) $\operatorname{ctg}\alpha \approx \frac{1}{\alpha}$ (точность 1% для углов до 9,7°);
17) $\operatorname{sh}\alpha \approx \alpha$ (точность 1% для α до 0,24);
18) $\operatorname{ch}\alpha \approx 1$ (точность 1% для α до 0,14);
19) $e^x \approx 1+x$ (точность 1% для x до 0,14).

ГЛАВА 3

АЛГЕБРА

§ 15. Тождественные преобразования

Степени

Действия со степенями подчиняются следующим пяти правилам:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$; 4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

2. $(ab)^m = a^m b^m$; 5. $(a^m)^n = a^{mn}$.

3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

Эти пять правил справедливы для любых показателей, если принять

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m;$$

$$a^0 = 1; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Применение степенных формул:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
$(a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \mp b^3$;
$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) = a^n - b^n$;
$(a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + b^{2n}) = a^{2n+1} + b^{2n+1}$;
$(a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \ldots - b^{2n-1}) = a^{2n} - b^{2n}$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

Корни

Для вычислений с корнями имеют силу следующие пять правил:

1. $\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$;

2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

3. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$;

4. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[\frac{m}{q}]{\frac{n}{a^q}}$;

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Применяя эти правила, можно получить:

1. $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$;

2. $\sqrt[-m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n}}$;

3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[-2]{a}} = \sqrt{\frac{a}{a^{-1}}} = \pm a$;

4. $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$;

5. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$;

6. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$.

§ 16. Логарифмы

Пользуются двумя системами логарифмов: 1) десятичными (или бригговыми) с основанием 10; их применяют для практических вычислений; обозначение: log или lg; 2) натуральными (или неперовыми) с основанием $e = 2{,}71828\ldots$; область их применения — высшая математика и теоретические вычисления; обозначение: ln. Число (положительное или отрицательное) целых единиц логарифма называется характеристикой (K), а правильная десятичная дробь логарифма — его мантиссой (M). При $10 > a > 1$ $\lg a$ имеет характеристику $K = 0$. Характеристика определяется непосредственно по числу: для чисел, больших единицы, характеристика равна числу цифр (целых) числа без единицы, для правильных дробей характеристика отрицательна и равна числу нулей, включая и нуль целых.

$\log_a b = c$ означает $a^c = b$.

Переход от натуральных логарифмов к десятичным и обратно совершается по формулам:

$$\ln x = 2{,}303 \lg x;$$

$$\lg x = \frac{1}{2{,}303} \ln x = 0{,}4343 \ln x$$

Из определения логарифма следует:

$$\lg 1 = 0; \qquad \ln 1 = 0;$$
$$\lg 0 = -\infty; \qquad \ln 0 = -\infty,$$
$$\lg \infty = \infty; \qquad \ln \infty = \infty;$$
$$\lg 10 = 1; \qquad \ln e = 1.$$

Основные правила логарифмирования:

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b; \qquad \lg a^n = n \lg a;$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b; \qquad \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a.$$

Примеры применения этих формул:

I. $a = e^{\ln a} = 10^{\lg a}$,

откуда

$$\ln\left(e^{\ln a}\right) = \ln\left(10^{\lg a}\right);$$

$$\ln a = \lg a \ln 10 = 2{,}303 \lg a \text{ (формула перехода).}$$

II. Из равенства $K \ln v + \ln p = \text{const}$ следует $\ln (pv^K) = \text{const}$

или $pv^K = e^{\text{const}} = \text{const}$ (адиабата).

III. Равенство $h = c(\ln B - \ln b)$ дает $h = c \ln \frac{B}{b}$ или $B = be^{\frac{h}{c}}$.

§ 17. Теория соединений

а. Число всех возможных *перестановок* (соединение всех элементов в любом возможном порядке) из n различных элементов будет:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n! \text{ (произносится: } n\text{-факториал).}$$

Если между n элементами имеется p одинаковых элементов одного рода, q элементов другого рода, r элементов третьего рода и т. д., то число всех возможных перестановок

$$\frac{n!}{p!q!r!\ldots}$$

Например, число перестановок из пяти элементов a, a, a, b, b, $\frac{5!}{3!2!} = 10$, а именно: 1) *aaabb*; 2) *aabba*; 3) *aabab*; 4) *abaab*; 5) *ababa*; 6) *abbaa*; 7) *baaab*; 8) *baaba*; 9) *babaa*; 10) *bbaaa*.

б. Числом *сочетаний* называется число различных способов, какими можно из n элементов выбрать k элементов; обозначается C_n^k. Это число, предполагая все элементы различными (без повторения), можно выразить так

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \text{ или } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $\binom{n}{k}$ — условное обозначение указанной операции над n и k, которое читают n над k.

Пример 1. Сколько возможных сочетаний можно сделать из девяти сигнальных огней (например, трамвайные отличительные огни) разного цвета, группируя их по два?

Имеем $n = 9$; $k = 2$

$$C_n^k = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36 \text{ (без повторений).}$$

Число сочетаний с повторениями, т. е. если учесть, что каждый элемент может входить в соединение до k раз, будет

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Пример 2. Если допустить в приведенном примере возможность появления огней двух одинаковых цветов (например, два белых, два красных и пр.), то число группировок будет

$$\binom{9+2-1}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45.$$

в. Если в отдельных группах сочетаний произвести перестановки, то получаются *размещения*. Число размещений из n элементов по k выразится так

$$\text{без повторений: } \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}; \text{ с повторениями: } n^k.$$

Пример 3. Если в предыдущем примере допустить возможность перестановки цветов (например, левый огонь на правый), то число всех группировок будет:

$$\text{без повторений: } \binom{9}{2} 2! = 72; \quad \text{с повторениями } 9^2 = 81.$$

§ 18. Бином Ньютона

а) Формула бинома:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1} b +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a^{n-} b^3 + \ldots + (-1)^n b^n.$$

Этот ряд—конечный при n целом и положительном; в противном случае — бесконечный. Коэффициенты при степенях называются „биномиальными" коэффициентами.

Обозначают

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

(читают: „n над k").

б) Правила для коэффициентов бинома:

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
3. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$;
4. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;
5. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} \frac{n+1}{n-k+1}$;
6. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

§ 19. Прогрессии

а) Арифметическая прогрессия.

В арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d n-й член будет $u_n = a + (n-1)d$.

Сумма n первых членов.

$$S = \frac{1}{2}(a + u_n)n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d].$$

б) Геометрическая прогрессия.

В геометрической прогрессии с первым членом a, знаменателем q n-й член равен $u_n = aq^{n-1}$.

Сумма n первых членов

$$S = \frac{u_n q - a}{q-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Для бесконечно убывающей прогрессии предел суммы членов будет

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

§ 20. Уравнения 2-й степени и приводящиеся к ним

$$x^2 + px + q = 0; \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Свойства корней

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}.$$

Биквадратное уравнение имеет вид

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

Корни этого уравнения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}; \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}; \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

1. Все корни вещественны, если корни соответственного квадратного уравнения больше нуля, т. е. при $\frac{b}{a} < 0$ и $\frac{c}{a} > 0$, причем $b^2 > 4ac$.

2. Если $b^2 < ac$, то все корни комплексные.

3. Если корни соответственного квадратного уравнения оба отрицательны, т. е. $\frac{b}{a} > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ и $b^2 > 4ac$, то все четыре корня мнимые.

4. Во всех остальных случаях будем иметь два вещественных и два мнимых корня.

Примечание. Корни биквадратного уравнения имеют форму

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}.$$

Это выражение можно привести к виду $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, где m, n — рациональны, если $A^2 - B$ есть точный квадрат. Действительно, будем иметь

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B})}.$$

В применении к биквадратному уравнению эта формула примет вид

$$\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)}.$$

Таким образом, корни биквадратного уравнения выражаются суммами двух квадратных корней из рациональных чисел, если $\frac{c}{a}$ является точным квадратом.

Если корни биквадратного уравнения все комплексные ($b^2 < 4ac$), то они имеют вид:

$$x_{1,2} = \pm(p + qi);$$

$$x_{3,4} = \pm(p - qi),$$

где

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)};$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)}.$$

Возвратное уравнение 4-й степени имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0.$$

Решение его приводится к решению квадратного уравнения, если перепи сать данное уравнение в виде

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

и сделать подстановку $x \pm \frac{1}{x} = y$.

Тогда получим

$$a(y^2 \mp 2) + by + c = 0.$$

§ 21. Уравнения 3-й степени

1. Численное решение

Общий вид полного уравнения 3-й степени

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0.$$

Подстановкой $y = x - \frac{1}{3} a_1$ уравнение приводится к виду, не содержащему квадрата неизвестного,

$$x^3 + px + q = 0;$$

при этом, если:

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, то уравнение имеет один вещественный и два мнимых сопряженных корня;

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то все корни вещественные и различные;

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, все корни вещественные и среди них есть кратный.

Решение уравнения разбивается на три случая.

Случай а

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$; корни найдутся по формуле

$$x = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3},$$

где $k = 0, 1, 2$, а $r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$, $\cos\varphi = -\frac{q}{2r}$ и, следовательно,

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2r}\right).$$

Случай б

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ и $p < 0$; корни будут

$$x_1 = -\frac{2}{\sin 2\varphi}\sqrt{-\frac{p}{3}}; \quad x_{2,3} = \frac{1}{\sin 2\varphi}\sqrt{-\frac{p}{3}} \pm i \operatorname{ctg} 2\varphi \sqrt{-p},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$, а $\sin\omega = \frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$.

Случай в

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ и $p > 0$; значения корней будут

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg} 2\varphi; \quad x_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg} 2\varphi \pm i\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$; $\operatorname{tg}\omega = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$.

Пример 1. Найти корни уравнения $x^3 + 9x^2 + 23x + 14 = 0$. Полагая $x = y - 3$ приводим уравнение к виду $y^3 - 4y - 1 = 0$, имеющему три вещественных корня:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{27}}{16}; \quad \lg\cos\varphi = \bar{1},51156;$$

$$\varphi = 71°2'56'';$$

$$\frac{\varphi_1}{3} = 23°40'59''; \quad \frac{\varphi_2}{3} = 143°40'59''; \quad \frac{\varphi_3}{3} = 263°40'59'';$$

$$\lg\frac{4}{\sqrt{3}} = 0,36350;$$

$$\lg y_1 = 0{,}32529;\quad \lg(-y_2) = 0{,}26970;\quad \lg(-y_3) = 1{,}40501;$$

$$y_1 = 2{,}1149;\quad y_2 = -1{,}8608;\quad y_3 = -0{,}2541;$$

$$x_1 = -0{,}8851;\quad x_2 = -4{,}8608;\quad x_3 = -3{,}2541.$$

Пример 2. Решить уравнение: $x^3 - 3x + 5 = 0$.

$$\lg\sin\omega = \bar{1}{,}60206;\quad \omega = 23°34'41'';\quad \frac{\omega}{2} = 11°47'20'';$$

$$\lg\operatorname{tg}\varphi = \bar{1}{,}77318;\quad \varphi = 30°40'31'';\quad 2\varphi = 61°21'2'';$$

$$\lg\frac{1}{\sin 2\varphi} = 0{,}05672;\quad \frac{1}{\sin 2\varphi} = 1{,}1395;$$

$$\lg(\sqrt{-p}\cdot\operatorname{ctg} 2\varphi) = \bar{1}{,}97602;\quad \sqrt{-p}\cdot\operatorname{ctg} 2\varphi = 0{,}94628;$$

$$x_1 = -2{,}2790;\quad x_{2,3} = 1{,}1395 \pm 0{,}94628\, i.$$

2. Формула Кардана

В алгебраической форме решение кубического уравнения, предложенное *Карданом*, имеет вид

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Так как каждый из кубических радикалов имеет три значения, то вообще для x получается девять различных значений; из них надлежит выбрать лишь те, произведение которых равно $-\frac{p}{3}$.

3. Номограмма для отыскания вещественных корней уравнения вида $x^3 + Ax^2 + B = 0$

При расчете тонких пластин конечной жесткости приближенным методом приходится находить вещественные корни уравнения вида $x^3 + Ax^2 + B = 0$. Для нахождения этих корней удобно воспользоваться номограммой, приведенной на рис. 1.

Соединяя линейкой точки, отвечающие данным значениям A и B на соответствующих шкалах, находим положительные корни уравнения на шкале x_a и x_b или x_c в зависимости от того, какими из отметок (a, b или c) на шкале B мы пользуемся. Соединяя точки, соответствующие значениям A и B с обратными знаками, находим абсолютные значения отрицательных корней.

Ниже приводятся примеры пользовани.. номограммой.

Пример 1. $x^3 + 5x^2 - 7 = 0$. Соединяя 5 и -7, находим $x_1 = 1{,}08$ на шкале x_a. Соединяя -5 и $+7$, на той же шкале находим $x_2 = -1{,}40$ и $x_3 = -4{,}68$.

Пример 2. $x^3 - 2x^2 - 75 = 0$. Один вещественный корень $x=5$ на шкале x_b. Увеличивая (или уменьшая) A в 10 раз, следует увеличить (уменьшить) B в 1000 раз, а x взять в 10 раз меньше (больше) его значения по соответствующей шкале.

Пример 3. $x^3 - 0{,}40x^2 - 0{,}69 = 0$. Один вещественный корень $x = \frac{10{,}4}{10} = 1{,}04$.

Пример 4. $x^3 - 56x^2 - 4000 = 0$. Один вещественный корень $x = 5{,}72 \times 10 = 57{,}2$.

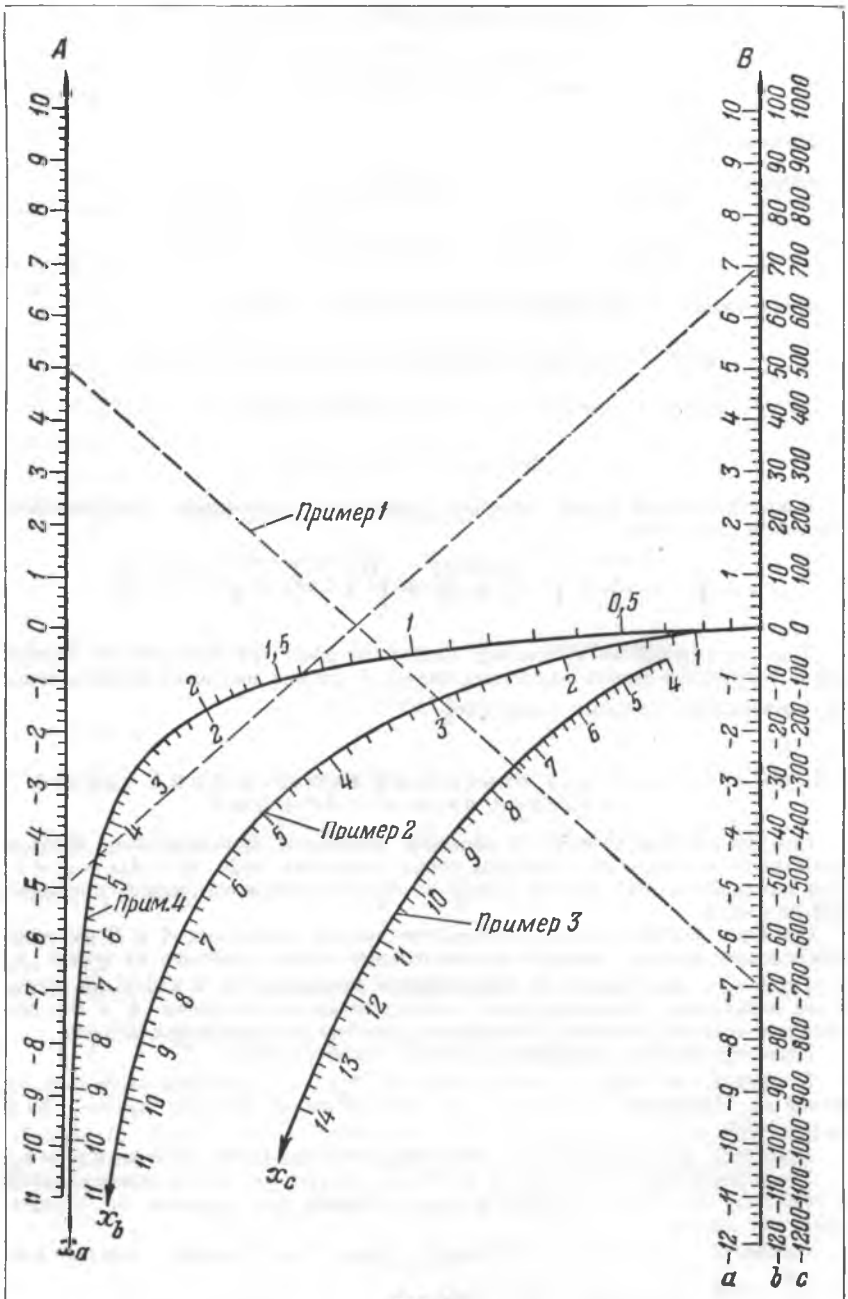


Рис. 1.

ГЛАВА 4

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 22. Тригонометрические функции

1. Измерение углов

Угол α°, измеренный в градусах, выражается в дуговых единицах (радианах)

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ;$$

угол 1° соответствует $\frac{\pi}{180} = 0{,}017453$.

Радиан соответствует $57^\circ 17' 45'' = 57{,}2958^\circ$.

2. Правило знаков и правило дополнительных углов

Угол α лежит между				
	0 и 90°	90 и 180°	180 и 270°	270 и 360°
$\sin\alpha$	+	+	—	—
$\cos\alpha$	+	—	—	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	—	+	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	—	+	—
α в градусах				
	$\pm\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$
$\sin\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$

3. Числовые значения некоторых тригонометрических функций

	0°	30°	45°
$\sin\alpha =$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$
$\cos\alpha =$	$+1$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$
$\operatorname{tg}\alpha =$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$	1
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\mp\infty$	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	1

	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha =$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660$	$+1$	0	-1	0
$\cos\alpha =$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	0	-1	0	$+1$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$	0	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$

4. Зависимости между тригонометрическими функциями одного угла (первой четверти)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

5. Зависимости между тригонометрическими функциями двух углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}; \quad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4};$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta);$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

При n четном

$$\sin^n\alpha = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}}{2^{n-1}}\left[\cos n\alpha - \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha + \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{\frac{n-2}{2}}\cos 2\alpha\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n};$$

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\alpha + \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha + \cdots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}}\cos 2\alpha\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}$$

При n нечетном:

$$\sin^n\alpha = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{2^{n-1}}\left[\sin n\alpha - \binom{n}{1}\sin(n-2)\alpha + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{2}\sin(n-4)\alpha + \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}\binom{n}{\frac{n-3}{2}}\sin 3\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\alpha\right],$$

$$\cos^n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\cos n\alpha + \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}.$$

6. Тригонометрические функции кратных углов и частей углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \cdots;$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \cdots;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha);$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right);$$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right);$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha\frac{1}{2}\alpha}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

7. Обратные круговые функции

Обратные круговые функции

$$y = \operatorname{Arcsin} x;\ y = \operatorname{Arccos} x;\ y = \operatorname{Arctg} x \text{ и } y = \operatorname{Arcctg} x$$

при данном значении x представляют многозначные функции. Главными значениями этих функций считают:

если $x = \sin y$ и $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $y = \arcsin x$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$;

если $x = \cos y$ и $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $y = \arccos x$, причем $\pi \geqslant y \geqslant 0$;

если $x = \operatorname{tg} y$ и $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, то $y = \operatorname{arctg} x$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$;

если $x = \operatorname{ctg} y$ и $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, то $y = \operatorname{arcctg} x$, причем $\pi \geqslant y \geqslant 0$.

Зависимость между arcus *различных функций*

$$\arcsin\alpha = \arccos\sqrt{1-\alpha^2} = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos\alpha;$$

$$\arccos\alpha = \arcsin\sqrt{1-\alpha^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha;$$

$$\operatorname{arctg}\alpha = \arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\ (\alpha > 0).$$

Теоремы сложения:

$$\arcsin\alpha \pm \arcsin\beta = \arcsin\left[\alpha\sqrt{1-\beta^2} \pm \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right] =$$

$$= \arccos\left[\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2} \mp \alpha\beta\right];$$

$$\arccos\alpha \pm \arccos\beta = \arcsin\left[\beta\sqrt{1-\alpha^2} \pm \alpha\sqrt{1-\beta^2}\right] =$$

$$= \arccos\left[\alpha\beta \mp \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}\right];$$

$$\operatorname{arctg}\alpha \pm \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta};$$

$$\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha; \qquad \arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha;$$

$$\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha; \qquad \operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg}\alpha$$

§ 23. Решение плоских треугольников

1. Решение прямоугольных треугольников

Дано: a и α ($\gamma = 90°$).
Находим: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $b = a\operatorname{ctg}\alpha$.
Дано: c и α.
Находим: $a = c\sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$.
Дано: a и b.
Находим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$; $c = \sqrt{a^2+b^2} =$

$$= \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Дано: c и α.

Находим: $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$; $b = \sqrt{c^2-a^2} = c\cos\alpha = a\operatorname{ctg}\alpha$.

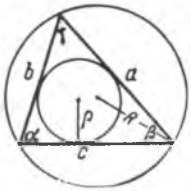


Рис. 2.

2. Решение косоугольных треугольников

Обозначения (рис. 2, 3):
a, b, c — стороны треугольника;
α, β, γ — углы, противолежащие им;
ρ — радиус вписанного круга;
R — радиус описанного круга;
p — полупериметр, т. е. $\frac{1}{2}(a+b+c)$;
h_a, h_b, h_c — высоты на стороны a, b, c;
w_α, w_β, w_γ — биссектрисы углов α, β, γ;
m_a, m_b, m_c — медианы сторон a, b, c.

Знак - - - после формулы показывает, что из нее вытекают и две другие формулы, получаемые круговой перестановкой букв, т. е. b подставляется вместо a; c вместо b; α вместо γ и т. д.

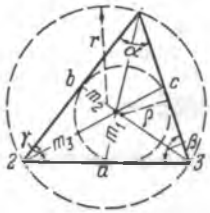


Рис. 3.

а) Основные формулы:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R;$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta \cdots;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \cdots;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma} \cdots;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\cdot c}} \cdots;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b\cdot c}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{\rho}{p-a} \cdots;$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} \cdots$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \cdots$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \cdots$$

Формулы Мольвейде

$$\rho = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{4Rp} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$$

$$= p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta \cdots;$$

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2} \cdots;$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$w_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2}} \cdots$$

б) Четыре основных случая решения косоугольных треугольников.

Случай 1. Дано: две стороны и угол между ними (например, a, b, γ)

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2} = m$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right] = n$$

$$\alpha = m + n$$

$$\beta = m - n$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Случай 2. Дано: сторона и два угла (например, a, α и β)

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta); \quad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}; \quad c = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Случай 3. Дано. три стороны

$$a + b + c = 2p, \quad \rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{p-a}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{p-b}; \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{p-c}.$$

Случай 4. Дано: две стороны и угол, противолежащий одной из сторон (например, a, b и α)

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}; \quad \gamma = 180 - (\alpha + \beta); \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Задача возможна лишь при условии $b \sin \alpha \leqslant a$. Если $b \sin \alpha = a$, то $\beta = 90°$. Если $b \sin \alpha < a$ и, кроме того, $a < b$, то получим два значения для β и соответственно два треугольника ($\beta_2 = 180° - \beta_1$). Если $b \sin \alpha < a$ и $a > b$, то имеем лишь одно решение.

ГЛАВА 5

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

§ 24. Теория определителей

1. Определитель n-го порядка

Определитель, состоящий из a строк (горизонтального ряда) и n столбцов (вертикального ряда), называется определителем n-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 & \dots & p_1 \\ a_2 b_2 c_2 & \dots & p_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n b_n c_n & \dots & p_n \end{vmatrix}$$

Определитель представляет собой сумму $n!$ членов; при вычислении определителя первый главный член суммы получается, если составить произведение элементов, начиная с первого элемента первой строки до последнего элемента последней по диагонали ($a_1 b_2 c_3 \dots p_n$); остальные члены суммы получаются из главного перестановкой указателей у букв ($1, 2 \dots n$).

Полученное $n!$ число членов будет состоять наполовину из положительных и наполовину из отрицательных, в зависимости от того, будет ли число перестановок (инверсия) в данном члене по отношению к главному четное или нечетное.

Вычисление определителя n порядка сводится к вычислению определителей $(n-1)$ порядка, называемых минорами. Минор к элементу α_q получается, если в первоначальном определителе вычеркнуть столбец номера α и строку номера q. Знак минора определяется величиной $(-1)^{\alpha+q}$.

Пример 1. Разложить по элементам 2-го столбца определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1d_1 \\ a_2b_2c_2d_2 \\ a_3b_3c_3d_3 \\ a_4b_4c_4d_4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot b_1 \begin{vmatrix} a_2c_2d_2 \\ a_3c_3d_3 \\ a_4c_4d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot b_2 \begin{vmatrix} a_1c_1d_1 \\ a_3c_3d_3 \\ a_4c_4d_4 \end{vmatrix} +$$

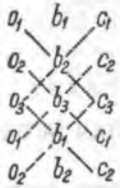
$$+ (-1)^{2+3}\cdot b_3 \begin{vmatrix} a_1c_1d_1 \\ a_2c_2d_2 \\ a_4c_4d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot b_4 \begin{vmatrix} a_1c_1d_1 \\ a_2c_2d_2 \\ a_3c_3d_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель проще всего разлагать по элементам той строки (столбца), где больше всего нулей.

Определитель 2-го порядка вычисляется непосредственно

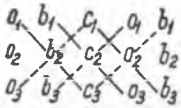
$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Определитель 3-го порядка, помимо вычисления разложением по минорам, может быть вычислен непосредственно по правилу Sarrus'a, для чего приписываем снизу две верхние строки и произведения по сплошным диагоналям берем со знаком плюс, по пунктирным — со знаком минус.



$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Аналогично можно приписать два столбца и брать произведения элементов по следующей схеме:



$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3.$$

2. Свойства определителей

Строки определителя можно заменять столбцами, например,

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}.$$

Если в определителе переставить две каких-либо строки (или столбца), то он меняет знак

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1a_1 \\ b_2a_2 \end{vmatrix}.$$

Если умножить на одну и ту же величину все элементы строки или столбца определителя, то и сам определитель умножится на ту же величину.

Определитель, в котором все элементы двух строк или столбцов соответственно равны или пропорциональны, равен нулю.

Если элементы одной строки или столбца представляют суммы, то определитель разлагается на сумму определителей

$$\begin{vmatrix} a_1+p_1+q_1b_1c_1 \\ a_2+p_2+q_2b_2c_2 \\ a_3+p_3+q_3b_3c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1b_1c_1 \\ p_2b_2c_2 \\ p_3b_3c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1b_1c_1 \\ q_2b_2c_2 \\ q_3b_3c_3 \end{vmatrix}$$

Определитель не меняет своей величины, если прибавить ко всем элементам строки или столбца элементы соответствующих параллельных строк или столбцов, умноженных на произвольную величину,

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1b_1c_1 \\ a_2+pb_2b_2c_2 \\ a_3+pb_3b_3c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Этим свойством можно воспользоваться для упрощения разложения определителей по минорам. Так, например, умножив элементы 1-й строки на $\frac{1}{2}$ и вычтя их из элементов 2-й строки, затем умножив элементы той же 1-й строки на 2 и вычтя их из элементов 3-й строки, получим два последних элемента 1-го столбца равными нулю, что значительно упрощает вычисление

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} = 4\cdot 32 = 128.$$

Перемножение определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3, & a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3, & a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3, & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3, & b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3, & c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3, & c_1\beta_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

3. Применение определителей к решению систем линейных уравнений

а) Если дана система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{gathered} a_{11}x+a_{12}y+\ldots\ldots+a_{1n}t=b_1; \\ a_{21}x+a_{22}y+\ldots\ldots+a_{2n}t=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x+a_{n2}y+\ldots\ldots+a_{nn}t=b_n, \end{gathered}$$

то величина каждого из определяемых неизвестных равна дроби, в знаменателе которой стоит определитель Δ, составленный из коэффициентов левой части уравнения,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

в числителе же стоит определитель, составленный подобным образом, но с заменой столбца, соответствующего определяемому неизвестному, свободными членами; например, если определяем y, то в числителе будет определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21}b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так, решая систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1;$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

найдем:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1a_{12} \\ b_2a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}b_1 \\ a_{21}b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Для системы из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_2a_{32}a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}b_1a_{13} \\ a_{21}b_2a_{23} \\ a_{31}a_3a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}b_1 \\ a_{21}a_{22}b_2 \\ a_{31}a_{32}b_3 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}b_{33} \end{vmatrix}.$$

б) Если дана система n линейных однородных уравнений:

$$a_1x + b_1y + \dots + f_1t = 0;$$
$$a_2x + b_2y + \dots + f_5t = 0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_nx + b_ny + \dots + f_nt = 0,$$

то для того, чтобы эта система уравнений имела решения, отличные от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов уравнения, был равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \dots f_1 \\ a_2b_2 \dots f_2 \\ \dots\dots \\ a_nb_n \dots f_n \end{vmatrix} = 0.$$

в) Для того чтобы система n линейных уравнений с $(n-1)$ неизвестными была совместной, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов уравнений, равнялся нулю.

§ 25. Комплексные числа

1. Комплексные величины как обобщение понятия о величине

Всякая величина может быть представлена в математике комплексной величиной вида $A = a + bi$, где a и b — вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$. Если $b = 0$, имеем чисто вещественную величину a. Если $a = 0$, имеем чисто мнимую величину bi.

Удобно комплексное число A условно изображать точкой C на плоскости с координатами a и b (рис. 4). Таким образом, каждой комплексной величине соответствует свой вектор oc. Вещественные величины изображаются точками, лежащими на оси ox, мнимые — на „мнимой“ оси oy.

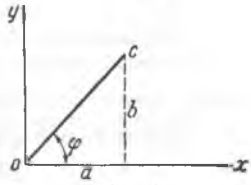


Рис. 4.

2. Тригонометрическое представление комплексного числа

Положение точки c на плоскости, а следовательно, и любое комплексное число можно, кроме декартовых координат a и b, определять и с помощью полярных координат r и φ, где r — длина радиуса-вектора точки, а φ — угол, образованный радиусом-вектором с осью ox. Число r называется модулем комплексного числа, а φ — его аргументом. Имеем:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откуда следует тригонометрическая форма комплексного числа

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

3. Основные положения

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = +1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \text{ и т. д.}$$

Два комплексных числа $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ равны между собой, если $a = a_1$ и $b = b_1$ или, в тригонометрической форме, если равны их модули, а аргументы отличаются только слагаемыми, кратными 2π.

Число $a - bi$ называется *сопряженным* $a + bi$.

4. Действия над комплексными числами

а) *Сложение и вычитание* комплексных чисел производится соответственным сложением и вычитанием их вещественных частей и коэффициентов при мнимой единице (i).

б) *Умножение комплексных чисел*:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad \text{(a)}$$

или

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2),$$

т. е. комплексные числа перемножают как обыкновенные биномы, считая $i^2 = -1$. Отсюда следует

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = r^2,$$

т. е. произведение двух сопряженных чисел равно квадрату их общего модуля.

в) *Деление комплексных чисел*:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

или в алгебраической форме

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

г) *Возвышение в степень и формула Моавра*.

Применяя формулу (а) в случае n равных сомножителей, получим

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Полагая в этой формуле $r = 1$, получим формулу *Моавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Разлагая в этой формуле левую часть по биному Ньютона и приравнивая вещественные части и коэффициенты мнимых, получим формулы для кратных дуг:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+ \cdots \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi \ (n \text{ — четное}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi \ (n \text{ — нечетное}); \end{cases}$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$

$$+ \cdots \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi \ (n \text{ — четное}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\varphi \ (n \text{ — нечетное}). \end{cases}$$

д) *Извлечение корня*:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

С помощью этой формулы решаются двучленные уравнения вида $x^n \pm a = 0$. Вводя новое неизвестное $x = y\sqrt[n]{a}$, приведем уравнение к виду $y^n \pm 1 = 0$, и вопрос сведется к нахождению $\sqrt[n]{\mp 1}$.

Если ищем корни $\sqrt[n]{+1}$, то $1 = \cos 0 + i\sin 0$, и все возможные решения будут представлены формулой

$$y = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Если ищем $\sqrt{-1}$, то $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, и все решения будут представлены выражением

$$y = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

е) *Формулы Эйлера*

Имеем (см. ряды)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Заменяя x на yi, получим

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right),$$

откуда (см. ряды)

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

Заменяя y на $-y$, будем иметь

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

Из этих двух формул получаются формулы *Эйлера*, выражающие тригонометрические функции через показательные с чисто мнимым показателем

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$$

Пользуясь этими формулами, можно комплексное число представить в таком виде

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

При помощи формул Эйлера легко можно выразить $\cos^m x$ и $\sin^n x$, а также их произведения через первые степени синуса и косинуса кратных дуг, например

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4\varphi i} + e^{-4\varphi i} + 4e^{2\varphi i} + 4e^{2\varphi i} + 6\right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

§ 26. Гиперболические функции

Основные формулы и соотношения:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}};$$

$$\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Период гиперболических синуса и косинуса равен $2\pi i$, а тангенса и котангенса πi, т. е. эти периоды мнимы.

Изменение гиперболических функций подчинено следующим условиям (рис. 5 и 6):

$$-\infty < \operatorname{sh} x < +\infty; \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1;$$

$$-1 < \operatorname{th} x < +1; \quad 1 < \operatorname{cth} x < -1.$$

Пользуясь этими формулами, можно получить ряд соотношений, аналогичных соотношениям тригонометрии круга:

$$\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{sh}(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_2 \pm \operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_2;$$

$$\operatorname{ch}(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_2 \pm \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_2;$$

$$\operatorname{sh}2\alpha = 2\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{ch}\alpha, \quad \operatorname{ch}2\alpha = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha;$$

$$\operatorname{th}2\alpha = \frac{2\operatorname{th}\alpha}{1+\operatorname{th}^2\alpha}; \quad \operatorname{cth}2\alpha = \frac{1+\operatorname{cth}^2\alpha}{2\operatorname{cth}\alpha};$$

$$\operatorname{sh}\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_2 = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2};$$

$$\operatorname{sh}\alpha_1 - \operatorname{sh}\alpha_2 = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2};$$

$$\operatorname{ch}\alpha_1 - \operatorname{ch}\alpha_2 = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2};$$

$$\operatorname{ch}\alpha_1 + \operatorname{ch}\alpha_2 = 2\operatorname{ch}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}.$$

Таким образом возникает гиперболическая тригонометрия с формулами, аналогичными формулам тригонометрии круга. Все формулы гиперболической

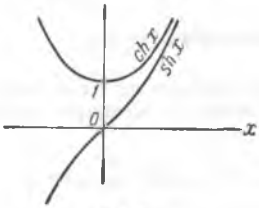


Рис. 5.

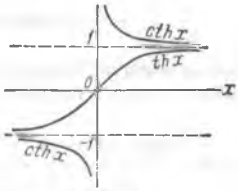


Рис. 6.

тригонометрии легко получить из формул обычной, заменяя в последней $\cos\alpha$ на $\operatorname{ch}\alpha$ и $\sin\alpha$ на $i\operatorname{sh}\alpha$ (формулы дифференцирования и интегрирования гиперболических функций см. в соответствующем разделе).

Пример 1. Выразить $\operatorname{sh}^2\alpha$ и $\operatorname{ch}^2\alpha$ через $\operatorname{sh}2\alpha$ и $\operatorname{ch}2\alpha$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \text{следовательно,} \quad \operatorname{sh}^2\alpha = \frac{\operatorname{ch}2\alpha - 1}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \text{„} \quad \operatorname{ch}^2\alpha = \frac{\operatorname{ch}2\alpha + 1}{2}.$$

Пример 2. Выразить $\operatorname{sh}3\alpha$ и $\operatorname{ch}3\alpha$ через $\operatorname{sh}\alpha$ и $\operatorname{ch}\alpha$.

Имеем:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \text{следовательно,} \quad \operatorname{sh}3\alpha = 3\operatorname{sh}\alpha + 4\operatorname{sh}^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \quad \text{„} \quad \operatorname{ch}3\alpha = 4\operatorname{ch}^2\alpha - 3\operatorname{ch}\alpha$$

ГЛАВА 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 27. Основные правила дифференцирования

В приведенных ниже формулах, выражающих основные правила дифференцирования, через u, v, w обозначены функции независимых переменных, а через u', v', w' — производные от этих функций по x.

Производная (дифференциал) алгебраической суммы двух или нескольких функций равна алгебраической сумме производных (дифференциалов) от каждой функции:

$$(u + v - w + \ldots + t)' = u' + v' - w' + \ldots + t';$$

$$d(u + v - w + \ldots + t) = du + dv - dw + \ldots + dt.$$

Производная (дифференциал) произведения двух или нескольких функций равна сумме n слагаемых (n — число перемножаемых функций); каждое слагаемое составлено так же, как и данное произведение, только один из множителей поочередно заменен его производной (дифференциалом):

для двух функций

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad d(u, v) = u\,dv + v\,du;$$

для трех функций

$$(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw, \quad d(uvw) = uv\,dw + uw\,dv + vw\,du$$

и т. д. Часто для вычисления производной произведения нескольких функций сначала находят *логарифмическую производную*, т. е. производную логарифма данной функции $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, например:

$$y = \sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}; \quad \ln y = \frac{1}{2}(3 \ln x + 4x + \ln \sin x);$$

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + 4 + \operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2x} + 2 + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sqrt{x^3 e^{4x} \sin x}.$$

Этот же способ применяется для дифференцирования функции вида u^v, например:

$$y = (2x + 1)^{3x}, \quad \ln y = 3x \ln(2x + 1),$$

$$\frac{y'}{y} = 3\left[\frac{2x}{2x + 1} + \ln(2x + 1)\right],$$

$$y' = 3\left[\frac{2x}{2x + 1} + \ln(2x + 1)\right] y = 3\left[\frac{2x}{2x + 1} + \ln(2x + 1)\right](2x + 1)^{3x}.$$

Производная (дифференциал) функции с постоянным множителем. Постоянный множитель можно выносить за знак производной (дифференциала)

$$(cu)' = cu', \quad d(cu) = c\,du.$$

Производная (дифференциал) дроби вычисляется по следующей формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Производная функции от функции (сложной функции): если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x);$$

если $y = f(u)$, $u = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\cdot\varphi'_t(t)\cdot\psi'_x(x) \quad (\text{„цепное правило“}).$$

В случае „цепи“ из большего числа функций поступают аналогично.

Производная сложной функции нескольких переменных: случай одной независимой переменной $u = f(x, y, \ldots, t)$, где $x = \varphi(\xi)$, $y = \psi(\xi), \ldots, t = \chi(\xi)$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\xi};$$

случай нескольких независимых переменных $u = f(x, y, \ldots, t)$, где

$$x = \varphi(\xi, \eta, \ldots, \tau),\ y = \psi(\xi, \eta, \ldots, \tau), \ldots, t = \chi(\xi, \eta, \ldots, \tau),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

Формулы для нахождения производных неявных функций Для функции, определяемой уравнением $f(x, y) = 0$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Производные неявных функций можно отыскивать и непосредственным дифференцированием.

Пример. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции y по уравнению $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Дифференцируем первый раз, имея в виду, что y есть некоторая функция от x

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0, \tag{1}$$

отсюда найдем y'.

Дифференцируем уравнение (1)

$$2x + 2yy'^2 + y^2y'' - ay' - ay' - axy'' = 0.$$

Подставляя сюда найденное y', находим y''.

§ 28. Производные элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
C (постоянная)	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
e^x	e^x	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$		
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$		
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$		
$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$		

§ 29. Производные высших порядков от простейших функций

Функция	n-я производная
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$ (при целом m и $n > m$ производная равна нулю)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k\ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n\sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n\cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ при n четном, $\operatorname{ch} x$ при n нечетном
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$ при n четном, $\operatorname{sh} x$ при n нечетном

Формула Лейбница. Если каждая из величин v и u есть функция от одной независимой переменной x, то n-я производная их произведения может быть найдена по формуле

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v''' + \ldots + uv^{(n)}.$$

§ 30. Неопределенности. Максимум и минимум функций

1. Раскрытие неопределенности

Если (x) при $x = a$ (a может быть нулем и бесконечностью) принимает один из следующих неопределенных видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad 1^\infty,$$

то для раскрытия неопределенности можно пользоваться следующими правилами.

Правило Лопиталя.

а) Если $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при $x = a$ принимает вид $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)};$$

применять это правило можно несколько раз, пока неопределенность не исчезнет. Остальные виды неопределенности могут быть приведены к двум основным $\left(\frac{0}{0}\text{ и }\frac{\infty}{\infty}\right)$, после чего к ним применяется указанное правило.

1. $[\varphi(x)\cdot\psi(x)]_{x=a}=0\cdot\infty$; имеем $\varphi(x)\cdot\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}$, где $\psi_1(x)=\frac{1}{\psi(x)}$, что приводит к основному случаю.

2. $f(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]_{x=a}=\infty-\infty$. Полагая

$$\varphi(x)=\frac{1}{\varphi_1(x)};\quad \psi(x)=\frac{1}{\psi_1(x)},$$

получаем выражение

$$[f(x)]_{x=a}=\left(\frac{\psi_1(x)-\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)\,\psi_1(x)}\right)_{x=a},$$

т. е. основной случай.

3. $f(x)=[\varphi(x)^{\psi(x)}]_{x=a}=0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0.$

Пишем

$$\lg f(x)_{x=a}=[\psi(x)\cdot\lg\varphi(x)]_{x=a},$$

что приводит к случаю 1.

Найдя $\lg f(x)_{x=a}=f$, получим $f(x)_{x=a}=e^f$.

б) Иногда применение этого правила громоздко или вообще не приводит к цели; тогда или пользуются разложением в ряды, или же, пользуясь алгебраическими преобразованиями, раскрывают неопределенность с учетом различия порядков малости отдельных членов.

Пример 1.

$$\lim\left(\frac{\lg(1+x)-x}{x^2}\right)_{x=0}=\lim\left(\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots-x}{x^2}\right)_{x=0}=$$

$$=\lim\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\cdots\right)_{x=0}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2.

$$\lim x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)_{x=\infty}=\lim\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)_{x=\infty}=$$

$$=\lim\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right)_{x=\infty}=\frac{1}{2}.$$

2. Максимум и минимум

а) *Максимум и минимум явной функции одного независимого переменного.* Значение аргумента x, при котором можно ожидать максимума или минимума функции $f(x)$, найдется как корень уравнения $f'(x)=0$. Пусть $x=a$ является корнем этого уравнения. Если при $x=a$ первая необращающаяся в нуль производная будет нечетного порядка, то не будет ни максимума, ни минимума, если же она будет четного порядка, то при $f^{(2k)}(a)<0$ будет максимум, при $f^{(2k)}(a)>0$ будет минимум.

Пример. Найти максимум и минимум функции $y=x^3-6x^2+3$.

Имеем:

$$y'=3x^2-12x=0,$$

откуда

$$x_1=0;\quad x_2=4;\quad y''=6x-12;$$

$$y''_{x=x_1}=-12<0,$$

следовательно, $x_1 = 0$ соответствует y_{max}; $y_{max} = 3$.

$$y''_{x=x_2} = 12 > 0,$$

следовательно, $x_2 = 4$ соответствует y_{min}. $y_{min} = -29$.

б) *Явная функция двух переменных*: $z = f(x, y)$. Значения $x = a$ и $y = b$, могущие дать максимум и минимум функции, определяются из уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Чтобы определяемая из этих уравнений пара решений $x = a$ и $y = b$ давала максимум и минимум, достаточно соблюдение условия $AC - B^2 > 0$, и тогда при $A < 0$ будет максимум, при $A > 0$ будет минимум.

Если $AC - B^2 < 0$, то не будет ни максимума, ни минимума; при $AC - B^2 = 0$ надо делать дополнительное исследование.

В этих формулах:

$$A = f''_{xx}(a, b); \quad B = f''_{xy}(a, b); \quad C = f''_{yy}(a, b).$$

Пример. Найти максимум и минимум

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = f(x, y).$$

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0, \quad x = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2 = 0; \quad y = 1;$$

$$f''_{xx} = 2; \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 0.$$

$AC - B^2 = 4 > 0$; $A = 2 > 0$; следовательно, корни $x = 1$ и $y = 1$ соответствуют минимуму функции $z = f(x, y)$,

$$z_{min} = -1.$$

в) *Явная функция нескольких переменных* $u = f(x, y, z \ldots)$ Значения x, y, z, ..., обращающие u в максимум или минимум, находят из системы уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ldots$$

Отсюда находится.

$$x = a; \quad y = b, \quad z = c.$$

При $d^2f(a, b, c, \ldots) > 0$ имеем минимум.

При $d^2f(a, b, c, \ldots) < 0$ имеем максимум. Обычно по самому характеру исследуемого вопроса бывает заранее известно, что можно ожидать – максимум или минимум.

г) *Неявная функция* $f(x, y) = 0$. Определяем из системы уравнений

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

те значения $x = a$ и $y = b$, при которых может быть максимум или минимум.

Если

$$(y'')_{x=a} = \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} > 0,$$

то имеем минимум, если

$$(y'')_{x=a} = \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=a}} < 0,$$

то имеем максимум.

Пример. Найти максимум и минимум y как функции от x, определяемой уравнением

$$f(x, y) = y^2 - xy + x^2 - 3 = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y + 2x = 0; \quad y = 2x$$

Решаем совместно с уравнением $f(x, y) = 0$ и получаем

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = -2.$$

Составляем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 3.$$

Таким образом, решение $x_1 = 1$; $y_1 = 2$ дает для y максимум, так как

$$\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x_1=1\\ y_1=2}} = -\frac{2}{3} < 0.$$

Решение $x_2 = -1$; $y_3 = -2$ соответствует $y_{\min}$, так как

$$\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x_2=-1\\ y_2=-2}} = \frac{2}{3} > 0.$$

3. Относительные максимум и минимум (способ Лагранжа)

Под этим подразумевается отыскание максимума и минимума функции $u = f(x, y, \ldots, z)$ от нескольких переменных, значения которых, сверх того, должны удовлетворять некоторым данным зависимостям $\varphi_1(x, y, z, \ldots,) = 0$, $\varphi_2(x, y, z, \ldots,)$ (их может быть и более двух).

Способ Лагранжа состоит в том, что нахождение относительных максимума или минимума сводят к нахождению абсолютных введением вспомогательной функции

$$V = f(x, y, z, \ldots) - \lambda_1\varphi_1(x, y, z, \ldots) - \lambda_2\varphi_2(x, y, z, \ldots).$$

Далее из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \ldots$$

и

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots) = 0$$

определяем значения $x, y, \ldots, \lambda_1$ и λ_2.

Наиболее просто максимум и минимум определяются по знаку d^2u

Введение величин λ_1 и λ_2 приводит к большей симметрии, вследствие чего упрощается решение уравнений.

Пример. Найти значения l, m и n направляющих косинусов, при которых линейная деформация

$$e = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + e_{xy}lm + e_{yz}mn + e_{zx}nl$$

достигает максимума и минимума; при этом $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Вспомогательная функция V будет

$$V = l^2e_{xx} + m^2e_{yy} + n^2e_{zz} + lme_{xy} + mne_{yz} + nle_{zx} - \lambda(m^2 + n^2 + l^2)$$

Из уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 2(e_{xx} - \lambda)l + e_{xy}m + e_{zx}n = 0;$$
$$\frac{\partial V}{\partial m} = e_{xy}l + 2(e_{yy} - \lambda)m + e_{yz}n = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial n} = e_{zx}l + e_{yz}m + 2(e_{zz} - \lambda)n = 0;$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

находим λ, m, n, l.

ГЛАВА 7
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 31. Общие правила и основные формулы

$\int d\,[f(x)] = f(x) + C;$ $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x);$

$\int a\,du = au + C;$ $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx;$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (интегрирование по частям);

$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy;$ $x = \varphi(y)$ (способ подстановки);

$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ (дифференцирование под знаком интеграла).

Таблица основных интегралов

(постоянные интегрирования здесь и в дальнейших таблицах опущены)

Степенные функции	Показательные функции
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$	$\int e^x\,dx = e^x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$
Тригонометрические функции	**Гиперболические функции**
$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$
$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$
$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x$ *	$\int \operatorname{th} x\,dx = \ln\operatorname{ch} x$ *
$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x$ *	$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\operatorname{sh} x$ *
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$
Дробные рациональные функции	**Иррациональные функции**
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$ * (для $\lvert x\rvert < a$)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ *
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$ * (для $\lvert x\rvert > a$)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$ *

* Во всех формулах, где в состав первообразной функции входит выражение, содержащее $\ln f(x)$, следует его понимать как $\ln[f(x)]$; знак абсолютной величины всюду для простоты опущен.

§ 32. Неопределенные интегралы

Общие указания

1. Постоянная интегрирования опущена всюду за исключением случаев, когда интеграл может быть представлен в различных формах с различными произвольными постоянными

2. Во всех формулах, где в состав первообразной функции входит выражение, содержащее $\ln f(x)$, следует понимать его как $\ln [f(x)]$; знак абсолютной величины везде для простоты опущен.

3. В тех случаях, когда первообразная функция представлена в виде степенного ряда, она не выражается через элементарные функции.

1. Интегралы от рациональных функций

Интегралы, содержащие $ax + b$

Обозначение: $X = ax + b$.

1) $\int X^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1$; при $n = -1$ см. № 2);

2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$

3) $\int xX^n\,dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$

($n \neq -1$, $n \neq -2$; при $n = -1, n = -2$ см. № 5 и 6);

4) $\int x^m X^n\,dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n dX$

$n \neq -1, \neq -2, \ldots, \neq -m$

(применяется при $m < n$ или при m целом и n дробном в этих случаях $(X-b)^m$ раскрывается по формуле бинома Ньютона, стр. 76).

5) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X$;

6) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X$;

7) $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2}\right)$;

8) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}}\right)$ ($n \neq 1, \neq 2$);

9) $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}X^2 - 2bX + b^2 \ln X\right)$;

10) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^3}\left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X}\right)$;

11) $\int \frac{x^2\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right)$;

12) $\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}}\right)$

($n \neq 1, \neq 2, \neq 3$)

13) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2 X - b^3 \ln X\right)$;

14) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X}\right)$;

15) $\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^4}\left(X - 3b \ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2}\right)$;

16) $\int \frac{x^3\,dx}{X^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3}\right)$;

17) $$\int \frac{x^3\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{-1}{(n-4)\,X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)\,X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)\,X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)\,X^{n-1}}\right) \quad (n \neq 1,\ \neq 2,\ \neq 3,\ \neq 4);$$

18) $$\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b}\ln\frac{X}{x}; \qquad \boxed{X = ax + b.}$$

19) $$\int \frac{dx}{x\,X^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln\frac{X}{x} + \frac{ax}{X}\right);$$

20) $$\int \frac{dx}{x\,X^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln\frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2}\right);$$

21) $$\int \frac{dx}{x\,X^n} = -\frac{1}{b^n}\left(\ln\frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}\,\frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right) \quad (n \geqslant 1);$$

22) $$\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\frac{X}{x};$$

23) $$\int \frac{dx}{x^2X^2} = -a\left(\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3}\ln\frac{X}{x}\right);$$

24) $$\int \frac{dx}{x^2X^3} = -a\left(\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4}\ln\frac{X}{x}\right)$$

25) $$\int \frac{dx}{x^2\,X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left(-\sum_{i=2}^{n} C_n^i\,\frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)\,X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na\ln\frac{X}{x}\right) \quad (n \geqslant 2);$$

26) $$\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{b^3}\left(a^2\ln\frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2}\right);$$

27) $$\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4}\left(3a^2\ln\frac{X}{x} + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right);$$

28) $$\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5}\left(6a^2\ln\frac{X}{x} + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right);$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left(-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^{i}\,\frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)\,X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)\,aX}{x} + \frac{n(n+1)\,a^2}{2}\ln\frac{X}{x}\right) \quad (n \geqslant 3);$$

30) $$\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}}\sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^{i}\,\frac{X^{m-i-1}\,(-a)^i}{(m-i-1)\,x^{m-i-1}};$$

если знаменатель члена под знаком $\sum$ обращается в нуль, то такой член заменяется следующим:

$$C_{m+n-2}^{n-1}(-a)^{m-1}\ln\frac{X}{x}.$$

$$\boxed{\text{Обозначение: } \Delta = bf - ag}$$

31) $$\int \frac{ax+b}{fx+g}\,dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2}\ln(fx+g);$$

32) $$\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0);$$

33) $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{g}{f}\ln(fx+g)\right] \quad (\Delta \neq 0);$$

34) $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}\right) \quad (\Delta \neq 0);$$

35) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b)$,

36) $\int \frac{x^2 dx}{(a+x)(b+x)^2} =$

$= \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln (a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2} \ln (b+x) \quad (a \neq b)$;

37) $\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b)$;

38) $\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x}$

$(a \neq b)$;

39) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x}$

$(a \neq b)$.

Интегралы, содержащие $ax^2 + bx + c$

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2$

40) $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ (для $\Delta > 0$);

$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{Arth} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}$ (для $\Delta < 0$);

41) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

42) $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

43) $\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}$;

44) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

45) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

46) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}$;

47) $\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

48) $\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

49) $\int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a} \int \frac{x\,dx}{X^n}$

(см. № 43 и 46)

50) $\int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2}dx}{X^n} -$

$- \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1}dx}{X^n}$

($m \neq 2n-1$; при $m = 2n-1$ см. № 51);

51) $\int \frac{x^{2n-1}dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3}dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3}dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2}dx}{X^n}$;

52) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40);

53) $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{n-1}}$,

54) $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2} \ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right) \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40),

55) $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} -$

$- \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}$ $(m > 1)$;

56) $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2 - gbf + g^2a)} \left[f \ln \frac{(fx+g)^2}{X} \right] +$

$+ \frac{2ga - bf}{2(cf^2 - gbf + g^2a)} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 40).

Интегралы, содержащие $a^2 \pm x^2$

Обозначения:

$$X = a^2 \pm x^2,\ Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \text{ для знака „+“,} \\ \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} \text{ для знака „—“ при } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} \text{ „ „ „—“ „ } |x| > a. \end{cases}$$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + x^2$, а нижний — к $X = a^2 - x^2$.

57) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} Y$;

58) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3} Y$;

59) $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5} Y$;

60) $\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{X^n}$

61) $\int \frac{x\,dx}{X} = \pm \frac{1}{2} \ln X$;

62) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{2X}$;

63) $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \mp \frac{1}{4X^2}$;

64) $\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{1}{2nX^n}$ $(n \neq 0)$;

65) $\int \frac{x^2dx}{X} = \pm x \mp aY$;

66) $\int \frac{x^2dx}{X^2} = \mp \frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a} Y$;

67) $\int \frac{x^2dx}{X^3} = \mp \frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3} Y$;

68) $\int \frac{x^2dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{X^n}$ $(n \neq 0)$;

69) $\int \frac{x^3dx}{X} = \pm \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln X$;

70) $\int \frac{x^3dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2} \ln X$;

$$X = a^2 \pm x^2,\ Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} \text{ для знака „+“,} \\ \operatorname{Arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+x}{a-x} \text{ для знака „—“ при } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a} \text{ „ „ „—“ „ } |x| > a. \end{cases}$$

71) $\int \frac{x^3 dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}$;

72) $\int \frac{x^3 dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $(n > 1)$;

73) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}$;

74) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$;

75) $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}$;

76) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y$;

77) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y$;

78) $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y$;

79) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$;

80) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}$;

81) $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$;

82) $\int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \pm b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \pm \frac{b}{a}Y\right]$.

Интегралы, содержащие $a^3 \pm x^3$

Обозначение: $a^3 \pm x^3 = X$; в случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^3 + x^3$, а нижний — к $X = a^3 - x^3$.

83) $\int \frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$;

84) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 83);

85) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$;

86) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3}\int\frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85);

87) $\int \frac{x^2dx}{X} = \pm\frac{1}{3}\ln X$;

88) $\int \frac{x^2dx}{X^2} = \mp\frac{1}{3X}$;

89) $\int \frac{x^3dx}{X} = \pm x \mp a^3\int\frac{dx}{X}$ (см. № 83);

90) $\int \frac{x^3dx}{X^2} = \mp\frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 83);

91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{X}$;

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3 X} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{X}$;

93) $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^3 x} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85);

94) $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^6 x} \mp \frac{x^3}{3a^6 X} \mp \frac{4}{3a^6} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85);

95) $\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2a^3 x^2} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83);

96) $\int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^6 x^2} \mp \frac{x}{3a^6 X} \mp \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

Интегралы, содержащие $a^4 + x^4$

97) $\int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4a^3 \sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a^3 \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}$;

99) $\int \frac{x^2 dx}{a^4 + x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$;

100) $\int \frac{x^3 dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4} \ln (a^4 + x^4)$.

Интегралы, содержащие $a^4 - x$

101) $\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a + x}{a - x} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

102) $\int \frac{x\,dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$;

103) $\int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \ln \frac{a + x}{a - x} - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

104) $\int \frac{x^3 dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{4} \ln (a^4 - x^4)$.

Некоторые случаи разложения дроби на элементарные

105) $\frac{1}{(a + bx)(f + gx)} = \frac{1}{fb - ag} \left(\frac{b}{a + bx} - \frac{g}{f + gx} \right)$;

106) $\frac{1}{(x + a)(x + b)(x + c)} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} + \frac{C}{x + c}$;

где $A = \frac{1}{(b - a)(c - a)}$, $B = \frac{1}{(a - b)(c - b)}$, $C = \frac{1}{(a - c)(b - c)}$;

107) $\frac{1}{(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} + \frac{C}{x + c} + \frac{D}{x + d}$,

где $A = \frac{1}{(b - a)(c - a)(d - a)}$, $B = \frac{1}{(a - b)(c - b)(d - b)}$ и т. д.;

108) $\frac{1}{(a + bx^2)(f + gx^2)} = \frac{1}{fb - ag} \cdot \left(\frac{b}{a + bx^2} - \frac{g}{f + gx^2} \right)$.

2. Интегралы от иррациональных функций

Интегралы, содержащие $\sqrt{x}$ и $a^2 \pm b^2x$

Обозначения: $X = a^2 \pm b^2x$, $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b\sqrt{x}}{a} & \text{для знака „+“,} \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a + b\sqrt{x}}{a - b\sqrt{x}} & \text{для знака „—“} \end{cases}$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + b^2x$, а нижний — к $X = a^2 - b^2x$.

109) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm \frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3} Y;$

110) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X} = \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} Y;$

111) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp \frac{\sqrt{x}}{b^2X} \pm \frac{1}{ab^3} Y;$

112) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm \frac{2\sqrt{x^3}}{b^2x} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4X} - \frac{3a}{b^5} Y;$

113) $\displaystyle\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab} Y;$

114) $\displaystyle\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3} Y;$

115) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2X} + \frac{1}{a^3b} Y;$

116) $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X} \mp \frac{3b}{a^5} Y.$

Другие интегралы, содержащие $\sqrt{x}$

117) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4 + x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} \ln \frac{x + a\sqrt{2x} + a^2}{x - a\sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2 - x};$

118) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^4 + x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x + a\sqrt{2x} + a^2}{x - a\sqrt{2x} + a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2 - x};$

119) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a};$

120) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^4 - x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}} + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax + b}$

Обозначение: $X = ax + b$

121) $\displaystyle\int \sqrt{X}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{X^3};$

122) $\displaystyle\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax - 2b)\sqrt{X^3}}{15a^2};$

123) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}$; $\boxed{X = ax + b}$

124) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}$;

125) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2}\sqrt{X}$;

126) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}$;

127) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{X}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{X}-\sqrt{b}}{\sqrt{X}+\sqrt{b}} & \text{для } b > 0; \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{X}{-b}} & \text{для } b < 0. \end{cases}$

128) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = 2\sqrt{X} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127);

129) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127);

130) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

131) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)\,bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)\,a}{(2n-2)\,b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}$;

132) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}$;

133) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}(5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5})$;

134) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right)$;

135) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127);

136) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right)$;

137) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right)$;

138) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127);

139) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127),

140) $\int X^{\pm n/2}dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}$;

141) $\int xX^{\pm n/2}dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right);$

142) $\int x^2X^{\pm n/2}dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right);$

143) $\int \frac{X^{n/2}dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int \frac{X^{(n-2)/2}}{x}dx;$

144) $\int \frac{dX}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{xX^{(n-2)/2}};$

145) $\int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$ и $\sqrt{fx+g}$

Обозначения: $X = ax + b$, $Y = fx + g$, $\Delta = bf - ag$

146) $\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-af}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{fX}{aY}} & \text{для } af < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{af}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{fX}{aY}} = \\ = \frac{2}{\sqrt{af}}\ln(\sqrt{aY} + \sqrt{fX}) & \text{для } af > 0 \end{cases}$

147) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146);

148) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}};$

149) $\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta f}}\operatorname{arctg}\frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{для } \Delta f < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ln\frac{f\sqrt{X} - \sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X} + \sqrt{\Delta f}} & \text{для } \Delta f > 0 \end{cases}$

150) $\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta + 2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146);

151) $\int \sqrt{\frac{Y}{X}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146);

152) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (см. № 149);

153) $\int \frac{Y^n dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a}\left(\sqrt{X}\,Y^n - n\Delta\int \frac{Y^{n-1}dx}{\sqrt{X}}\right);$

154) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta}\left[\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2}\right)a\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right];$

155) $\int \sqrt{X} Y^n dx = \frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}Y^{n+1} + \Delta \int \frac{Y^n dx}{\sqrt{X}}\right)$ (см № 153);

156) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^{n-1}}\right)$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{a^2 - x^2}$

Обозначение: $X = a^2 - x^2$

157) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right)$;

158) $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}$;

159) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right)$

160) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}$;

161) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

162) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}$;

163) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

164) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin \frac{x}{a}$;

165) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}$;

166) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a}$;

167) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}$;

168) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

169) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}$;

170) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

171) $\int \sqrt{X^3}dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\arcsin \frac{x}{a}\right)$;

172) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}$;

173) $\int x^2\sqrt{X^3}dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\arcsin \frac{x}{a}$;

174) $\int x^3\sqrt{X^3}dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}$;

175) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3 \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

176) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2 \arcsin \frac{x}{a}$;

177) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

178) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}$;

179) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}$;

180) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin\frac{x}{a}$;

181) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}$;

182) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

183) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right)$;

184) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2+a^2}$

Обозначение: $X = x^2 + a^2$

185) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} + a^2\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1$.

186) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}$;

187) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} + a^2\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1$;

188) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}$;

189) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

190) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1$;

191) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

192) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1$;

193) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}$;

194) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1$;

195) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}$;

196) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

197) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}$;

198) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

199) $\int \sqrt{X^3}dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{X})\right) + C_1$;

200) $\int x\sqrt{X^3}dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}$;

201) $\int x^2\sqrt{X^3}dx = \frac{x\sqrt{X^3}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^3}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1$;

202) $\int x^3\sqrt{X^3}dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}$;

203) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

204) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} +$

$+ \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{X}) + C_1$;

205) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{X}}{x}\right)$;

206) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}$;

207) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}$;

208) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1$;

209) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}$;

210) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$;

211) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right)$;

212) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2-a^2}$

Обозначение: $X = x^2 - a^2$

213) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{2}\right) + C =$

$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1$;

214) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}$;

215) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\,\mathrm{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} - a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1;$

216) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3};$ $\boxed{X = x^2 - a^2}$

217) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - \arccos\frac{a}{x};$

218) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1;$

219) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x};$

220) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1;$

221) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X};$

222) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) = C_1;$

223) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X};$

224) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x};$

225) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2x};$

226) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x};$

227) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\mathrm{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right) + C_1;$

228) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5};$

229) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1;$

230) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5};$

231) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3\arccos\frac{a}{x};$

232) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\,\mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$= -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1;$

233) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2}a\arccos\frac{a}{x};$

234) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}};$

235) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}};$

236) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1;$

237) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}$;

238) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^2}\arccos\frac{a}{x}$;

239) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right)$;

240) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$. $k = \frac{4a}{\Delta}$

241) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{aX} + 2ax + b\right) + C & \text{для } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } a > 0,\ \Delta > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b) & \text{для } a > 0,\ \Delta = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{для } a < 0,\ \Delta < 0. \end{cases}$$

242) $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}$;

243) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right)$;

244) $\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}$;

245) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

246) $\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

247) $\int X^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

248) $\int X^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,dx$;

249) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

250) $\int \frac{x\,dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}$;

251) $\int \frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$ (см. № 244);

252) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

253) $\int \frac{x^2\,dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

254) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X} - \frac{b}{4ak}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241);

255) $\int xX\sqrt{X}\,dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,dx$ (см. № 246);

256) $\int xX^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,dx$ (см. № 248);

257) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int\sqrt{X}\,dx$ (см. № 245);

258) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{cX}}{x} + \frac{2c}{x} + b\right) + C & \text{для } c>0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{Arsh}\frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } c>0,\ \Delta>0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{bx+2c}{x} & \text{для } c>0,\ \Delta=0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{для } c<0,\ \Delta<0. \end{cases}$$

259) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № (258);

260) $\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 241 и 258);

261) $\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 241 и 258);

262) $\int\frac{X^{(2n+1)/2}}{x}\,dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx +$

$+ c\int\frac{X^{(2n-1)/2}}{x}\,dx$ (см. № 248 и 260);

263) $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}$;

264) $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}$;

265) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\frac{x-a}{a}$;

266) $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}$;

267) $\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}}$ при $ag-bf>0$

$= \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf-ag}}\ln\frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}}$ при $ag-bf<0$.

Интегралы, содержащие другие иррациональные выражения

268) $\int\sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}$;

269) $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}$;

270) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}$;

271) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^2}} = \frac{2}{na} \arccos \frac{a}{\sqrt{x^n}}$.

272) $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}} = \frac{2}{3} \arcsin \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}$.

Рекуррентные формулы для интеграла от биномного дифференциала

273) $\int x^m (ax^n + b)^p\, dx =$

$$= \frac{1}{m + np + 1} \left[x^{m+1} (ax^n + b)^p + npb \int x^m (ax^n + b)^{p-1} dx\right].$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)} \left[-x^{m+1} (ax^n + b)^{p+1} + \right.$$
$$\left. + (m + n + np + 1) \int x^m (ax^n + b)^{p+1} dx\right].$$

$$= \frac{1}{(m+1)b} \left[x^{m+1} (ax^n + b)^{p+1} - \right.$$
$$\left. - a(m + n + np + 1) \int x^{m+n} (ax^n + b)^p\, dx\right].$$

$$= \frac{1}{a(m + np + 1)} \left[x^{m-n+1} (ax^n + b)^{p+1} - \right.$$
$$\left. - (m - n + 1) b \int x^{m-n} (ax^n + b)^p\, dx\right].$$

3. Интегралы от тригонометрических функций[1]

Интегралы, содержащие синус

274) $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$;

275) $\int \sin^2 ax\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$;

276) $\int \sin^3 ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax$;

277) $\int \sin^4 ax\, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax$;

278) $\int \sin^n ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax\, dx$ (n целое, > 0);

279) $\int x \sin ax\, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$;

280) $\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cos ax$;

281) $\int x^3 \sin ax\, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right) \sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right) \cos ax$;

282) $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, dx$ $(n > 0)$;

283) $\int \frac{\sin ax}{x} dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$ *;

---

[1] Интегралы от функций, содержащих $\sin x$, $\cos x$ в сочетании с гиперболическими функциями и e^{ax}, см. стр. 127—128.

* Определенный интеграл $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ называется *интегральным синусом* и обозначается $\mathrm{Si}\,(x)$: $\mathrm{Si}\, x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$

284) $\int \frac{\sin ax}{x^2}\,dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax\,dx}{x}$ (см. № 322);

285) $\int \frac{\sin ax}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}\,dx$ (см. № 324);

286) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax)$;

287) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax$;

288) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}$;

289) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\,\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n > 1)$;

290) $\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left(ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \right.$
$\left. + \frac{127(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n(ax)^{2n+1} + \ldots\right)$*;

291) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln \sin ax$;

292) $\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)\,a\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\sin^{n-2} ax} +$
$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n > 2)$;

293) $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$;

294) $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$;

295) $\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$;

296) $\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$;

297) $\int \frac{\sin ax\,dx}{1\pm\sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right)$;

298) $\int \frac{dx}{\sin ax\,(1\pm\sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}$;

299) $\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$;

300) $\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$;

301) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$;

* B_n — числа Бернулли.

Таблица первых чисел Бернулли

k	B_k	k	B_k	k	B_k	k	B_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43867}{798}$		

302) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right);$

303) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 ax-1}{\sin^2 ax+1}\right);$

304) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax;$

305) $\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+a)}$

($|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см № 275);

306) $\int \frac{dx}{b+c\sin ax} =$

$= \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg}{}^{ax}/_2+c}{\sqrt{b^2-c^2}}$ (для $b^2 > c^2$);

$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg}{}^{ax}/_2+c-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg}{}^{ax}/_2+c+\sqrt{c^2-b^2}}$ (для $b^2 < c^2$);

307) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306);

308) $\int \frac{dx}{\sin ax\,(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}-\frac{c}{b}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306);

309) $\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)}+$

$+\frac{b}{b^2-c^2}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306);

310) $\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)}+\frac{c}{c^2-b^2}\int\frac{dx}{b+c\sin ax}$

(см. № 306);

311) $\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b>0)$;

312) $\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b^2>c^2,\ b>0)$;

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax+b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax-b}$ $(c^2>b^2,\ b>0)$.

Интегралы, содержащие косинус

313) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax;$

314) $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4a}\sin 2ax;$

315) $\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax-\frac{1}{3a}\sin^3 ax;$

316) $\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4a}\sin 2ax+\frac{1}{32a}\sin 4ax;$

317) $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1}ax\sin ax}{na}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax\,dx;$

318) $\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2}+\frac{x\sin ax}{a};$

319) $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax+\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2}{a^3}\right)\sin ax;$

320) $\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2}-\frac{6}{a^4}\right)\cos ax+\left(\frac{x^3}{a}-\frac{6x}{a^3}\right)\sin ax;$

321) $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx;$

322) $\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \ldots$ *;

323) $\int \frac{\cos ax}{x^2} dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax\, dx}{x}$ (см. № 283);

324) $\int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax\, dx}{x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 285);

325) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax)$;

326) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax$;

327) $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$;

328) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1)$;

329) $\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6\cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8\cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10\cdot 8!} + \ldots\right.$
$\left.\ldots + \frac{E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n!)} + \ldots\right)$ **

330) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax$;

331) $\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{(n-1)a\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\cos^{n-2} ax} +$
$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 2)$

332) $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$.

333) $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$;

334) $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}$;

335) $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sin\frac{ax}{2}$;

336) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$.

---

* Определенный интеграл $-\int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ называется *интегральным косинусом* и обозначается $\operatorname{Ci} x$.

$$\operatorname{Ci} x = C - \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots,$$

где C — эйлерова постоянная, равная

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}5772\ldots$$

** E_n — числа Эйлера.

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots \pm \frac{1}{(2m-1)^{2n+1}} \mp \ldots = \frac{\pi^{2n+2}}{2^{2n+2}(2n)!}E_n =$$

Таблица первых чисел Эйлера

n	E_n	n	E_n
1	1	5	50 521
2	5	6	2 702 765
3	61	7	199 360 981
4	1385		

337) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$;

338) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$;

339) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$;

340) $\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}$;

341) $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}$;

342) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}$;

343) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}$;

344) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right)$;

345) $\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax$;

346) $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$

($|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 314);

347) $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(b-c)\operatorname{tg}{}^{ax}/_2}{\sqrt{b^2-c^2}}$ (для $b^2 > c^2$);

$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{(c-b)\operatorname{tg}{}^{ax}/_2+\sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}{}^{ax}/_2-\sqrt{c^2-b^2}}$ (для $b^2 < c^2$);

348) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b+c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int\frac{dx}{b+c\cos ax}$ (см. № 347);

349) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(b+c\cos ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int\frac{dx}{b+c\cos ax}$

(см. № 347);

350) $\int \frac{dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2-b^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{c^2-b^2}\int\frac{dx}{b+c\cos ax}$

(см. № 347);

351) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2-c^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2}\int\frac{dx}{b+c\cos ax}$

(см. № 347);

352) $\int \frac{dx}{b^2+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}$ $(b > 0)$;

353) $\int \frac{dx}{b^2-c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}}$ $(b^2 > c^2,\ b > 0)$;

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg} ax-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax+\sqrt{c^2-b^2}}$ $(c^2 > b^2,\ b > 0)$.

Интегралы, содержащие синус и косинус

354) $\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$;

355) $\int \sin^2 ax\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$;

356) $\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax$ $(n \neq -1)$;

357) $\int \sin ax\cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax$ $(n \neq -1)$;

358) $\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx =$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\, dx.$$

(понижение степени n; m и $n > 0$)

$$= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\, dx$$

(понижение степени m; m и $n > 0$)

359) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} ax;$

360) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{\sin ax}\right];$

361) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax}\right);$

362) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax - \frac{1}{2\sin^2 ax}\right);$

363) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax + \frac{1}{2\cos^2 ax}\right);$

364) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a} \operatorname{ctg} 2ax;$

365) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right];$

366) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2\sin^2 ax} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right);$

367) $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1)$

(см. № 361, 363);

368) $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax} \quad (n \neq 1)$

(см. № 360, 362)

369) $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$$

(понижение степени n; $m > 0$, $n > 1$)

$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$$

(понижение степени m; $n > 0$, $m > 1$);

370) $\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a \cos ax} = \frac{1}{a} \sec ax;$

371) $\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a \cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + C_1;$

372) $\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax};$

373) $\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a} \sin ax + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right);$

374) $\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right];$

375) $\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1)$

(см. № 325, 326, 328);

376) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln\cos ax\right);$

377) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right);$

378) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right] \quad (n \neq 1,\ n \neq 3);$

379) $\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos ax} \quad (n \neq 1);$

380) $\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax}\,dx =$

$$= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax}\,dx \quad (m \neq 1),$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos^m ax} \quad (m \neq n),$$

$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} \quad (m \neq 1);$$

381) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec} ax;$

382) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1;$

383) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax};$

384) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right);$

385) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right);$

386) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\right) \quad (n \neq 1)$ (см. № 289);

387) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln\sin ax\right);$

388) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right);$

389) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right) \quad (n \neq 1,\ n \neq 3);$

390) $\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax} \quad (n \neq 1);$

391) $\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} =$

$$= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \quad (m \neq 1),$$

$$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} \quad (m \neq n),$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \quad (m \neq 1);$$

392) $\int \frac{dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2};$

393) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} = \mp\frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

394) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax};$

395) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}$;

396) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax\,(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$;

397) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax\,(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$;

398) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax)$;

399) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax)$;

400) $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right)$;

401) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a} \ln \left(1 \pm \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right)$;

402) $\int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{ax + \theta}{2}$,

где $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, а $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{b}$

403) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c \cos ax} = -\frac{1}{ac} \ln (b + c \cos ax)$;

404) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c \sin ax} = \frac{1}{ac} \ln (b + c \sin ax)$;

405) $\int \frac{dx}{b + c \cos ax + f \sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2 + f^2} \sin (ax + \theta)}$,

где $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}$, а $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{f}$ (см. № 306)

406) $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{abc} \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b} \operatorname{tg} ax\right)$;

407) $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{2abc} \ln \frac{c \operatorname{tg} ax + b}{c \operatorname{tg} ax - b}$;

408) $\int \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos (a + b) x}{2 (a + b)} - \frac{\cos (a - b) x}{2 (a - b)}$ ($a^2 \neq b^2$,

при $a = b$ см. № 354)

Интегралы, содержащие тангенс

409) $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax$;

410) $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x$;

411) $\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a} \ln \cos ax$;

412) $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx$;

413) $\int x \operatorname{tg} ax\,dx =$

$$= \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n a^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots^*$$

414) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} =$

$$= ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \ldots^*$$

* B_n — числа Бернулли (см. сноску на стр. 119).

415) $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax \; (n \neq -1)$;

416) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax)$;

417) $\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax)$.

Интегралы, содержащие котангенс

418) $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax$;

419) $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x$;

420) $\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a}\ln\sin ax$;

421) $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx \quad (n \neq 1)$;

422) $\int x\operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \ldots$*;

423) $\int \frac{\operatorname{ctg} ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \ldots$*;

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax}\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{ctg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1)$;

425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (см. № 417).

4. Интегралы от других трансцендентных функций

Интегралы от гиперболических функций

426) $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax$;

427) $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax$;

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax - \frac{1}{2}x$;

429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{1}{2}x$;

430) $\int \operatorname{sh}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx$ (для $n > 0$);

$= \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx$ (для $n < 0$) $(n \neq -1)$;

431) $\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx$ (для $n > 0$)

$= -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,dx$ (для $n < 0$) $(n \neq -1)$;

432) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{th}\frac{ax}{2}$;

433) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax}$;

* B_n — числа Бернулли (см. сноску на стр. 119).

434) $\int x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax.$

435) $\int x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax;$

436) $\int \operatorname{th} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} ax;$

437) $\int \operatorname{cth} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sh} ax;$

438) $\int \operatorname{th}^2 ax\, dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a};$

439) $\int \operatorname{cth}^2 ax\, dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a};$

440) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\, dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax)$

441) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\, dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax)$ $\quad a^2 \neq b^2$

442) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\, dx = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax)$

443) $\int \operatorname{sh} ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax);$

444) $\int \operatorname{ch} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax);$

445) $\int \operatorname{sh} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax);$

446) $\int \operatorname{ch} ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$

Интегралы от показательных функций

447) $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax};$

448) $\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1);$

449) $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right);$

450) $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx;$

451) $\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx = \ln x + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots$ *;

452) $\int \frac{e^{ax}}{x^n}\, dx = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\, dx \right) \quad (n \neq 1);$

453) $\int \frac{dx}{1 + e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1 + e^{ax}}$

---

* Определенный интеграл $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$ называется *интегральной показательной функцией* и обозначается $\operatorname{Ei}(x)$. При $x > 0$ интеграл расходится в точке $t = 0$; в этом случае под $\operatorname{Ei}(x)$ понимается главное значение несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \ldots$$

(C — эйлерова постоянная, см. сноску на стр. 121).

454) $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax})$;

455) $\int \frac{e^{ax}dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax})$;

456) $\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{arctg}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$ $(bc>0)$;

$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}}\ln\frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}}$ $(bc<0)$;

457) $\int \frac{xe^{ax}dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$;

458) $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx$ (см. № 451);

459) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$;

460) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$;

461) $\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{-1}a\,x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x) +$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$ (см. № 447, 459);

462) $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) +$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$ (см. № 447, 460);

463) $\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) -$

$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx$;

464) $\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) -$

$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx]$.

Интегралы от логарифмических функций

465) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$;

466) $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.

467) $\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x$;

468) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$ $(n \neq -1)$;

469) $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$*;

470) $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 469);

---

* Определенный интеграл $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ называется *интегральным логарифмом* и обозначается $\mathrm{li}\,x$. При $x>1$ интеграл расходится в точке $t=1$; в этом случае под $\mathrm{li}\,x$ понимается главное значение несобственного интеграла. Интегральный логарифм связан с интегральной показательной функцией (см. сноску на стр. 127) $\mathrm{li}\,x = \mathrm{Ei}(\ln x)$.

471) $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left|\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right| \quad (m \neq -1);$

472) $\int x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\,dx$
$(m \neq -1,\ n \neq -1;$ см. № 470);

473) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1};$

474) $\int \frac{\ln x}{x^m}\,dx = -\frac{\ln x}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2\,x^{m-1}} \quad m \neq 1);$

475) $\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}\,dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}\,dx \quad (m \neq 1)$
(см. № 474),

476) $\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}\,dy,$ где $y = -(m+1)\ln x$ (см. № 451),

477) $\int \frac{x^m dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1);$

478) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x;$

479) $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln \ln x - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} -$
$- \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots;$

480) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1);$

481) $\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1}\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1);$

482) $\int \ln \sin x\,dx = x\ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \ldots - \frac{2^{2n-1}B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \ldots$*;

483) $\int \ln \cos x\,dx =$
$= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \ldots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} - \ldots$*;

484) $\int \ln \operatorname{tg} x\,dx =$
$= x\ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$*;

485) $\int \sin \ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x);$

486) $\int \cos \ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x);$

487) $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$ (см. № 451).

Интегралы от обратных тригонометрических функций

488) $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2};$

489) $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2};$

490) $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2};$

* B_n — числа Бернулли (см. сноску на стр. 119).

491) $$\int \frac{\arcsin \frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots;$$

492) $$\int \frac{\arcsin \frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

493) $$\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2};$$

494) $$\int x\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2};$$

495) $$\int x^2\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2};$$

496) $$\int \frac{\arccos\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} - \ldots$$

497) $$\int \frac{\arccos\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

498) $$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2);$$

499) $$\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2};$$

500) $$\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2);$$

501) $$\int x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2} \quad (n \neq -1)$$

502) $$\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} + \ldots \quad (|x| < |a|).$$

503) $$\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2};$$

504) $$\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arctg}\frac{a}{x} + \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1);$$

505) $$\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2);$$

506) $$\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2};$$

507) $$\int x^2\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2);$$

508) $$\int x^n\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2} \quad (n \neq -1);$$

509) $$\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} - \frac{x^5}{5^2a^5} + \frac{x^7}{7^2a^7} - \ldots;$$

510) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}$;

511) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} =$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1).$$

Интегралы от обратных гиперболических функций

512) $\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$;

513) $\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}$;

514) $\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$;

515) $\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)$;

§ 33. Определенные интегралы

1. Определения

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - x_{i-1})\ (\xi_i),$$

где $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i;$$

Средние значения:

арифметическое среднее $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$;

среднее квадратичное $f(\xi) = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$,

где $\xi = a + \Theta(b-a)$, $0 < \Theta < 1$.

Значение интеграла $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и, кроме того, $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак, определяется формулой

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f[a+(b-a)\Theta]\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где $0 < \Theta < 1$.

В частности при $\varphi(x) = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f[a+(b-a)\Theta].$$

2. Формула дифференцирования определенного интеграла по параметру

Если имеем интеграл, зависящий от параметра α,

$$J = \int_a^b F(x, \alpha)\, dx,$$

где F, $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$, a и b — непрерывные функции от α, то производная

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_a^b \frac{dF(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx + F(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - F(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}. \qquad (1)$$

Пример. Проверить, что $y = \frac{1}{k}\int_0^t f(\xi) \sin k(t-\xi)\, d\xi$ представляет собой решение дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = f(t)$ (колебание в отсутствии сопротивления) при условии, что при $t = 0$ будет $y = y' = 0$.

Имеем: $a = 0$; $\alpha = b = t$.

Отсюда по формуле (1):

$$\frac{dy}{dt} = \int_0^t f(\xi) \cos k(t-\xi)\, d\xi + \Big| f(\xi) \sin k(t-\xi) \Big|_{\xi = t} =$$

$$= \int_0^t f(\xi) \cos k(t-\xi)\, d\xi;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\int_0^t f(\xi) \sin k(t-\xi)\, d\xi + \Big| f(\xi) \cos k(t-\xi) \Big|_{\xi = t} = -k^2 y + f(t).$$

Таким образом, действительно $\frac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = f(t)$.

3. Основные свойства определенных интегралов

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad \text{если } F'(x) = f(x);$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b; \quad \int_a^b = -\int_b^a; \quad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c.$$

4. Признаки конечности интегралов и числовые значения некоторых определенных интегралов

а) Интегралы с бесконечными пределами

$\int_a^\infty f(x)\, dx$ и $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ определяются как пределы $\int_a^b f(x)\, dx$ при b или a, стремящихся к $\pm\infty$.

Если неопределенного интеграла найти нельзя, то вопрос о конечности определенного интеграла решается теоремой *Коши*:

если в $\int_a^\infty f(x)\, dx$ можно положить $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$, то

1) при $\alpha > 1$ и $\lim |\varphi(x)| = A$ (конечное число) интеграл имеет конечное значение;

2) при $\alpha \leqslant 1$ и при условии, что для достаточно больших значений x $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак и абсолютно остается $\geqslant A$, интеграл равен бесконечности.

Пример.

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \quad \text{здесь } f(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^{n+\alpha-1}}{x^\alpha}.$$

$\lim\limits_{x=\infty} [e^{-x} \cdot x^{n+\alpha-1}] = 0$ для всякого $\alpha > 1$. следовательно, интеграл конечный для всякого n.

б) Интегралы с разрывом непрерывности. Вопрос о конечности интегралов с разрывом непрерывности решается следующей теоремой:

если в $\int\limits_a^b (x)\, dx$ при $x = b$ (или $x = a$) $f(x)$ обращается в бесконечность причем можно положить

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha},$$

то

1) при $\alpha < 1$ и $\varphi(b) = A$ (конечному числу) интеграл конечный;

2) при $\alpha \geqslant 1$ и условии, что $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак и абсолютно $\geqslant A$, интеграл равен бесконечности.

Пример

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\, dx}{1+x}; \quad p < 1; \quad f(x) = \frac{\frac{1}{1+x}}{x^{1-p}}; \quad f(0) = \infty; \ \varphi(0) = 1; \ \alpha = 1 - p.$$

следовательно, интеграл конечный при $0 < p < 1$.

в) Значения некоторых определенных интегралов

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \text{ при } b > 0; \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^\infty \sin bx\, e^{-ax} dx = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad \int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\, dx = \frac{a}{a^2+b^2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}. \quad n > 0 \text{ и целое;}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad n > 0 \text{ и целое.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{p^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2p} e^{-ap}. \qquad \int_0^\infty e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \ a > 0, \ n = 1\ 2\ 3 \ldots;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \quad 0 < n < 1;$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2};$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx \cdot \cos nx}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } m > n \\ \frac{\pi}{4} \text{ при } m = n \\ 0 \text{ при } m < n \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}},$$

$$\int_0^\pi \ln \cos x\, dx = \int_0^\pi \ln \sin x\, dx = -\pi \ln 2;$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = 1.$$

Если k и n — целые числа, то имеют место следующие интегралы:

1) $\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0$, если $k \neq n$;

2) $\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2kl}{\pi(k^2 - n^2)}$, если $k + n$ — нечетное число;

3) $\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0$, если $k + n$ — четное число,

4) $\int_0^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0$, если $k \neq n$;

5) $\int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l}\, dx = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{2}$.

ГЛАВА 8

БЕСКОНЕЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 34. Определения

Бесконечным рядом называется выражение вида $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, где остальные слагаемые (члены ряда) определяются заданием общего члена u_n в зависимости от n. Члены ряда могут быть или постоянными числами, или некоторыми функциями от переменных.

а) Ряд будет *сходящимся*, если $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ стремится к некоторому пределу S (сумма ряда) при $n = \infty$. Если S_n растет беспредельно вместе с n или предел S_n зависит от закона возрастания n, то ряд будет *расходящимся*.

б) Для рядов, члены которых — функции от x, установлено понятие о *равномерной сходимости*, заключающееся в следующем: ряд с общим членом $u_n = \varphi_n(x)$ называется равномерно сходящимся при $a \leqslant x \leqslant b$, если при $n \geqslant n_0$ можно сделать остаток ряда $|R_n(x)| < \xi$, каково бы ни было значение x в промежутке a, b.

§ 35. Признаки сходимости рядов

а) Признак д'Аламбера. Если $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = K$, то при $K < 1$ — ряд сходящийся; при $K > 1$ — расходящийся.

Пример.

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (x > 0);$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{x^{n+1} n}{(n+1)\, x^n} = x.$$

т. е. при $x > 1$ — ряд расходящийся, при $0 < x < 1$ — сходящийся.

б) Признак Коши. Если $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = K$, то при $K < 1$ — ряд сходящийся, при $K > 1$ — расходящийся.

Пример.

$$xe^{-x} + x^2e^{-2x} + x^3e^{-3x} + \ldots$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{x^n e^{-nx}} \right| = \lim_{n=\infty} xe^{-x}] = \frac{x}{e^x} = \frac{x}{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} \ldots} < 1 \quad \text{при } x > 0$$

ряд — расходящийся.

в) Признак Рабе. Если $\lim (u_n n^k) = A$ (конечное), то при $k > 1$ — ряд сходящийся, при $k \leqslant 1$ — расходящийся.

Пример.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \lg^p \left(1 + \frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right) \quad (x > 0).$$

Представим u_n в виде

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{\lg\left(1 + \frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)} \right]^p \cdot \left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)^p,$$

но

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\lg\left(1 + \frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{x}{\sqrt[3]{n}}} \right]^p = 1$$

тогда $\lim \left| u_n \cdot n^{\frac{1}{2} + \frac{p}{3}} \right| = x^p$ т. е. при $\frac{1}{2} + \frac{p}{3} > 1$ или $p > \frac{3}{2}$ — ряд сходящийся, а при $p \leqslant \frac{3}{2}$ — расходящийся.

§ 36. Сходимость знакопеременных рядов

Знакопеременный ряд, т. е. ряд, члены которого — разных знаков, называется абсолютно или неабсолютно сходящимся в зависимости от того, будет ли ряд абсолютных значений его членов $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots$ сходящимся или расходящимся.

Знакопеременный ряд $u_0 - u_1 + u_1 - u_3 + \ldots$ будет сходящийся: 1) если его члены убывают по абсолютной величине; 2) если $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$. Заменяя сумму такого знакопеременного ряда суммой его первых членов, допускаем погрешность, которая по знаку одинакова с первым из отброшенных членов, а по величине меньше его.

§ 37. Действия над степенными рядами

Над сходящимися степенными рядами в пределах их общей сходимости можно производить различные действия. Для облегчения выкладок можно пользоваться следующими формулами:

а) произведение степенных рядов

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots) =$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$
$$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_0)x^3 + \ldots;$$

б) частное степенных рядов

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \ldots}{1 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 + \ldots} =$$
$$= \frac{a_0}{b_0}\Big[1 + (\alpha_1 - \beta_1)x + \left(\alpha_2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 - \beta_2\right)x^2 + \left(\alpha_3 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 -\right.$$
$$\left. - \beta_3 - \beta_1^3 + \alpha_1\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2\right)x^3 + \left(\alpha_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3 - \beta_4 + \beta_1^4 -\right.$$
$$\left. - \alpha_1\beta_1^3 + \alpha_2\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3 + 2\alpha_1\beta_1\beta_2 - 3\beta_1^2\beta_2\right)x^4 + \ldots\Big];$$

в) степени степенного ряда

$$y = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

могут быть приведены к виду

$$y^n = 1 + nax + X_n,$$

где

$$X_n = n\left(\frac{n-1}{2}a^2 + b\right)x^2 + n\left[\frac{(n-1)(n-2)}{6}a^3 + (n-1)ab + c\right]x^3 +$$
$$+ n\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}a^4 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}a^2b +\right.$$
$$\left. + \frac{n-1}{2}b^2 + (n-1)ac + d\right]x^4 + \ldots$$

Давая n ряд положительных или отрицательных целых и дробных значений, получим различные степени ряда.

Например:

$$\sqrt{y} = 1 + \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{4} + b\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)x^3 -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{5}{64}a^4 - \frac{3}{8}a^2b + \frac{b^2}{4} + \frac{ac}{2} - d\right)x^4 + \ldots$$

$$y^2 = 1 + 2ax + (a^2 + 2b)x^2 + 2(ab + c)x^3 + (b^2 + 2ac + 2d)x^4 + \ldots;$$

$$\frac{1}{y} = 1 - ax + (a^2 - b)x^2 - (a^3 - 2ab + c)x^3 +$$
$$+ (a^4 - 3a^2b + b^2 + 2ac - d)x^4 + \ldots;$$

г) обращение степенного ряда:

$$y = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \ldots$$

$$x = y - by^2 + (2b^2 - c)\,y^3 - (5b^3 - 5bc + d)\,y^4 +$$

$$+ (14b^4 - 21b^2c + 6bd + 3c^2 - e)\,y^5 - 7\left(6b^5 - 12b^3c + \right.$$

$$\left. + 4b^2 d + 4bc^2 - be - cd + \frac{1}{7} f\right) y^6 + \ldots$$

§ 38. Формулы Тейлора и Маклорена

Если $f(x)$ имеет n-ю производную между a и x (включительно), то

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

(ряд *Тейлора*), где

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \ldots \text{(формула } \textit{Лагранжа}\text{)};$$

$$\xi = a + \theta(x-a); \quad 0 < \theta < 1.$$

Другой вид формулы *Тейлора*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \qquad \xi = x + \theta h \quad 0 < \theta < 1$$

Формула *Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{x^n}{n} f^{(n)}(\xi) \qquad \xi = \theta x; \quad 0 < \theta < 1.$$

Во всех этих формулах ряды будут сходящимися, если $f(x)$ как угодно часто дифференцируема и $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ при любом значении θ между нулем и единицей.

Пример 1 Разложить $\sin x$ по формуле Маклорена по степеням x.

Имеем:

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x$	$f^{\mathrm{IV}}(0) = 0$
. . . . .	. . . . .
$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}; \quad f^{n}(\xi) = \sin\left(\xi + \frac{n\pi}{2}\right)$

Имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \frac{x^n}{n!} \sin\left(\xi + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Ряд сходится при всяком x.

Пример 2. Разложить $(a+x)^k$ по степеням x.

$f(x) = (a+x)^k$	$f(0) = a^k$
$f'(x) = k(a+x)^{k-1}$	$f'(0) = ka^{k-1}$
$f''(x) = k(k-1)(a+x)^{k-2}$	$f''(0) = k(k-1)a^{k-2}$
. . . . .	. . . . .
$f^{(n)}(x) = k(k-1)\ldots(k-n+1)(a+1)^{k-n}$	$f^{(n)}(0) = k(k-1)\ldots(k-n+1)^{k-n}$

Имеем:

$$(a+x)^k = a^k + ka^{k-1}x + \binom{k}{2}a^{k-2}x^2 + \cdots \binom{k}{n}(a+\theta x)^{k-n},$$

при $|x| > |a|$ ряд сходится, и если написать его в виде бесконечной суммы (без остаточного члена), то он обращается в формулу бинома Ньютона.

Ряд *Тейлора* для нескольких независимых переменных имеет вид

$$f(x+h, y+k, z+t\ldots) = f(x, y, z\ldots) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}t + \cdots\right) f(x, y, z\ldots) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}t + \cdots\right)^2 f(x, y, z\ldots) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}t + \cdots\right)^{n-1} f(x, y, z\ldots) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}t\cdots\right)^n f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta t, \ldots), \quad 0 < \theta < 1.$$

§ 39. Интегрирование и дифференцирование рядов

Интегрировать можно ряды равномерно сходящиеся; получаемый при этом новый ряд будет также равномерно сходящимся.

Пример. При $-1 < x < 1$ ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

равномерно сходящийся; поэтому, интегрируя его почленно, получим новый ряд

$$\int_0^z \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^z dx - \int_0^z x^2\,dx + \int_0^z x^4\,dx - \cdots,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

Дифференцировать можно ряды, сходящиеся в промежутке a, b, имеющие непрерывные производные для каждого члена в том же промежутке и обладающие тем свойством, что ряд, составленный из производных, также равномерно сходится в промежутке a, b.

§ 40. Формулы разложения в ряды важнейших функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \text{(сходится при всех } x\text{)};$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \cdots \text{(сходится при всех } x\text{)};$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \text{ (сходится при } -1 < x < +1);$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right) \text{ (сходится при } -1 < x < +1);$$

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right] \text{ (сходится при } x > 0);$$

$$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots \text{ (сходится при } 0 < x \leqslant 2);$$

$$\ln(a + x) = \ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \cdots\right];\ a>0,\ x>-a;$$

$$\ln\left(x + \sqrt{(x^2+1)}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \text{ (сходится при } x \leqslant 1);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots;\ -1 < x < +1;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots;$$

$$\sqrt[q]{(1+x)^p} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q\cdot 2q}x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3 + \cdots;$$

$$\frac{1}{\sqrt[q]{(1-x)^p}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{q\cdot 2q}x^2 - \frac{p(p+q)(p+2p)}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3 + \cdots;$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ (сходится при любом } x;\ x \text{ — в радианах)};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ (сходится при любом } x);$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3\cdot 5}x^5 + \frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7}x^7 + \frac{62}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^9 + \cdots$$

$$\left(\text{сходится при } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2\cdot 5}x^3 + \frac{2}{3^3\cdot 5\cdot 7}x^5 + \frac{x^7}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} + \cdots\right)$$

(сходится при $0 < |x| < +\pi$);

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots;\ -1 \leqslant x \leqslant +1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots;\ -1 \leqslant x \leqslant +1;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ (при любом } x);$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ (при любом } x);$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3\cdot 5}x^5 - \frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7}x^7 + \cdots \text{ (при любом } x);$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3^2\cdot 5}x^3 + \frac{2}{3^3\cdot 5\cdot 7}x^5 - \cdots;\ 0 < |x| < \infty.$$

ГЛАВА 9

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 41. Условия Дирихле

Функцию $f(x)$, заданную в промежутке изменения аргумента $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$, можно разложить в тригонометрический ряд вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad \text{(а)}$$

при следующих условиях:

1) на заданном промежутке $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва непрерывности, в каждой из которых имеются предельные конечные значения справа и слева, т. е. $f(x_1 + 0)$ и $f(x_1 - 0)$;

2) на концах участка существуют конечные предельные значения $f(x)$, т. е. $f(\pi - 0)$ и $f(-\pi + 0)$;

3) в промежутке изменения аргумента $(-\pi, \pi)$ $f(x)$ имеет конечное число максимума и минимума.

§ 42. Сумма ряда

Если удовлетворены условия *Дирихле* и коэффициенты найдены (см. ниже) по формулам (б), то ряд имеет сумму, равную:

1) заданной функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности внутри промежутка $-\pi, +\pi$;

2) в точках разрыва — среднему арифметическому предельных значений $f(x)$ справа и слева от точек разрыва, т. е. $\frac{1}{2}[f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0)]$;

3) на обоих концах промежутка (в точках $-\pi, +\pi$) — также среднему арифметическому предельных значений, т. е. $\frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(\pi + 0)]$.

§ 43. Коэффициенты ряда Фурье

Эти коэффициенты находятся умножением обеих частей равенства (а) последовательно на $\cos kx\,dx$ и $\sin kx\,dx$ и интегрированием в пределах $-\pi$, $+\pi$:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (x)\sin kx\,dx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Если $f(x)$ при $x_1, x_2, \ldots, x_s$ имеет разрывы непрерывности, вычисление ведется по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_1} f(x)\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cos kx\,dx + \cdots + \frac{1}{\pi}\int_{x_s}^{+\pi} (x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_1} f(x)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sin kx\,dx + \cdots + \frac{1}{\pi}\int_{x_s}^{+\pi} (x)\sin kx\,dx$$

Пример 1. Разложить в ряд $f(x) = x$ в промежутке $-\pi, +\pi$ (рис. 7).

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = 2\,\frac{(-1)^{k-1}}{k};\ a_0 = 0.$$

Искомый ряд

$$x = 2\sum_{k=-1}^{x=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

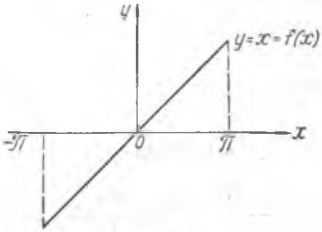


Рис. 7.

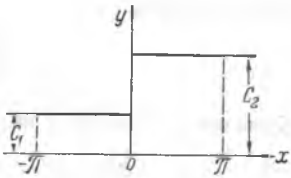


Рис. 8.

По § 42 сумма ряда $= \begin{cases} x \text{ при } -\pi < x < +\pi; \\ 0 \text{ при } x = \pm\pi. \end{cases}$

Пример 2 (рис. 8). $f(x) = \begin{cases} C_1 \text{ при } -\pi < x < 0, \\ C_2 \text{ при } \quad 0 < x < +\pi; \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1\,dx + \int_{0}^{\pi} C_2\,dx\right) = C_1 + C_2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} C_2\cos kx\,dx\right) = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} C_2\sin kx\,dx\right) = (C_1 - C_2)\,\frac{(-1)^k - 1}{\pi k}$$

Искомый ряд

$$f(x) = \frac{C_1 + C_2}{2} - \frac{2}{\pi}(C_1 - C_2)\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right).$$

Его сумма $= \begin{cases} C_1 \text{ при } -\pi < x < 0, \\ C_2 \text{ при } \quad 0 < x < +\pi, \\ \dfrac{C_1 + C_2}{2} \text{ при } x = 0 \text{ и } \pm\pi. \end{cases}$

§ 44. Видоизменение формул для коэффициентов ряда Фурье

а) Заданная функция $f(x)$ — или четная или нечетная; если $f(x)$ четная функция,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx;\ b_k = 0;$$

если $f(x)$ нечетная функция,

$$a_k = 0;\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Вид ряда Фурье в этих случаях будет:
для четной функции

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \cos kx,$$

для нечетной функции

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} b_k \sin kx.$$

б) Функция $f(x)$ задана в промежутке $-l,\ +l$; тогда

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} (x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

и разложение в ряд примет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

в) Функция дана в пределах от 0 до 2π; тогда в общем случае получим для коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x)\,dx;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

§ 45. Ряд Фурье в сжатой форме

Если функция $f(x)$ задана в пределах 0, l, то ее можно разложить в ряд или по синусу или по косинусу. Формула ряда и его коэффициенты в этом случае будут:

1) для разложения по косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l};\quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

2) для разложения по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Пример 1. Разложить $f(x) = x$ по косинусам в промежутке $0, \pi$. Имеем:

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \cos kx;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx dx = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1];$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \pi.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots \right).$$

Пример 2. Разложить по синусам функцию, определяемую равенством (в промежутке $0, l$):

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} \text{ при } 0 \leqslant x < \frac{l}{2}, \\ 0 \text{ при } \frac{l}{2} < x \leqslant l, \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{l} 0 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при нечетном } k > 1, \\ \frac{1}{2} \text{ при } k = 1, \\ -\frac{(-1)^{\frac{k}{2}} 2k}{\pi (k^2 - 1)} \text{ при четном } k. \end{cases}$$

Следовательно, ряд будет

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4n^2 - 1} \sin \frac{2\pi n x}{l}.$$

$$\text{Его сумма} = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} \text{ при } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0 \text{ при } \frac{l}{2} < x < l, \\ \frac{1}{2} \text{ при } x = \frac{l}{2}, \\ 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } l. \end{cases}$$

Примечание. Заметим, что

$$\cos kx + i \sin kx = e^{kxi} \text{ и } a_k - ib_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-kxi}\, dx \text{ (см. § 43).}$$

При перемене знака k коэффициент a_k остается без изменения, а b_k изменяет знак, поэтому сумма двух выражений вида $(a_k - ib_k)\, e^{kxi}$ при значениях k, равных по величине, но обратных по знаку, будет

$$2\,(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Следовательно, положив

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (x)\, e^{-kxi}\, dx \; (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots),$$

можно ряд Фурье писать в форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} C_k e^{kxi}.$$

§ 46. Порядок коэффициентов ряда Фурье

Пусть $f(x)$, заданная в промежутке $-\pi$, $+\pi$, имеет разрывы в точках x_1^0, x_2^0, $x_3^0, \ldots, x_s^0$.

К точкам разрыва надо также отнести один из концов, например π, если предельные значения $f(-\pi + 0)$ и $f(\pi - 0)$ не совпадают между собой,

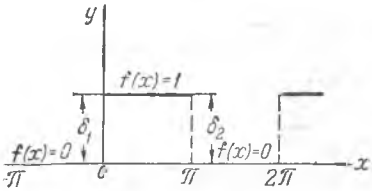


Рис. 9.

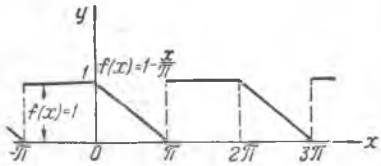


Рис. 10.

ради симметрии обозначений будем эту точку считать $x_{s+1}^0 = \pi$. Обозначим, кроме того, через δ_i^0 скачок (x) в точке x_i^0, так что

$$\delta_i^0 = f\left(x_i^0 + 0\right) - f\left(x_i^0 - 0\right).$$

Коэффициенты ряда Фурье будут

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_1^0} f(x) \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{x_1^0}^{x_2^0} f(x) \cos nx\, dx + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{x_s^0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx. \qquad (1)$$

Так, например,

1) если $f(x)$ задана в виде (рис. 9)

$$f(x) = 0 \qquad -\pi \leqslant x \leqslant 0;$$
$$f(x) = 1 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

то имеем два разрыва: $x = 0$ $\qquad \delta_1^0 = 1;$

$x = \pi$ $\qquad \delta_2^0 = -1;$

Если бы $f(x)$ была дана в виде (рис. 10)

$$f(x) = 1 \qquad -\pi \leqslant x \leqslant 0,$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\pi} \qquad \pi \leqslant x < 0,$$

то функция имела бы разрыв $\delta_1^0 = 1$ при $x = \pi$;

производная „ „ „ $\delta_1' = -\frac{1}{\pi}$ „ $x = 0$

и $\delta_2' = \frac{1}{\pi}$ „ $x = \pi$.

Выполняя интегрирование формулы (1) по частям, получим

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{i=s+1} \delta_i^0 \sin nx_i^0 - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(x) \sin nx\, dx.$$

Второй член правой части есть n-я часть коэффициента для разложения в ряде Фурье $f'(x)$; обозначим его через b_n'; первый же член (без n) назовем B_0, тогда

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{b_n'}{n}. \tag{2}$$

Аналогично для коэффициента b_n найдем

$$b_n = \frac{A_0}{n} + \frac{a_n'}{n}, \tag{3}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s+1} \delta_i^0 \cos nx_i^0.$$

Применяя эти формулы для производной данной функции $f'(x)$, найдем:

$$a_n' = -\frac{B_1}{n} - \frac{b_n''}{n}; \qquad b_n' = \frac{A_1}{n} + \frac{a_n''}{n},$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s_1+1} \delta_i' \cos nx_i'; \qquad B_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s_1+1} \delta_i' \sin nx_i';$$

x_i' — точки разрыва $f'(x)$, а δ_i' — скачки $f'(x)$ в этих точках.

Продолжая эту операцию далее и внося полученные значения в формулы (2) и (3), найдем:

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} + \frac{B_2}{n^3} + \frac{A_3}{n^4} - \ldots; \tag{4}$$

$$b_n = \frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} - \frac{A_2}{n^3} + \frac{B_3}{n^4} + \ldots, \tag{5}$$

где

$$A_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s_j+1} \delta_i^{(j)} \cos n x_i^{(j)}, \qquad B_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s_j+1} \delta_i^{(j)} \sin n x_i^{(j)},$$

$x_i^{(j)}$ — точки разрыва j-й производной заданной функции $f(x)$, $\delta_i^{(j)}$ — скачки $f^{(j)}(x)$ в этих точках.

Формулы (3) остаются в силе и для промежутка изменения аргумента $-l$, $+l$, но в этом случае надо положить:

$$\left.\begin{aligned} A_j &= \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s_j+1} \delta_i^{(j)} \cos \frac{n\pi x_i^{(j)}}{l} \\ B_j &= \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=s_j+1} \delta_i^{(j)} \sin \frac{n\pi x_i^{(j)}}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Из формул (4) и (5) следует, что порядок коэффициентов ряда Фурье обусловливается наличием разрывов самой функции и ее последовательных производных. Если $f(x)$ имеет хотя бы один разрыв, например на конце промежутка, то в формулы (4) и (5) войдут члены A_0 и B_0 и, следовательно, a_n и b_n будут порядка $\frac{1}{n}$. Если разрывов нет, то $A_0 = B_0 = 0$ и порядок коэффициентов будет $\frac{1}{n^2}$. Если и первая производная не имеет разрыва, то порядок коэффициентов повышается еще на единицу $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и т. д.

Примечание. Дифференцирование ряда Фурье, понижая порядок его коэффициентов, ухудшает его сходимость; так, если для $f(x)$ порядок коэффициентов $\frac{1}{n^2}$, то для $f'(x)$ порядок уже будет $\frac{1}{n}$, а для $f''(x)$ ряд перестает быть рядом Фурье, так как его коэффициенты не будет стремиться к нулю по мере возрастания n; такой ряд непригоден для вычислений.

§ 47. Улучшение сходимости ряда Фурье

Академик А. Н. Крылов предложил для улучшения сходимости рядов Фурье следующий простой по идее и чрезвычайно эффективный метод. Из суммы ряда выделяется подходящим образом подобранная функция, за вычетом которой остается ряд, имеющий коэффициенты столь высокого порядка малости, что ухудшение сходимости оставшегося ряда при дифференцировании не мешает вычислять производные. Задача эта решается подбором такой линейной функции $F_0(x)$, которая имеет те же точки прерывности и те же скачки, что и $f(x)$.

Разность $f_1(x) = f(x) - F_0(x)$ не будет иметь скачков и, следовательно, $f_1(x)$ будет иметь коэффициенты порядка $\frac{1}{n^2}$. Аналогично поступаем с функцией $f'(x)$, полагая $f'(x) = f_1'(x) + F_0'(x) = f_2(x) + F_1(x)$, где $F_1(x)$ — линейная функция с теми же скачками, что и у $f'(x)$.

Совершенно так же $f''(x) = f_2'(x) + F_1'(x) = f_3(x) + F_2(x)$. Продолжая этот процесс сколь угодно долго, можно получить в остатке ряд Фурье с коэффициентами какого угодно порядка малости. В частности, этот остаток может оказаться нулем; тогда мы представим сумму данного ряда в виде суммы простых слагаемых[1].

[1] Подробнее см. А. Н. Крылов, Собрание сочинений, т. 3, ч. 1 и 2, АН СССР. 1949, или В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, Гостехтеоретиздат, 1957.

§ 48. Кратные ряды Фурье

Дана функция $f(x, y)$ периода $2l$ относительно x и $2m$ относительно y. Рассматривая ее как функцию только от x, имеем

$$f(x, y) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} C_\sigma(y) e^{\frac{\pi\sigma x i}{l}}, \tag{1}$$

где

$$C_\sigma(y) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(\xi, y) e^{-\frac{\pi\sigma\xi i}{l}} d\xi.$$

Функция $C_\sigma(y)$ в свою очередь может быть разложена в ряд вида

$$C_\sigma(y) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} C_{\sigma\tau} e^{\frac{\pi\tau y i}{m}}, \tag{2}$$

где

$$C_{\sigma\tau} = \frac{1}{2m} \int_{-m}^{+m} C_\sigma(\eta) e^{-\frac{\pi\tau\eta i}{m}} d\eta = \frac{1}{4lm} \int_{-l}^{+l} \int_{-m}^{+m} f(\xi, \eta) e^{-\pi\left(\frac{\sigma\xi}{l} + \frac{\tau\eta}{m}\right) i} d\xi\, d\eta.$$

Подставив (2) в выражение (1), получим формулу, обобщающую ряд Фурье на случай двух переменных, а именно

$$(x, y) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} C_{\sigma\tau} e^{\pi\left(\frac{\sigma x}{l} + \frac{\tau y}{m}\right) i}.$$

Совершенно так же можно написать формулу для ряда Фурье в случае трех переменных:

$$f(x, y, z) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} C_{\sigma\tau\lambda} l^{\pi\left(\frac{\sigma x}{l} + \frac{\tau y}{m} + \frac{\lambda z}{n}\right) i},$$

где

$$C_{\sigma\tau\lambda} = \frac{1}{8lmn} \int_{-l}^{+l} \int_{-m}^{+m} \int_{-n}^{+n} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\pi\left(\frac{\sigma\xi}{l} + \frac{\tau\eta}{m} + \frac{\lambda\zeta}{n}\right) i} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Выделяя вещественную часть в формулах для $f(x, y)$ и $f(x, y, z)$, получим разложение в ряд Фурье в вещественной форме.

§ 49. Некоторые ряды Фурье

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ для верхнего знака и $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$ для нижнего

1) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2}\left(\pm 1 - \frac{x}{\pi}\right).$$

2) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\left(2 \mp 6\frac{x}{\pi} + 3\frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

3) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^3}{12}\left(2\frac{x}{\pi} \mp 3\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^3}{\pi^3}\right).$$

4) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{720}\left(8 - 60\frac{x^2}{\pi^2} \pm 60\frac{x^3}{\pi^3} - 15\frac{x^4}{\pi^4}\right).$$

5) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n^5} = \frac{\pi^5}{720}\left(8\frac{x}{\pi} - 20\frac{x^3}{\pi^3} \pm 15\frac{x^4}{\pi^4} - 3\frac{x^5}{\pi^5}\right).$$

$0 \leqslant x \leqslant \pi$ для верхнего знака и $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ для нижнего.

6) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \pm\frac{\pi}{4}.$$

7) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(1 \mp 2\frac{x}{\pi}\right).$$

8) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{8}\left(\frac{x}{\pi} \mp \frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

9) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\left(1 - 6\frac{x^2}{\pi^2} \pm 4\frac{x^3}{\pi^3}\right).$$

10) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^5} = \frac{\pi^5}{96}\left(\frac{x}{\pi} - 2\frac{x^3}{\pi^3} \pm \frac{x^4}{\pi^4}\right).$$

$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

11) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2}.$$

12) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^2}(-1)^{n+1} = \frac{\pi^2}{12}\left(1 - 3\frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

13) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^3}{12}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3}\right).$$

14) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4} = \frac{\pi^4}{720}\left(7 - 30\frac{x^2}{\pi^2} + 15\frac{x^4}{\pi^4}\right).$$

15) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^5} = \frac{\pi^5}{720}\left(7\frac{x}{\pi} - 10\frac{x^3}{\pi^3} + 3\frac{x^5}{\pi^5}\right)$$

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

16) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

17) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{x}{\pi}.$$

18) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\left((1-4)\frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

19) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\left(3\frac{x}{\pi} - 4\frac{x^3}{\pi^3}\right).$$

20) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^5} = \frac{\pi^5}{1536}\left(5 - 24\frac{x^2}{\pi^2} + 16\frac{x^4}{\pi^4}\right).$$

ГЛАВА 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 50. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Уравнения с отделяющимися переменными

Общий вид:

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx - N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0.$$

Деля обе части на $M_1(x)\,N_2(y)$, приведем уравнение к виду

$$\omega_1(x)\,dx + \omega_2(y)\,dy = 0.$$

Интегрируя, получим решение

$$\int \omega_1(x)\,dx + \int \omega_2(y)\,dy = C,$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая по начальным данным.

Пример. $xy' = ay$, откуда $\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x}$; после интегрирования:

$$\ln y = a\ln x + \ln C;$$

$$y = Cx^a.$$

2. Уравнения, левая часть которых есть полный дифференциал

Для того чтобы левая часть уравнения

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx_2 + \\ + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n = 0$$

представляла собой полный дифференциал функции от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, необходимо и достаточно выполнение $\frac{n(n-1)}{2}$ условий вида

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Если эти условия выполнены, то общий интеграл будет:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{x_1=\alpha}^{x_1} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 + \int\limits_{x_2=\beta}^{x_2} f_2(\alpha, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{x_3=\gamma}^{x_3} f_3(\alpha, \beta, x_3, \ldots, x_n)\,dx_3 + \ldots \int\limits_{x_n=\nu}^{x_n} f(\alpha, \beta, \ldots, x_n)\,dx_n = C.$$

Пример.

$$(yz + 2xy + z^2 + x^2)\,dx + (xz + x^2 + 2yz + y^2)\,dy + (xy + y^2 + 2xz + z^2)\,dz = 0.$$

Условия интегрируемости выполнены; в самом деле

$$\frac{\partial(yz + 2xy + z^2 + x^2)}{\partial y} = \frac{\partial(xz + x^2 + 2yz + y^2)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(yz + 2xy + z^2 + x^2)}{\partial z} = \frac{\partial(xy + y^2 + 2xz + z^2)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(xz + x^2 + 2yz + y^2)}{\partial z} = \frac{\partial(xy + y^2 + 2xz + z^2)}{\partial y}.$$

Общий интеграл (при $\alpha = \beta = \gamma = 0$)

$$f(x, y, z) = \int\limits_0^x (yz + 2xy + z^2 + x^2)\,dx + \int\limits_0^y (2yz + y^2)\,dy + \int\limits_0^z z^2\,dz =$$

$$= xyz + x^2y + xz^2 + \frac{x^3}{3} + y^2z + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} = C.$$

3. Однородные уравнения

Общий вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Вводим новую переменную $\frac{y}{x} = u$; тогда $y' = u'x + u$, и данное уравнение преобразовывается

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) \quad \text{или} \quad \frac{du}{-u + f(u)} = \frac{dx}{x};$$

отсюда

$$\ln x = C + \int \frac{du}{-u + f(u)},$$

следовательно,

$$x = Ce^{\int \frac{du}{-u + f(u)}}.$$

Пример.

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \qquad x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{1 - u^2}$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - u^2}{u + u^3}\,du.$$

Интегрируя это уравнение, получим $\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C$ или после подстановки

$$x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

4. Линейные уравнения

Общий вид

$$y' + P(x)\,y = Q(x).$$

Умножим обе части уравнения на $e^{\int P(x)\,dx}$, тогда его можно переписать

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}.$$

Интегрируя, получим

$$ye^{\int P(x)\,dx} = C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}.$$

Пример.

$$y' + \frac{2x}{x^2-1}\,y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}; \qquad \int P\,dx = \int \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \ln(x^2-1)$$

$$e^{\ln(x^2-1)} = x^2 - 1.$$

Умножая все уравнение на этот множитель, имеем

$$y'(x^2-1) + 2xy = \sqrt{x}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[y(x^2-1)\right] = \sqrt{x},$$

$$y(x^2-1) = C + \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}; \qquad y = \frac{2}{3}\,\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} + \frac{C}{x^2-1}.$$

5. Уравнение Бернулли

Общий вид

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^m.$$

Деля обе части на y^m, получим

$$y^{-m}y' + P(x)\,u^{1-m} = Q(x).$$

Вводим новую неизвестную функцию u

$$u = y^{1-m}; \quad u' = (1-m)\,y^{-m}\,y'.$$

При этом уравнение приводится к предыдущему случаю

$$u' + P_1(x)\,u = Q_1(x).$$

6. Уравнение Лагранжа

Общий вид

$$y = x\varphi_1(y') + \varphi_2(y').$$

$\varphi_1(y')$ отлично от y'. Дифференцируя по x и обозначив $y' = p$, находим

$$dy = p\,dx = \varphi_1(p)\,dx + x\varphi_1'(p)\,dp + \varphi_2'(p)\,dp,$$

откуда получим линейное уравнение

$$[\varphi_1(p) - p]\,\frac{dx}{dp} + \varphi_1'(p)\,x = -\varphi_2'(p),$$

где x считается функцией от p.

Решая это уравнение (см. п. 4), находим

$$x = C\psi_1(p) + \psi_2(p).$$

Подставляя найденное x в выражение для y, находим

$$y = \psi_3(p)\,C + \psi_4(p);$$

оба равенства дают в параметрической форме общий интеграл уравнения.

7. Уравнение Клеро

Уравнение Лагранжа переходит в уравнение Клеро при $\varphi_1(y') = y'$

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Решая его как уравнение Лагранжа, находим $dp = 0$; $p = C$; $y = Cx + \varphi(C)$, т. е. чтобы получить общий интеграл уравнения Клеро, надо в этом уравнении подставить вместо y' постоянную произвольную C.

Особым решением уравнения $y' = f(x, y)$ называется такое решение этого уравнения, которое не заключается в семействе кривых, представленных общим интегралом, т. е. не может быть получено из уравнения общего интеграла $y = \varphi(x, C)$ ни при каком значении постоянной C.

Особое решение получается исключением постоянной C из системы

$$y = \varphi(x, C), \quad \frac{\partial\varphi(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Отсюда видно, что особое решение дифференциального уравнения есть огибающая семейства кривых, представленных его общим интегралом.

Пример. Уравнение Клеро $y = xy' + \varphi(y')$ имеет особое решение, которое найдется исключением y' из уравнений

$$y = xy' + \varphi(y') \quad \text{и} \quad x + \varphi'(y') = 0.$$

8. Уравнения, не содержащие явно x

Общий вид

$$f(y, p) = 0, \text{ где } p = y'.$$

а) Если $f(y, p) = 0$ решается относительно p, то

$$p = \varphi(y)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y); \quad \frac{dy}{\varphi(y)} = dx;$$

и, следовательно,

$$x + C = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

б) Если $f(y, p) = 0$ решается относительно y, то

$$y = \varphi(p).$$

Дифференцируя, получим $dy = pdx = \varphi'(p)\,dp$, откуда

$$dx = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p}$$

или

$$x + C = \int \frac{\varphi'(p)\,dp}{p}.$$

Присоединяя к этому уравнению данное $y = \varphi(p)$ и исключая из них p, находим общий интеграл.

9 Уравнения, не содержащие явно y

Общий вид

$$f(x, p) = 0, \text{ где } p = y'.$$

а) Если $f(x, p) = 0$ решается относительно p, то

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(x),$$

откуда

$$y + C = \int \varphi(x)\,dx.$$

б) Если $f(p, x) = 0$ решается относительно x, то $x = \varphi(p)$.

Дифференцируя, получим $dx = \varphi'(p)\,dp$; $dy = p dx = p\varphi'(p)\,dp$; следовательно,

$$y + C = \int p\varphi'(p)\,dp.$$

Исключая p из этого уравнения и первоначального, находим общий интеграл.

§ 51. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

При начальных условиях $y^{(n-1)} = a$; $y^{(n-2)} = b$; ... при $x = 0$ общий интеграл имеет вид

$$y = \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_0^{t_1} f(t)\,dt + \frac{ax^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{bx^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots$$

Повторный интеграл, входящий первым членом в правую часть равенства, может быть сведен к простому интегралу по формуле

$$\int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_0^{t_1} f(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Пример. Заделанная балка загружена на конце силой P,

$$M = P(l - x); \quad y = y' = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l - x);$$

решение будет

$$y = \int_0^x (x - t)\frac{P}{EJ}(l - t)\,dt = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

2. Уравнения вида $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Вводя новую функцию $z = y^{(k)}$, имеем $z' = y^{(k+1)}, \ldots, z^{(n-k)} = y^{(n)}$ и таким образом понижаем порядок уравнения на k единиц:

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

3. Уравнения, не содержащие независимой переменной x

$$f(y, y', y'' \ldots) = 0$$

Примем y за независимую переменную, а $y' = z$ — за новую функцию, тогда

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = zz';$$

$$y''' = \frac{d(zz')}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} z' + z\frac{dz'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = zz'^2 + z''z^2;$$

. . . . . .

Отсюда видно, что порядок уравнения понижается на единицу

Пример. $1 + y'^2 = yy''$; полагаем $y' = z$; $y'' = zz'$, откуда

$$1 + z^2 = yz\frac{dz}{dy} \text{ или } \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{1+z^2};$$

$$Cy = \sqrt{1+z^2}, \quad z = \sqrt{(Cy)^2 - 1}.$$

Подставив вместо z его значение и отделив переменные, получим

$$\frac{dy}{\sqrt{(Cy)^2 - 1}} = dx,$$

откуда

$$\ln\left(Cy + \sqrt{(Cy)^2 - 1}\right) = Cx + C_1 \text{ или } Cy + \sqrt{(Cy)^2 - 1} = e^{Cx + C_1}.$$

4. Уравнения вида $y^{(n)} = \varphi\left(y^{(n-1)}\right)$

а) Уравнение решается относительно $y^{(n)}$. Полагая $y^{(n-1)} = z$, $y^{(n)} = z'$, находим

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{\varphi(z)} = dx;$$

и, следовательно,

$$x + C = \int \frac{dz}{\varphi(z)},$$

что и решает задачу.

б) Уравнение решается относительно $y^{(n-1)}$. Полагая $y^{(n-1)} = z$, $y^{(n)} = z'$, исходное уравнение приводим к виду $z = \varphi(z')$. Дифференцируя это уравнение, находим

$$z'\,dx = \varphi'(z')\,dz' \text{ или } dx = \frac{\varphi'(z')}{z'}\,dz',$$

откуда

$$x + C = \int \frac{\varphi'(z')\,dz'}{z'}.$$

Исключив z' из этого уравнения и заданного $z = \varphi(z')$, приходим к уравнению

$$y^{(n-1)} = z = f(x, C).$$

5. Уравнения вида $f\left(y^{(n)}, y^{(n-2)}\right) = 0$

а) Уравнение решается относительно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = \varphi\left(y^{(n-2)}\right).$$

Полагая $z = y^{(n-2)}$; $z'' = y^{(n)}$, находим $z'' = \varphi(z)$. Преобразуем z''

$$z'' = \frac{dz'}{dx} = \frac{dz'}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = z'\frac{dz'}{dz}.$$

Подставляя в исходное уравнение найденное значение z'', имеем $z'\,dz' = \varphi(z)\,dz$, откуда

$$\frac{z'^2}{2} = \int \varphi(z)\,dz + \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$z' = \frac{dz}{dx} = \sqrt{2\int \varphi(z)\,dz + C};$$

$$x + C_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{C + 2\int \varphi(z)\,dz}}.$$

После определения $z = y^{(y-1)}$ как функции от x дальнейшее решение не представляет затруднений.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $y''y^3 = 1$.

Имеем

$$y'' = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \frac{dy'}{dy}; \quad y' \frac{dy'}{dy} = y^{-3}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \int y^{-3}\,dy + C = -\frac{1}{2}y^{-2} + C$$

или

$$y' = \pm\sqrt{-y^{-2} + C_1} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{y}\sqrt{C_1y^2 - 1}$$

Интегрируя

$$dx = \frac{y\,dy}{\pm\sqrt{C_1y^2 - 1}},$$

найдем

$$y + C_2 = \frac{\pm 1}{C_1}\sqrt{C_1y^2 - 1},$$

откуда

$$(C_1x + C_2)^2 = C_1y^2 - 1.$$

б) Уравнение решается относительно $y^{(n-2)}$, так что $y^{(n-2)} = \varphi(y^{(n)})$.

Вводя обозначения $y^{(n-2)} = z$; $y^{(n)} = z''$, находим $z = \varphi(z'')$. Дифференцируем $dz = z'dx = \varphi'(z'')\,dz''$. Но $z'' = \frac{dz'}{dx}$; $dx = \frac{dz'}{z''}$, следовательно,

$$z'\frac{dz'}{z''} = \varphi'(z'')\,dz'' \quad \text{или} \quad z'dz' = z''\varphi'(z'')\,dz''.$$

Взяв квадратуру, имеем

$$\frac{z'^2}{2} = \frac{1}{2}C + \int z''\varphi'(z'')\,dz''$$

или

$$z' = \pm\sqrt{C + 2\int z''\varphi'(z'')\,dz''} = \frac{\varphi'(z'')\,dz''}{dx}.$$

Следовательно,

$$dx = \pm\frac{\varphi'(z'')\,dz''}{\sqrt{C + 2\int z''\varphi'(z'')\,dz''}}.$$

Таким образом получим два уравнения

$$x + C_1 = \pm\int\frac{\varphi'(z'')\,dz''}{\sqrt{C + 2\int z''\varphi'(z'')\,dz''}} \quad \text{и} \quad z = \varphi(z'').$$

Исключение из них z'' дает зависимость

$$z = \psi(x, C, C_1) = y^{(n-2)}.$$

6. Уравнения, однородные относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, с показателем однородности m

Полагая

$$y = e^{\int z\,dz}; \quad \ln y = \int z\,dz, \text{ дифференцируем } z = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

откуда

$$y' = ze^{\int z\,dx};$$

$$y'' = (z' + z^2)\,e^{\int z\,dx};$$

$$y''' = (z'' + 3zz' + z^3)\,e^{\int z\,dx};$$

. . . . . .

В силу однородности данного уравнения $e^{\int z\,dx}$ войдет во все члены в одной и той же степени и по сокращении всех членов на $e^{m\int z\,dx}$ останется уравнение $(n-1)$-го порядка между z и x.

7. Уравнения, однородные относительно dx, dy, d^2y, ..., d^ny

Считая x и y членами 1-го измерения, получим, что $\frac{dy}{dx}$ нулевого измерения, $\frac{d^2y}{dx^2}$ минус первого, $\frac{d^3y}{dx^3}$ минус второго и т. д.

Полагаем $x = e^t$, $y = e^t z$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dt};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Подставляя в данное уравнение и сокращая на e^{-mt} (m — показатель однородности), придем к уравнению:

$$F\left(1;\quad z;\quad z + \frac{dz}{dt};\quad \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2};\quad \ldots\right) = 0,$$

порядок которого можно сделать на единицу ниже, так как в него не входит независимая переменная (см. § 3, стр. 153).

§ 52. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Общий вид линейного уравнения с последним членом

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots + P_n y = Q(x).$$

Уравнение без последнего члена содержит в правой части нуль.

2. Линейные уравнения без последнего члена

Общий интеграл равен сумме n линейно независимых частных решений, умноженных на постоянные произвольные, т. е.

$$y = C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3 + \ldots + C_nu_n.$$

Для получения частных решений составляем „характеристическое" уравнение вида $k^n + P_1k^{n-1} + P_2k^{n-2} + \ldots + P_n = 0$. Решая это уравнение, находим n значений для k. Здесь могут встретиться случаи:

а) Все корни вещественные и неравные; тогда

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x} + \ldots + C_ne^{k_nx}.$$

б) Все корни вещественные, но среди них имеются l кратных корней

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{l-1} = k_l, \ldots, k_n:$$

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_lx^{l-1})e^{k_lx} + C_{l+1}e^{k_{l-1}x} + \ldots + C_ne^{k_nx}.$$

в) Среди корней имеются комплексные однократные $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) + C_3e^{k_3x} + \ldots$$

г) Среди корней имеется l пар кратных комплексных корней:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_l = \alpha + \beta i;\quad k_{l+1} = k_{l+2} = \ldots = k_{2l} = \alpha - \beta i;$$

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \ldots + C_lx^{l-1})\cos\beta x + (C_{l+1} + C_{l+2}x + \ldots + C_{2l}x^{l-1})\sin\beta x] + C_{2l-1}e^{k_{2l+1}x} + \ldots + C_ne^{k_nx},$$

Пример 1. Длинный стержень, лежащий на упругом основании, изгибается силой P, приложенной в его середине.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = -ky.$$

Перепишем уравнение в виде

$$y^{(IV)} + 4q^4y = 0, \qquad \text{где} \quad q = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

Характеристическое уравнение

$$k^4 + 4q^4 = 0,$$

значение корней которого вычисляется по формуле

$$k = q\sqrt{2}\left(\cos\frac{2n+1}{4}\pi + i\sin\frac{2n+1}{4}\pi\right), \text{ где } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

откуда

$$k_{1,2} = q \pm qi; \quad k_{3,4} = -q \pm qi,$$

следовательно, общий интеграл

$$z = e^{qx}(C_1\cos qx + C_2\sin qx) + e^{-qx}(C_3\cos qx + C_4\sin qx).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Имеем характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 1 = 0,$$

откуда получаем кратные корни $k_1 = k_2 = -1$; следовательно, общий интеграл

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2x).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0,$$

откуда $k_1 = k_2 = i$; $k_3 = k_4 = -i$.

Общий интеграл соответствует кратным комплексным корням

$$y = (C_1 + C_2x)\sin x + (C_3 + C_4x)\cos x.$$

3. Линейные уравнения с последним членом $Q(x)$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$y = Y + \eta,$$

где η — частное решение уравнения с последним членом, а Y — общий интеграл уравнения без последнего члена.

Пусть $Q(x) = e^{\mu x}f(x)$, где $f(x)$ — многочлен m-й степени; тогда частное решение ищем в форме:

а) $$\eta = e^{\mu x}(a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m),$$

если μ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения;

б) $$\eta = x^le^{\mu x}(a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m),$$

если μ совпадает с l-кратным корнем характеристического уравнения.

Если последний член имеет вид

$$e^{\alpha k}\cos\beta x\, f(x) \quad \text{или} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x\, f(x),$$

($f(x)$ – многочлен m-й степени), то в обоих случаях надо η искать в форме

в) $$\eta = e^{\alpha x}\,[\omega_1(x)\cos\beta x + \omega_2(x)\sin\beta x],$$

если $\alpha + \beta i$ не совпадает с корнем характеристического уравнения;

г) если $\alpha + \beta i$ есть l-кратный корень характеристического уравнения, то в форме:

$$\eta = x^l \cdot e^{\alpha x}\,[\omega_1(x)\cos\beta x + \omega_2(x)\sin\beta x];$$

$$\omega_1(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m;$$

$$\omega_2(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Во всех этих случаях неопределенные коэффициенты частного решения $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m$ определяются сравнением коэффициентов.

Пример.

$$y'' - 4y = xe^{2x} - e^{-3x}; \quad k_{1,2} = \pm 2.$$

Для 1-го члена

$$\mu = 2 = k_1; \quad m = 1, \quad l = 1$$

для 2-го

$$\mu = -3 \neq k_{1,2}; \quad l = 0, \quad m = 0.$$

Следовательно, по случаям а) и б) получим:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x};$$

$$\eta = e^{2x}x(\alpha x + \beta) + e^{-3x}\gamma.$$

Для определения α, β и γ составляем η' и η'':

$$\eta' = e^{2x}(2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\alpha x + \beta) - 3\gamma e^{-3x};$$

$$\eta'' = e^{2x}(4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\alpha x + 2\beta + 4\alpha x + 2\beta + 2\alpha) + 9\gamma e^{-3x}.$$

Подставляя эти значения в данное уравнение и сравнивая все коэффициенты, находим

$$8\alpha = 1, \quad 4\beta + 2\alpha = 0, \quad 5\gamma = -1,$$

следовательно,

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right) - \frac{1}{5}e^{-3x}.$$

д) Способ Лагранжа, или способ вариации произвольных постоянных.

Дано уравнение с последним членом

$$y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + P_2y^{(n-2)} + \ldots + P_ny = Q(x);$$

ищем его общий интеграл в виде

$$y = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n,$$

где $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ уже не постоянные, а некоторые функции от x.

Для определения вида этих функций дифференцируем y

$$y' = C_1u_1' + C_2u_2' + \ldots + C_nu_n' + C_1'u_1 + C_2'u_2 + \ldots + C_n'u_n$$

и полагаем

$$C_1'u_1 + C_2'u_2 + \ldots + C_n'u_n = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i' u_i = 0.$$

Совершенно так же для второй производной вводим условие

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i' u_i' = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Последнее уравнение для определения C_i' будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i' u_i^{(n-1)} = q.$$

Найдя из этих уравнений $C_i' = \varphi_i(x)$ и интегрируя, получим

$$C_i = \int \varphi(x)\,dx + D_i, \text{ где } D_i = \text{const}.$$

Пример.

$$y'' + y = x; \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y' = C_1' \cos x + C_2' \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x; \quad C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0;$$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x - C_1' \sin x + C_2' \cos x,$$

но по условию $y'' + y = x$.

Таким образом, для определения C_1 и C_2 имеем два уравнения:

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0;$$

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = x,$$

откуда

$$C_1' = -x \sin x; \quad C_2' = x \cos x;$$

$$C_1 = x \cos x - \sin x + D_1; \quad C_2 = x \sin x + \cos x + D_2;$$

$$y = D_1 \cos x + D_2 \sin x + x.$$

§ 53. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

1. Интегрирование с помощью ряда Тейлора

Если дано уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, то, найдя с помощью его $y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$ и дифференцируя m раз, можем получить

$$y^{(n+m)} = \psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Задав при некотором $x = a$ значения $y = y_a$, $y' = y_a'$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_a^{(n-1)}$, получим возможность найти значения всех производных, следующих после n-й, при том же $x = a$. Если все эти числа окажутся конечными и удастся подметить закон их составления, то можно написать разложение неизвестной функции y в ряд Тейлора по степеням x

$$y = y_a + \frac{y_a'}{1!}(x-a) + \frac{y_a''}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!}(x-a)^n \ldots$$

Если ряд можно суммировать, то получится общий интеграл

$$y = F_1\left(x,\ y_a,\ y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}\right),$$

Пример.

$$y'' + k^2 y = x.$$

Найти интеграл при $x = 0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$. Имеем:

$$y'' = x - k^2 y; \quad y''' = -k^2 y' + 1;$$

$$y^{\mathrm{IV}} = -k^2 y'' = k^4 y - k^2 x; \quad y^{\mathrm{V}} = k^4 y' - k^2;$$

$$y^{\mathrm{VI}} = k^4 y'' = -k^6 y + k^4 x \ldots$$

Вообще

$$y^{(2n)} = (-1)^n (k^{2n} y - k^{2n-2} x);$$

$$y^{(2n+1)} = (-1)^n (k^{2n} y' - k^{2n-2}), \text{ где } n = 1, 2, \ldots$$

При $x = 0$ имеем

$$y_0^{(2n)} = (-1)^n k^{2n} y_0; \quad y^{(2n+1)} = (-1)^n (k^{2n} y'_0 - k^{2n-2}),$$

где $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда, пользуясь рядом Тейлора, найдем

$$y = y_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(kx)^{2n}}{2n!}\right) + \left(\frac{y'_0}{k} - \frac{1}{k^3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+ \frac{x}{k^2} = y_0 \cos kx + \left(\frac{y'_0}{k} - \frac{1}{k^3}\right) \sin kx + \frac{x}{k^2}.$$

2. Интегрирование с помощью степенных рядов

Ограничимся рассмотрением уравнения второго порядка

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0.$$

Разложим $p(x)$ и $q(x)$ в степенные ряды; тогда уравнение будет

$$y'' + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) y' + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) y = 0. \qquad (1)$$

Решение этого уравнения ищем в форме ряда $y = \sum_{s=0}^{s=\infty} \alpha_s x^s$; подставив это в уравнение (1), получим

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)\alpha_s x^{s-2} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s x^s \cdot \sum_{s=1}^{\infty} s\alpha_s x^{s-1} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s x^s \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s = 0.$$

Перемножая ряды, собирая подобные члены и приравнивая коэффициенты при x^i, получим систему для определения α_s:

x^0	2. $1\alpha_2 + a_0\alpha_1 + b_0\alpha_0 = 0;$
x	3. $2\alpha_3 + 2a_0\alpha_2 + \alpha_1 a_2 + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 = 0;$
x^2	4. $3\alpha_4 + 3a_0\alpha_3 + 2a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0 = 0.$

Отсюда, принимая α_0 и α_1 за постоянные произвольные, найдем

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s.$$

Удобно поступить так: для y_1 принимаем $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = 0$; для y_2 принимаем $\alpha = 0$; $\alpha_1 = 1$.

Всякое решение уравнения будет линейной комбинацией этих решений, поэтому, если начальные условия имеют вид

$$y|_{x=0} = A \quad \text{и} \quad y'|_{x=0} = B,$$

то интеграл будет

$$y = Ay_1 + By_2.$$

Аналогично можно будет поступить, если в дифференциальное уравнение высшего порядка входит столько постоянных произвольных коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ каков порядок дифференциального уравнения.

Уравнение вида

$$x^2y'' + p(x)\,xy' + q(x)\,y = 0, \tag{2}$$

где $p(x)$ и $q(x)$, как и раньше, разложим в степенные ряды. Решение ищем в форме

$$y = x^\rho \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s;$$

ρ — величина неопределенная.

Подставляя y' в основное уравнение (2), сравнением коэффициентов получим:

$$\left.\begin{array}{l} [\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0]\,\alpha_0 = 0 \\ [(\rho+1)\rho + a_0(\rho+1) + b_0]\,\alpha_1 + a_1\rho\alpha_1 + b_1\alpha_0 = 0 \\ [(\rho+2)(\rho+1) + a_0(\rho+2) + b_0]\,\alpha_2 + a_1(\rho+1)\,\alpha_1 + a_2\rho\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [(\rho+s)(\rho+s-1) + a_0(\rho+s) + b_0]\,\alpha_s + \ldots = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Считая α_0 за произвольную постоянную, по уравнению (3), так называемому „определяющему", находим два значения для ρ, подставляя одно из них, например ρ_1, в систему остальных уравнений, получим (при произвольном α_0) ряд значений α_s. При этом:

а) если разность $\rho_1 - \rho_2$ не равна целому числу или нулю, то можно, подставив вместо ρ второй корень ρ_2, найти еще одну систему коэффициентов, которые назовем β_s, и, следовательно, в этом случае будем иметь два независимых частных решения уравнения:

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s \quad \text{и} \quad y_2 = x^{\rho_2} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s x^s;$$

б) если разность $\rho_1 - \rho_2$ равна целому положительному или нулю, то можно найти лишь одно независимое частное решение вида

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s,$$

соответствующее большему корню.

3. Уравнение Бесселя

Общий вид

$$x^2y'' + xy^2 + (x^2 - p^2)\,y = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (2), находим, что в данном случае определяющее уравнение будет $\rho^2 - p^2 = 0$ и его корни $\rho_1 = p$; $\rho_2 = -p$. Решение ищем в виде:

$$y = x^p(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots).$$

Продифференцировав одно, например первое из уравнений системы, $k-1$ раз по t и заменяя при этом производные от y, z, ... по t их значениями через φ, ψ, ... и т. д., получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z, \ldots) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= f_2(t, x, y, z, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^kx}{dt^k} &= f_k(t, x, y, z, \ldots) \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Исключив отсюда $k-1$ неизвестных y, z, ..., придем к уравнению вида

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^kx}{dt^k}\right) = 0.$$

Проинтегрировав его, если возможно, найдем

$$x, \frac{dx}{dt}, \ldots \text{ и т. д.}$$

Величины y, z, ... выразим через t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{kt^2}$, ..., пользуясь системой уравнений (1).

Пример.

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + z, \qquad \frac{dz}{dt} = y - x.$$

Имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x - y - x - z = -y - z;$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = -x - y - z + x = -y - z,$$

откуда

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

$$x = C_1 + C_2t + C_3e^t,$$

следовательно,

$$y = x - \frac{dx}{dt} = C_1 + C_2t + C_3e^t - C_2 - C_3e^t = (C_1 - C_2) + C_2t;$$

$$z = \frac{dy}{dt} - x = (C_2 - C_1) - C_2t - C_3e^t.$$

б) Система вида:

$$f_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}, y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^ny}{dt^n}, z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^pz}{dt^p}\right) = 0;$$

$$f_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, z, \ldots, \frac{d^pz}{dt^p}\right) = 0;$$

$$f_3\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^pz}{dt^p}\right) = 0.$$

Эту систему можно привести к предыдущему случаю, введя новые переменные:

$$\frac{dx}{dt} = x_1; \quad \frac{dx'}{dt} = x_2; \quad \ldots \frac{d^{m-1}x}{dt} = x_m;$$

$$\frac{dy}{dt} = y_1; \quad \frac{dy'}{dt} = y_2; \quad \ldots \frac{d^{n-1}y}{dt} = y_n;$$

$$\frac{dz}{dt} = z_1; \quad \frac{dz'}{dt} = z_2; \quad \ldots \frac{d^{p-1}z}{dt} = z_p.$$

Добавив к ним данную систему, получим новую систему с $m + n + p$ переменными, которая решается предыдущим способом.

в) Уравнение в частных производных первого порядка вида

$$X_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} + \ldots + X_n \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0.$$

Составляем систему совокупных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{2}$$

Отсюда находится $n - 1$ независимых интегралов системы (2): $\varphi_1 = C_1$, $\varphi_2 = C_2, \ldots, \varphi_{n-1} = C_{n-1}$. Общий интеграл

$$v = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная функция.

Пример.

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Составляем выражение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

имеем: $\ln C_1 x = \ln y$, $C_1 x = y$ и $C_2 x = z$ или $C_1 = \frac{y}{x}$ и $C_2 = \frac{z}{x}$.

Следовательно,

$$v = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

где f — произвольная функция.

г) Уравнение в частных производных с последним членом

$$X_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial v}{\partial x_n} = q(x);$$

n независимых частных интегралов $\varphi_1 = C_1$, $\varphi_2 = C_2, \ldots, \varphi_n = C_n$ найдем из системы

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dv}{q(x)}.$$

Общий интеграл $\varphi_n = \Psi(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})$, где Ψ — произвольная функция.

Пример.

$$x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2x}{z};$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-z} = \frac{z\,dv}{2x}$$

Имеем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}; \quad x\,dy + y\,dx = 0; \quad d(xy) = 0;$$

$$\varphi_1 = xy = C_1;$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z}; \quad \varphi_2 = xz = C_2.$$

Далее:

$$\frac{dx}{x} = \frac{z\,dv}{2x}; \quad dv = \frac{2dx}{z}, \text{ но } z = \frac{C_2}{x},$$

поэтому

$$dv = \frac{2x\,dx}{C_2}; \quad v = \frac{x^2}{C_2} + C_3 \text{ или } v - \frac{x}{z} = C_3 = \varphi_3.$$

Общий интеграл

$$v - \frac{x}{z} = f(xy;\ zx) \quad \text{или} \quad v = \frac{x}{z} + f(xy, xz),$$

где f — произвольная функция.

РАЗДЕЛ II

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ГЛАВА 1

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Задача теории упругости состоит в определении напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в упругом теле под действием заданной системы внешних сил.

В отличие от теории сопротивления материалов, стремящейся получить решение тех же задач с помощью различных упрощающих рабочих гипотез, теория упругости ставит своей целью получение строгих и полных решений. Это дает возможность оценить степень точности расчетных формул, полученных в теории сопротивления материалов, а также решать такие задачи, которые элементарным путем не могут быть решены.

В классической теории упругости рассматривается упругое тело, обладающее следующими свойствами:

1. Тело является абсолютно упругим, т. е. обладает способностью после удаления внешних нагрузок возвращаться в свое исходное состояние, возвращая при этом всю работу, затраченную на его деформацию.
2. Между нагрузкой тела и его деформацией существует линейная зависимость (закон Гука).
3. Упругое тело является однородным и изотропным, т. е. упругие свойства во всех точках тела одинаковы и не зависят от направления.
4. Материал в упругом теле заполняет непрерывно весь объем, т. е. тело является сплошным (пренебрежение размерами молекул).
5. Упругое тело является относительно жестким; подразумевается, что перемещение и деформации точек тела весьма малы по сравнению с размерами тела.

Основные задачи теории упругости в общем виде пока не решены вследствие значительных математических трудностей, однако многие важные для практического использования задачи получили в настоящее время свое разрешение.

§ 1. Напряжения

В задачи теории упругости не входит детальное рассмотрение структуры упругого тела и полной величины внутренних сил взаимодействия его частиц, в ней рассматриваются лишь их изменения, происходящие вследствие нагрузки тела.

Если тело, подверженное действию внешних сил, мысленно пересечь некоторой плоскостью, то по этой плоскости окажутся распределенными силы внутреннего взаимодействия между частицами тела, находящимися по разные стороны этой плоскости.

Равнодействующая внутренних сил, отнесенная к единице площади сечения у данной точки его, называется напряжением тела в этой точке по рассматриваемому сечению.

Если это напряжение p разложить на три взаимно-перпендикулярные оси, направленные — одна по нормали к площадке и две другие в плоскости сечения, то составляющая напряжения по нормали к площадке называется нормальным напряжением σ_ν, составляющие же напряжения τ_m и τ_q по осям, лежащим в плоскости площадки, а также равнодействующая их τ_ν — касательными или скалывающими напряжениями (рис. 1). При этом очевидно

$$\tau_\nu^2 = \tau_m^2 + \tau_q^2; \quad p^2 = \tau_\nu^2 + \sigma_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_m^2 + \tau_q^2.$$

При изменении направления площадки, проходящей через данную точку, меняются величина и направление напряжения p; если все эти напряжения откладывать от данной точки в виде векторов, то концы этих векторов окажутся лежащими на некотором эллипсоиде, носящем название эллипсоида напряжений. Направления, совпадающие с главными осями эллипсоида напряжений, называются главными направлениями. Напряжения, соответствующие главным направлениям (полуоси эллипсоида), называются главными напряжениями.

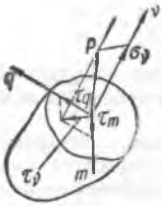


Рис. 1.

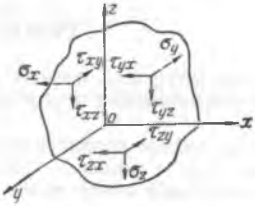


Рис. 2.

Одно из главных напряжений есть наибольшее и одно — наименьшее из всех напряжений, соответствующих различным площадкам, проведенным через данную точку.

Главные напряжения перпендикулярны площадкам, в которых они действуют, и, следовательно, в этих площадках касательные напряжения отсутствуют (а главные напряжения являются одновременно и нормальными напряжениями для этих площадок).

Во всяких двух взаимно-перпендикулярных площадках проекции касательного напряжения на нормаль к их общему ребру всегда равны. Если одно из них направлено к этому ребру, то и другое направлено к нему. Поэтому напряжения в трех взаимно-перпендикулярных площадках, перпендикулярных осям ox, oy и oz, вполне характеризуются тремя нормальными напряжениями σ_x, σ_y и σ_z и тремя касательными напряжениями τ_{xy}, τ_{xz} и τ_{yz}, изображенными на рис. 2.

Шесть этих напряжений называются компонентами тензора напряжения в данной точке и вполне характеризуют напряженное состояние в точке. Их принято считать положительными, когда они направлены, как на рис. 2, т. е. к площадке, внешняя нормаль к которой совпадает с отрицательным направлением одной из координатных осей, отсекаемая часть тела прилагает усилия, совпадающие с отрицательным направлением координатных осей.

Зная компоненты напряжения для данной точки, можно найти для нее главные напряжения и их направления.

Главные напряжения σ являются корнями следующего кубического уравнения:

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2\right) -$$

$$-\left(\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2\right) = 0. \qquad (1)$$

Если σ_i есть одно из главных напряжений [один из корней уравнения (1)], то для определения углов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, которые составляют соответствующее этому напряжению главное направление с осями ox, oy, oz, могут служить зависимости

$$l_i^2 = \cos^2\alpha_i = \frac{a_i}{s_i}; \quad m_i^2 = \cos^2\beta_i = \frac{b_i}{s_i}; \quad n_i^2 = \cos^2\gamma_i = \frac{c_i}{s_i},$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_i &= (\sigma_y - \sigma_i)(\sigma_z - \sigma_i) - \tau_{yz}^2 \\ b_i &= (\sigma_z - \sigma_i)(\sigma_x - \sigma_i) - \tau_{xz}^2 \\ c_i &= (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2 \\ s_i &= a_i + b_i + c_i \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Как величина главных напряжений, так и главные направления определяются только напряженным состоянием в рассматриваемой точке, вследствие этого они инвариантны по отношению к преобразованию прямоугольной координатной системы.

На основании уравнения (1) можно записать следующие три инварианта тензора напряжений

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const} \\ &\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \text{const} \\ &\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \text{const} \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Если известны главные напряжения и главные направления для точки, то напряжение p в этой точке по какой-либо площадке, нормаль к которой составляет углы α, β и γ с главными направлениями, может быть найдено с помощью формулы

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma}\,, \qquad (4)$$

где σ_1, σ_2, и σ_3 — величины главных напряжений.

Углы λ, δ и θ, составляемые напряжением p с главными направлениями, определяются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\sigma_1}{p}\cos\alpha \\ \cos\delta &= \frac{\sigma_2}{p}\cos\beta \\ \cos\theta &= \frac{\sigma_3}{p}\cos\gamma \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Нормальное напряжение σ_ν для какой-либо площадки, нормаль к которой составляет с осями ox, oy, oz углы α, β, γ соответственно, может быть найдено по формуле

$$\sigma_\nu = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \\ + 2\tau_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma. \qquad (6)$$

Касательное напряжение τ_ν для той же площадки

$$\tau_\nu^2 = X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2 - \sigma_\nu^2\,, \qquad (7)$$

где

$$X_\nu = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\cos\ \ + \tau_{xz}\cos\gamma\,;$$

$$Y_\nu = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma\,;$$

$$Z_\nu = \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma\,.$$

Если оси ox, oy, oz совпадают с главными осями, то формулы (6) и (7) преобразуются к виду

$$\sigma_\nu = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma; \tag{8}$$

$$\tau_\nu^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - \\ - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma)^2. \tag{9}$$

Касательные напряжения принимают наибольшие и наименьшие значения для площадок, биссектирующих двугранные углы, образуемые главными направлениями: величины касательных напряжений для этих площадок определяются равенствами:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \qquad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \qquad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \tag{10}$$

При этом, например, $\pm\tau_2$ относятся к двум взаимно-перпендикулярным площадкам, биссектирующим двугранные углы между плоскостями, соответствующими главным напряжениям σ_2 и σ_3.

Интенсивностью касательных напряжений называют напряжение, определяемое формулой

$$\tau_i = k \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)} = \\ = k \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \tag{11}$$

где k — постоянная.

При значении $k = \frac{1}{3}$ τ_i называют также октаэдрическим напряжением: оно представляет собой касательное напряжение в площадке, нормаль к которой составляет с главными осями равные углы.

Октаэдрическое напряжение играет существенную роль в теории пластичности.

§ 2. Связь между напряжениями, объемными и поверхностными силами

Внешние силы, действующие на тело, могут быть разделены на силы поверхностные, действующие на частицы, лежащие у наружной поверхности его, и на силы объемные, действующие на частицы внутри тела (силы веса, силы инерции).

Из рассмотрения условий равновесия элементарного параллелепипеда, выделенного внутри напряженного тела, вытекают следующие три уравнения, выражающие связь между напряжениями и объемными силами внутри тела:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В этих уравнениях X, Y и Z — проекции объемной силы, отнесенной к единице объема, на оси координат; σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} — компоненты тензора напряжения для рассматриваемой точки тела; плоскости, соответствующие этим компонентам, приняты за координатные плоскости.

Из рассмотрения условий равновесия элементарного тетраэдра, выделенного в напряженном теле так, что по трем взаимно-перпендикулярным сторонам его действуют напряжения, а четвертая сторона его совпадает с наружной поверх-

ностью тела и подвержена действию поверхностных напряжений, вытекают следующие три уравнения, выражающие связь между компонентами тензора напряжения и поверхностными напряжениями:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= p\cos\lambda = \sigma_x\cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{xz}\cos\gamma \\ Y_\nu &= p\cos\delta = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma \\ Z_\nu &= p\cos\theta = \tau_{xy}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В этих уравнениях α, β и γ — углы, составляемые с осями координат внешней нормалью ν к четвертой стороне тетраэдра, p — напряжение на поверхности тела, а λ, δ и θ — углы, составляемые напряжением p с осями координат, и, следовательно, X_ν, Y_ν и Z_ν есть составляющие поверхностных напряжений по направлению осей ox, oy и oz.

§ 3. Перемещения, деформации и связь между ними

Упругое тело под влиянием приложенных к нему и уравновешенных на нем внешних сил изменяет свою форму, причем отдельные точки тела при этом перемещаются. Если возьмем в теле неизменно связанную с ним систему координатных осей ox, oy, oz и обозначим перемещения точек по направлению этих осей соответственно через u, v и w, то эти перемещения будут в силу сплошности тела непрерывными функциями координат x, y и z.

Выражения вида $u = f_1(x, y, z)$; $v = f_2(x, y, z)$; $w = f_3(x, y, z)$ вполне определяют изменение формы тела, так как дают перемещение любой точки его.

Всякий выделенный внутри тела прямоугольный параллелепипед при изменении формы тела в общем случае претерпевает следующие деформации: ребра параллелепипеда изменяют свою длину, а двугранные углы его, бывшие до деформации прямыми, перекашиваются.

Выделим в теле прямоугольный параллелепипед с ребрами dx, dy и dz по направлению координатных осей; обозначим относительные удлинения его ребер соответственно через ε_x, ε_y и ε_z, а углы сдвига, т. е. изменения двугранных углов, составляемых осями координат, через γ_{xy}, γ_{xz} и γ_{yz}. Относительное удлинение ε для какого-либо направления, составляющего с осями ox, oy и oz углы α, β и γ, может быть получено по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\beta + \varepsilon_z\cos^2\gamma + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \\ + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{xz}\cos\alpha\cos\gamma. \tag{14}$$

Угол сдвига между двумя направлениями r и q, составляющими с осями координат углы α_r, β_r, γ_r и α_q, β_q и γ_q, вычисляется по формуле

$$\gamma_{rq} = 2(\varepsilon_x\cos\alpha_r\cos\alpha_q + \varepsilon_y\cos\beta_r\cos\beta_q + \varepsilon_z\cos\gamma_r\cos\gamma_q) + \\ + \gamma_{xy}(\cos\alpha_r\cos\beta_q + \cos\beta_r\cos\alpha_q) + \gamma_{yz}(\cos\beta_r\cos\gamma_q + \cos\gamma_r\cos\beta_q) + \\ + \gamma_{xz}(\cos\gamma_r\cos\alpha_q + \cos\alpha_r\cos\gamma_q). \tag{15}$$

Для каждой точки тела можно найти три таких взаимно-перпендикулярных направления, для которых деформации ε_1, ε_2 и ε_3 будут: одна наибольшей, а другая — наименьшей; эти деформации называются главными, а их направления — направлениями главных деформаций. Для изотропно-упругого тела направления главных деформаций и направления главных напряжений совпадают.

Изменения двугранных углов, соответствующих главным направлениям, равны нулю.

Величины главных деформаций ε_1, ε_2 и ε_3 — корни кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \varepsilon\left[\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right)\right] - \\ - \left[\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{xz} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 - \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right)\right] = 0. \tag{16}$$

Углы же α_i, β_i и γ_i, составляемые главным направлением с осями координат, определяются формулами

$$l_i^2 = \cos^2 \alpha_i = \frac{a_i}{s_i}; \quad m_i^2 = \cos^2 \beta_i = \frac{b_i}{s_i};$$

$$n_i^2 = \cos^2 \gamma_i = \frac{c_i}{s_i},$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_i &= 4(\varepsilon_y - \varepsilon_i)(\varepsilon_z - \varepsilon_i) - \gamma_{yz}^2 \\ b_i &= 4(\varepsilon_x - \varepsilon_i)(\varepsilon_z - \varepsilon_i) - \gamma_{xz}^2 \\ c_i &= 4(\varepsilon_x - \varepsilon_i)(\varepsilon_y - \varepsilon_i) - \gamma_{xy}^2 \\ s_i &= a_i + b_i + c_i \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Как величина, так и направление главных деформаций определяются только деформированным состоянием в рассматриваемой точке; вследствие этого они инвариантны по отношению к преобразованию прямоугольной координатной системы.

На основании уравнения (16) можно записать следующие три инварианта:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{const} \\ &\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \text{const} \\ &\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{xz} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

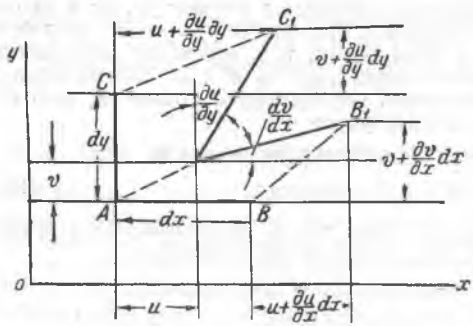


Рис. 3.

Первый инвариант имеет простой физический смысл: он представляет относительное приращение объема всякого элементарного параллелепипеда, совпадающего с данной точкой (относительное объемное расширение).

Если известны главные деформации ε_1, ε_2 и ε_3 и их направления, то деформация ε по какому-либо иному направлению, составляющему углы α, β и γ с главными направлениями, будет

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma. \tag{19}$$

Относительные удлинения ε_x, ε_y и ε_z называются также линейными деформациями в точке по направлению осей ox, oy, oz соответственно. Между ними и перемещениями u, v, w существует зависимость

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{20}$$

Углы сдвига γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx} называются также деформациями сдвига (угловыми деформациями) между соответствующими направлениями в данной точке. Деформации сдвига γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx} связаны с перемещениями u, v, w зависимостями

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{21}$$

непосредственно следующими из рис. 3.

Интенсивностью деформаций сдвига называется положительная величина, определяемая формулой

$$\gamma_i = k\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right)},$$

где k — постоянная.

При $k = \frac{2}{3}$ γ_i называют также октаэдрическим сдвигом. Октаэдрический сдвиг есть удвоенный угол сдвига площадки, равнонаклоненной к главным осям деформаций.

Октаэдрический сдвиг играет существенную роль в теории пластичности.

Так как все шесть компонентов деформации определяются частными производными лишь трех функций, то они не могут быть рассматриваемы как величины независимые. Между ними существуют следующие шесть зависимостей, найденных Сен-Венаном:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Условия (22) могут быть выражены через напряжения, если воспользоваться связью между деформациями и напряжениями (см. § 4) и уравнениями равновесия (12):

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = -2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\
&\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} = -2\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\
&\Delta^2\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} = -2\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\
&\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\\
&\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\\
&\Delta^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \qquad \nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}.$$

μ — коэффициент Пуассона.

Таким образом, если u, v и w известны как функции от x, y и z, то все деформации, как линейные ε_x, ε_y и ε_z, так и угловые (сдвиги) γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx}, могут быть определены по формулам (20) и (21) с помощью простого дифференцирования.

Обратная задача: нахождение перемещений u, v и w по деформациям приводится к интегрированию системы шести совместных дифференциальных уравнений (20) и (21). Если компоненты деформации удовлетворяют зависимостям (22), то операция интегрирования систем (20) и (21) всегда выполнима и сводится вообще к последовательным нахождениям функций по их полному дифференциалу.

Для односвязных областей условия (22) являются необходимыми и достаточными условиями сплошности тела; для многосвязных областей они являются лишь необходимыми, но недостаточными условиями однозначности перемещений, а следовательно, и сплошности тела.

§ 4. Связь между напряжениями и деформациями

Для рассматриваемых в классической теории упругости упругих тел связь между напряжениями и деформациями определяется обобщенным законом Гука. Шесть зависимостей обобщенного закона даются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z); \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z); \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x); \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

В эти уравнения входят только два постоянных коэффициента E и μ, характеризующие материал и определяемые опытным путем.

Коэффициент E есть коэффициент пропорциональности между растягивающим напряжением и относительным удлинением при простом растяжении и называется модулем упругости, или модулем Юнга.

Величина μ характеризует уменьшение линейных деформаций ε_x, ε_y и ε_z вследствие действия поперечных (по отношению к ним) напряжений; ее называют коэффициентом Пуассона.

Коэффициент при сдвигах $\frac{E}{2(1+\mu)}$ обыкновенно обозначается одной буквой G и называется модулем сдвига.

Полученным уравнениям можно придать иной вид, решив их относительно компонентов напряжения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu e}{1-2\mu}\right); \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu e}{1-2\mu}\right); \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu e}{1-2\mu}\right); \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ — относительное объемное расширение.

§ 5. Связь между объемными силами и перемещением точек

Три уравнения равновесия (12) связывают объемные силы с шестью напряжениями. Заменяя в этих уравнениях напряжения их выражениями через деформации, можно получить следующую связь между объемными силами и перемещениями:

$$\left.\begin{aligned} G\left(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + X = 0 \\ G\left(\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial y}\right) + Y = 0 \\ G\left(\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z}\right) + Z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Уравнения (26) называют уравнениями равновесия в перемещениях.

Здесь через $\nabla^2 u$, $\nabla^2 v$ и $\nabla^2 w$ обозначены суммы трех вторых производных функций u, v и w (операция Лапласа), например,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Величина

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\nabla^2 e = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{27}$$

В случае отсутствия объемных сил уравнения (26) и (27) принимают вид

$$\nabla^2\nabla^2 u = 0;\quad \nabla^2\nabla^2 v = 0;\quad \nabla^2\nabla^2 w = 0;\quad \nabla^2 e = 0.$$

Уравнениями (26) можно пользоваться для нахождения перемещений по заданным силам. Граничные условия задаются обычно на поверхности тела; если известно напряжение p на поверхности, то граничными условиями является совокупность равенств (13).

§ 6. Схемы решения задач теорией упругости

Уравнения, приведенные в предыдущих параграфах, дают исчерпывающую зависимость между следующими величинами:

1) внешними объемными и поверхностными силами X, Y, Z, p;
2) напряжениями в теле, вызываемыми этими силами, σ, τ;
3) соответствующими деформациями ε, γ;
4) перемещениями точек u, v, w;
5) величинами, характеризующими упругие свойства данного тела, E, G, μ.

Таким образом, с теоретической точки зрения задача теории упругости, состоящая в определении напряжений, деформаций и перемещений точек упругого тела, подверженного действию известных внешних сил, может считаться решенной. Однако в действительности из-за затруднений чисто математического характера (из-за необходимости интегрирования совокупных дифференциальных уравнений в частных производных) такая постановка задачи допускает простое решение для немногих частных случаев.

Если поставить обратную задачу, т. е. задать перемещения точек в функции от координат, а искать напряжения и внешние силы, то вопрос существенно упростится. Действительно, дифференцированием перемещений по уравнениям (20) и (21) легко получить все деформации; далее по уравнениям (25) можно получить компоненты напряжений и по уравнениям (12) и (13) — внешние поверхностные и объемные силы; впрочем, эти последние можно было бы получить и по уравнениям (26). Использование обратной задачи, ввиду простоты ее решения, как метода для решения прямой задачи не приводит к цели. Этот метод крайне несовершенен, так как лишь случайно может привести к желательной совокупности внешних сил; вероятность получения при помощи него требуемого решения — ничтожна.

Прямая задача существенно упрощается, если условия симметрии или какие-либо иные условия позволяют уменьшить число неизвестных. В частности, например, в случае симметричной относительно точки деформации, а также плоского напряженного состояния, имеющего ось симметрии, задача легко решается непосредственным определением перемещений (см. ниже — задача Лямэ и ей родственные).

В общем случае плоской деформации и плоского напряженного состояния задача упрощается также весьма значительно и решается в большинстве случаев непосредственным определением напряжений.

Наиболее важные для техники вопросы (растяжение, сжатие, кручение и изгиб призматических тел) можно решать, применяя полуобратный способ,

предложенный Сен-Венаном. Способ этот состоит в том, что на основании условий задачи предугадываются некоторые напряжения и деформации, затем при помощи полученных выше уравнений находят не только остальные напряжения и деформации, но и вызывающие их внешние силы. Если найденные таким образом внешние силы соответствуют условиям задачи и все уравнения теории упругости удовлетворяются, то задача решена. В противном случае нужно решать задачу заново при других предположениях о характере напряжений и деформаций.

ГЛАВА 2

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

§ 7. Тела с симметричным относительно оси распределением напряжений

При решении задач теории упругости для указанных тел удобно пользоваться цилиндрическими координатами.

В этом случае положение точек тела определяется пересечением следующих координатных плоскостей (рис. 4):

1) кругового цилиндра радиусом r с осью oz;
2) плоскости, проходящей через ось цилиндра, определяемой углом θ;
3) плоскости, перпендикулярной оси oz, определяемой координатой z.

Положение точек тела при таком выборе координатных плоскостей определяется тремя координатами: r, θ и z.

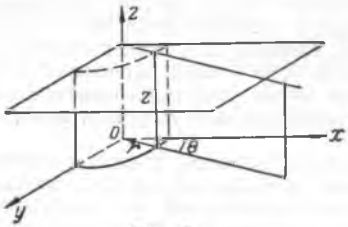


Рис. 4.

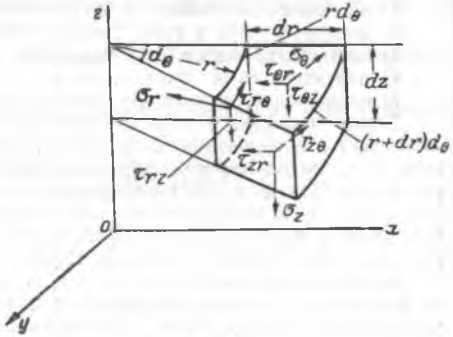


Рис. 5.

Придавая координатам r, θ и z, соответственно, приращения dr, $d\theta$ и dz и проводя новые координатные поверхности через точки $r + dr$, $\theta + d\theta$ и $z + dz$, можно выделить бесконечно малый объем, имеющий форму, показанную на рис. 5.

Введем следующие обозначения для напряжений, деформаций и перемещений в рассматриваемой системе координатных осей:

σ_r — нормальное напряжение в площадке, перпендикулярной радиусу r;

σ_θ — нормальное напряжение в площадке, совпадающей с радиусом r;

σ_z — нормальное напряжение в площадке, перпендикулярной оси oz;

$\tau_{r\theta}$ — касательное напряжение, действующее в площадке, нормальной к радиусу, и направленное перпендикулярно радиусу (равно соответствующему касательному напряжению, действующему в площадке, совпадающей с радиусом);

τ_{rz} — касательное напряжение, параллельное оси oz и действующее в площадке, перпендикулярной радиусу (равно соответствующему касательному напряжению в площадке, перпендикулярной оси oz);

$\tau_{z\theta}$ — касательное напряжение, направленное перпендикулярно радиусу и действующее в площадке, нормальной к оси oz (равно соответствующему касательному напряжению в площадке, совпадающей с радиусом);

ε_r — линейная деформация в направлении радиуса;

ε_θ — линейная деформация в направлении, перпендикулярном радиусу;

ε_z — линейная деформация в направлении оси oz;

$\gamma_{r\theta}$ — деформация сдвига между направлением, совпадающим с радиусом, и направлением, ему перпендикулярным;

γ_{rz} — деформация сдвига между направлением, совпадающим с осью oz, и направлением, совпадающим с радиусом;

$\gamma_{z\theta}$ — деформация сдвига между направлением, совпадающим с осью oz, и направлением, перпендикулярным радиусу;

u — перемещение по направлению радиуса;

v — перемещение по направлению, перпендикулярному радиусу;

w — перемещение по направлению оси oz.

Примем ось oz за ось вращения тела. Тогда, рассматривая тело с симметричным относительно оси распределением напряжений, можно принять, что касательные напряжения $\tau_{z\theta}$ и $\tau_{r\theta}$ будут равны нулю (площадки, совпадающие с направлением радиуса r, являются главными площадками), а остальные напряжения будут являться функциями только координат r и z.

Для определения этих напряжений, а также деформаций и перемещений необходимо записать все основные уравнения теории упругости в принятой системе координат.

1. Уравнения равновесия

Выделим в точке тела бесконечно малый объем, приложим к его границам напряжения, положительное направление которых показано на рис. 5 и 6.

Проектируя все усилия, действующие на элементарный объем, на направление радиуса, проходящего через середину элемента, и на ось oz и исключая из рассмотрения силы веса и другие объемные силы, получим уравнения равновесия в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\ &\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

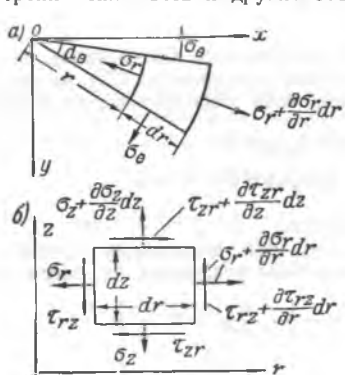


Рис. 6.

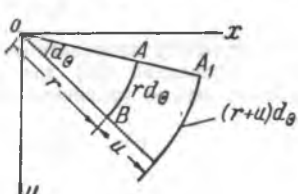


Рис. 7.

2. Связь между перемещениями и деформациями

Линейная деформация в направлении радиуса ε_r обусловлена лишь перемещением u и определяется формулой

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}\,. \qquad (29)$$

Линейная деформация в направлении, перпендикулярном радиусу ε_θ, для рассматриваемых тел с симметричным относительно оси oz распределением напря-

жений будет вызываться лишь перемещениями в направлении радиуса u, так как перемещения v будут равны нулю. Из рис. 7 видно, что линейная деформация будет

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u}{r}. \tag{30}$$

Линейная деформация в направлении оси oz связана лишь с перемещением w и равна

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{31}$$

Не равная нулю деформация сдвига между направлениями r и z выражается формулой

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{32}$$

3. Связь между напряжениями и деформациями

Связь между напряжениями и деформациями при замене соответствующих обозначений в выражениях (25) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu e}{1-2\mu}\right)\\
\sigma_r &= 2G\left(\varepsilon_r + \frac{\mu e}{1-2\mu}\right)\\
\sigma_\theta &= 2G\left(\varepsilon_\theta + \frac{\mu e}{1-2\mu}\right)\\
\tau_{rz} &= G\gamma_{rz}
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где

$$e = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta.$$

4. Условия неразрывности деформаций (зависимости Сен-Венана)

Условия неразрывности деформаций (зависимости Сен-Венана), выраженные в напряжениях и записанные в декартовых координатах (23), можно преобразовать к цилиндрическим координатам, если воспользоваться формулами перехода:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \sin^2\theta;$$
$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta$$

где θ — угол между направлением r и осью ox.

Шесть уравнений (23) для осесимметричной деформации преобразуются в следующие четыре уравнения (объемные силы исключаем из рассмотрения):

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_r - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} = 0\\
&\nabla^2\sigma_\theta + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r} = 0\\
&\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} = 0\\
&\nabla^2\tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r\,\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z;$$

$$\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}.$$

Решение задач теории упругости в напряжениях, т. е. определение напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия, условиям на поверхности и зависимостям Сен-Венана, может быть для осесимметричной деформации в значительной степени упрощено, если ввести в рассмотрение некоторую произвольную функцию $\varphi(r, z)$ — функцию напряжения.

Выражая напряжения через функцию $\varphi(r, z)$ посредством формул

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где

$$\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$$

нетрудно непосредственной подстановкой убедиться, что уравнения равновесия будут удовлетворены при любом виде функции $\varphi(r, z)$ и, следовательно, все такие напряжения будут отвечать условиям равновесия точек упругого тела.

Однако из всех возможных напряженных состояний тела лишь то будет являться решением задачи, которое будет также удовлетворять условиям сплошности (34).

Подставляя в уравнение (34) значения напряжений, определяемые выражениями (35), можно получить для определения функции $\varphi(r, z)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{36}$$

или

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0.$$

Решение дифференциального уравнения (36) может быть записано в виде любой линейной комбинации частных решений.

Некоторые из этих частных решений имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi = C(r^2+z^2)^n\\
&\left(\text{где}\quad n = -\frac{1}{2};\ 1;\ +\frac{1}{2}\right);\\
&\varphi = C(r^2+z^2)^n z\\
&\left(\text{где}\quad n = -\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right);\\
&\varphi = C\left[(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} z^2 - \frac{1}{3}(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\\
&\varphi = Cz\ln\left(\frac{\sqrt{r^2+z^2}-z}{\sqrt{r^2+z^2}+z}\right)\\
&\varphi = C_1\ln r + C_2 z\ln r + C_3 z^2\ln r + C_4 z^3\ln r\\
&\varphi = C(3r^4 - 8z^4)\\
&\varphi = C(3r^2 - 2z^2)z^2
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Приведенные выше основные зависимости дают возможность получить решение некоторых важных для практического использования задач.

5. Сосредоточенная сила, действующая в теле бесконечных размеров (упругое пространство, рис. 8)

Напряжения в цилиндрических координатах определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{P}{8\pi(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\,z\,(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right]\\
\sigma_\theta &= \frac{P}{8\pi(1-\mu)}\,(1-2\mu)\,z\,(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\\
\sigma_z &= -\frac{P}{8\pi(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\,z\,(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right]\\
\tau_{rz} &= -\frac{P}{8\pi(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\,r\,(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

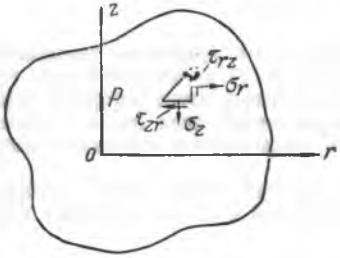


Рис. 8.

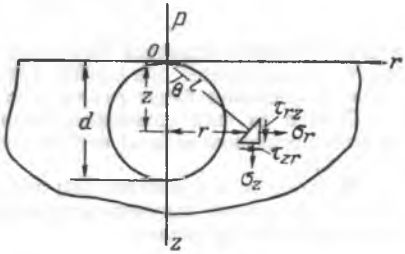


Рис. 9.

6. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело (полупространство, рис. 9)

Напряжения определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{P}{2\pi}\left\{(1-2\mu)\left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2}\,(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - 3r^2z\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right\} =\\
&= \frac{P}{2\pi}\left[\frac{1-2\mu}{l\,(l+z)} - \frac{3zr^2}{l^5}\right]\\
\sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi}\,(1-2\mu)\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2}\,(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + z\,(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] =\\
&= \frac{P}{2\pi}\,(1-2\mu)\left[\frac{z}{l^3} - \frac{1}{l\,(l+z)}\right]\\
\sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi}\,z^3\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{l^5}\\
\tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi}\,rz^2\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^2r}{l^5}
\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

где

$$l^2 = r^2 + z^2.$$

Как следует из формул (39), полное напряжение в площадке, перпендикулярной оси oz и проходящей через любую точку тела (т. е. равнодействующая напряжений σ_z и τ_{rz}), направлено к началу координат и равно

$$\sigma = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{l^2}.$$

Если провести произвольным диаметром d сферу, касающуюся плоскости $z = 0$ в начале координат (рис. 9), то для каждой точки этой сферы полное напряжение в площадках, перпендикулярных оси oz, будет

$$\sigma = \frac{3P}{2\pi d^2}.$$

Перемещения точек тела, на основании формул (29), (30), (31), (32) и (39), определятся выражениями:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P(1-2\mu)(1+\mu)}{2\pi r E}\left[z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{1-2\mu} r^2 z (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] = \\ &= \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{rz}{l^3} - (1-2\mu)\frac{r}{l(l+z)}\right] \\ w &= \frac{P}{2\pi E}\left[(1+\mu) z^2 (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 2(1-\mu^2)(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \\ &= \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{2(1-\mu)}{l} + \frac{z^2}{l^3}\right] \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Перемещения на граничной плоскости ($z = 0$)

$$\left.\begin{aligned} (u)_{z=0} &= -\frac{P(1-2\mu)(1+\mu)}{2\pi r E} \\ (w)_{z=0} &= \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E r} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Из решений (38), (39), (40) и (41) для одной сосредоточенной силы можно на основании принципа сложения действия сил получить решение и для других видов нагрузки (распределенной нагрузки, момента и т. п.).

§ 8. Плоская задача

При решении многих задач, встречающихся в инженерной практике, представляется возможным рассматривать явление деформации тела происходящим как бы в одной плоскости, формально отбросив одну из координатных осей. В этом случае выводы и уравнения теории упругости сильно упрощаются, благодаря чему отпадают математические затруднения, связанные с их интегрированием.

Задачи этой категории относятся к так называемой «плоской задаче» теории упругости.

При рассмотрении плоской задачи обычно различают два следующих ее вида:

Плоская деформация соответствует случаю, когда перемещения точек тела происходят параллельно одной плоскости, например плоскости xoy (т. е. перемещения по направлению оси oz отсутствуют), причем перемещения, параллельные этой плоскости (u и v), не зависят от координаты z.

В этом случае, следовательно, перемещения деформации и напряжения в теле будут определяться функциями:

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y).$$

$$\varepsilon_x = \varphi_1(x, y) \quad \varepsilon_y = \varphi_2(x, y); \quad \gamma_{x,y} = \varphi_3(x, y);$$

$$\sigma_x = \psi_1(x, y); \quad \sigma_y = \psi_2(x, y); \quad \sigma_z = \psi_3(x, y)$$

$$\tau_{xy} = \psi_4(x, y).$$

Прочие перемещения, деформации и напряжения равны нулю.

Плоское напряженное состояние соответствует случаю, когда все напряжения в точках тела параллельны одной плоскости, например плоскости xoy, и не зависят от координаты z. В этом случае, следовательно, перемещения, деформации и напряжения в теле будут определяться функциями:

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y); \quad w = f_2(x, y);$$
$$\varepsilon_x = \varphi_1(x, y); \quad \varepsilon_y = \varphi_2(x, y); \quad \varepsilon_z = \varphi_3(x, y);$$
$$\gamma_{xy} = \varphi_4(x, y); \quad \sigma_x = \psi_1(x, y); \quad \sigma_y = \psi_2(x, y);$$
$$\tau_{xy} = \psi_3(x, y).$$

Прочие деформации и напряжения равны нулю.

Уравнения теории упругости для плоской задачи можно легко получить из приведенных выше уравнений для общего случая напряженного состояния тела, полагая равными нулю входящие в них производные по координате z от соответствующих функций.

Приведем основные уравнения и выводы теории упругости, относящиеся к плоскому напряженному состоянию, так как ими наиболее часто приходится пользоваться в инженерной практике.

1. Теория напряжений

Напряженное состояние в точке тела вполне определяется тремя напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy}, действующими в любых двух взаимно-перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку (рис. 10).

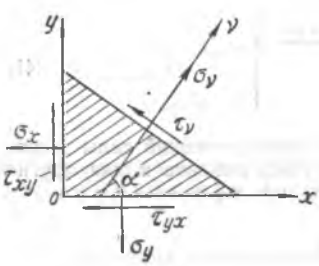


Рис. 10.

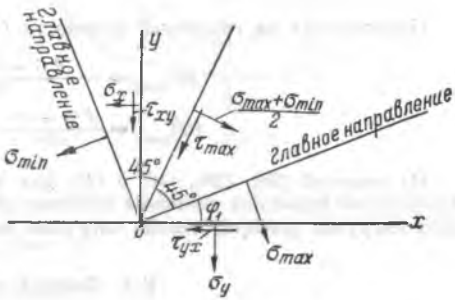


Рис. 11.

Действительно, полагая в формулах (6) и (7) $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$, легко получить следующие выражения для нормальных σ_ν и касательных τ_ν напряжений, действующих в любой площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью ox:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\nu &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\nu &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Исследование выражения (42) приводит к следующему заключению (рис. 11).

Максимальные и минимальные значения нормальных напряжений σ_ν имеют место в двух взаимно-перпендикулярных площадках, определяемых углами φ_1 и $\varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, где угол

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (43)$$

Эти нормальные напряжения, называемые главными напряжениями, определяются выражениями (44), причем в соответствующих им площадках, называемых главными площадками, касательные напряжения отсутствуют

$$\sigma_{\nu \substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{44}$$

Наибольшие касательные напряжения τ_ν действуют в площадках с наклоном под углом 45° к направлению главных площадок, и равны полуразности главных напряжений

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{45}$$

В этих площадках действуют также и нормальные напряжения, равные полусумме главных напряжений.

Если полные напряжения, действующие в различных, проходящих через данную точку, площадках, откладывать в виде векторов, то концы их окажутся лежащими на эллипсе (эллипс напряжений), полуоси которого равны главным напряжениям.

Выражения (42) можно также рассматривать как устанавливающие зависимость между напряжениями σ_x, σ_y и τ_{xy} в точке у поверхности тела и внешней нагрузкой, действующей на поверхность тела у этой точки, нормальные и касательные составляющие которой равны соответственно σ_ν и τ_ν (рис. 12).

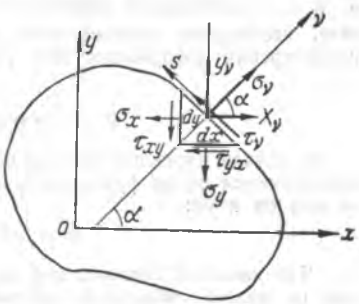


Рис. 12.

Эту зависимость можно представить также в более простом виде, если рассматривать составляющие внешней нагрузки по направлению осей ox и oy; обозначая эти составляющие, как и в § 2, через X_ν и Y_ν (рис. 12) и используя формулы (13), полагая в них $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha \\ Y_\nu &= \sigma_y \sin\alpha + \tau_{xy}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} в точках тела являются непрерывными функциями от координат этих точек. Эти функции должны быть связаны между собой дифференциальными уравнениями, вытекающими из условия равновесия выделенного в теле элементарного параллелепипеда.

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда для плоской задачи нетрудно получить из уравнений (12), если учесть, что в рассматриваемом случае $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а τ_{xy} является функцией координат x и y.

В случае отсутствия объемных сил эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Если на тело действуют объемные силы, то уравнения (47) должны быть дополнены членами, равными проекции объемных сил, приходящихся на единицу объема тела.

В этом случае уравнения равновесия элементарного параллелепипеда запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где X и Y — проекции объемной силы, отнесенной к единице объема, на оси ox и oy соответственно.

Группы уравнений (47) и (48) совместно с уравнениями (46) определяют условия, которым должны удовлетворять функции σ_x, σ_y и τ_{xy} для того, чтобы напряженное тело находилось в упругом равновесии; однако легко видеть, что условия эти являются необходимыми, но недостаточными для определения напряжений в упругом теле, ибо математически можно подобрать сколько угодно функций, удовлетворяющих этим уравнениям. Для нахождения функций σ_x, σ_y и τ_{xy}, отвечающих действительному распределению напряжений в упругом теле, необходимо удовлетворить дополнительным условиям, вытекающим из рассмотрения деформации тела [см. дальше уравнение (50)].

2. Теория деформаций

В случае плоского напряженного состояния тела перемещения его вполне определяются двумя функциями, представляющими проекции этих перемещений на оси ox и oy:

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y).$$

Что касается перемещений по направлению третьей оси $w = f_3(x, y)$, то они по малости обычно не рассматриваются.

Между этими перемещениями u, v и деформациями тела ε_x, ε_y и γ_{xy} устанавливаются следующие зависимости, непосредственно вытекающие из самого определения линейных деформаций ε_x и ε_y, а также из рассмотрения рис. 3:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{49}$$

Если будут известны функции u и v, определяющие перемещения точек тела, то непосредственно по уравнениям (49) можно найти все три деформации тела, отвечающие этим перемещениям.

Для возможности решения обратной задачи, т. е. нахождения перемещений по заданным деформациям, функции, определяющие деформации, очевидно, не могут быть заданы произвольно, а должны быть связаны дополнительной зависимостью, вытекающей из уравнения (49). Это следует как из чисто математических условий задачи, заключающейся в разыскании двух функций u, v, связанных тремя дифференциальными уравнениями (49) с тремя заданными функциями ε_x, ε_y и γ_{xy}, так и из чисто геометрического представления деформации тела. Действительно, если представить, что тело разбито на малые параллелепипеды, то ясно, что деформации их не могут быть произвольны, так как при произвольных деформациях нельзя будет вновь сложить неразрывное деформированное тело.

Указанная дополнительная зависимость, называемая условием неразрывности деформации, или условием Сен-Венана, для случая плоского напряженного состояния легко может быть получена из уравнений (22). В этом случае вместо шести уравнений (22) сохраняется лишь одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x y}. \tag{50}$$

Уравнение неразрывности деформаций (50) может быть выражено в напряжениях. Для этого следует внести в уравнение (50) вместо деформаций их выра-

жения через напряжения. Используя при этом условии равновесия (48), можно получить следующее уравнение неразрывности в напряжениях:

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial y^2}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right). \quad (51)$$

В случае отсутствия объемных сил или при постоянной их величине уравнение (51) запишется в виде

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial y^2}=0. \quad (52)$$

3. Связь между напряжениями и деформациями

Непосредственно из данных в § 4 определений для коэффициентов E, G и μ вытекают следующие основные выражения, устанавливающие зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right| \quad (53)$$

Определяя из выражений (53) σ_x, σ_y и τ_{xy}, получим эти зависимости, выраженные через напряжения, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}=G\gamma_{xy}\end{aligned}\right| \quad (54)$$

4. Функция напряжения

Как уже было указано, задача теории упругости заключается в разыскании таких функций для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}, которые, удовлетворяя дифференциальным уравнениям равновесия (48) и условиям на поверхности (46), одновременно удовлетворяли бы и условию неразрывности (51). В том случае, когда объемные силы имеют потенциал, то их составляющие X и Y могут быть определены по формулам $X=-\frac{\partial U}{\partial x}$ и $Y=-\frac{\partial U}{\partial y}$ [$U(x, y)$ — потенциальная функция], и решение указанных уравнений теории упругости в значительной степени упрощается введением в рассмотрение некоторой произвольной функции $F(x, y)$, называемой функцией напряжения, или функцией Эри (Airy).

Действительно, уравнения равновесия (48) могут быть всегда удовлетворены, если компоненты напряжений выразить через функцию напряжения $F(x, y)$ и потенциальную функцию $U(x, y)$ при помощи формул

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+U\\ \sigma_y&=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+U\\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right| \quad (55)$$

В частности, в случае действия на тело сил тяжести формулы (55) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho g y; \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{55'}$$

где ρ — масса единицы объема тела (плотность);

g — ускорение силы тяжести.

Для того чтобы найти ту единственную систему напряжений, которая возможна в упругом теле, необходимо, чтобы эта система напряжений, а следовательно, и отвечающая им функция $F(x, y)$ удовлетворяла также уравнению (51).

Подставляя в уравнение (51) вместо напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} их выражения (55) через неизвестную функцию напряжения $F(x, y)$, получим следующее уравнение, определяющее функцию $F(x, y)$:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right). \tag{56}$$

При отсутствии объемных сил или при постоянной их величине уравнение (56) упростится и примет вид

$$\nabla^2\nabla^2 F(x, y) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{57}$$

Подставляя в уравнение (46) выражения для напряжений (55), получим условия на поверхности для функций напряжения F в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu - U\cos\alpha &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos\alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\sin\alpha \\ Y_\nu - U\sin\alpha &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sin\alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

В случае отсутствия объемных сил ($U = 0$) условия на поверхности для функции $F(x, y)$ преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos\alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\sin\alpha \\ Y_\nu &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sin\alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Но, как видно из рис. 12,

$$\cos\alpha = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\sin\alpha = -\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Внося эти значения в формулы (59), получим

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ Y_\nu &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \int_0^s X_\nu ds + C_1 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= -\int_0^s Y_\nu ds + C_2 \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

где s — дуга контура;

C_1 и C_2 — постоянные интегрирования (в случае односвязной области они равны нулю).

Приведенные выше уравнения теории упругости для плоского напряженного состояния остаются такими же и для плоской деформации, за исключением лишь уравнений (53) и (54), выражающих связь между напряжениями и деформациями. При плоской деформации перемещение w равно нулю, и, следовательно, по направлению оси oz должно быть нормальное напряжение σ_z, равное, согласно уравнению (24), $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$.

В соответствии с этим для плоской деформации уравнения (53) представятся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_x - \mu\sigma_y] = \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_y - \mu\sigma_x] = \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

§ 9. Плоская задача в полярных координатах

При решении некоторых задач теории упругости часто представляется более удобным применение полярных координат (рис. 13). Положение точек тела при таком выборе координатных осей определяется двумя координатами: радиусом r и полярным углом θ.

Эти координаты связаны с декартовыми координатами зависимостями (положительное направление r и θ показано на рис. 13):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

отсюда

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta; \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta;$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}; \qquad \frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

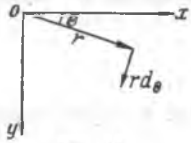


Рис. 13.

Воспользуемся для обозначения напряжений в полярной системе координат обозначениями, введенными в § 7. Тогда на основании формул (42) нетрудно получить зависимости, связывающие напряжения в декартовой системе координат с напряжениями в полярной системе координат,

$$\sigma_r = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta,$$
$$\sigma_\theta = \sigma_x\sin^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta;$$
$$\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$

Выведем основные уравнения теории упругости в полярных координатах, аналогичные приведенным ранее уравнениям в декартовых координатах.

1. Уравнения равновесия

Выделим в точке тела элемент $abcd$ с центральным углом $d\theta$ и наименьшим радиусом r.

На рис. 14 показаны положительные направления напряжений, действующих на гранях элемента, согласно принятым выше обозначениям.

Проектируя приложенные к граням выделенного элемента усилия на направление радиуса, проходящего через середину элемента, и на направление, перпендикулярное к этому радиусу, отбрасывая малые высших порядков и пренебрегая объемными силами, получим уравнения равновесия в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

2. Условия на поверхности

Полярные координаты являются, очевидно, ортогональной системой координат. Поэтому для получения выражений, устанавливающих связь между составляющими внешней нагрузки по направлению осей r и θ и компонентами напряжений в полярной системе координат σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$, можно воспользоваться формулами (46). Действительно, заменяя в формулах (46) σ_x на σ_r, σ_y на σ_θ,

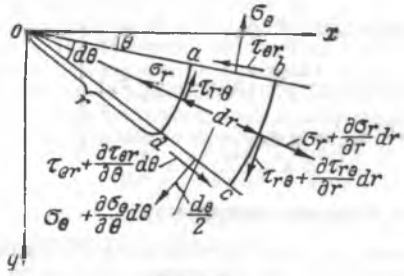


Рис. 14.

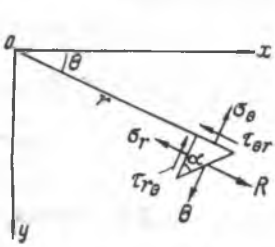


Рис. 15.

τ_{xy} на $\tau_{r\theta}$ и обозначая составляющую внешней нагрузки на ось r буквой R, а на ось θ — буквой Θ (рис. 15), получим

$$\left.\begin{aligned} R &= \sigma_r \cos\alpha + \tau_{r\theta} \sin\alpha \\ \Theta &= \tau_{r\theta} \cos\alpha + \sigma_\theta \sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

где α — угол между нормалью к наклонной площадке и направлением r.

3. Связь между деформациями и перемещениями

Перемещение u по направлению радиуса вызывает следующие деформации (рис. 16):

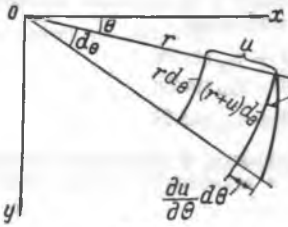


Рис. 16.

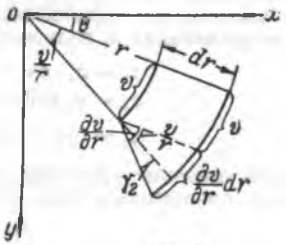


Рис. 17.

относительное удлинение по направлению радиуса

$$\frac{\partial u}{\partial r},$$

относительное удлинение по направлению, перпендикулярному радиусу,

$$\frac{(r+u)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u}{r};$$

изменение прямого угла между гранями элемента на величину

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{r\partial\theta}.$$

Перемещение v по направлению, перпендикулярному радиусу, вызывает следующие деформации (рис. 17):

относительное удлинение по этому направлению

$$\frac{\partial v}{r\partial\theta};$$

изменение прямого угла между гранями элемента на величину

$$\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

Суммируя однородные деформации, получим следующие уравнения, связывающие перемещения и деформации:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

4. Условие неразрывности деформаций

Выразим в полярных координатах условие неразрывности деформаций при помощи функции напряжений, т. е. получим уравнение, аналогичное уравнению (57) в декартовых координатах, которое можно представить в следующем символическом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{66}$$

Для перехода к полярным координатам нужно в уравнении (66) переменные x и y заменить новыми переменными r и θ, пользуясь соотношениями $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$.

В результате такой замены получим уравнение (57) в полярных координатах в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right) = 0. \tag{67}$$

5. Выражения для напряжений через функцию напряжений $F(x, y)$

При $\theta = 0$ ось ox совпадает с направлением радиуса r, и, следовательно, напряжения, выраженные в полярных координатах, становятся соответственно равными напряжениям, выраженным в декартовых координатах.

Поэтому, пользуясь выражениями (55), можно написать (объемные силы не учитываем)

$$\sigma_r = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\theta=0}; \qquad \sigma_\theta = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{\theta=0}, \qquad \tau_{r\theta} = \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_{\theta=0}.$$

Подставляя сюда значения вторых производных функций $F(x, y)$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

6. Связь между напряжениями и деформациями

Произведя в выражениях (53) и (62) соответствующую замену обозначений для напряжений, получим:

для плоской деформации

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\,\sigma_r - \mu\sigma_\theta\right] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\,\sigma_\theta - \mu\sigma_r\right] \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\,\tau_{r\theta} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

для плоского напряженного состояния

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \mu\sigma_\theta\right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \mu\sigma_r\right) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\,\tau_{r\theta} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Разыскание функции напряжения F по уравнению (67) сильно упрощается для таких задач, в которых распределение напряжений не зависит от угла θ (например, круглая пластина при симметричной нагрузке).

Отбрасывая в уравнениях (67) и (68) производные функции F по θ, получим их в следующем виде:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2\partial^3 F}{r\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r} = 0; \tag{71}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Уравнение (71) легко приводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $t = \ln r$. Общий интеграл этого уравнения представится в следующем виде:

$$F(r) = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D, \tag{73}$$

и выражения для напряжений, согласно (72), будут

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2B\ln r + B + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2B\ln r + 3B + 2C \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Использование основных уравнений теории упругости в полярных координатах позволяет, в частности, получить решение следующих задач.

7. Сосредоточенная сила, действующая в неограниченной плоскости (рис. 18)

Напряжения в полярных координатах определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3+\mu}{4\pi}P\frac{1}{r}\cos\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{1-\mu}{4\pi}P\frac{1}{r}\cos\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1-\mu}{4\pi}P\frac{1}{r}\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Перемещения точек плоскости под действием напряжений (75) могут быть вычислены по формулам:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{P}{2G}\,\frac{3-\mu}{4\pi}\ln r\cos\theta \\ v &= \frac{P}{2G}\left(\frac{1+\mu}{4\pi}+\frac{3-\mu}{4\pi}\ln r\right)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

При этом предполагается, что точки окружности $r=1$ не имеют перемещений в направлении оси ox.

8. Сосредоточенная сила, действующая на кромку полуплоскости (рис. 19)

Напряжения определяются формулами:
в полярных координатах

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{\cos\theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \sigma_\theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

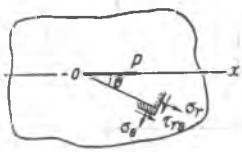


Рис. 18.

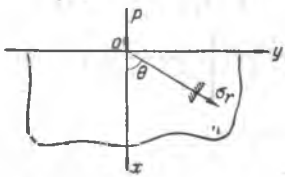


Рис. 19.

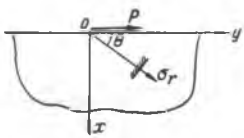


Рис. 20.

в декартовых координатах

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Перемещения, соответствующие напряжениям (77), будут

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{2P}{\pi E}\left[\ln r\cos\theta+\frac{1-\mu}{2}\,\theta\sin\theta\right] \\ v &= \frac{2P}{\pi E}\left(\ln r\sin\theta+\frac{1+\mu}{2}\sin\theta-\frac{1-\mu}{2}\,\theta\cos\theta\right) \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

В том случае, когда сила P приложена горизонтально (рис. 20), напряжения и перемещения могут быть определены по формулам (77) и (79), но угол θ должен отсчитываться от направления действия силы.

Формулы (78), определяющие напряжения в декартовых координатах, преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

9. Сосредоточенная сила, действующая в полуплоскости, направленная перпендикулярно кромке и приложенная на расстоянии a от последней (рис. 21)

Напряжения определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{P}{2\pi}\left\{(1+\mu)\left[\frac{(x-a)^3}{r_1^4}+\frac{(x+a)\left[(x+a)^2+2ax\right]}{r_2^4}-\frac{8ax(a+x)}{r_2^6}y^2\right]+\right.\\
&\left.+\frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{x-a}{r_1^2}+\frac{3x+a}{r_2^2}-\frac{4xy^2}{r_2^4}\right)\right\}\\
\sigma_y &= -\frac{P}{2\pi}\left\{(1+\mu)\left[\frac{(x-a)y^2}{r_1^4}+\frac{(x+a)(y^2+2a^2)-2ay^2}{r_2^4}+\frac{8ax(a+x)y^2}{r_2^6}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{x+3a}{r_2^2}-\frac{x-a}{r_1^2}+\frac{4xy^2}{r_2^4}\right)\right\}\\
\tau_{xy} &= -\frac{P}{2\pi}y\left\{(1+\mu)\left[\frac{(x-a)^2}{r_1^4}+\frac{x^2-2ax-a^2}{r_2^4}+\frac{8ax(a+x)^2}{r_2^6}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{(1-\mu)}{2}\left[\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}+\frac{4x(a+x)}{r_2^4}\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

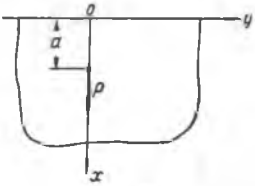


Рис. 21.

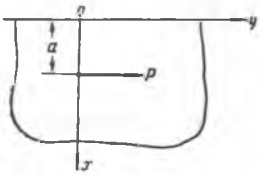


Рис. 22.

где

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2;$$
$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

10. Сосредоточенная сила, действующая в полуплоскости, направленная параллельно кромке и приложенная на расстоянии a от последней (рис. 22)

Напряжения определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{P}{2\pi}y\left\{(1+\mu)\left[\frac{(x-a)^2}{r_1^4}-\frac{a^2-x^2+6ax}{r_2^4}+\frac{8axy^2}{r_2^6}\right]-\right.\\
&\left.-\frac{(1-\mu)}{2}\left[\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}-\frac{4(a+x)x}{r_2^4}\right]\right\}\\
\sigma_y &= -\frac{P}{2\pi}y\left\{(1+\mu)\left[\frac{y^2}{r_1^4}+\frac{y^2+8ax+6a^2}{r_2^4}+\frac{8ax(a+x)^2}{r_2^6}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{(1-\mu)}{2}\left[\frac{1}{r_1^2}+\frac{3}{r_2^2}-\frac{4x(a+x)}{r_2^4}\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (82)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2\pi}\left\{(1+\mu)\left[\frac{(x-a)\,y^2}{r_1^4} + \frac{(2ax+y^2)\,(a+x)}{r_2^4} - \frac{8ax\,(a+x)\,y^2}{r_2^6}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\mu)}{2}\left[\frac{x-a}{r_1^2} + \frac{3x+a}{r_2^2} - \frac{4x\,(x+a)^2}{r_2^4}\right]\right\}, \qquad (82$$

где

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2;$$

$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

Вышеприведенные решения для одной сосредоточенной силы могут быть использованы на основании принципа сложения действия сил для получения решения при действии других видов нагрузки (распределенной нагрузки, моментов и т. д.).

РАЗДЕЛ III
ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ РАСЧЕТОВ ПРОЧНОСТИ

ГЛАВА 1
ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Нормальные напряжения, определенные из опытов на растяжение и сжатие данного материала, соответствующие пределу упругости и временному сопротивлению, являются основанием при выборе допускаемых напряжений в различных сооружениях из этого материала.

Для безопасности сооружения допускаемое напряжение должно составлять лишь некоторую часть предела упругости или близкого к нему предела текучести (критического напряжения), либо некоторую часть временного сопротивления.

В машиностроении обыкновенно принято допускаемое напряжение задавать: а) для хрупких материалов — как часть от временного сопротивления; б) для пластичных материалов — как часть от предела текучести.

Отношение временного сопротивления или, соответственно, предела текучести к допускаемому напряжению называют коэффициентом безопасности, или запасом прочности.

В кораблестроении, где, как правило, применяются только пластичные материалы, допускаемое напряжение задают в процентах от предела текучести.

Правильный выбор подходящих норм допускаемых напряжений имеет такое же влияние на окончательный результат расчета прочности инженерного сооружения, как и правильное определение величины и характера действующей на сооружение внешней нагрузки и определение действующих в частях сооружения расчетных усилий и напряжений в его сечениях.

Поэтому, естественно, что допускаемые напряжения не должны назначаться оторванно от всего расчета в целом.

Помимо этого, конечно, должны быть полностью учтены все те условия чисто технологического и производственного характера, которые могут оказать то или иное влияние на целесообразный выбор допускаемых напряжений.

Из изложенного следует, что было бы неправильно рекомендовать обязательные нормы для допускаемых напряжений независимо от соответствующих правил для производства всего расчета прочности в целом.

Ниже, в главе 3, приводятся в таком общем виде основания для выбора допускаемых напряжений применительно к производству расчетов прочности судовых конструкций, установившиеся в нашем судостроении. В главах 4 и 6 приводятся данные, касающиеся норм проектирования несущих конструкций зданий и промышленных сооружений.

Очень часто либо не представляется возможным достаточно точно учесть действующие на сооружение усилия или действующие напряжения во всех частях сооружения, либо такой точный и полный учет сопряжен с большой затратой труда и времени. В таких случаях понижают допускаемое напряжение во всем сооружении, руководствуясь принятыми величинами его в уже выполненных подобных конструкциях. Такой расчет принято называть условным. Примером условного расчета может служить расчет фермовых сооружений, при котором обыкновенно не принимают во внимание местные напряжения от узловых пар, от собственного веса, от начальной кривизны и пр. и поэтому несколько понижают допускаемое напряжение.

Строго говоря, почти каждый расчет в упомянутом выше смысле следует считать более или менее условным, так как во всяком расчете остаются обстоятельства, которые не могут быть точно учтены. Поэтому-то для наиболее часто встречающихся конструкций вырабатываются свои схемы расчета и свои нормы допускаемых напряжений.

В настоящем разделе Справочника даются общие указания и общие нормы для выбора допускаемых напряжений. В разделах, посвященных строительной механике корабля, приводятся установившиеся нормы допускаемых напряжений для расчета главнейших частей корпуса корабля.

ГЛАВА 2

РАЗЛИЧНЫЕ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Первая теория (*Галилея*). По этой теории об опасном напряженном состоянии в теле судят по величине главных напряжений, т. е. по величине наибольших нормальных напряжений, сравнивая их с наибольшими нормальными напряжениями, полученными из опыта на простое растяжение брусков из того же материала.

Этой теорией не учитываются условия пластической деформации, и поэтому она не применима для напряженных состояний, приводящих к пластической деформации.

Способ расчета: определить по формуле (44) раздела II[1] σ_{max} и удовлетворить условию $\sigma_{max} \leqslant \sigma_д$, где $\sigma_д$ — допускаемое нормальное напряжение, определяемое из опыта на растяжение и из соображений, касающихся выбора норм для допускаемых напряжений.

Вторая теория (*Кулона*). По этой теории об опасном напряженном состоянии в теле судят по величине наибольших касательных напряжений, сравнивая их с наибольшими касательными напряжениями, появляющимися в бруске того же материала при опыте на растяжение.

Этой теорией учитывается возможность разрушения тела с заметной пластической деформацией.

Способ расчета: определить по формуле (45) раздела II[1] τ_{max} и удовлетворить условию $\tau_{max} \leqslant \tau_д$, где $\tau_д$ — допускаемое касательное напряжение, равное $^1/_2\,\sigma_д$, учитывая, что при растяжении наибольшее касательное напряжение равно половине наибольшего нормального напряжения.

Третья теория (*Мариотта*). Согласно этой теории прочности, об опасном напряженном состоянии тела следует судить по величине появляющихся в нем наибольших удлинений, сравнивая их с наибольшими удлинениями при опыте на растяжение бруска того же материала; следовательно, согласно третьей теории должно быть удовлетворено условие

$$\varepsilon_{max} \leqslant \varepsilon_д.$$

Но допускаемое удлинение $\varepsilon_д$, очевидно, равно $\frac{\sigma_д}{E}$, где $\sigma_д$ — допускаемое нормальное напряжение; поэтому условие прочности примет вид

$$\varepsilon\varepsilon_{max} \leqslant \sigma_д$$

или после подстановки значений ε_{max} по уравнениям (53) раздела II

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{max} - \mu\sigma_{min} &\leqslant \sigma_д \\ \sigma_{min} - \mu\sigma_{max} &\leqslant \sigma_д \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Напряжения, выражаемые левыми частями этих неравенств, называются приведенными напряжениями и в действительности в теле не существуют.

Способ расчета: определить по формулам (44) раздела II σ_{max} и σ_{min} и удовлетворить тому из уравнений (1), которое окажется менее выгодным.

На практике чаще всего встречается случай, когда $\sigma_y = 0$, например изгиб или одновременный изгиб и кручение балок.

Для этого случая выражения для приведенных напряжений будут иметь вид

$$\sigma_{пр} = \frac{1-\mu}{2}\,\sigma_x \pm \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}, \qquad (2)$$

[1] Или по соответствующим формулам для общего случая напряженного состояния тела.

причем надо брать тот из знаков, который для $\sigma_{пр}$ дает наиневыгоднейшее значение.

Для $\mu = \frac{1}{4}$ уравнение (2) будет

$$\sigma_{пр} = \frac{5}{8}\sigma_x \pm \frac{5}{8}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}; \tag{3}$$

для $\mu = \frac{1}{3}$

$$\sigma_{пр} = \frac{1}{3}\sigma_x \pm \frac{2}{3}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}; \tag{4}$$

для $\mu = \frac{1}{3,5}$

$$\sigma_{пр} = 0,35\sigma_x \pm 0,65\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}. \tag{5}$$

Четвертая теория. Согласно этой теории об опасном напряженном состоянии в теле следует судить по величине так называемого октаэдрического касательного напряжения $\tau_{окт}$, зависящего от величины всех трех главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 и определяемого выражением

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \tag{6}$$

В случае плоского напряженного состояния, т. е. при отсутствии одного из главных напряжений, например $\sigma_3 = 0$,

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{7}$$

При простом растяжении ($\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$)

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1 = 0,47\sigma_1. \tag{8}$$

Способ расчета: определить величину $\tau_{окт}$ и удовлетворить условию

$$\tau_{окт} \leqslant \tau_д.$$

Здесь $\tau_д$ — допускаемое октаэдрическое касательное напряжение

$$\tau_д = 0,47\sigma_д,$$

где $\sigma_д$ — величина допускаемого нормального напряжения при простом растяжении.

Кроме приведенных выше теорий прочности, существуют и другие, например энергетические гипотезы Губера, Лоде, Бельтрама, однако вопрос о том, какая теория прочности является наиболее обоснованной, до сего времени продолжает оставаться в известной степени открытым. Следует отметить, что для случаев деформаций, с которыми приходится встречаться в кораблестроении (плоское напряженное состояние), особенно существенной разницы между результатами расчета по той или иной теории прочности не получается.

Примечание. Губер, Мизес и Генки, независимо друг от друга, предложили принять в качестве условия пластичности достижение октаэдрическим касательным напряжением (6) предельного значения.

При простом растяжении, когда $\sigma_1 = \sigma_т$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, из выражения (8) следует, что

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_т.$$

Подставляя это значение в левую часть выражения (6), получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_т^2.$$

Для случая чистого сдвига, т. е. когда $\sigma_1 = \tau_т$; $\sigma_2 = -\tau_т$ и $\sigma_3 = 0$,

$$\tau_т = 0,57\sigma_т.$$

Поскольку эта зависимость хорошо согласуется с опытом, она в дальнейшем использована при установлении величины опасных напряжений для касательных напряжений.

ГЛАВА 3

ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ ДЛЯ ВЫБОРА НОРМ ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОРАБЛЕСТРОЕНИИ

§ 1. Общие основания расчетов прочности

1. Расчет прочности конструкции должен гарантировать для конструкции необходимый запас прочности, т. е. уверенность в том, что при соответствующем принятому запасу прочности увеличении внешних действующих на конструкцию усилий напряжения в ней не превзойдут опасных пределов, при которых может быть нарушена целость конструкции или неизменность ее формы.

2. В соответствии со сказанным в п. 1 расчет прочности в общем случае должен подразделяться на следующие отдельные операции:

а) определение величин и характера внешних действующих на рассчитываемую конструкцию нагрузок;

б) назначение надлежащего запаса прочности для рассчитываемой конструкции;

в) определение наибольших усилий и наибольших напряжений в сечениях конструкции в зависимости от принятой внешней нагрузки, увеличенной в соответствии с назначенным запасом прочности;

г) назначение норм для опасных напряжений и проверка условий прочности.

3. Если в рассчитываемой конструкции имеет место принцип наложения, т. е. существует пропорциональность между внешними усилиями и внутренними напряжениями, то установленный для конструкции запас прочности может быть введен в расчет не увеличением внешней нагрузки, как предусмотрено в п. 2, а соответственным уменьшением норм для опасных напряжений, т. е. установлением надлежащих норм для допускаемых напряжений.

В этом случае, следовательно, расчет прочности должен подразделяться на следующие отдельные операции:

а) определение величины и характера расчетной нагрузки;

б) определение наибольших усилий и наибольших напряжений в сечениях конструкции на основании принятой расчетной нагрузки;

в) назначение норм для опасных напряжений;

г) установление надлежащего запаса прочности и норм для допускаемых напряжений и проверка условий прочности.

4. Имея в виду, что прочность судовых конструкций, работающих на сжатие, обычно определяется не опасными напряжениями для материала конструкции, а напряжениями, при которых нарушается устойчивость ее формы, необходимо, наряду с проверкой прочности конструкции по напряжениям, производить проверку ее прочности на устойчивость, учитывая при этом как степень устойчивости конструкции в целом, так и степень устойчивости ее отдельных составных частей.

5. В некоторых случаях, кроме того, может потребоваться дополнительная проверка конструкции по наибольшим деформациям (стрелкам прогиба), которые не должны превышать установленных практикой границ, а также проверка вибрации, связанная с определением периода и амплитуды основных колебаний конструкции.

6. При производстве расчетов прочности кораблей должны быть приняты к руководству приведенные ниже общие нормы и правила, разбитые по отдельным указанным выше операциям расчета.

§ 2. Определение величины и характера расчетных нагрузок

1. Величины внешних расчетных нагрузок, действующих на корпус корабля и его отдельные части, подлежат определению согласно установленным практикой кораблестроения общим методам и нормам в этой области, с учетом условий и заданий спецификации в каждом частном случае[1].

---

[1] Если действующая нагрузка не подчиняется принципу наложения, то за расчетную нагрузку должна быть принята действующая нагрузка, увеличенная в соответствии с принятым в расчете запасом прочности (§ 1, п. 2).

Если имеют место отступления от установленных практикой условных методов расчета и норм или отсутствуют таковые для производящегося расчета, необходимо привести исчерпывающие обоснования принятых расчетных нагрузок, с указанием степени их достоверности и точности, чтобы можно было в последующем учесть это при введении в расчет должного запаса прочности.

2. В отношении характера изменения внешних нагрузок следует различать следующие категории нагрузок:

а) неизменная нагрузка, не меняющая своей величины во все время ее действия;

б) статически переменная нагрузка, меняющая свою величину во время действия, причем период изменения ее превышает в несколько раз период собственных колебаний рассматриваемой конструкции; для этой нагрузки должны быть выявлены возможные наибольшие пределы изменения ее по величине и по знаку, а в необходимых случаях — оценено и возможное число этих изменений;

в) динамически переменная, или ударная нагрузка с периодом изменения, близким к периоду собственных колебаний рассматриваемой конструкции; для этой нагрузки должен быть определен закон ее изменения во времени с целью последующего определения степени динамичности (коэффициента динамичности) нагрузки по отношению к рассматриваемой конструкции.

За расчетную должна быть принята действующая нагрузка, увеличенная в соответствии с получающимся для конструкции коэффициентом динамичности.

3. В отношении характера действия внешних нагрузок каждая из указанных в п. 2 нагрузок должна быть отнесена к следующим категориям нагрузок:

а) постоянная нагрузка, действующая все время или значительный промежуток времени, например давление воды на подводную часть судна, вес вооружения, вес грузов, собственный вес конструкции и т. д.;

б) случайная нагрузка, действующая на сооружение ограниченное число раз, например пробная нагрузка при испытании, нагрузка мачт от давления ветра при урагане, нагрузка переборок и палуб при аварии, нагрузка частей корпуса при постановке в док, усилия в корпусе при максимально возможной качке, нагрузка подкрепления под орудия при выстреле и т. п.

4. Так как некоторые конструкции корпуса могут подвергаться разновременно или одновременно действию разных категорий нагрузок, то при расчете конструкции это обстоятельство подлежит всестороннему освещению с целью выяснения наибольших величин как постоянно, так и случайно действующей на конструкцию нагрузки, причем в последнем случае должна быть сделана оценка степени случайности действия нагрузки.

§ 3. Определение наибольших усилий и наибольших напряжений в сечениях конструкции

1. Применяемые для расчета прочности судовых конструкций методы определения усилий и напряжений в сечениях как по существу, так и по форме не должны отличаться от методов, установленных предшествующей практикой кораблестроения в области строительной механики корабля.

Всякое отступление от этих методов, изменяющее степень условности расчетов, т. е. степень достоверности воспроизводимой с помощью их картины распределения усилий и напряжений в конструкции, должно быть в каждом случае достаточно мотивировано и обосновано как в отношении целесообразности вводимого изменения, так и в отношении влияния его на степень условности расчета.

Применяя новые непроверенные предшествующей практикой методы расчета, следует оценить их пределы точности и сопоставить их в этом отношении с ранее практиковавшимися методами расчетов.

2. Полученные в результате расчета напряжения по характеру их распределения должны быть отнесены к одной из следующих категорий:

а) общие напряжения, захватывающие значительную часть объема или площади сечения конструкции, которые при превышении ими опасного напряжения могут повлечь разрушение или недопустимую деформацию конструкции;

б) местные напряжения, захватывающие лишь незначительную часть объема или площади сечения конструкции, которые в случае превышения ими опасного напряжения могут повлечь лишь местные деформации, не сопровождающиеся недопустимыми общими деформациями конструкции.

3. Если на рассчитываемую конструкцию одновременно действует несколько систем внешних нагрузок, напряжения, определенные для каждой из них в отдельности, должны быть сложены по правилам строительной механики для получения таким образом расчетных напряжений. При этом должна быть принята такая возможная комбинация действия внешних нагрузок, при которой расчетные напряжения будут достигать максимальных значений.

4. В качестве расчетных должны приниматься или наибольшие нормальные напряжения, или наибольшие приведенные напряжения, или наибольшие касательные напряжения, в зависимости от той теории прочности, которая положена в основание расчета в соответствии с установившейся практикой расчета прочности различных судовых конструкций. При производстве новых расчетов рекомендуется придерживаться теории прочности по наибольшим касательным напряжениям.

5. При вычислении напряжений в сечениях конструкции должно быть учтено влияние потери устойчивости отдельных составных частей сечения введением соответствующих редукционных коэффициентов во всех тех случаях, где это явление имеет место. Если влияние вводимых в расчет редукционных коэффициентов окажется значительным (свыше 5%), то при определении напряжений следует исходить из величин внешних нагрузок, увеличенных в соответствии с принятым для расчета запасом прочности.

Примечание. Применительно к расчету общей продольной прочности корпуса, вместо увеличения расчетных изгибающих моментов в соответствии с принятым для расчета запасом прочности, производится проверка корпуса по предельным моментам.

§ 4. Назначение норм для опасных напряжений

1. Для общих напряжений, неизменных по величине, опасными напряжениями (σ_0, τ_0) являются:

а) для нормальных, а также для приведенных напряжений — предел текучести материала ($\sigma_0 = \sigma_T$);

б) для касательных напряжений — 0,57 предела текучести материала ($\tau_0 = 0,57\sigma_T$); [1]

в) для нормальных напряжений в сварных швах — предел текучести металла шва, определенный по методике ГОСТ 6996—54, но не более предела текучести σ_T основного металла;

г) для касательных напряжений в сварных швах — 57% предела текучести металла шва;

д) для сдвигающих напряжений в заклепках — предел упругого скольжения заклепки τ_0, устанавливаемый в зависимости от характера образования соединения (влияние чеканки);

е) для растягивающих напряжений в заклепках — предел текучести материала заклепки:

ж) для сдвигающих напряжений в заклепках при одновременном действии в них растягивающих напряжений — напряжение, вычисляемое по формуле:

$$\tau' = \tau_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_T}\right), \tag{9}$$

где τ_0 — предел упругого скольжения;

σ_T — предел текучести материала заклепки;

σ — действующее растягивающее напряжение;

з) для срезывающих напряжений в заклепках — 50% предела прочности заклепок на срез ($0,50\tau_{ср}$).

---

[1] См. примечание в конце главы 2 настоящего раздела.

2. Для напряжений, имеющих переменный, а также знакопеременный характер, за опасное напряжение принимается предел усталости основного материала или рассчитываемого соединения (при ограниченном числе циклов перемен знака напряжений — временный предел усталости, но не свыше предела текучести материала).

Для отдельных конструкций предел усталости устанавливается с учетом наличия в них сварных и заклепочных соединений, а также с учетом характера изменения нагрузки во времени.

При расчете общей продольной прочности корпуса опасное напряжение ввиду ограниченного числа циклов перемен знака расчетных напряжений определяется без учета явления усталости материала.

Примечание. Для общих напряжений, меняющихся по величине и имеющих постоянный характер действия, в предшествующей практике опасное напряжение определялось согласно следующему выражению:

$$\sigma_0' = 0{,}25\sigma_0\left(3 + \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}\right),$$

где σ_0 — опасное напряжение, определенное как для напряжений, неизменных по величине (п. 1);

σ_{min} — минимальный по абсолютной величине предел изменения действующего напряжения (плюс растяжение, минус сжатие);

σ_{max} — максимальный по абсолютной величине предел изменения действующего напряжения (плюс растяжение, минус сжатие).

3. Для указанных в п. 1 напряжений, имеющих местный характер, нормы для опасных напряжений могут быть повышены без ущерба для прочности конструкции. В этом случае об опасном состоянии конструкции следует судить по признаку допустимости тех наибольших деформаций, которые могут появиться при переходе местных напряжений за пределы, установленные для общих напряжений.

Примечание. В общем случае повышение в такой же степени норм опасных напряжений для меняющихся по знаку напряжений местного характера не может быть допущено ввиду возможности появления местных трещин в материале (вследствие его усталости), которые могут затем распространиться на соседние части конструкции.

4. Для общих нормальных и касательных напряжений, которые могут повлечь нарушение устойчивости формы конструкции, опасное напряжение должно приниматься равным критическому напряжению, определенному как эйлерово напряжение с учетом поправки на изменение модуля нормальной упругости.

§ 5. Назначение запасов прочности и норм для допускаемых напряжений

1. Допускаемые напряжения должны быть назначены как некоторая часть от опасных напряжений, обусловленная вводимым в расчет необходимым запасом прочности.

2. При назначении необходимого запаса прочности должны быть учтены не только степень достоверности и точности самого расчета, но и условия постройки и эксплуатации рассчитываемой конструкции корпуса.

В соответствии с указанными положениями при назначении запаса прочности необходимо учитывать следующее:

а) характер действия внешних нагрузок, т. е. степень их случайности;

б) точность, с которой могли быть определены внешние, действующие на конструкцию усилия;

в) насколько вычисленные по принятым расчетным формулам напряжения соответствуют действительной картине распределения напряжений в сечениях конструкции;

г) соответствие механических качеств материала конструкции техническим условиям и тщательность изготовления конструкции;

д) влияние на прочность конструкции технологии ее изготовления, связанной с изменением механических свойств материалов, строительными деформациями и реактивными напряжениями;

е) накопленный опыт постройки и эксплуатации конструкций аналогичных проектируемой;

ж) срок службы конструкции;

е) последствия, которые повлечет за собой нарушение целости конструкции или ее части.

3. Нормы допускаемых напряжений для корпуса корабля в целом и для отдельных его конструкций, установленные на основании соответствующих запасов прочности, которыми учитываются конкретные условия работы и ответственность каждой рассматриваемой конструкции, приведены в разделах Справочника, посвященных строительной механике корабля.

ГЛАВА 4

НОРМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И ПРОМЫШЛЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ [1]

А. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПО РАСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

До последнего времени при проектировании строительных конструкций пользовались нормами допускаемых напряжений аналогично тому, как это принято в кораблестроении при расчете прочности корпусных конструкций, для которых имеет место принцип наложения (т. е. когда существует пропорциональность между внешними усилиями и внутренними напряжениями). В настоящее время при проектировании строительных конструкций, в связи с введением в действие с 1 января 1955 г. новых норм строительного проектирования, расчет несущих конструкций и оснований производится по так называемому методу предельных состояний. Сущность этого метода изложена ниже.

§ 6. Основные расчетные положения

Состояние конструкции (или сооружения), при котором эксплуатация ее должна быть прекращена, в строительных нормах называется предельным. Указанные нормы для стальных конструкций учитывают два предельных состояния:

а) первое предельное состояние — по несущей способности (прочности, устойчивости, выносливости материала), при достижении которого конструкция теряет способность сопротивляться внешним воздействиям;

б) второе предельное состояние — по развитию чрезмерных деформаций от статических и динамических нагрузок, при достижении которого в конструкции, сохраняющей прочность и устойчивость, появляются деформации или колебания, исключающие возможность дальнейшей эксплуатации.

Расчет по первому предельному состоянию в общем виде должен производиться по формуле

$$N \leqslant \Phi, \tag{10}$$

где N — усилие в рассматриваемом элементе конструкции (функция нагрузки, действующей на сооружение);

Φ — предельное усилие, воспринимаемое материалом рассматриваемого элемента и определяющее несущую способность элемента в зависимости от появления чрезмерных нарастающих деформаций, при которых конструкция уже не может сопротивляться действию нагрузки (функция механических свойств материала и размеров элемента).

Расчет по второму предельному состоянию в общем виде должен производиться по формуле

$$\Delta \leqslant f, \tag{11}$$

[1] При составлении данной главы были использованы следующие материалы:

Строительные нормы и правила, ч. II, „Нормы строительного проектирования", Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954;

Нормы и технические условия проектирования стальных конструкций (Н и ТУ 121—55), Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955.

где Δ — деформация или перемещение конструкции в результате внешних воздействий на нее (функция нагрузки, свойств материала и геометрической формы конструкции);

f — предельная величина деформации или перемещения, определяющая необходимость прекращения эксплуатации (функция назначения конструкции).

§ 7. Нормативные и расчетные нагрузки и их сочетания

При определении усилий N, возникающих в элементах конструкции, а также деформаций Δ, входящих в левые части приведенных выше формул, исходят либо из нормативных, либо из расчетных нагрузок.

Нормативными нагрузками называются установленные нормами наибольшие величины внешних воздействий (нагрузок, допускаемых при нормальной эксплуатации конструкций).

Расчетная нагрузка принимается равной по величине произведению нормативной нагрузки на коэффициент перегрузки n, учитывающий опасность превышения нагрузок по сравнению с их нормативными значениями. В табл. 1 приведены значения нормативных нагрузок, коэффициентов перегрузки и расчетных нагрузок для зданий и промышленных сооружений.

Расчет конструкций по первому предельному состоянию производится: по прочности и устойчивости — по расчетным нагрузкам, а по выносливости — по нормативным нагрузкам.

Расчет по второму предельному состоянию производится по нормативным нагрузкам.

Таблица 1

Нормативные и расчетные нагрузки и коэффициенты перегрузки

№ пп.	Виды нагрузок	Нормативная нагрузка, *кг/м²*	Коэффициент перегрузки n	Расчетная нагрузка, *кг/м²*
	А. Нагрузки на перекрытия			
1	Нагрузки в чердачных помещениях (без учета специального оборудования: вентиляционных камер, водяных баков, моторов и т. п.)	75	1,4	105
2	Нагрузки в квартирах, лечебных учреждениях (за исключением вестибюлей и залов, где возможно массовое скопление посетителей), детских садах, детских яслях с учетом веса обычного оборудования	150	1,4	210
3	Нагрузки в общежитиях, конторах, классных комнатах, бытовых помещениях, промышленных цехах с учетом веса обычного оборудования	200	1,4	280

Продолжение

№ пп.	Виды нагрузок	Нормативная нагрузка, *кг/м²*	Коэффициент перегрузки *n*	Расчетная нагрузка, *кг/м²*
4	Нагрузки в коридорах общежитий, контор и бытовых помещений	300	1,3	390
5	Нагрузки в залах, столовых, ресторанах, аудиториях с учетом веса обычного оборудования	300	1,3	390
6	Нагрузки в залах и коридорах театров, кино, клубов, школ, вокзалов и на трибуны	400	1,2	480
7	Нагрузки в книгохранилищах, архивах — по действительной нагрузке, но не менее	500	1,2	600
8	Нагрузки в вестибюлях, на лестницы, террасы и балконы:			
	а) в зданиях и помещениях, указанных в пп. 2 и 3	300	1,4	420
	б) во всех прочих зданиях и помещениях	400	1,4	560
	Б. Разные нагрузки			
9	Вертикальные и горизонтальные нагрузки от кранов	По проектным данным	1,3	—
10	Гидростатическое давление жидкостей	То же	1,1	—
11	Собственный вес конструкций, за исключением конструкций, указанных в п. 12	„	1,1	—
12	Собственный вес термоизоляционных плит и засыпок	„	1,2	—

Примечания. 1. При расчете конструкций перекрытий следует учитывать действительное распределение нагрузок на отдельные элементы этих конструкций (второстепенные и главные балки и т. п.).

2. Нагрузки на перекрытия даны без учета веса перегородок. Вес перегородок учитывается по фактическим данным в зависимости от конструкции перегородок и характера их опирания на перекрытие с коэффициентом перегрузки 1,1.

При указанных выше расчетах принимаются следующие сочетания нагрузок:

а) основные — состоящие из нагрузок, постоянно действующих на сооружение или обычно возникающих при его эксплуатации (собственный вес, полезные нагрузки, снеговые нагрузки, нагрузки от рабочих кранов);

б) дополнительные — состоящие из комбинаций нагрузок, входящих в основные сочетания, с нерегулярно возникающими нагрузками, не связанными с нормальной эксплуатацией здания или сооружения (нагрузками от ветра и от монтажных кранов);

в) особые — состоящие из комбинации основных и дополнительных нагрузок с нагрузками, имеющими аварийный характер и возникающими в исключительных случаях (например, сейсмическая нагрузка).

При расчетах, производимых с учетом дополнительных или особых сочетаний нагрузок, величины расчетных нагрузок, кроме собственного веса, умножаются на коэффициент, равный:

при учете дополнительных сочетаний — 0,9;

при учете особых сочетаний — 0,8.

§ 8. Нормативные и расчетные сопротивления и коэффициенты условий работы

При определении воспринимаемого материалом предельного усилия Ф, входящего в правую часть формулы (10), необходимо исходить не только из геометрических размеров рассматриваемого элемента, но и расчетного сопротивления материала.

Расчетное сопротивление материала R принимается равным произведению нормативного сопротивления $R^н$ на коэффициент однородности

$$R = R^н k, \tag{12}$$

где $R^н$ — сопротивление материала силовым воздействиям, установленное нормами в качестве характеристики его механических свойств и называемое нормативным сопротивлением (оно соответствует опасным напряжениям, принятым в кораблестроении);

k — коэффициент однородности, учитывающий опасность снижения сопротивления материала по сравнению с нормативным сопротивлением вследствие изменчивости механических свойств материала.

Нормативные и расчетные характеристики для стальных конструкций приведены в § 11 и 12.

Определяя предельное усилие по значению расчетного усилия, вводят коэффициент условий работы конструкции m, учитывающий особенности ее работы: концентрацию напряжений, возможность хрупкого разрушения, влияние агрессивной среды и других факторов и их комбинаций, не учитываемых в расчете прямым путем. Значения коэффициентов условий работы для стальных конструкций приведены в п. 4 § 13.

§ 9. Сопоставление методик расчета строительных конструкций по предельному состоянию и по допускаемым напряжениям

Предельные усилия в стальных конструкциях, как правило, определяются по упругой стадии их работы (учет пластических деформаций применяется в строительных нормах с большими ограничениями). Поэтому расчет по методу предельных состояний, как это следует из изложенного выше, отличается от расчета по допускаемым напряжениям только следующим.

При использовании допускаемых напряжений для всех конструкций предусматривался один общий коэффициент запаса, в методе же расчета по предельным состояниям он заменен тремя коэффициентами, а именно, n, k и m, учитывающими возможность увеличения нормативной нагрузки, снижения нормативного сопротивления материала и условия работы конструкции. Каждый из этих коэффициентов зависит, соответственно, от рода нагрузки, от марки материала и типа конструкции или соединения. Поэтому в сочетании они дают различные значения коэффициента запаса.

Б. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ НОРМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И ПРОМЫШЛЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ

§ 10. Материалы для стальных конструкций

1. Характеристики сталей, применяемых для изготовления стальных конструкций, приведены в табл. 2.

Углеродистая сталь обыкновенного качества, применяемая для сварных конструкций, должна изготовляться мартеновским способом.

Таблица 2

Характеристики сталей

Вид стали	Марка стали	Механические свойства (не менее)				Химический состав, %			Способ выплавки стали
		Предел прочности при растяжении, *кг/мм²*	Предел текучести, *кг/мм²*	Относительное удлинение длинного образца, %	Ударная вязкость при нормальной температуре, *кгм/см²*	Углерод	Сера	Фосфор	
							не более		
Углеродистая обыкновенного качества (ГОСТ 380—50)	Ст. 0	32—47	19	18	—	≤0,23	0,060	0,070	Мартеновский
						≤0,14	0,070	0,090	Бессемеровский
	Ст. 2	34—42	22	26	—	0,09—0,15	0,055	0,050	Мартеновский
	Ст. 3	38—47	24	21	8 *	0,14—0,22	0,055	0,050	То же
					10 **	Не более 0,12	0,065	0,085	Бессемеровский
	Ст. 4	42—52	26	19	—	0,18—0,27	0,055	0,050	Мартеновский
						0,12—0,20	0,065	0,085	Бессемеровский
Сталь углеродистая горячекатана для мостостроения (ГОСТ 6713—53)	Ст. 5	50—62	28	15	—	0,28—0,37	0,055	0,050	Мартеновский
	М16с	38	23	26	—	0,12—0,20	0,045	0,040	То же
Низколегированная повышенного качества (ГОСТ 5058—49)	НЛ1	≥42	30	20	8	≤0,15	0,045	0,040	"
	НЛ2	48—63	34	18	6	0,12—0,20	0,045	0,040	"
Углеродистая для заклепок (ГОСТ 499—41)	Ст. 2 закл.	34—42	21	26	—	—	0,050	0,040	"
	Ст. 3 закл.	38—47	21	22	—	—	0,050	0,040	"

* Для листовой и широкополосной стали.
** Для сортовой и фасонной стали.

Применение бессемеровской углеродистой стали обыкновенного качества допускается для клепаных конструкций, не подверженных непосредственному действию динамических нагрузок и не предназначенных для эксплуатации в условиях низких температур (—30° и ниже).

Несущие элементы стальных конструкций должны выполняться преимущественно из стали марки Ст. 3, а также, при соответствующем обосновании, из стали марки НЛ2.

Сталь марки Ст. 0 может применяться только для нерасчетных элементов.

При специальном обосновании допускается применение стали марки Ст. 0 для несущих конструкций, воспринимающих статическую нагрузку.

Сталь марок Ст. 2 и НЛ1 следует применять преимущественно для листовых конструкций.

Примечание. При специальном обосновании допускается применение стали марок Ст. 4 и Ст. 5. Сталь марки Ст. 5 может применяться для клепаных конструкций, а также для сварных конструкций при соблюдении режимов сварки и применении электродов и флюсов, указанных в специальных технических условиях.

2. Отливки (опорные части и т. п.) для стальных конструкций надлежит проектировать из углеродистой стали марок 15Л, 35Л и из серого чугуна марок СЧ 12-28, СЧ 15-32, СЧ 18-36, СЧ 21-40, СЧ 24-44 и СЧ 28-48 (табл. 3).

3. Для сварки стальных конструкций должны применяться следующие присадочные материалы:

а) при ручной сварке сталей марок Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3 и Ст. 4 — электроды типов Э42 и Э42А, а для сталей марок НЛ1 и НЛ2 — электроды типов Э50А и Э55А (табл. 4);

б) при автоматической сварке под слоем флюса — стальная марганцевая и высокомарганцевая сварочная проволока марок Св-08, Св-08А, Св-08Г, Св-08ГА и Св-15, Св-15Г с соответствующими марками флюса (табл. 4).

Примечание. При специальном обосновании для сварки конструкций из сталей марок Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3 и Ст. 4, работающих на статическую нагрузку, допускается применение электродов типа Э-34 (табл. 4).

Таблица 3

Механические свойства отливок из углеродистой стали и серого чугуна

Наименование отливок	Марка стали	Предел прочности при растяжении	Предел прочности при сжатии	Предел прочности при изгибе	Предел текучести	Стрела прогиба стандартного образца при расстоянии между опорами, *мм*		Относительное удлинение образца с 5-кратной расчетной длиной, %, не менее
		кг/мм², не менее				600	300	
Отливки фасонные из углеродистой стали (ГОСТ 977—53)	15Л	40	—	—	20	—	—	20
	35Л	50	—	—	28	—	—	15
Отливки из серого чугуна (ГОСТ 1412—48)	СЧ 12-28	12	50	28	—	6	2	—
	СЧ 15-32	15	65	32	—	7	2	—
	СЧ 18-36	18	70	36	—	8	2	—
	СЧ 21-40	21	75	40	—	8	2	—
	СЧ 24-44	24	85	44	—	12	2	—
	СЧ 28-48	28	100	48	—	12	2	—

Таблица 4

Механические свойства наплавленного металла и сварных соединений

Вид присадочных материалов	Марка	Наплавленный металл		Сварные соединения встык		
		предел прочности при растяжении, *кг/мм²*	относительное удлинение, %	предел прочности при растяжении, *кг/мм²*	угол загиба, градусы	ударная вязкость, *кгм/см²*
		не менее				
Электроды для ручной сварки (ГОСТ 2523—51)	Э34	—	—	34	30	—
	Э42	42	18	42	120	8
	Э42А	42	22	42	180	14
	Э50А	50	20	50	150	13
	Э55А	55	20	55	140	12
Проволока для автоматической сварки под слоем флюса	Проволока по ГОСТ 2246—54 марок Св-08, Св-08А, Св-08Г, Св-08ГА, Св-15 и Св-15Г	—	—	—	—	—

4. Заклепки надлежит применять из углеродистой горячекатаной мартеновской стали марок Ст. 2 закл. и Ст. 3 закл. и низколегированной стали марки НЛ1 (табл. 2).

5. Болты должны применяться из углеродистой стали обыкновенного качества марок Ст. 3, Ст. 5 и низколегированной стали марок НЛ1 и НЛ2 (табл. 2).

Рифленые болты должны применяться из углеродистой стали обыкновенного качества марок Ст. 2 закл. и Ст. 3 закл. (табл. 2).

Примечание. При специальном обосновании допускается применение для болтов стали марки Ст. 0.

§ 11. Нормативные характеристики материалов и соединений

1. Нормативные сопротивления и коэффициенты однородности прокатной стали толщиной от 4 до 40 *мм* включительно должны приниматься по табл 5.

2. Нормативные сопротивления и коэффициенты однородности отливок из углеродистой стали должны приниматься по табл. 6.

3. Нормативные сопротивления и коэффициенты однородности отливок из серого чугуна должны приниматься по табл. 7.

4. Нормативные сопротивления растяжению и сжатию сварных соединений встык, выполненные ручной сваркой с применением электродов типов Э42, Э42А, Э50А и Э55А, а также автоматической сваркой под слоем флюса, должны приниматься равными нормативным сопротивлениям растяжению и сжатию прокатной стали свариваемой конструкции.

Таблица 5

Нормативные сопротивления $R^н$, *кг/см*², и коэффициенты однородности k прокатной стали

Нормативные характеристики		Условное обозначение	Марки стали					
			Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3 и Ст. 4	Ст. 5	НЛ1	НЛ2
Нормативные сопротивления	Растяжение, сжатие, изгиб	$R^н$	1900	2200	2400	2800	3000	3400
	Срез	$R^н_{ср}$	1150	1300	1450	1650	1800	2050
	Смятие торцовой поверхности	$R^н_{см.\ т}$	2850	3300	3600	4200	4500	5100
	Смятие местное при плотном касании	$R^н_{см.\ м}$	1450	1650	1800	2200	2250	2550
	Диаметральное сжатие катков при свободном касании	$R^н_{с.\ к}$	70	80	90	105	110	125
Коэффициенты однородности		k	0,9	0,9	0,9	0,85	0,85	0,85

Таблица 6

Нормативные сопротивления $R^н$, *кг/см*², и коэффициенты однородности k отливок из углеродистой стали

Нормативные характеристики		Условное обозначение	Марки отливок из углеродистой стали	
			15Л	35Л
Нормативные сопротивления	Растяжение сжатие, изгиб	$R^н$	2000	2800
	Срез	$R^н_{ср}$	1200	1700
	Смятие торцовой поверхности	$R^н_{см.\ т}$	3000	4200
	Смятие местное при плотном касании	$R^н_{см.\ м}$	1500	2100
	Диаметральное сжатие катков при свободном касании	$R^н_{с.\ к}$	60	80
Коэффициенты однородности		k	0,75	0,75

Таблица 7

Нормативные сопротивления $R^н$, *кг/см²*, и коэффициенты однородности k отливок из серого чугуна

Нормативные характеристики		Условное обозначение	Марки отливок из серого чугуна		
			СЧ 12-28, СЧ 15-32	СЧ 18-36, СЧ 21-40	СЧ 24-44, СЧ 28-48
Нормативные сопротивления	Сжатие центральное и сжатие при изгибе	$R^н_с$	2000	3000	4000
	Растяжение при изгибе	$R^н_и$	600	900	1200
	Срез	$R^н_{ср}$	450	675	900
	Смятие торцевой поверхности	$R^н_{см.\ т}$	3000	4500	6000
Коэффициенты однородности		k	0,75	0,65	0,65

Нормативные сопротивления сварных соединений встык, выполненные ручной сваркой с применением электродов типа Э34, должны приниматься равными нормативным сопротивлениям стали марки Ст. 0.

Таблица 8

Коэффициенты нормативного сопротивления сварных соединений

Вид сварного соединения	Коэффициент нормативного сопротивления
Встык при работе на срез	0,60
Угловыми швами (фланговыми и лобовыми) при работе на растяжение, сжатие и срез	0,70

5. Нормативные сопротивления срезу сварных соединений встык и нормативные сопротивления растяжению, сжатию и срезу сварных соединений, выполненных угловыми швами, надлежит принимать равными нормативным сопротивлениям растяжению сварных соединений встык в соответствии с п. 4 настоящего параграфа умноженным на коэффициенты, приведенные в табл. 8.

6. Коэффициенты однородности сварных соединений k при всех видах сопротивлений материала надлежит принимать:

а) $k = 0{,}9$ — для стали марок Ст. 0, Ст. 3 и Ст. 4 при ручной сварке электродами типов Э42 и Э42А, а также при автоматической сварке под слоем флюса;

б) $k = 0{,}85$ — для стали марок НЛ1 и НЛ2 при ручной сварке электродами типов Э50А, Э55А, а также при автоматической сварке под слоем флюса;

в) $k = 0{,}7$ — при ручной сварке электродами типа Э34.

Чтобы обеспечить надлежащее качество сварных соединений встык, работающих на растяжение и выполненных ручной сваркой электродами типов Э42, Э42А, Э50А и Э55А, проверка этих соединений должна производиться способами повышенного контроля качества сварных швов (электромагнитные, просвечивание и др.). При обычных способах контроля качества сварных швов (наружным осмотром, засверловкой, замером размеров и т. п.) коэффициенты однородности для этих соединений понижаются на 15%.

7. Нормативные сопротивления растяжению $R^{н}$ заклепок и болтов должны приниматься по табл. 9.

Таблица 9

Нормативные сопротивления $R^{н}$ растяжению заклепок и болтов, *кг/см²*

Вид соединения	Марки стали заклепок и болтов						
	Ст. 2 закл.	Ст. 0	Ст. 3 закл.	Ст. 3	Ст. 5	НЛ1	НЛ2
Заклепки	2200	—	2200	—	—	3000	—
Болты	—	1900	—	2400	2800	3000	3400

8. Нормативные сопротивления срезу $R^{н}_{ср}$ заклепок и болтов надлежит принимать равными нормативным сопротивлениям растяжению, указанным в п. 7 настоящего параграфа, умноженным на коэффициенты, приведенные в табл. 10.

Таблица 10

Коэффициенты нормативного сопротивления срезу заклепок и болтов

Вид соединения	Марки стали заклепок и болтов				
	Ст. 2 закл. и Ст. 3 закл.	Ст. 0 и Ст. 3	Ст. 5	НЛ1	НЛ2
Заклепки	0,90	—	—	0,85	—
Болты	—	0,90	0,85	0,85	0,85

9. Нормативные сопротивления смятию для заклепочных и болтовых соединений надлежит принимать равными удвоенным нормативным сопротивлениям растяжению прокатной стали, указанным в п. 1 настоящего параграфа.

10. Коэффициенты однородности k заклепок и болтов должны приниматься по табл. 11.

Таблица 11

Коэффициенты однородности k заклепок и болтов

Виды соединения	Марки стали заклепок и болтов				
	Ст. 2 закл. и Ст. 3 закл.	Ст. 0 и Ст. 3	Ст. 5	НЛ1	НЛ2
Заклепки	0,90	—	—	0,85	—
Болты	—	0,90	0,85	0,85	0,85

11. Заклепки и болты по качеству отверстий и условиям постановки разделяются на группы В и С.

К группе В относятся заклепки и болты, поставленные в отверстия:

а) сверленые по проектному диаметру в собранных элементах;

б) сверленые по проектному диаметру в отдельных деталях и элементах по кондукторам;

в) сверленые или продавленные с меньшим диаметром в отдельных деталях с последующей рассверловкой до проектного диаметра в собранных элементах.

К группе С относятся заклепки и болты, поставленные в продавленные отверстия или в отверстия, сверленые без кондукторов, в каждой детали в отдельности.

Влияние качества отверстий на работу заклепочных и болтовых соединений учитывается коэффициентами качества отверстий по табл. 12.

Таблица 12

Коэффициенты качества отверстий для заклепок и болтов

Элементы соединений	Вид сопротивления	Коэффициенты качества отверстия
Заклепки, поставленные в горячем или холодном состоянии	Срез В „ С Смятие В „ С	1,00 0,80 1,00 0,80
Чистые и рифленые болты	Срез В Смятие В	0,90 0,90
Черные болты	Срез Смятие	0,60 0,60

§ 12. Расчетные характеристики материалов и соединений

1. Расчетные сопротивления материалов и соединений должны определяться как произведение нормативных сопротивлений на соответствующие коэффициенты однородности (с округлениями) по табл. 13—18.

Таблица 13

Расчетные сопротивления R для прокатной стали толщиной от 4 до 40 *мм* включительно, *кг/см*²

Вид напряженного состояния	Условное обозначение	Прокатная сталь марок					
		Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3 и Ст. 4	Ст. 5	НЛ1	НЛ2
Растяжение, сжатие и изгиб	R	1700	2000	2100	2400	2500	2900
Срез	$R_{ср}$	1000	1200	1300	1400	1500	1700
Смятие торцовой поверхности	$R_{см.\,т}$	2500	3000	3200	3600	3800	4300
Смятие местное при плотном касании	$R_{см.\,м}$	1300	1500	1600	1800	1900	2200
Диаметральное сжатие катков при свободном касании	$R_{с.\,к}$	60	70	80	90	95	110

Таблица 14

Расчетные сопротивления R для отливок из углеродистой стали, *кг/см*²

Вид напряженного состояния	Условное обозначение	Отливки из углеродистой стали марок	
		15Л	35Л
Растяжение, сжатие и изгиб	R	1500	2100
Срез	$R_{ср}$	900	1300
Смятие торцовой поверхности	$R_{см.\,т}$	2250	3100
Смятие местное при плотном касании	$R_{см.\,м}$	1100	1600
Диаметральное сжатие катков при свободном касании	$R_{с.\,к}$	45	60

Таблица 15

Расчетные сопротивления R для отливок из серого чугуна, *кг/см*²

Вид напряженного состояния	Условное обозначение	Отливки из серого чугуна марок		
		СЧ 12-28, СЧ 15-32	СЧ 18-36, СЧ 21-40	СЧ 24-44, СЧ 28-48
Сжатие центральное и сжатие при изгибе	$R_с$	1500	1900	2600
Растяжение при изгибе	$R_и$	450	550	800
Срез	$R_{ср}$	350	450	600
Смятие торцовой поверхности	$R_{см.\,т}$	2250	2800	3900

Таблица 16

Расчетные сопротивления $R^{св}$ для сварных швов, *кг/см²*

Вид сварных швов	Вид напряженного состояния	Условное обозначение	Электроды типа Э34 в конструкциях из стали марок	Электроды типа Э42 и автоматическая сварка под слоем флюса в конструкциях из стали марки	Электроды типов Э42 и Э42А и автоматическая сварка под слоем флюса в конструкциях из стали марок		Электроды типов Э50А и Э55А и автоматическая сварка под слоем флюса в конструкциях из стали марок	
			Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3, Ст. 4	НЛ1	НЛ2
Встык	Сжатие	$R_c^{св}$	1300	1700	2000	2100	2500	2900
»	Растяжение при автоматической сварке под слоем флюса, а также при ручной и полуавтоматической сварке при повышенных способах контроля качества швов	$R_p^{св}$	—	1700	2000	2100	2500	2900
»	Растяжение при ручной и полуавтоматической сварке при обычных способах контроля качества швов	$R_p^{св}$	1200	1450	1800	1800	2100	2500
»	Срез	$R_{ср}^{св}$	800	1000	1200	1300	1500	1750
Угловые швы (лобовые, фланговые, втавр)	Сжатие, растяжение, срез	$R_y^{св}$	900	1200	1400	1400	1800	2000

Таблица 17

Расчетные сопротивления для заклепочных соединений $R^{закл.}$ для горячей и холодной клепки с учетом коэффициентов качества отверстий, *кг/см²*

Вид напряженного состояния	Условное обозначение	Заклепки из стали марок Ст. 2 закл. и Ст. 3 закл. в конструкциях из стали марок						Заклепки из стали марки НЛ1 в конструкциях из стали марок	
		Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	НЛ1	НЛ2	НЛ1	НЛ2
Срез В	$R_{ср}^{закл}$	1800	1800	1800	1800	1800	1800	2200	2200
Срез С	$R_{ср}^{закл}$	1400	1400	1400	—	—	—	—	—
Смятие В	$R_{см}^{закл}$	3400	4000	4200	4800	5000	5800	5000	5800
Смятие С	$R_{см}^{закл}$	2700	3200	3400	—	—	—	—	—
Отрыв головок	$R_{отр}^{закл}$	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2500	2500

Примечание. Срез и смятие В и С соответствуют данным п. 11 § 11.

Таблица 18

Расчетные сопротивления R для болтовых соединений, *кг/см²*

Вид болтовых соединений	Вид напряженного состояния	Условное обозначение	Болты из стали марки Ст. 0 в конструкциях из стали марок			Болты из стали марки Ст. 3 в конструкциях из стали марок						Болты из стали марки Ст. 5 в конструкциях из стали марок				Болты из стали марки НЛ1 в конструкциях из стали марок		Болты из стали марки НЛ2 в конструкциях из стали марок	
			Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3, Ст. 4	Ст. 0	Ст. 2	Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	НЛ1	НЛ2	Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	НЛ1	НЛ2	НЛ1	НЛ2	НЛ1	НЛ2
Чистые и рифленые болты	Растяжение	$R_р$	1700	1700	1700	2100	2100	2100	2100	2100	2100	2400	2400	2400	2400	2500	2500	2900	2900
	Срез В	$R_{ср}$	1350	1350	1350	1700	1700	1700	1700	1700	1700	1800	1800	1800	1800	1950	1950	2200	2200
	Смятие В	$R_{см}$	3100	3600	3900	3100	3600	3900	4300	4600	5200	3900	4300	4600	5200	4600	5200	4600	5200
Черные болты	Растяжение	$R_р$	1700	1700	1700	2100	2100	2100	2100	2100	2100	2400	2400	2400	2400	2500	2500	2900	2900
	Срез	$R_{ср}$	900	900	900	1150	1150	1150	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Смятие	$R_{см}$	2100	2400	2600	2100	2400	2600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Анкерные болты	Растяжение	$R_р$	1700	1700	1700	2100	2100	2100	2100	2100	2100	2400	2400	2400	2400	2500	2500	2900	2900

Примечание. Расчетные сопротивления даны с учетом коэффициентов качества отверстий болтов, приведенных в табл. 12.

2. Модули упругости E для прокатной стали, стального и чугунного литья надлежит принимать по табл. 19.

Таблица 19

Модули упругости E для прокатной стали, стального и чугунного литья, *кг/см²*

Наименование материала	Модуль продольной упругости	Модуль сдвига
Стальное литье и прокатная сталь	2 100 000	840 000
Чугунное литье марок:		
СЧ 24-44, СЧ 28-48, СЧ 21-40, СЧ 18-6	1 000 000	—
СЧ 15-32, СЧ 12-28	850 000	—

3. Величина коэффициента линейного расширения стали при повышении температуры на 1° принимается $\alpha = 1{,}12 \cdot 10^{-5}$.

Объемный вес для стали всех марок принимается 7850 *кг/м³*, для чугуна — 7200 *кг/м³*.

§ 13. Основные расчетные положения

1. Усилия в стальных конструкциях определяются по упругой стадии их работы.

Примечания: 1. Усилия в статически неопределимых системах при условии, если это обосновывается расчетом и эксплуатационными требованиями относительно допустимости получающихся остаточных деформаций, разрешается определять с учетом развития пластических деформаций.

2. Изгибающие моменты в неразрезных прокатных или сварных балках постоянного сечения, закрепленных с целью предотвращения потери общей устойчивости и несущих статическую нагрузку, определяют исходя из выравнивания моментов на опорах и в пролете за счет развития пластических деформаций.

2. Расчет стальных конструкций по деформациям производится по упругой стадии работы материала.

3. Вертикальные деформации (прогибы) изгибаемых элементов не должны превышать величин, приведенных в табл. 20.

4. Коэффициенты условий работы для стальных конструкций при расчете их по несущей способности должны приниматься:

Для элементов конструкций (m):

корпусов и днищ резервуаров 0,8
колонн гражданских зданий и опор водонапорных башен 0,9
сжатых элементов ферм и сплошных балок перекрытий под залами театров, клубов, кино, трибун, помещений магазинов, книгохранилищ и архивов при весе перекрытий, равном (или большем) полезной нагрузке 0,9
сжатых элементов стропильных ферм и прогонов кровель зданий при снеговой нагрузке не более 70 *кг/м²* и весе кровли 150 *кг/м²* и более, а также при снеговой нагрузке не более 100 *кг/м²* и весе кровли 300 *кг/м²* и более 0,95
элементов, прикрепляемых односторонне 0,75

Для соединений конструкций (m_c):

заклепок с потайными или полупотайными головками 0,8
заклепок, работающих на растяжение (отрыв головок) 0,6
черных, чистых и рифленых болтов, работающих на растяжение 0,8
анкерных болтов, работающих на растяжение 0,65
для прочих элементов конструкций и соединений 1,0

Примечание. Коэффициент условий работы для элементов, прикрепляемых односторонне, установлен как для равнобоких уголков, так и для неравнобоких уголков, прикрепляемых узкой полкой.

Таблица 20

Предельные деформации (прогибы) изгибаемых элементов

Наименование элементов конструкций	Величина прогиба в долях от пролета l
Подкрановые балки:	
при ручных кранах	1/500
при электрических кранах грузоподъемностью до 50 *т*	1/600
при электрических кранах грузоподъемностью 50 *т* и более	1/750
Пути кран-балок	1/500
Монорельсовые пути	1/400
Балки рабочих площадок промышленных зданий:	
при отсутствии рельсовых путей	1/250
при наличии узкоколейных путей	1/400
„ „ ширококолейных путей	1/600
Балки междуэтажных перекрытий:	
главные балки	1/400
прочие „	1/250
Балки покрытий и чердачных перекрытий:	
главные балки	1/250
прогоны и обрешетки	1/200

Примечания: 1. Прогибы для подкрановых балок, монорельсовых путей и путей кран-балок определяются без учета коэффициента динамичности.
2. При наличии штукатурки прогиб балок перекрытий только от полезной нагрузки не должен превышать 1/350 пролета.

§ 14. Расчет центрально растянутых и центрально сжатых элементов стальных конструкций

1. Расчет элементов при центральном растяжении и центральном сжатии производится по формулам:

на прочность при центральном растяжении и сжатии

$$N \leqslant mRF_{нт}; \tag{13}$$

на устойчивость при центральном сжатии

$$N \leqslant m\varphi RF_{бр}. \tag{14}$$

В формулах (13) и (14):

N — расчетная продольная сила;
m — коэффициент условий работы;
R — расчетное сопротивление растяжению или сжатию прокатной стали;
$F_{бр}$ — площадь сечения брутто;
$F_{нт}$ — площадь сечения нетто;
φ — коэффициент продольного изгиба, принимаемый по табл. 21.

Таблица 21

Коэффициенты φ продольного изгиба центрально сжатых элементов

Гибкость элементов	Коэффициенты				
	Сталь марок			Чугун марок	
	Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5, НЛ1	НЛ2	СЧ 15-32, СЧ 15-28, СЧ 18-36, СЧ 21-40	СЧ 24-44, СЧ 28-48
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12
110	0,52	0,43	0,39	—	—
120	0,45	0,38	0,33	—	—
130	0,40	0,32	0,29	—	—
140	0,36	0,28	0,25	—	—
150	0,32	0,27	0,23	—	—
160	0,29	0,24	0,21	—	—
170	0,26	0,21	0,19	—	—
180	0,23	0,19	0,17	—	—
190	0,21	0,17	0,15	—	—
200	0,19	0,15	0,13	—	—

Примечание. Гибкость элемента $\lambda = \frac{l_0}{r}$, где l_0 — расчетная длина элемента; r — радиус инерции сечения. Гибкость определяется в плоскостях главных моментов инерции.

§ 15. Расчет изгибаемых элементов стальных конструкций

1. Расчет изгибаемых элементов производится по формулам:
на прочность

$$M \leqslant mRW_{нт} \tag{15}$$

$$Q \leqslant mR_{ср} \frac{J_{бр}\delta}{S_{бр}}; \tag{16}$$

на устойчивость

$$M \leqslant m\varphi_б RW_{бр}. \tag{17}$$

В формулах (15), (16) и (17):
M — расчетный изгибающий момент;
Q — расчетная поперечная сила;
$W_{бр}$ — момент сопротивления сечения брутто;
$W_{нт}$ — момент сопротивления сечения нетто;

$J_{бр}$ — момент инерции сечения брутто относительно нейтральной оси;
$S_{бр}$ — статический момент сдвигающейся части сечения брутто относительно нейтральной оси;
δ — толщина стенки;
R — расчетное сопротивление изгибу прокатной стали;
$R_{ср}$ — расчетное сопротивление срезу прокатной стали;
$\varphi_б$ — коэффициент уменьшения несущей способности изгибаемых элементов при проверке общей устойчивости, принимаемый согласно указаниям приложения IV Н и ТУ 121—55 [1].

При расчете разрезных балок, не теряющих устойчивости и несущих статическую нагрузку, момент сопротивления $W_{нт}$ для балок из прокатных профилей (двутавров, швеллеров) в формуле (16) принимают на 15% большим, учитывая развитие пластических деформаций.

Для сварных балок постоянного сечения, удовлетворяющих тем же условиям при отношении ширины сжатого пояса к его толщине $\frac{b}{\delta} \leqslant 20$, момент сопротивления принимают по формуле

$$W_{нт} = S_в + S_н, \tag{18}$$

где $S_в$ и $S_н$ — статические моменты относительно нейтральной оси верхней и нижней частей сечения балки, взятые по абсолютной величине.

При учете пластических деформаций в балке необходимо проверять касательные напряжения в сечении с наибольшим изгибающим моментом, которые не должны превышать 0,4 расчетного сопротивления стали на изгиб.

Примечание. При наличии зоны чистого изгиба численное значение момента сопротивления должно приниматься средним между определенным по упругой стадии работы материала и определенным с учетом развития пластических деформаций в соответствии с указаниями настоящего пункта.

2. Проверки общей устойчивости балок не требуется:

а) при наличии настила по балкам или монолитной железобетонной плиты, опирающихся на сжатые пояса и препятствующих повороту сечения балок;

б) для балок двутаврового сечения при отношениях свободной длины сжатого пояса к его ширине, не превосходящих величин, указанных в табл. 22.

Таблица 22

Наибольшие отношения свободной длины сжатого пояса к его ширине, при которых не требуется проверки общей устойчивости балок двутаврового сечения

Марка стали	Наибольшие отношения l/b	
	при нагрузке по верхнему канту	при нагрузке по нижнему канту
Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	16	25
Ст. 5. НЛ1	14	22
НЛ2	12	18

Примечание. l — свободная длина сжатого пояса балки между точками закрепления; при отсутствии связей l — пролет балки; при наличии связей в плоскости сжатого пояса l — расстояние между узлами связей; при наличии поперечных связей, препятствующих повороту сечения балки, l — расстояние между поперечными связями; b — ширина сжатого пояса.

[1] Нормы и технические условия проектирования стальных конструкций (Н и ТУ121—55). Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955.

3. Следует обеспечить местную устойчивость стенок сплошных элементов конструкций (балок, колонн) и при необходимости укреплять их ребрами жесткости.

Наибольшие отношения высоты стенки к ее толщине, при которых не требуется проверки ее устойчивости, устанавливаются табл. 23.

Таблица 23

Наибольшие отношения высоты стенки к ее толщине, при которых не требуется проверки устойчивости стенок сплошных элементов конструкций

Марки стали	Наибольшие отношения h_0/δ	
	для балок, укрепляемых только поперечными ребрами жесткости	для колонн
Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	80	70
Ст. 5, НЛ1	70	65
НЛ2	65	60

Примечание. h_0 — расчетная высота стенки, принимаемая в сварном элементе равной полной высоте, а в клепаном — равной расстоянию между внутренними рисками поясных уголков; δ — толщина стенки.

Стенки тонкостенных балок рекомендуется укреплять в сжатой области продольными ребрами жесткости:

для балок из стали марок Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3 и Ст. 4 — при $\frac{h_0}{\delta} \geqslant 160$;

для балок из стали марок Ст. 5 и НЛ1 — при $\frac{h_0}{\delta} \geqslant 140$;

для балок из стали марки НЛ2 — при $\frac{h_0}{\delta} \geqslant 130$.

Стенки должны проверяться на потерю устойчивости от действия нормальных и срезывающих напряжений, а при наличии сосредоточенных нагрузок (например, в подкрановых балках) — также от действия сминающих напряжений.

§ 16. Расчет сварных, заклепочных и болтовых соединений стальных конструкций

1. При осевом воздействии усилий на сварное соединение распределение напряжений по длине шва принимается равномерным.

Сварные швы, воспринимающие продольные силы, рассчитываются по формулам:

на растяжение швов встык, расположенных перпендикулярно действующей силе,

$$N \leqslant mR_{\text{р}}^{\text{св}} l_{\text{ш}} \delta; \tag{19}$$

на сжатие швов встык, расположенных перпендикулярно действующей силе,

$$N \leqslant mR_{\text{с}}^{\text{св}} l_{\text{ш}} \delta; \tag{20}$$

на растяжение косых швов встык

$$N \leqslant mR_{\text{р}}^{\text{св}} l_{\text{ш}} \frac{\delta}{\sin \alpha}; \tag{21}$$

на сжатие косых швов встык

$$N \leqslant mR_{c}^{св} l_{ш} \frac{\delta}{\sin \alpha}; \tag{22}$$

на срез косых швов встык

$$N \leqslant mR_{ср}^{св} l_{ш} \frac{\delta}{\cos \alpha}; \tag{23}$$

на сжатие, растяжение и срез угловых швов

$$N \leqslant 0{,}7mR_{у}^{св} l_{ш} h_{ш}. \tag{24}$$

В формулах (19)—(24):

N — расчетная продольная сила, действующая на соединение;
m — коэффициент условий работы конструкции или элемента по п. 4 § 13;
$l_{ш}$ — расчетная длина шва, равная полной длине за вычетом 10 *мм*;
δ — наименьшая толщина соединяемых элементов;
$h_{ш}$ — толщина углового шва (по катету);
α — угол между направлением действующей силы и косого шва;
$R_{р}^{св}$ — расчетное сопротивление растяжению сварного шва встык;
$R_{с}^{св}$ — расчетное сопротивление сжатию сварного шва встык;
$R_{ср}^{св}$ — расчетное сопротивление срезу сварного шва встык;
$R_{у}^{ср}$ — расчетное сопротивление углового шва.

Примечание. При ручной сварке угловых швов с вогнутой поверхностью расчетная высота шва принимается равной высоте вписанного равнобедренного треугольника.

Для угловых швов с отношением катетов 1 : 1,5 расчетная высота принимается равной $0{,}7h_{ш}$, где $h_{ш}$ — меньший катет.

Для угловых швов с равными катетами и выпуклой формы расчетная высота шва принимается равной $0{,}7h_{ш}$.

При расположении шва за пределами стыка (на подкладках и т. п.) расчетная длина шва принимается равной его полной длине.

2. Применение комбинированных соединений, в которых часть усилий воспринимается заклепками, а часть — сварными швами, во вновь проектируемых конструкциях запрещается.

3. При осевом воздействии усилий на заклепочное или болтовое соединение распределение усилий между заклепками или болтами принимается равномерным.

Заклепки или болты, подверженные действию продольных сил, рассчитываются по формулам:

на срез заклепок и болтов

$$N \leqslant mm_{c}nn_{ср}R_{ср} \frac{\pi d^{2}}{4}; \tag{25}$$

на смятие заклепок и болтов

$$N \leqslant mm_{c}nR_{см}d \sum \delta; \tag{26}$$

на отрыв головок заклепок

$$N \leqslant mm_{c}nR_{отр} \frac{\pi d^{2}}{4}; \tag{27}$$

на растяжение болтов

$$N \leqslant mm_{c}nR_{р} \frac{\pi d_{0}^{2}}{4}. \tag{28}$$

В формулах (25)—(28):

m_{c} — коэффициент условий работы заклепочного или болтового соединения;
$n_{ср}$ — число рабочих срезов одной заклепки или болта;
n — число заклепок или болтов в соединении;
d — диаметр отверстия для заклепки или наружный диаметр стержня болта;
d_{0} — внутренний диаметр нарезки болта;

$\Sigma\delta$ — наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении;
$R_{ср}$ — расчетное сопротивление срезу заклепок (болта);
$R_{см}$ — расчетное сопротивление смятию заклепки (болта);
$R_{отр}$ — расчетное сопротивление отрыву головки заклепки;
$R_р$ — расчетное сопротивление растяжению болта.

Примечание. Заклепки и болты, работающие одновременно на срез и растяжение, проверяются отдельно на срез и растяжение.

4. В креплениях одного элемента к другому через прокладки или иные промежуточные элементы, а также в креплениях с односторонней накладкой число заклепок (болтов) должно быть увеличено по сравнению с расчетным на 10%.

При прикреплении выступающих полок уголков или швеллеров с помощью коротышей число заклепок (или болтов), прикрепляющих одну из полок коротыша, должно быть увеличено по сравнению с расчетным на 50%.

ГЛАВА 5

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДРЕВЕСИНЫ[1]

Древесина является материалом анизотропным, у которого модуль упругости в разных направлениях имеет различное значение.

Механические свойства древесины в значительной степени зависят от влажности, наличия сучков, трещин, возраста дерева, строения волокон и т. п.

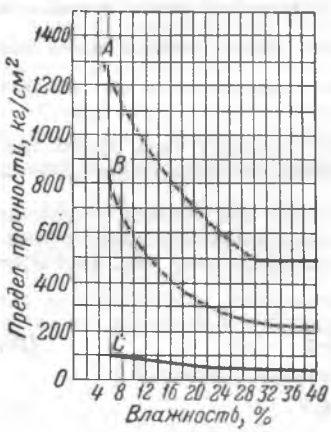


Рис. 1.

С увеличением влажности древесины от сухого состояния до влажности, соответствующей так называемой точке насыщения волокон, которая для различных пород дерева находится в пределах от 23 до 30%[2], механические свойства древесины понижаются. Дальнейшее увеличение влажности практически не влияет на изменение механических свойств древесины, что видно, например, из рис. 1, заимствованного из книги М. Д. Бойко (см. сноску 1). На этом рисунке показана зависимость предела прочности древесины сосны от ее влажности. Кривая *A* получена при статическом изгибе, *B* — при сжатии, *C* — при скалывании.

Древесину нельзя относить к идеально-упругим телам, так как даже сравнительно мало чувствительные приборы фиксируют ее остаточные деформации почти с самого начала нагружения.

Процесс деформирования древесины при механических воздействиях на нее делится на две резко обособленные области: а) область неполной упругости и б) область пластического течения. Границей между областями служит *предел пластического течения*. Переход через предел пластического течения переводит древесину в новое качественное состояние.

---

[1] При составлении данной главы была использована следующая литература:
С. И. Ванин, Древесиноведение, Гослесбумиздат, 1949.
Н. Л. Леонтьев, Упругие деформации древесины, Гослесбумиздат, 1952.
М. Д. Бойко, Влияние температурно-влажностного состояния древесины на ее прочность, Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1952.
Справочник „Инженерные сооружения", т. 1, Машстройиздат, 1950.
ГОСТ 4631—49, Показатели физико-механических свойств древесины.

[2] Под влажностью в настоящем разделе подразумевается отношение (в процентах) веса воды, находящейся в древесине, к абсолютно сухому весу древесины.

Таблица 24

Средние показатели физико-механических свойств древесины

(извлечение из рекомендуемого ГОСТ 4631—49)

Порода	Объемный вес при влажности 15%, *г/см³*	Предел прочности при 15%-ной влажности, *кг/см²*			Модуль упругости при статическом изгибе, *тыс. кг/см²*
		при сжатии вдоль волокон	при изгибе	при растяжении вдоль волокон	
Береза обыкновенная	0,64	447	997	—	124
Береза (Урал)	0,65	527	984	—	—
Бук (Кавказ)	0,65	461	938	1291	—
Дуб	0,72	520	935	1288	73
Ель обыкновенная (северная)	0,46	423	774	1223	—
Ель обыкновенная (центральные районы)	0,46	385	722	1076	—
Ель (Урал)	0,44	353	640	—	75
Ель (Сибирь)	0,39 / 0,44	353 / 431	603 / 729	722 / 864	87 / 86
Ель (Приморье)	0,46	389	721	931	—
Кедр (Приморье)	0,44	337	639	1074	69
Кедр (Урал)	0,43	376	603	—	—
Кедр (Сибирь)	0,44 / 0,45	352 / 378	645 / 628	780 / 786	84 / 80
Лиственница (Приморье)	0,65	573	1062	—	115
Лиственница (Урал)	0,68	511	973	—	130
Лиственница (Сибирь)	0,66 / 0,64	615 / 553	978 / 964	1205 / 1186	132 / 129
Пихта (Кавказ)	0,44	391	722	1118	91
Пихта (Урал)	0,39	330	584	—	78
Пихта (Сибирь)	0,36 / 0,35	317 / 337	570 / 519	716 / 595	79 / 73
Сосна обыкновенная (северная)	0,54	466	877	—	—
Сосна (центральные районы СССР)	0,53	439	793	1150	145
Сосна (Украина)	0,54	384	732	963	107
Сосна (Урал)	0,53	428	717	—	—
Сосна (Сибирь)	0,48 / 0,47	427 / 396	736 / 718	931 / 841	102 / 105

Примечание. Цифры над чертой относятся к породам Западной Сибири, под чертой — к породам Восточной Сибири.

Таблица 25

Средние показатели модулей упругости при 15%-ной влажности (ориентировочные данные по ГОСТ 4631—49)

Порода	Модули упругости, *тыс. кг/см²*						Модули сдвига при скалывании вдоль волокон, *тыс. кг/см²*		Модуль кручения, *тыс. кг/см²*
	При сжатии			При растяжении					
	вдоль волокон	поперек волокон		вдоль волокон	поперек волокон				
		в радиальном направлении	в тангентальном направлении		в радиальном направлении	в тангентальном направлении	в радиальной плоскости	в тангентальной плоскости	
Береза	158	6,0	4,5	181	6,0	4,2	5,1	5,1	10,1
Дуб	140	12,9	9,1	140	11,0	8,3	4,3	4,8	8,6
Ель	142	5,9	3,6	143	6,2	4,2	—	—	—
Лиственница	140	—	—	145	—	—	—	—	7,3
Пихта кавказская	125	—	—	125	—	—	—	—	5,7
Сосна	117	6,2	5,0	117	5,1	4,3	4,3	3,7	6,6
Ясень европейский	150	9,7	—	140	—	—	—	6,0	8,7
Ясень маньчжурский	124	—	—	156	—	—	—	—	—

Таблица 26

Средние пределы пластического течения древесины при 15%-ной влажности (ориентировочные данные по ГОСТ 4631—49)

Порода	Объемный вес при 15%-ной влажности, *г/см³*	Предел пластического течения					
		В процентах от предела прочности при				При сжатии поперек волокон, *кг/см²*	
		сжатии вдоль волокон	растяжении		статическом изгибе		
			вдоль волокон	поперек волокон в среднем для радиального и тангентального направлений		в радиальном направлении	в тангентальном направлении
Береза	0,65	—	—	—	65	60	47
Бук	0,65	74	90	92	—	—	—
Дуб	0,67	74	—	—	54	65	73
Ель	0,44	88	75	94	—	—	—
Липа	0,48	82	—	—	—	—	—
Сосна	0,49	73	—	89	63	29	43
Ясень	0,65	67	86	—	—	68	—

Таблица 27

Расчетные величины механических свойств и объемного веса березовой фанеры, склеенной бакелитовой пленкой или смоляными клеями[1]

Толщина фанеры δ	Число слоев шпона n	Предел прочности при растяжении			Модуль упругости при растяжении			Модуль сдвига		Предел прочности при чистом срезе			Коэффициент Пуассона при растяжении			Предел прочности при складывании по склейке		Объемный вес γ
		вдоль волокон рубашки $\sigma_{p\parallel}$	под углом 45° к волокнам рубашки σ_{p45}	поперек волокон рубашки $\sigma_{p\perp}$	вдоль волокон рубашки $E_{\parallel}$	под углом 45° к волокнам рубашки E_{45}	поперек волокон рубашки $E_{\perp}$	вдоль волокон рубашки $G_{\parallel}$	под углом 45° к волокнам рубашки G_{45}	вдоль волокон рубашки $\tau_{\parallel}$	под углом 45° к волокнам рубашки τ_{45}	поперек волокон рубашки $\tau_{\perp}$	вдоль волокон рубашки $\mu_{\parallel}$	под углом 45° к волокнам рубашки μ_{45}	поперек волокон рубашки $\mu_{\perp}$	в сухом состоянии S_c	после кипячения в воде (1 час) $S_к$	
мм		*кг/см²*																*г/см³*
1,0	3	750	300	450	130 000	28 000	65 000	8000	42 000	200	450	250	0,07	0,71	0,04	—	16,0	0,80
1,5—2,0	3	750	250	450	130 000	28 000	65 000	8000	42 000	150	400	200	0,07	0,71	0,04	18,0	16 и 14	0,80
1,5—2,0	5	750	350	650	120 000	30 000	80 000	9000	45 000	200	400	250	0,08	0,67	0,05	18,0	14,0	0,80
2,5	3	750	250	450	130 000	28 000	65 000	8000	42 000	150	400	200	0,07	0,71	0,04	18,0	14,0	0,80
2,5	5	750	300	600	120 000	30 000	80 000	9000	45 000	200	400	200	0,08	0,67	0,05	18,0	14,0	0,80
3,0—4,0	3	750	250	410	130 000	28 000	65 000	8000	42 000	150	350	200	0,07	0,71	0,04	18,0	14,0	0,80
3,0—4,0	5	750	300	600	120 000	30 000	80 000	9000	45 000	150	350	200	0,08	0,67	0,05	18,0	14,0	0,80
5,0	3	750	250	410	130 000	28 000	65 000	8000	42 000	150	350	200	0,07	0,71	0,04	18,0	14,0	0,77
5,0	5	750	300	500	120 000	30 000	80 000	9000	45 000	150	350	200	0,08	0,67	0,05	22,0	14,0	0,77
6,0	5	700	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22,0	14,0	0,77
6,0	7	700	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22,0	14,0	0,77
8,0	5 и 7	610	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22 и 27	14,0	0,77
10,0	7	610	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27,0	14,0	0,77
10,0	9	610	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27,0	14,0	0,77
12,0	9	610	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27,0	14,0	0,77
12,0	11	610	300	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27,0	14,0	0,77

[1] Справочник фанерщика, Гослесбумиздат, 1953.

В области неполной упругости имеют место только упругие и остаточные деформации, а изменение деформаций во времени при постоянной нагрузке происходит по затухающей кривой. Модуль упругих деформаций имеет постоянное значение (не зависит от напряжения).

В области пластического течения к упругой и остаточной деформациям прибавляется еще деформация пластического течения. Изменение деформаций во времени при постоянной нагрузке идет по незатухающей кривой. Модуль упругости становится переменной величиной.

Поскольку в пределах допускаемых напряжений, принятых для древесины в постройках и сооружениях, деформирование происходит в области неполной упругости и остаточные деформации при этом не выходят за пределы 0,03%, т. е. примерно соответствуют величине, принимаемой для металлов, для древесины также часто применяют закон Гука.

В табл. 24—26 приведены данные о механических свойствах древесины различных пород дерева, а в табл. 27 — для березовой фанеры.

ГЛАВА 6

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ НОРМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И ПРОМЫШЛЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ [1]

При расчете прочности деревянных строительных конструкций должны быть применены основные положения по расчету строительных конструкций, изложенные в гл. 4, где приведены необходимые определения и обозначения.

§ 17. Нормативные характеристики материалов

1. Нормативные сопротивления чистой (без пороков) древесины сосны и ели с влажностью 15% должны приниматься по табл. 28.

2. Нормативные сопротивления чистой древесины других пород должны определяться как произведения нормативных сопротивлений чистой древесины сосны и ели (табл. 28) на коэффициенты, приведенные в табл. 29.

3. Коэффициенты однородности древесины должны приниматься по табл. 30.

4. Объемный вес древесины принимается по табл. 31.

§ 18. Расчетные характеристики материалов

1. Расчетные сопротивления (основные) древесины сосны и ели при расчете защищенных от увлажнения и нагрева деревянных конструкций на одновременное воздействие постоянной и временной нагрузок принимаются (с округлением) по табл. 32. Эти значения определяются как произведения нормативных (сниженных) сопротивлений чистой древесины (табл. 28, графа «б») на соответствующие коэффициенты однородности древесины (табл. 30).

Расчетные сопротивления: а) для древесины других пород; б) для конструкций, находящихся в условиях повышенной влажности или повышенной температуры, либо проверяемых на воздействие только постоянной нагрузки; в) для конструкций, рассчитываемых на кратковременное воздействие монтажных или сейсмических нагрузок, — определяются как произведения основных расчетных сопротивлений, приведенных в табл. 32, на соответствующие коэффициенты, указанные в табл. 29, 33 и 34.

---

[1] При составлении главы были использованы следующие материалы:

Строительные нормы и правила, ч. II, «Нормы строительного проектирования», Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954.

Нормы и технические условия проектирования деревянных конструкций (Н и ТУ 122—55), Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955.

Таблица 28

Нормативные сопротивления $R^н$ чистой древесины сосны и ели, *кг/см²*

Вид напряженного состояния	Обозначение	Нормативное сопротивление	
		а	б
Изгиб	$R^н_и$	500	330
Растяжение вдоль волокон	$R^н_р$	550	370
Сжатие и смятие вдоль волокон	$R^н_с$; $R^н_{см}$	300	200
То же, по всей поверхности поперек волокон	$R^н_{с\,90}$; $R^н_{см\,90}$	—	20
Местное смятие поперек волокон на части длины при длине свободных концов не менее длины площадки смятия и толщины элемента	$R^н_{см\,90}$	—	40
Скалывание вдоль волокон среднее	$R^н_{ск}$	40	—
То же максимальное	$R^н_{ск}$	—	35
Скалывание поперек волокон среднее	$R^н_{ск\,90}$	20	—
То же максимальное	$R^н_{ск\,90}$	—	17

Примечание. Нормативные сопротивления, приведенные в графе „а", определены как пределы прочности чистой древесины при стандартных испытаниях малых образцов.

Нормативные сопротивления, приведенные в графе „б", определены с учетом снижения сопротивления древесины при большей продолжительности воздействия расчетной нагрузки на конструкции, чем при стандартных испытаниях малых образцов.

Таблица 29

Коэффициенты нормативных и расчетных сопротивлений древесины разных пород по отношению к древесине сосны и ели

Породы древесины	Коэффициент нормативного и расчетного сопротивления		
	растяжению, изгибу, сжатию и смятию вдоль волокон	сжатию и смятию поперек волокон	скалыванию
Хвойные			
Лиственница	1,2	1,2	1,0
Кедр сибирский	0,9	0,9	0,9
Пихта	0,8	0,8	0,8
Твердые лиственные			
Дуб	1,3	2,0	1,3
Ясень, клен, граб	1,3	2,0	1,6
Акация	1,5	2,2	1,8
Береза, бук	1,1	1,6	1,3
Вяз, ильм	1,0	1,6	1,0
Мягкие лиственные			
Ольха, липа	0,8	1,3	1 1
Осина, тополь	0,8	1,0	0,8

Таблица 30

Коэффициенты однородности древесины

Вид напряженного состояния	Коэффициенты однородности древесины k
Изгиб	0,4
Растяжение вдоль волокон	0,27
Сжатие и смятие вдоль волокон	0,65
Сжатие и смятие по всей поверхности поперек волокон	0,9
Смятие поперек волокон на части длины при длине свободных концов не менее длины площадки смятия и толщины элемента:	
при длине площадки смятия вдоль волокон 10 *см* и более	0,75
при длине площадки смятия 3 *см*	1,0
Скалывание вдоль волокон и под углом к направлению волокон	0,7

Примечания: 1. Коэффициенты однородности древесины для конструкций, изготовляемых на заводах, повышаются на 10% при условии применения древесины с влажностью не более 15% и контроля прочности древесины.

2. Коэффициент однородности для смятия поперек волокон на части длины элемента при длине площадки смятия менее 10 *см*, но более 3 *см*, определяется по интерполяции.

Таблица 31

Объемный вес древесины, *кг/м*³

Породы древесины	Объемный вес древесины в конструкциях	
	защищенных от увлажнения	не защищенных от увлажнения
Хвойные		
Лиственница	650	800
Сосна, ель, кедр, пихта	500	600
Твердые лиственные		
Дуб, бук, береза, ясень, клен, граб, акация, вяз, ильм	700	800
Мягкие лиственные		
Осина, тополь, ольха, липа	500	600

Примечание. Объемный вес свежесрубленной древесины хвойных и мягких лиственных пород может приниматься 850 *кг/м*³, твердых лиственных пород — 1000 *кг/м*³.

Таблица 32

Основные расчетные сопротивления R древесины сосны и ели, *кг/см²*

Вид напряженного состояния	Обозначение	Расчетное сопротивление
Изгиб	$R_и$	130
Растяжение вдоль волокон	$R_р$	100
Сжатие и смятие вдоль волокон	$R_с$; $R_{см}$	130
Сжатие и смятие по всей поверхности поперек волокон, а также в щековых врубках	$R_{с\,90}$; $R_{см\,90}$	18
Смятие поперек волокон на части длины при длине свободных концов не менее длины площадки смятия и толщины элемента:		
при длине площадки смятия вдоль волокон 10 *см* и более, а также в лобовых врубках, шпонках и опорных плоскостях конструкций	$R_{см\,90}$	30
при длине площадки смятия 3 *см*, а также под шайбами при углах смятия от 90 до 60°	$R_{см\,90}$	40
Скалывание вдоль волокон (максимальное)	$R_{ск}$	24
Скалывание поперек волокон (максимальное)	$R_{ск\,90}$	12

Примечания: 1. Расчетное сопротивление древесины смятию под углом α к направлению волокон определяется по формуле

$$R_{см\,\alpha} = \frac{R_{см}}{1 + \left(\frac{R_{см}}{R_{см\,90}} - 1\right)\sin^3\alpha}. \qquad (29)$$

2. Для лобовых врубок расчетное сопротивление древесины смятию вдоль волокон в формуле (29) принимается $R_{см} = 150$ *кг/см²*.

3. Расчетное сопротивление древесины смятию поперек волокон при длине площадки смятия менее 10 *см*, но более 3 *см*, определяется по интерполяции.

4. Расчетное сопротивление древесины скалыванию под углом α к направлению волокон определяется по формуле

$$R_{ск\,\alpha} = \frac{R_{ск}}{1 + \left(\frac{R_{ск}}{R_{ск\,90}} - 1\right)\sin^3\alpha}. \qquad (30)$$

5. Расчетные сопротивления древесины конструкций, изготовляемых на заводах, повышаются на 10% при условии применения древесины с влажностью не более 15% и контроля прочности древесины.

Таблица 33

Коэффициенты снижения расчетных сопротивлений и модуля упругости древесины

Условия эксплуатации конструкций	Коэффициент
Кратковременное увлажнение древесины с последующим ее высыханием	0,85
Длительное увлажнение древесины	0,75
Воздействие установившейся температуры воздуха 35—50° (в производственных помещениях)	0,80
Воздействие постоянной нагрузки	0,80

Таблица 34

Коэффициенты повышения расчетных сопротивлений древесины при расчете конструкций на воздействие монтажных и сейсмических нагрузок

Вид нагрузки	Коэффициент	
	для всех видов сопротивления, кроме смятия	для смятия
Монтажные нагрузки	1,1	1,3
Сейсмические нагрузки	1,2	1,5

2. Модуль упругости древесины вдоль волокон независимо от породы древесины принимается при определении деформаций защищенных от увлажнения и нагрева конструкций, находящихся под воздействием постоянной и временной нагрузок, $E = 100\,000$ *кг/см*². Модуль упругости древесины при определении деформаций конструкций, находящихся в условиях повышенной влажности или повышенной температуры, либо проверяемых на воздействие только постоянной нагрузки, определяется как произведение указанной выше величины на коэффициент (табл. 33).

§ 19. Основные расчетные положения

1. Расчет деревянных конструкций должен производиться:

а) по несущей способности (прочности, устойчивости) — для всех конструкций;

б) по деформациям — для конструкций, в которых величина деформаций может ограничить возможность их эксплуатации.

Таблица 35

Предельные деформации (прогибы) изгибаемых элементов

Элементы	Предельные прогибы в долях от пролета l
Междуэтажных перекрытий	1/250
Чердачных перекрытий	1/200
Покрытий (кроме ендов):	
прогоны, стропильные ноги, деревоплита,	1/200
обрешетка и настилы	1/150
Ендов	1/400
Примечание. При наличии штукатурки прогиб элементов перекрытий только от полезной нагрузки не должен превышать 1/350 пролета.	

2. Расчет по несущей способности должен производиться на воздействие расчетных нагрузок; расчет по деформациям — на воздействие нормативных нагрузок.

3. Усилия в элементах и соединениях деревянных конструкций определяются в предположении упругой работы материалов.

4. Расчет деревянных конструкций по деформациям производится в предположении упругой работы материалов.

5. Деформации (прогибы) изгибаемых элементов не должны превышать величин, приведенных в табл. 35.

§ 20. Расчет центрально растянутых и центрально сжатых элементов деревянных конструкций

1. Расчет центрально растянутых элементов производится по формуле

$$N \leqslant m_p R_p F_{нт}. \tag{31}$$

где N — расчетная продольная сила;
m_p — коэффициент условий работы элемента на растяжение, принимаемый для элементов, не имеющих ослаблений в расчетном сечении, $m_p = 1{,}0$; для элементов, имеющих ослабление, $m_p = 0{,}8$;
R_p — расчетное сопротивление древесины растяжению вдоль волокон;
$F_{нт}$ — площадь рассматриваемого поперечного сечения нетто; при определении $F_{нт}$ ослабления, расположенные на участке длиной 20 *см*, принимаются совмещенными в одном сечении.

2. Расчет центрально сжатых элементов производится по формулам:
на прочность

$$N \leqslant m_c R_c F_{нт}; \tag{32}$$

на устойчивость

$$N \leqslant m_c \varphi R_c F_{расч}. \tag{33}$$

В формулах (32) и (33):
m_c — коэффициент условий работы элементов на сжатие, принимаемый равным единице;
R_c — расчетное сопротивление древесины сжатию вдоль волокон;
φ — коэффициент продольного изгиба, определяемый по п. 3;
$F_{нт}$ — площадь поперечного сечения нетто элемента;
$F_{расч}$ — расчетная площадь поперечного сечения для расчета на устойчивость, принимаемая:
при отсутствии ослаблений

$$F_{расч} = F_{бр};$$

при ослаблениях, не выходящих на ребро,

$$F_{расч} = F_{бр},$$

если площадь ослаблений не превышает 25% от $F_{бр}$, и

$$F_{расч} = \frac{4}{3} F_{нг},$$

если площадь их превышает 25% от $F_{бр}$;
при симметричных ослаблениях, выходящих на ребро.

$$F_{расч} = F_{нт}.$$

3. Коэффициент продольного изгиба φ определяется по формулам:
при гибкости элемента $\lambda \leqslant 75$

$$\varphi = 1 - 0{,}8 \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2; \tag{34}$$

при гибкости элемента $\lambda > 75$

$$\varphi = \frac{3100}{\lambda^2}. \tag{35}$$

4. Гибкость λ цельных элементов определяется по формуле

$$\lambda = \frac{l_0}{r} \tag{36}$$

где l_0 — расчетная длина элемента;
r — радиус инерции сечения элемента, определяемый по формуле

$$r = \sqrt{\frac{J_{бр}}{F_{бр}}}; \tag{37}$$

J и $F_{бр}$—момент инерции и площадь поперечного сечения брутто элемента.

5. Расчетная длина элемента l_0 определяется умножением его действительной длины на коэффициент:

1,0 — при обоих шарнирно закрепленных концах;
2,0 — при одном защемленном и другом свободно нагруженном конце;
0,8 — при одном защемленном и другом шарнирно закрепленном конце;
0,65 — при обоих защемленных концах.

§ 21. Расчет изгибаемых элементов деревянных конструкций

1. Расчет изгибаемых элементов на прочность производится по формуле

$$M \leqslant m_и R_и W_{нт} \tag{38}$$

где M — расчетный изгибающий момент;
$m_и$ — коэффициент условий работы элемента на изгиб, принимаемый по п. 2;
$R_и$ — расчетное сопротивление древесины изгибу;
$W_{нт}$ — момент сопротивления нетто рассматриваемого поперечного сечения.

2. Коэффициент условий работы элементов на изгиб $m_и$ принимается:

для досок, брусков и брусьев с размерами сторон сечения менее 15 *см*, а также клееных элементов, за исключением указанных ниже,

$$m_и = 1{,}0;$$

для брусьев и клееных элементов сплошного прямоугольного сечения с размерами сторон 15 *см* и более при отношении высоты сечения элемента к его ширине $\frac{h}{b} \leqslant 3{,}5$

$$m_и = 1{,}15;$$

для клееных элементов с высотой сечения более 50 *см* при ширине 10 *см* и менее

$$m_и = 0{,}85;$$

для клееных элементов двутаврового сечения:

при $\frac{b_1}{b} = 0{,}5$ $m_и = 0{,}9$; при $\frac{b_1}{b} = 0{,}33$ $m_и = 0{,}8$; при $\frac{b_1}{b} = 0{,}25$ $m_и = 0{,}75$,

где b_1 — толщина стенки;
b — ширина полки;

для бревен, не имеющих врезок в расчетном сечении,

$$m_и = 1{,}2;$$

для составных балок пролетом 4 *м* и более на пластинчатых нагелях: из двух элементов

$$m_и = 0{,}9;$$

из трех элементов

$$m_и = 0{,}8;$$

для балок из двух и трех элементов на деревянных призматических шпонках и колодках

$$m_и = 0{,}8.$$

3. Расчет изгибаемых элементов на скалывание древесины производится по формуле

$$Q \leqslant m_{ск} R_{ск} \frac{J_{бр} b}{S_{бр}}. \tag{39}$$

где Q — расчетная поперечная сила;
$m_{ск}$ — коэффициент условий работы элемента на скалывание при изгибе, принимаемый при расчете по древесине $m_{ск} = 1{,}0$; по клееным швам шириной 8 *см* и более — $m_{ск} = 0{,}75$; по клеевым швам шириной менее 8 *см* — $m_{ск} = 0{,}5$;
$R_{ск}$ — расчетное сопротивление древесины скалыванию вдоль волокон;
$J_{бр}$ — момент инерции брутто рассматриваемого поперечного сечения;
$S_{бр}$ — статический момент брутто сдвигаемой части сечения относительно нейтральной оси;
b — ширина сечения.

РАЗДЕЛ IV

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

При проектировании различного рода сооружений необходимо стремиться к уменьшению повышенных значений напряжений, неизбежно возникающих вблизи различного вида отверстий и в других местах резкого изменения площади поперечного сечения несущих связей сооружения.

Если напряжение, действующее в конструкции на достаточном удалении от места резкого изменения площади поперечного сечения, обозначено буквой p, а напряжение в какой-либо точке, расположенной вблизи этого места,—буквой p_1, то отношение $k = \frac{p_1}{p}$ называется коэффициентом концентрации напряжения в данной точке.

Опыт показывает, что причиной повреждений сооружения, в частности корпусов кораблей, является наличие чрезмерной концентрации напряжений в районе палубных вырезов, в местах образования рубок и надстроек и т. д. Для правильного проектирования несущих связей сооружения, у которых имеется указанное резкое изменение площади поперечного сечения, — прерывистых связей — необходимо знать величину наибольшего коэффициента концентрации напряжений в этих связях при заданной величине напряжений p.

Закон изменения напряжений, а следовательно, и величина коэффициента концентрации в прерывистых связях в большой степени зависят от формы образования этих связей.

В настоящее время получены решения, определяющие коэффициенты концентрации для различных форм образования прерывистых связей. Ниже приводятся основные результаты имеющихся решений, определяющих закон распределения и коэффициент концентрации напряжений в пластинах, ослабленных различного вида отверстиями.

Эти решения, относящиеся к плоской задаче теории упругости, имеют наибольшее применение при проектировании прерывистых связей судового корпуса.

ГЛАВА I

ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННЫЕ ОДНИМ ВЫРЕЗОМ

§ 1. Бесконечная пластина, ослабленная одним круглым или эллиптическим вырезом

1. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной одним круглым вырезом (рис. 1)

Компоненты напряжения в полярных координатах определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2} p \left[1 - \frac{R^2}{r^2} + \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 4\frac{R^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2} p \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2} p \left(1 - 3\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{R^2}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где p — растягивающее напряжение на бесконечности;
R — радиус выреза;
r, θ — полярные координаты, определяющие положение точки на плоскости;

σ_r — нормальное напряжение в площадке, перпендикулярной радиусу r;
σ_θ — нормальное напряжение в площадке, совпадающей с радиусом r;
$\tau_{r\theta}$ — касательное напряжение, действующее в указанных взаимно-перпендикулярных площадках.

На контуре выреза ($r = R$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \tau_{r\theta} = 0 \\ \sigma_\theta &= p\,(1 - 2\cos 2\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Наибольшей величины нормальные напряжения σ_θ достигают на кромке выреза при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

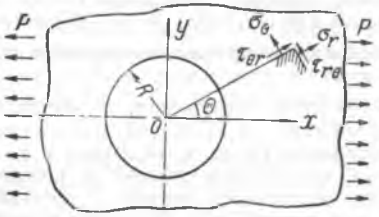


Рис. 1.

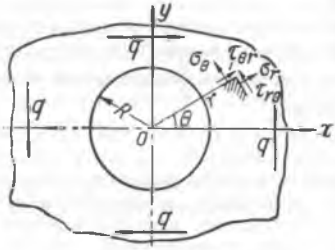


Рис. 2.

В этих точках коэффициент концентрации напряжения $k = 3$.
При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ напряжение $\sigma_\theta = -p$ ($k = -1$).

2. Чистый сдвиг пластины, ослабленной круглым вырезом (рис. 2)

Компоненты напряжения в полярных координатах определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= q\left(1 - 4\frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= -q\left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= q\left(1 + 2\frac{R^2}{r^2} - 3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где q — сдвигающее напряжение на бесконечности.

На контуре выреза ($r = R$)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \tau_{r\theta} = 0 \\ \sigma_\theta &= -4q\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Наибольшей величины нормальные напряжения σ_θ достигают на кромке выреза:

при $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = \frac{5}{4}\pi$

$$\sigma_\theta = -4q;$$

при $\theta = +\frac{3\pi}{4}$ и $\theta = \frac{7}{4}\pi$

$$\sigma_\theta = +4q.$$

3. Чистый изгиб полосы, ослабленной круглым вырезом, размеры которого малы по сравнению с шириной полосы (рис. 3)

Нормальные напряжения по контуру отверстия определяются формулой

$$\sigma_\theta = -\frac{MR}{J}(\sin\theta - \sin 3\theta), \tag{5}$$

где M — изгибающий момент;
R — радиус отверстия;
J — момент инерции площади поперечного сечения полосы.

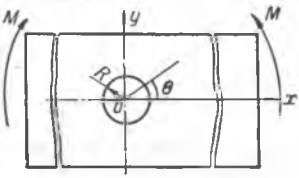


Рис. 3.

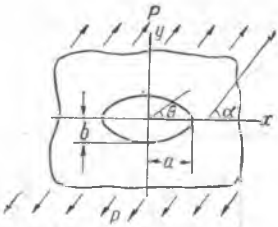


Рис. 4.

Формулой (5) можно пользоваться с достаточной для практических расчетов точностью, если ширина полосы будет не менее чем в 5 раз больше диаметра выреза.

4. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной эллиптическим вырезом (рис. 4)

Нормальные напряжения по контуру выреза определяются формулой

$$\sigma_\theta = p\,\frac{(1+n)^2\sin^2(\theta+\alpha) - \sin^2\alpha - n^2\cos^2\alpha}{\sin^2\theta + n^2\cos^2\theta}, \tag{6}$$

где p — растягивающее напряжение на бесконечности;
$n = \frac{b}{a}$ — отношение полуосей эллипса (a — полуось эллипса, лежащая на оси ox, b — полуось эллипса, лежащая на оси oy);
α — угол, который составляет напряжение p с осью ox.

Нормальное напряжение на кромке выреза при $x = 0$ и $y = \pm b$ $\left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ на основании формулы (6)

$$\sigma_\theta = p\left(2\frac{b}{a}\cos^2\alpha + \cos 2\alpha\right). \tag{7}$$

Нормальное напряжение на кромке выреза при $y = 0$ и $x = \pm a$ ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) на основании формулы (6)

$$\sigma_\theta = p\left(2\frac{a}{b}\sin^2\alpha - \cos 2\alpha\right). \tag{8}$$

При $\alpha = 0$ (напряжение p совпадает с осью ox) нормальное напряжение на кромке выреза

$$\sigma_\theta = p\,\frac{\sin^2\theta + 2n\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta + n^2\cos^2\theta}. \tag{9}$$

Наибольшее нормальное напряжение на контуре отверстия в этом случае будет при $x = 0$ и $y = \pm b$ $\left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sigma_\theta = p\left(2\frac{b}{a} + 1\right).$$

Наименьшее нормальное напряжение на контуре выреза при $x = a$ и $y = 0$ ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$)

$$\sigma_\theta = -p.$$

Если пластина ослаблена узкой щелью ($b = 0$), то нормальные напряжения σ_θ по концам щели при любом $\alpha \neq 0$ неограниченно возрастают [см. формулу (8)], что вызывает появление пластических деформаций или, если материал хрупкий, появление трещин.

В табл. 1 приведены значения коэффициента концентрации напряжения $k = \frac{\sigma_\theta}{p}$ по контуру эллиптического отверстия для различных значений $n = \frac{b}{a}$ ($\alpha = 0$).

Таблица 1

$\theta°$	$n = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$	$n = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$	$\theta°$	$n = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$	$n = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$
0	—1,00	—1,00	50	1,54	0,93
10	—0,78	—0,93	60	1,90	1,86
20	—0,23	—0,72	70	2,15	2,85
30	0,43	—0,35	80	2,29	3,67
40	1,04	0,19	90	2,33	4,00

5. Чистый изгиб полосы, ослабленной эллиптическим отверстием, размеры которого малы по сравнению с шириной полосы (рис. 5)

Нормальные напряжения по контуру эллиптического выреза определяются по формуле

$$\sigma_\theta = \frac{MR}{J} \frac{(1 + m - 2m^2)\sin\theta + (m - 1)\sin 3\theta}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta}. \tag{11}$$

Здесь M — изгибающий момент;

$$R = \frac{a + b}{2} = \frac{1 + n}{2} a;$$

J — момент инерции площади поперечного сечения полосы;

$$m = \frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - n}{1 + n},$$

где $n = \frac{b}{a}$ (a — полуось эллипса, лежащая по оси ox, b — полуось, лежащая по оси oy).

Наибольшие нормальные напряжения по контуру эллиптического выреза получаются при $x = 0$ и $y = \pm b$ $\left(\theta = \pm \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sigma_\theta = \mp \frac{Mb}{J}\left(1 + \frac{b}{a}\right). \tag{12}$$

Если $b = 0$, а $a \neq 0$, т. е. если щель расположена на оси ox, то напряжения $\sigma_\theta = 0$. Такая щель не вызывает никакой концентрации напряжения.

Если $b \neq 0$, а $a = 0$ (щель расположена на оси oy), то напряжения σ_θ будут неограниченно велики и возникнут зоны пластической деформации или появятся трещины.

6. Изгиб полосы, ослабленной малым эллиптическим отверстием, постоянной поперечной силой (рис. 6)

Нормальные напряжения по контуру отверстия определяются формулой

$$\sigma_\theta = +\frac{Q(l-c)R}{J}\,\frac{(1+m-2m^2)\sin\theta+(m-1)\sin 3\theta}{1-2m\cos 2\theta+m^2}+$$
$$+\frac{Q}{J}\,\frac{[2d^2+R^2(m^2-1)]\sin 2\theta+R^2(1-m)\sin 4\theta}{1-2m\cos 2\theta+m^2}. \qquad (13)$$

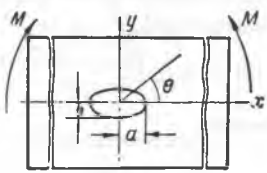


Рис. 5.

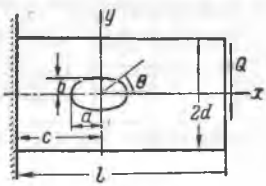


Рис. 6.

Здесь $R = \frac{a+b}{2} = \frac{1+n}{2}a$ (a и b — полуоси эллипса);

l — длина полосы;

J — момент инерции площади поперечного сечения полосы;

c — отстояние центра отверстия от защемленного конца полосы;

$2d$ — ширина полосы;

$$m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-n}{1+n},$$

где $n = \frac{b}{a}$.

Из формулы (13) следует, что напряжения от изгиба определяются первым слагаемым, а напряжения от перерезывающей силы — вторым слагаемым.

Положив в выражении (13) $m = 0$, получим формулу для нормальных напряжений по контуру кругового отверстия

$$\sigma_\theta = \frac{Q(l-c)}{J}R(\sin\theta - \sin 3\theta) + \frac{Q}{J}[(2d^2 - R^2)\sin 2\theta + R^2\sin 4\theta]. \qquad (14)$$

§ 2. Бесконечная пластина, ослабленная прямоугольным вырезом

При заданных напряжениях, действующих вдали от выреза, коэффициент концентрации в районе углов выреза существенным образом зависит от их радиуса закругления.

С уменьшением радиуса закругления коэффициент концентрации напряжения увеличивается, а с увеличением радиуса закругления — уменьшается.

Зависимость коэффициентов концентрации напряжения от радиуса закругления углов прямоугольных вырезов, приведенная ниже, является весьма условной, так как указанные значения радиусов относятся к серединам углов выреза, в то время как использованный для решения рассматриваемых задач метод конформного отображения дает для закругления углов переменный радиус.

1. Растяжение (сжатие) пластины вдоль длинной стороны прямоугольного выреза (рис. 7)

При растяжении бесконечной пластины с прямоугольным вырезом вдоль длинной его стороны ($\alpha = 0$) наибольшее значение нормальных напряжений получается на длинных сторонах выреза между серединой закругления и точкой, в которой касательная к контуру параллельна действующим усилиям.

Наибольшее напряжение увеличивается с уменьшением отношения радиуса закругления R к меньшей стороне выреза b и уменьшается с увеличением отношения сторон выреза $\frac{a}{b}$.

Значения наибольшего коэффициента концентрации напряжения k, равного отношению наибольших нормальных напряжений на контуре выреза к напряжению на бесконечности, при растяжении (сжатии) пластины вдоль длинной стороны выреза ($\alpha = 0$) приведены в табл. 2 для различных отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{R}{b}$.

Наибольший коэффициент концентрации напряжения для рассматриваемого случая (растяжение вдоль длинной стороны прямоугольного выреза) может быть определен по следующей приближенной формуле, дающей ошибку для отношений $\frac{a}{b} = 1 \div 5{,}0$ и $\frac{R}{b} = 0{,}03 \div 0{,}5$, не превосходящую 6%,

$$k = 2{,}89 + \frac{5{,}5}{100r_0} - 0{,}25\left(\frac{a}{b} - 1\right) + 0{,}02\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2, \tag{15}$$

где k — коэффициент концентрации напряжения;

$r_0 = \frac{R}{b}$.

2. Растяжение (сжатие) пластины вдоль короткой стороны прямоугольного выреза

При растяжении (сжатии) бесконечной пластины с прямоугольным вырезом вдоль короткой его стороны $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ наибольшее значение нормальных напряжений имеет место на коротких сторонах выреза между серединой закругления и точкой, в которой касательная к контуру параллельна действующим усилиям. Наибольшее напряжение увеличивается с уменьшением отношения радиуса закругления R к меньшей стороне и с увеличением отношения сторон выреза $\frac{a}{b}$.

Значения наибольшего коэффициента концентрации напряжения k, равного отношению наибольших нормальных напряжений на контуре выреза к напряжению на бесконечности, при растяжении (сжатии) пластины вдоль короткой стороны $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ приведены в табл. 3 для различных отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{R}{b}$.

Наибольший коэффициент концентрации напряжения для рассматриваемого случая (растяжение вдоль короткой стороны прямоугольного выреза) может быть определен по следующей приближенной формуле, дающей ошибку для отношений $\frac{a}{b} = 1{,}0 \div 5{,}0$ и $\frac{R}{b} = 0{,}03 \div 0{,}5$, не превосходящую 6%,

$$k = 2{,}89 + \frac{5{,}5}{100r_0} + \left(\frac{30}{(100r_0)^2} + 0{,}4\right)\left(\frac{a}{b} - 1\right), \tag{16}$$

где k — коэффициент концентрации напряжения;

$r_0 = \frac{R}{b}$.

3. Чистый сдвиг пластины с прямоугольным вырезом (рис. 8)

При сдвиге бесконечной пластины с прямоугольным вырезом наибольшее напряжение получается на контуре выреза по середине угла закругления. Наибольшее напряжение увеличивается с уменьшением отношения радиуса закругления R к меньшей стороне b и с увеличением отношения сторон выреза $\frac{a}{b}$.

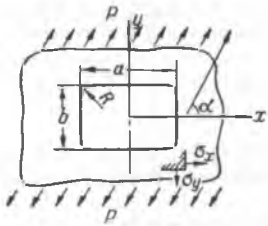


Рис. 7.

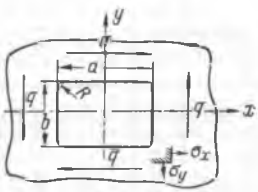


Рис. 8.

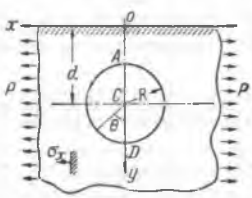


Рис. 9.

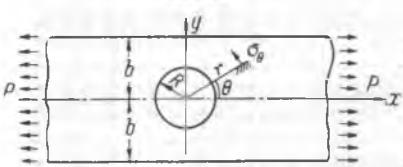


Рис. 10.

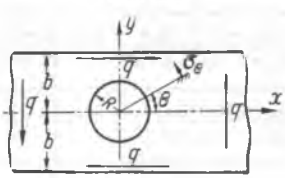


Рис. 11.

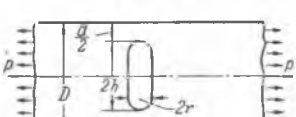


Рис. 12.

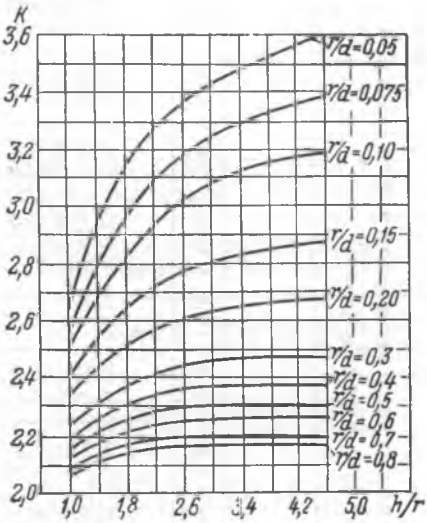


Рис. 13.

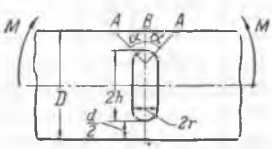


Рис. 14.

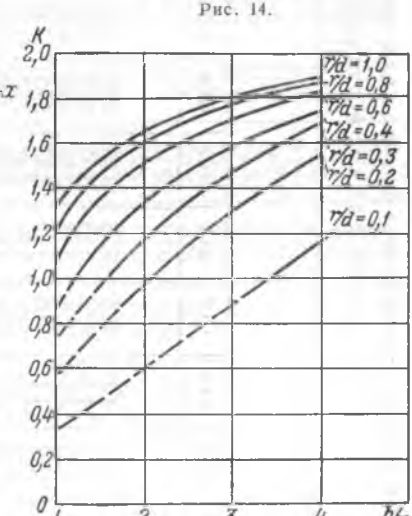


Рис. 15.

Таблица 2

Значения коэффициента концентрации напряжения при растяжении пластины вдоль длинной стороны прямоугольного выреза ($\alpha = 0$)

$\frac{a}{b}$	$r_0 = \frac{R}{b}$																
	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
1	4,8	4,37	4,06	3,85	3,66	3,56	3,49	3,44	3,37	3,32	3,29	3,27	3,25	3,20	3,17	3,08	3,00
1,2	4,75	4,34	4,03	3,79	3,61	3,51	3,45	3,39	3,33	3,28	3,25	3,22	3,20	3,14	3,11	3,02	2,94
1,4	4,71	4,31	3,99	3,74	3,56	3,46	3,40	3,34	3,28	3,25	3,20	3,17	3,14	3,08	3,04	2,96	2,89
1,6	4,67	4,27	3,95	3,69	3,52	3,42	3,36	3,30	3,24	3,18	3,15	3,12	3,08	3,02	2,98	2,90	2,83
1,8	4,62	4,24	3,91	3,64	3,47	3,37	3,31	3,25	3,19	3,13	3,10	3,07	3,03	2,96	2,92	2,84	2,78
2,0	4,58	4,20	3,88	3,60	3,43	3,33	3,27	3,21	3,15	3,09	3,05	3,02	2,98	2,91	2,86	2,78	2,72
2,2	—	4,17	3,84	3,55	3,39	3,30	3,24	3,17	3,11	3,04	3,00	2,97	2,93	2,85	2,80	2,72	2,67
2,4	—	4,14	3,80	3,51	3,35	3,26	3,20	3,13	3,07	3,00	2,96	2,92	2,88	2,80	2,75	2,67	2,62
2,6	—	4,10	3,77	3,47	3,31	3,23	3,16	3,10	3,03	2,96	2,91	2,87	2,83	2,75	2,70	2,62	2,57
2,8	—	4,07	3,73	3,44	3,28	3,19	3,13	3,07	2,99	2,92	2,87	2,83	2,78	2,70	2,65	2,57	2,52
3,0	—	4,04	3,69	3,40	3,25	3,17	3,10	3,04	2,96	2,88	2,83	2,78	2,74	2,65	2,60	2,53	2,48
3,2	—	4,02	3,65	3,37	3,22	3,14	3,07	3,02	2,93	2,85	2,80	2,75	2,70	2,61	2,56	2,49	2,44
3,4	—	—	—	3,35	3,21	3,12	3,05	3,00	2,91	2,83	2,76	2,72	2,67	2,57	2,52	2,45	2,41
3,6	—	—	—	3,33	3,19	3,11	3,04	2,98	2,89	2,80	2,74	2,69	2,64	2,54	2,48	2,42	2,37
3,8	—	—	—	3,31	3,17	3,09	3,02	2,97	2,87	2,78	2,71	2,66	2,61	2,50	2,45	2,38	2,34
4,0	—	—	—	3,29	3,15	3,08	3,01	2,95	2,85	2,76	2,69	2,64	2,59	2,47	2,41	2,35	2,31
4,2	—	—	—	3,27	3,14	3,07	3,00	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61	2,56	2,44	2,38	2,31	2,27
4,4	—	—	—	3,25	3,13	3,06	2,99	2,93	2,82	2,72	2,65	2,59	2,53	2,41	2,35	2,28	2,25
4,6	—	—	—	3,24	3,12	3,05	2,98	2,92	2,81	2,70	2,63	2,56	2,51	2,39	2,32	2,26	2,22
4,8	—	—	—	3,23	3,11	3,04	2,98	2,92	2,80	2,69	2,61	2,54	2,49	2,36	2,29	2,22	2,19
5,0	—	—	—	3,22	3,11	3,04	2,97	2,91	2,79	2,68	2,60	2,52	2,47	2,34	2,27	2,20	2,17

Таблица 3

Значения коэффициента концентрации напряжения при растяжении пластины вдоль короткой стороны прямоугольного выреза $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{a}{b}$	$r_0 = \frac{R}{b}$															
	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,30	0,40	0,50
1,0	4,8	4,37	4,06	3,85	3,66	3,56	3,49	3,44	3,37	3,32	3,29	3,27	3,25	3,17	3,08	3,00
1,2	—	4,70	4,32	4,07	3,89	3,74	3,62	3,56	3,45	3,42	3,37	3,35	3,32	3,25	3,17	3,09
1,4	—	5,02	4,60	4,32	4,08	3,91	3,78	3,68	3,56	3,51	3,45	3,42	3,40	3,32	3,25	3,18
1,6	—	5,34	4,88	4,56	4,29	4,09	3,93	3,81	3,67	3,60	3,53	3,50	3,47	3,40	3,34	3,27
1,8	—	5,66	5,16	4,80	4,49	4,27	4,08	3,93	3,77	3,69	3,61	3,57	3,55	3,47	3,42	3,36
2,0	—	5,98	5,43	5,04	4,69	4,45	4,24	4,06	3,88	3,78	3,68	3,64	3,62	3,55	3,50	3,46
2,2	—	6,30	5,75	5,30	4,90	4,62	4,39	4,21	3,99	3,86	3,76	3,72	3,70	3,62	3,58	3,54
2,4	—	6,63	6,08	5,57	5,12	4,80	4,55	4,35	4,10	3,94	3,84	3,79	3,77	3,70	3,66	3,62
2,6	—	6,96	6,40	5,84	5,35	4,88	4,72	4,50	4,21	4,03	3,92	3,86	3,84	3,78	3,73	3,70
2,8	—	7,30	6,72	6,12	5,57	5,16	4,88	4,64	4,32	4,12	3,99	3,94	3,91	3,85	3,81	3,78
3,0	—	7,62	7,04	6,34	5,79	5,33	5,06	4,78	4,43	4,21	4,07	4,01	3,97	3,95	3,88	3,86
3,2	—	7,95	7,35	6,65	6,01	5,51	5,22	4,92	4,54	4,30	4,14	4,08	4,05	4,00	3,96	3,93
3,4	—	—	—	6,91	6,24	5,71	5,40	5,06	4,65	4,40	4,23	4,17	4,13	4,08	4,04	4,01
3,6	—	—	—	7,17	6,46	5,92	5,58	5,21	4,77	4,50	4,33	4,25	4,21	4,15	4,12	4,09
3,8	—	—	—	7,43	6,70	6,12	5,76	5,36	4,90	4,61	4,42	4,36	4,29	4,23	4,20	4,17
4,0	—	—	—	7,68	6,93	6,33	5,94	5,51	5,02	4,71	4,51	4,42	4,36	4,32	4,29	4,25
4,2	—	—	—	7,94	7,14	6,53	6,12	5,66	5,14	4,82	4,60	4,50	4,44	4,40	4,37	4,34
4,4	—	—	—	8,20	7,36	6,75	6,30	5,81	5,26	4,92	4,69	4,59	4,52	4,48	4,45	4,42
4,6	—	—	—	8,45	7,58	6,96	6,48	5,96	5,38	5,02	4,78	4,67	4,60	4,56	4,52	4,50
4,8	—	—	—	8,72	7,80	7,17	6,66	6,11	5,50	5,12	4,87	4,76	4,68	4,64	4,60	4,58
5,0	—	—	—	8,97	8,02	7,39	6,84	6,26	5,62	5,23	4,97	4,84	4,75	4,72	4,68	4,66

Таблица 4

Значения коэффициента концентрации напряжения при сдвиге пластины с прямоугольным вырезом

$\frac{a}{b}$ \ $r_0=\frac{R}{b}$	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
1	12,15	11,15	10,35	9,70	9,20	8,70	8,3	7,90	7,30	6,80	6,40	6,05	5,75	5,25	4,9	4,35	4,0
1,2	12,70	11,65	10,75	10,0	9,50	9,0	8,55	8,20	7,55	7,0	6,60	6,30	6,00	5,50	5,10	4,6	4,3
1,4	13,30	12,15	11,15	10,35	9,80	9,30	8,85	8,45	7,75	7,25	6,85	6,50	6,20	5,70	5,35	4,85	4,55
1,6	13,85	12,60	11,55	10,7	10,15	9,60	9,15	8,75	8,0	7,45	7,05	6,75	6,40	5,90	5,55	5,10	4,80
1,8	14,40	13,10	11,95	11,05	10,45	9,85	9,45	8,95	8,20	7,65	7,25	6,95	6,65	6,10	5,75	5,35	5,10
2,0	14,90	13,55	12,35	11,35	10,7	10,15	9,70	9,20	8,45	7,90	7,45	7,15	6,80	6,30	5,95	5,60	5,35
2,2			12,75	11,70	11,0	10,40	9,95	9,45	8,65	8,10	7,65	7,35	7,00	6,50	6,15	5,80	5,55
2,4			13,20	12,05	11,25	10,65	10,15	9,65	8,85	8,30	7,85	7,55	7,20	6,70	6,35	6,05	5,80
2,6			13,60	12,35	11,55	10,85	10,3	9,85	9,05	8,50	8,05	7,75	7,40	6,90	6,50	6,25	6,05
2,8			13,95	12,7	11,80	11,10	10,5	10,05	9,30	8,70	8,30	7,95	7,60	7,05	6,70	6,50	6,30
3,0			14,35	13,0	12,05	11,30	10,75	10,26	9,45	8,90	8,50	8,15	7,80	7,25	6,85	6,70	6,55
3,2			14,75	13,35	12,25	11,45	10,95	10,4	9,70	9,10	8,65	8,35	7,95	7,45	7,05	6,95	6,75
3,4				13,65	12,55	11,70	11,15	10,6	9,85	9,30	8,85	8,50	8,15	7,60	7,20	7,10	6,95
3,6				13,9	12,80	11,95	11,35	10,8	10,05	9,45	9,05	8,65	8,30	7,75	7,40	7,30	7,15
3,8				14,2	13,05	12,15	11,55	10,95	10,2	9,65	9,20	8,85	8,45	7,90	7,55	7,45	7,35
4,0				14,5	13,3	12,40	11,7	11,15	10,35	9,80	9,35	9,00	8,60	8,05	7,70	7,60	7,50
4,2				14,75	13,55	12,6	11,9	11,3	10,5	9,95	9,50	9,10	8,75	8,20	7,85	7,75	7,65
4,4				15,0	13,75	12,8	12,05	11,45	10,65	10,10	9,65	9,25	8,85	8,30	8,00	7,90	7,80
4,6				15,25	14,0	13,0	12,25	11,55	10,8	10,20	9,75	9,35	8,95	8,40	8,10	8,00	7,90
4,8				15,45	14,2	13,2	12,4	11,7	10,9	10,30	9,85	9,45	9,05	8,50	8,25	8,10	8,00
5,0				15,60	14,4	13,4	12,5	11,8	11,0	10,40	9,90	9,50	9,10	8,55	8,35	8,20	8,05

Значения наибольшего коэффициента концентрации напряжения, равного отношению наибольшего нормального напряжения на контуре выреза к сдвигающему напряжению на бесконечности q, приведены в табл. 4 для различных отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{R}{b}$.

Наибольший коэффициент концентрации напряжения может быть определен по следующей приближенной формуле, дающей ошибку, для отношений $\frac{a}{b} = 1 \div 5$ и $\frac{R}{b} = 0{,}03 \div 0{,}50$ не превосходящую 10%,

$$k = 3{,}9 + \frac{5}{100r_0} + 0{,}08\,(5 - 10r_0)^2 + 0{,}04\,(5 - 10r_0)^3 + \\ + \left(1{,}1 + \frac{2{,}5}{100r_0}\right)\left(\frac{a}{b} - 1\right) - 0{,}05\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2, \qquad (17)$$

где k — коэффициент концентрации напряжения;

$r_0 = \frac{R}{b}$.

§ 3. Растяжение (сжатие) полубесконечной пластины, ослабленной круглым отверстием (рис. 9)

Значения коэффициентов концентрации нормальных напряжений в точках O, A и D приведены в табл. 5 в зависимости от отношения d (расстояние центра отверстия от кромки полуплоскости) к радиусу отверстия R.

Таблица 5

$\frac{d}{R}$	$\frac{\sigma_x}{p}$ в точке O	$\frac{\sigma_x}{p}$ в точке A	$\frac{\sigma_x}{p}$ в точке D
1	—	—	3,999
1,185	—4,080	5,064	3,362
1,337	—1,956	4,366	3,266
1,543	—0,895	3,919	3,201
1,811	—0,269	3,609	3,152
2,151	+0,134	3,396	3,115
2,577	0,405	3,254	3,087
3,107	0,591	3,162	3,065
3,762	0,721	3,103	3,048
∞	1,000	3,000	3,000

§ 4. Пластина ограниченной ширины (полоса), ослабленная отверстием, симметрично расположенным относительно середины ширины

1. Растяжение (сжатие) полосы, ослабленной круглым отверстием (рис. 10)

Значения коэффициента концентрации напряжения, равного отношению нормального напряжения, действующего по контуру отверстия σ_θ, к растягивающему напряжению на бесконечности p, приведены в табл. 6 для различных углов θ в зависимости от отношения радиуса выреза R к полуширине полосы b.

Значения коэффициента концентрации напряжения $k = \frac{\sigma_\theta}{p}$ по поперечному сечению полосы, проходящему через центр кругового отверстия $\theta = \frac{\pi}{2}$, приведены в табл. 7.

Таблица 6

$\lambda=\frac{R}{b}$ / $\theta°$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	—1,00	—1,03	—1,11	—1,26	—1,44	—1,58
15	—0,73	—0,74	—0,82	—0,95	—1,12	—1,32
30	0,00	—0,01	—0,06	—0,15	—0,30	—0,51
45	+1,0	+1,00	+1,00	+0,98	+0,91	+0,77
60	2,00	2,01	2,07	2,15	2,25	2,32
75	2,73	2,74	2,85	3,03	3,32	3,72
90	3,00	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32

Таблица 7

$\frac{R}{b}$ / $\frac{r}{b}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	3,03	—	—	—	—
0,2	1,23	3,14	—	—	—
0,3	1,08	1,57	3,36	—	—
0,4	1,04	1,26	1,93	3,74	—
0,5	1,03	1,16	1,47	2,30	4,32
0,6	1,02	1,11	1,28	1,75	2,75
0,7	1,01	1,07	1,17	1,48	2,04
0,8	1,01	1,05	1,07	1,28	1,61
0,9	1,00	1,01	0,96	1,08	1,22
1,0	0,99	0,97	0,89	0,81	0,73

Из приведенных таблиц следует, что с увеличением отношения радиуса отверстия к ширине пластины коэффициент концентрации напряжения на кромке отверстия сильно возрастает.

Коэффициент концентрации напряжения на кромке полосы с увеличением отношения радиуса отверстия к ширине пластины падает. Из этих таблиц также следует, что решение, полученное для неограниченной области (см. стр. 233), можно без большой ошибки применить для пластины конечных размеров, если только наименьший размер ее будет не меньше пяти диаметров отверстия.

2. Чистый сдвиг полосы, ослабленной круглым вырезом (рис. 11)

Нормальные напряжения по контуру отверстия определяются формулой

$$\sigma_\theta = -q\,(a_1 \sin 2\theta - a_2 \sin 4\theta + a_3 \sin 6\theta - a_4 \sin 8\theta + a_5 \sin 10\theta), \qquad (18)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — коэффициенты, определяемые по табл. 8 в зависимости от отношения радиуса выреза R к полуширине полосы b.

Таблица 8

$\frac{R}{b}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0,0	4,000	—	—	—	—
0,1	4,1078	0,0012	—	—	—
0,2	4,4453	0,0191	0,0004	—	—
0,3	5,0577	0,0996	0,0053	0,0003	—
0,4	6,0367	0,3292	0,0301	0,0021	0 0001
0,5	7,5563	0,8700	0,1193	0,0105	0,0011

3. Растяжение (сжатие) полосы, ослабленной прямоугольным вырезом, закругленным в вершине (рис. 12)[1]

Наибольшее нормальное напряжение всегда находится на кромке выреза в его вершине.

Значения коэффициента концентрации напряжения, равного отношению наибольшего напряжения на кромке выреза к напряжению по ослабленному сечению, приведены на рис. 13 в зависимости от $\frac{r}{d}$ и $\frac{h}{r}$

$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_1}, \tag{19}$$

где $\sigma_1 = \frac{P}{F}$ — напряжение по ослабленному сечению (F — площадь ослабленного сечения; P — растягивающее усилие).

4. Чистый изгиб полосы, ослабленной прямоугольным вырезом, закругленным в вершине (рис. 14)

При чистом изгибе полосы с вырезом указанной формы наибольшие напряжения не всегда находятся на кромке выреза. Для некоторых значений отношений $\frac{r}{d}$ и $\frac{h}{r}$ наибольшие напряжения находятся на прямолинейной кромке полосы в точках A (рис. 14). Положение этих точек определяется углом α, зависящим от отношения $\frac{h}{r}$,

при $\frac{h}{r} = 1$ $\alpha = 30°$;

„ $\frac{h}{r} = 2$ $\alpha = 32°30'$;

„ $\frac{h}{r} = 4$ $\alpha = 35°$.

Величина наибольших напряжений в точках A равна напряжению, вычисляемому по формуле

$$\sigma_2 = \frac{Mc}{J}, \tag{20}$$

где M — приложенный изгибающий момент;

$c = \frac{D}{2}$ — полуширина полосы;

J — момент инерции площади по ослабленному сечению.

Значения коэффициента концентрации напряжения, равного отношению наибольшего нормального напряжения по кромке выреза в его вершине σ_0 к напряжению σ_2, вычисляемому по формуле (20), приведены на рис. 15.

ГЛАВА 2

БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛАСТИНА, ОСЛАБЛЕННАЯ КРУГЛЫМИ ВЫРЕЗАМИ ОДИНАКОВОГО РАДИУСА

§ 5. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной двумя круглыми вырезами одинакового радиуса (рис. 16)

Значения коэффициента концентрации напряжения, равного отношению нормального напряжения, действующего на кромке выреза σ_θ, к напряжению на бесконечности p, приведены в табл. 9 в зависимости от отношения расстояния от начала координат до центра выреза b к радиусу выреза R $\left(\lambda = \frac{b}{R}\right)$ (рис. 16) для различных случаев нагрузки на бесконечности.

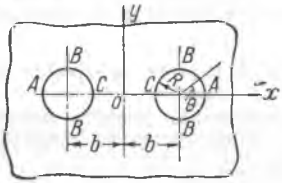


Рис. 16.

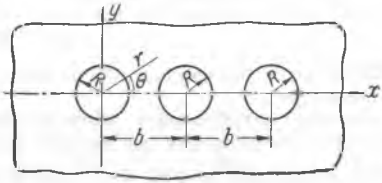


Рис. 17.

Наибольшие нормальные напряжения на кромке выреза при растяжении вдоль оси ox будут в точках B, а при растяжении вдоль оси oy, а также при всестороннем растяжении — в точках A и C.

Из табл. 9 следует, что при $\lambda = 3$ напряжения по контурам отверстий будут такими же, как и в случае одного отверстия.

Решение для бесконечной пластины, ослабленной двумя круглыми отверстиями, можно с достаточной для практических расчетов точностью применять для пластин конечных размеров, если расстояние от точек A и B до краев пластины составляет не меньше 4,5 R.

Таблица 9

$\lambda = \frac{b}{R}$	Растяжение вдоль оси ox	Растяжение вдоль оси ox		Всестороннее растяжение	
	$\frac{\sigma_\theta}{p}$ в точке B	$\frac{\sigma_\theta}{p}$ в точке C	$\frac{\sigma_\theta}{p}$ в точке A	$\frac{\sigma_\theta}{p}$ в точке C	$\frac{\sigma_\theta}{p}$ в точке A
1,0	2,569	∞	3,868	∞	2,894
1,5	2,623	3,264	3,151	2,887	2,255
2,0	2,703	3,020	3,066	2,411	2,158
3,0	2,825	2,992	3,020	2,155	2,080
5,0	2,927	2,997	3,004	2,049	2,033
8,0	2,970	2,999	3,001	2,018	2,014
∞	3,000	3,000	3,000	2,000	2,000

§ 6. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной неограниченным числом круглых отверстий одинакового радиуса, центры которых лежат на одной оси (рис. 17)

Значения коэффициента концентрации напряжения, равного отношению нормальных напряжений по контуру отверстия σ_θ к напряжению на бесконечности p, приведены в табл. 10.

Таблица 10

$\theta°$	Растяжение вдоль оси ox			Растяжение вдоль оси oy	
	$\frac{R}{b}=0$	$\frac{R}{b}=0{,}15$	$\frac{R}{b}=0{,}25$	$\frac{R}{b}=0$	$\frac{R}{b}=0{,}25$
0	—1,00	—0,74	—0,39	3,00	3,24
15	—0,73	—0,54	—0,30	2,73	3,03
30	0,00	+0,05	+0,02	2,00	2,41
45	1,00	0,86	0,62	1,00	1,46
60	2,00	1,69	1,33	0,00	0,44
75	2,73	2,51	1,92	—0,73	—0,33
90	3,00	2,54	2,16	—1,00	—0,61

РАЗДЕЛ V
РАСЧЕТ БАЛОК

В основание расчета балок положен принцип наложения, который применим для упругих материалов до тех пор, пока напряжения в них не превзошли предела упругости. Принцип этот основан на предположении, что каждая из внешних сил, действующих на балку, вызывает в ней напряжения и деформации, пропорциональные величине силы и независимые от величины остальных внешних сил.

Таким образом, напряжения и деформации балки могут быть рассматриваемы как суммы напряжений и деформаций от каждой из тех групп сил, на которые разбиты внешние силы.

Для разложения внешних сил на такие группы отнесем балку к системе координатных осей так, чтобы начало координат лежало на оси балки, ось z совпадала с осью балки, оси x и y направлялись по главным осям поперечного сечения балки (рис. 1).

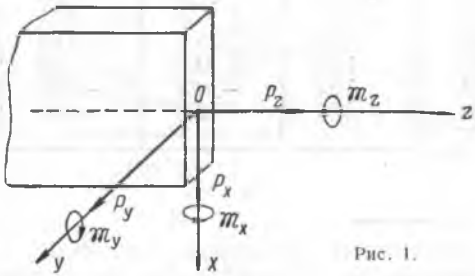


Рис. 1.

Все внешние силы и пары, действующие на балку, разложим по выбранным осям, после чего внешние силы приведутся к следующим группам сил:

1) силы P_z, действующие по оси балки и вызывающие деформацию растяжения и сжатия;

2) силы P_x, перпендикулярные оси балки, и пары $\mathfrak{M}_y$, лежащие в плоскости xz и вызывающие деформацию изгиба в плоскости xz;

3) силы P_y, перпендикулярные оси балки, и пары $\mathfrak{M}_x$, лежащие в плоскости yz, вызывающие деформацию изгиба в плоскости yz;

4) силы P_x и P_y, кроме изгиба, производящие также деформацию сдвига (среза) по своему направлению;

5) пары $\mathfrak{M}_z$, параллельные плоскости xy, вызывающие деформацию кручения в этой плоскости.

Таким образом, растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг и кручение суть те основные деформации, к которым может быть сведено действие на балку системы внешних сил.

ГЛАВА I

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 1. Призматическая балка

Обозначения:

P — нагрузка, действующая по оси балки;
F — площадь сечения балки;
l — длина балки;
Δl — абсолютное упругое удлинение;
ε — относительное удлинение;
E — модуль нормальной упругости;
$\sigma_д$ — допускаемое нормальное напряжение на растяжение;
$\sigma_д$ — допускаемое нормальное напряжение на сжатие;
σ — нормальное напряжение в плоскости сечения балки.

Не принимая во внимание собственного веса балки и допуская, что относительные удлинения ε во всех точках поперечного сечения одинаковы, имеем отношения:

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EF} \qquad \Delta l = \varepsilon l = \frac{Pl}{EF}. \tag{1}$$

Расчетные формулы прочности на растяжение

$$\sigma_д \geqslant \frac{P}{F}; \quad P \leqslant F\sigma_д; \quad F \geqslant \frac{P}{\sigma_д}. \tag{2}$$

Расчетные формулы на сжатие

$$\sigma'_д \geqslant \frac{P}{F}; \quad P \leqslant F\sigma'_д; \quad F \geqslant \frac{P}{\sigma'_д}. \tag{3}$$

§ 2. Балка переменного сечения

1. Общий случай. Если сечение балки не меняется резко, а сила P во всех ее сечениях одинакова, то в формулах прочности надо брать наименьшую площадь сечения.

Абсолютное удлинение балки будет

$$\Delta l = \frac{P}{E}\int_0^l \frac{dz}{f(z)}, \tag{4}$$

где $f(z)$ — площадь сечения, определяемого рассматриваемым значением координаты z.

Приближенно

$$\Delta l = \frac{P}{E}\sum_0^n \frac{l_i}{F_i}, \tag{5}$$

где l_i — длина i-го участка балки;

F_i — площадь сечения его на этом участке, предполагаемая постоянной;

n — число всех участков балки.

2. Растяжение или сжатие балки, имеющей форму клина (рис. 2). Нормальное напряжение в точке, определяемой координатами r и θ, по направлению радиуса r

$$\sigma_r = \frac{P\cos\theta}{r\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)}. \tag{6}$$

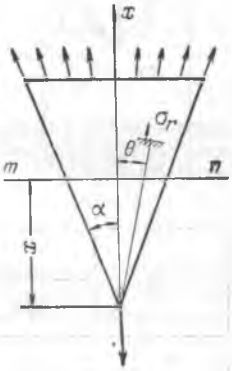


Рис. 2.

Нормальное напряжение в поперечном сечении mn, в расстоянии x от вершины клина

$$\sigma_x = \frac{P}{x\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)} \cdot \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^2}. \tag{7}$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_r = \frac{2P\cos\theta}{\pi r}.$$

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi x(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^2},$$

где P — усилие, приходящееся на единицу ширины клина;

α — угол, составляемый сторонами клина с его осью.

3. Растяжение планки переменной ширины (рис. 3). Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении mn:

$$\sigma_{max} = k\frac{P}{F}, \tag{8}$$

где P — растягивающая сила;

F — меньшая площадь сечения планки;

k — коэффициент, зависящий от отношений $\frac{r}{a}$ и $\frac{b}{a}$, значения которого приведены в табл. 1.

4. Растяжение соединения в форме ласточкина хвоста (рис. 4). На рис. 4, *а* приведены кривые распределения главных напряжений σ_x, σ_y вдоль оси x и на рис. 4, *б* — кривые распределения главных

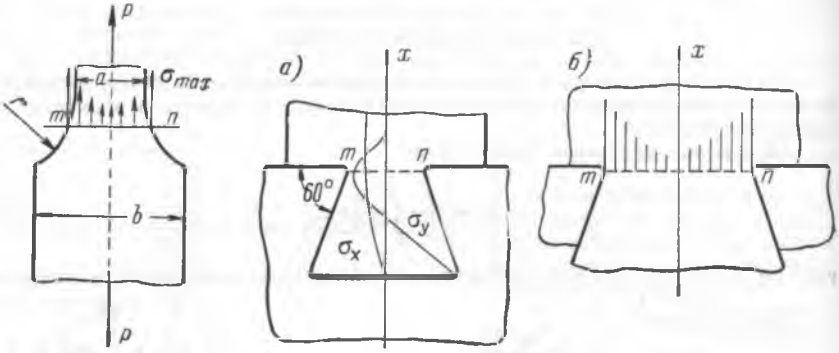


Рис. 3. Рис. 4.

напряжений σ_y в поперечном сечении mn; напряжения в крайних точках поперечного сечения mn приблизительно в три раза превышают напряжение посредине этого сечения.

Таблица 1

$b:a$	$r:a$				
	1/8	3/16	1/4	3/8	1/2
6	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
3	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6
2,5	2,6	2,2	1,9	1,7	1,5
2	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4
1,5	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3

5. Влияние отверстий в планке

а) Полукруглые вырезы по краям планки (рис. 5). При радиусе вырезов, малом по сравнению с шириной планки, наибольшие напряжения в точках m и n поперечного сечения будут приблизительно вдвое превышать среднее напряжение в этом сечении.

б) Круглое отверстие.

Наибольшее нормальное напряжение на контуре выреза в точках m и n (рис. 6)

$$\sigma_{max} = 3\sigma_0,$$

где σ_0 — растягивающее или сжимающее напряжение в пластине.

Таблица 2

$x:z$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Поперечное сечение	3,00	2,68	2,44	2,24	2,07	1,94	1,52	1,22	1,12	1,08	1,05	1,00
Продольное сечение	—1,00	—0,78	—0,61	—0 48	—0,38	—0,29	—0,073	0,037	0,041	0,037	0,030	0,025

В табл. 2 даются значения коэффициентов концентрации нормальных напряжений в поперечном и продольном сечениях пластины, проходящих через центр выреза, в различных точках этих сечений в зависимости от отношения отстояния точки от центра выреза x к радиусу r.

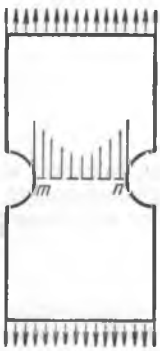


Рис. 5.

Рис. 6.

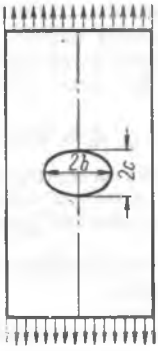


Рис. 7.

Рис. 8.

в) Эллиптическое отверстие (рис. 7). Наибольшее напряжение у концов горизонтальной оси эллиптического отверстия в k раз превышает среднее напряжение в поперечном сечении планки, причем величина k должна быть вычислена по выражению

$$k = 1 + 2\frac{b}{c}, \tag{9}$$

где b — горизонтальная и c — вертикальная полуоси эллипса.

г) Отверстие, подкрепленное буртиком (рис. 8). Наибольшие напряжения у краев отверстия в k раз превышают среднее напряжение в поперечном сечении планки, причем величина k в зависимости от величины

$$\alpha = \frac{(b-t)\,h}{2tr},$$

где t — толщина пластины;
h — толщина буртика;
b — высота буртика,
принимает следующие значения:

α	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
k	2,53	2,17	1,90	1,69	1,53

§ 3. Влияние собственного веса

Формула прочности для призматической балки

$$\sigma_д \geqslant \frac{P+G}{F}. \tag{10}$$

Абсолютное удлинение

$$\Delta l = \frac{1}{FE}\left(P + \frac{1}{2}G\right), \tag{11}$$

где G — вес балки.

§ 4. Балка равного сопротивления

Площадь сечения конца балки

$$F_0 \geqslant \frac{P}{\sigma_д}; \tag{12}$$

далее от конца площадь сечения балки изменяется по следующему закону:

$$F_z = F_0 e^{\frac{\Delta}{\sigma_д} z}, \tag{13}$$

где Δ — вес единицы объема балки;
z — отстояние сечения от конца балки;
e — основание натуральных логарифмов $e = 2{,}72$.

§ 5. Расчет на смятие

Если соприкосновение элементов имеет место по плоскости, то расчет ведут по формуле

$$\sigma_{д.с} \geqslant \frac{P}{F}, \tag{14}$$

где $\sigma_{д.с}$ — допускаемое напряжение на смятие;
F — площадь смятия;
P — сжимающая сила.

При расчетах на смятие, когда сминаемая поверхность может составлять значительную величину, например при сминании под болтами или стержнями заклепок, допускаемое напряжение на смятие можно принимать: для железа 1200—2000 *кг/см*², для стали 1800—2400 *кг/см*², для дерева во врубках 40—50 *кг/см*².

ГЛАВА 2

КРУЧЕНИЕ

§ 6. Расчетные формулы на кручение

Обозначения:
M — скручивающий момент;
l — длина балки;
J_p — полярный момент инерции сечения;
F — площадь сечения;
G — модуль сдвига;
φ — относительный угол кручения, т. е. относительный угол поворота двух сечений, отстоящих друг от друга на единицу длины;
$\varphi_д$ — допускаемый относительный угол кручения;
θ — угол поворота одного крайнего сечения балки относительно другого ($\theta = \varphi l$);
τ_ρ — касательное напряжение в точке в расстоянии ρ от оси балки;
max — наибольшее касательное напряжение в сечении;
$\tau_д$ — допускаемое касательное напряжение;
C — жесткость балки по отношению к кручению ($C = M : \varphi$).

Предполагая, что круглые или подходящие к кругу поперечные сечения балки остаются плоскими и радиусы в этих сечениях не искривляются, имеем

$$\tau_\rho = \frac{M\rho}{J_p}; \quad \varphi = \frac{M}{GJ_p}; \quad \theta = \frac{Ml}{GJ_p}; \quad \tau_{max} \leqslant \tau_д \text{ и } \varphi \leqslant \varphi_д. \tag{15}$$

1. Круглый сплошной вал (диаметром $d = 2r$)

$$\tau_{max} = \frac{16M}{\pi d^3}; \quad \varphi = \frac{32M}{G\pi d^4}. \tag{16}$$

2. Круглый полый вал (наружный диаметр D, внутренний d, толщина стенки t)

$$\tau_{max} = \frac{16MD}{\pi(D^4 - d^4)}; \quad \varphi = \frac{32M}{G\pi(D^4 - d^4)}. \tag{17}$$

Если D близок к d, то $D^4 - d^4 \approx (D + d)^3 t$.

3. Вал эллиптического сечения (a — большая полуось, b — меньшая полуось)

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{max} = \frac{2M}{\pi ab^2} \text{ (в конце малой полуоси)} \\ &\varphi = \frac{M}{C}; \quad \varphi = \frac{M}{G\pi}\frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}; \quad C = \frac{GF^4}{4\pi^2 J_p} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где

$$F = \pi ab \text{ и } J_p = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)\,ab.$$

Приведенная формула для жесткости при кручении C может считаться приближенной для всех случаев сплошных валов. Например, для квадратного сечения

$$F = a^2; \quad J_p = \frac{a^4}{6}$$

и, следовательно,

$$C \approx 0{,}152Ga^4.$$

4. Вал прямоугольного сечения (b — большая сторона, c — меньшая сторона)

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{max} = \frac{M}{k_1 bc^2} \text{ (посредине длинных сторон)} \\ &\varphi = \frac{M}{k_2 Gbc^3} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Значения коэффициентов k_1 и k_2 приведены для разных отношений сторон прямоугольника в табл. 3.

Таблица 3

$b:c$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	10,0	∞
k_1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,312	0,333
k_2	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,312	0,333

5. Вал с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника (b — сторона треугольника)

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{max} = \frac{20M}{b^3} \text{ (посредине стороны треугольника)} \\ &\varphi = \frac{M}{0{,}6GJ_p} = \frac{46{,}2}{b^4}\cdot\frac{M}{G} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

6. Вал с поперечным сечением в форме правильного шестиугольника

$$\left.\begin{aligned}\tau_{max} &= \frac{M}{0{,}217Fd}\\ \varphi &= \frac{M}{0{,}133Fd^2G}\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где d — диаметр вписанного круга;
F — площадь поперечного сечения.

7. Вал с поперечным сечением в форме правильного восьмиугольника

$$\left.\begin{aligned}\tau_{max} &= \frac{M}{0{,}223Fd}\\ \varphi &= \frac{M}{0{,}130Fd^2G}\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где d — диаметр вписанного круга;
F — площадь поперечного сечения.

8. Вал с поперечным сечением в форме равнобедренной трапеции. Приближенное значение наибольшего напряжения и относительного угла кручения получается заменой трапеции эквивалентным прямоугольником, который строится, как показано на рис. 9.

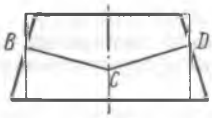


Рис. 9.

Из центра тяжести C трапеции опущены перпендикуляры BC и CD на боковые стороны, затем проведены вертикали через точки B и D.

9. Тонкостенный замкнутый профиль произвольной формы

$$\tau_{max} = \frac{M}{2St_{min}}; \qquad C = \frac{4GS^2}{\int \frac{dl}{t}}, \qquad (23)$$

где S — полусумма площадей внешнего и внутреннего контуров сечения;
t_{min} — минимальная толщина стенки профиля;
dl и t — элемент длины периметра контура и толщина стенки его в рассматриваемой точке периметра.

Интеграл, входящий в формулу для C, берется по всему периметру профиля.

Пример. Определить жесткость C и величину наибольших касательных напряжений для полой трубы, изображенной на рис. 10.

Имеем:

$$S = 300\ см^2; \quad \int \frac{dl}{t} = 2\left(\frac{20}{1{,}0} + \frac{15}{1{,}2}\right) = 65;$$

$$2St_{min} = 600\ см^3; \quad \frac{4S^2}{\int \frac{dl}{t}} = \frac{4\cdot 9\cdot 10^4}{65} = 5550\ см^4;$$

$$C = 5550G; \qquad \tau_{max} = \frac{M}{600}.$$

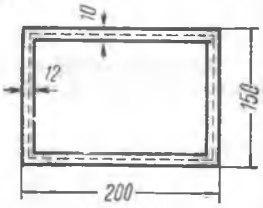


Рис. 10.

10. Тонкостенный незамкнутый профиль произвольной формы (угольник, коробка, двутавр и т. п.). Профиль следует расчленить на отдельные прямоугольники (ширина b_i, толщина t_i).

Жесткость C всего профиля равна сумме жесткостей составляющих его прямоугольников, т. е.

$$C = \sum C_i = \frac{G}{3}\sum b_i t_i^3.$$

Скалывающее напряжение

$$\tau = \frac{3Mt_i}{\sum b_i t_i^3},$$

где t_i — толщина рассматриваемой части профиля.

Скалывающие напряжения направлены вдоль кромок профиля в противоположные стороны, по разным сторонам этих кромок.

11. Многосвязный профиль. Многосвязный замкнутый профиль можно представить в виде нескольких двусвязных профилей. Крутящие моменты, действующие в этих профилях,

$$M_к = \frac{M}{C} C_к, \tag{24}$$

где M — крутящий момент;
$M_к$ — крутящий момент в двусвязном профиле;
$C_к$ — коэффициент жесткости двусвязного профиля;
$C = \sum_1^n C_к$ — коэффициент жесткости всего профиля;
n — число составляющих профилей.

Коэффициент жесткости двусвязного профиля можно определить по выражению

$$C_к = \frac{4GS^2}{\int \frac{ds}{t_s}}, \tag{25}$$

где S — величина площади, ограниченной средней линией между внешним и внутренним контурами профиля;
$\int \frac{ds}{t_s}$ — интеграл, взятый по контуру двусвязного профиля;
t_s — переменная толщина стенок профиля.

Угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_к}{C_к} = \frac{M}{C}.$$

Касательные напряжения в стенках двусвязных профилей

$$\tau_к = \frac{M_к}{2S_к t_к},$$

где $S_к$ — площадь, ограниченная средней линией рассматриваемого профиля;
$t_к$ — толщина стенки профиля в точке, для которой определяется напряжение.

Во внутренних стенках всего профиля касательное напряжение равно разности касательных напряжений для смежных составляющих профилей.

Пример. Определить жесткость C и величину касательных напряжений для профиля, изображенного на рис. 11.

Коэффициент жесткости профиля:

$$C = C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4;$$

$$C_1 = \frac{4GS_1}{\frac{l_1}{t_1} + 2\frac{h_1}{t_7} + \frac{l_1}{t_8}}; \quad C_2 = \frac{4GS_2}{\frac{l_2}{t_2} + \frac{h_1}{t_3} + \frac{h_1}{t_7} + \frac{l_2}{t_9}};$$

$$C_3 = \frac{4GS_3}{\frac{l_2}{t_3} + \frac{h_2}{t_4} + \frac{l_2}{t_5} + \frac{h_2}{t_{10}}}; \quad C_4 = \frac{4GS_4}{\frac{l_1}{t_8} + 2\frac{h_2}{t_{10}} + \frac{l_1}{t_9}}.$$

Крутящие моменты, действующие в составляющих профилях:

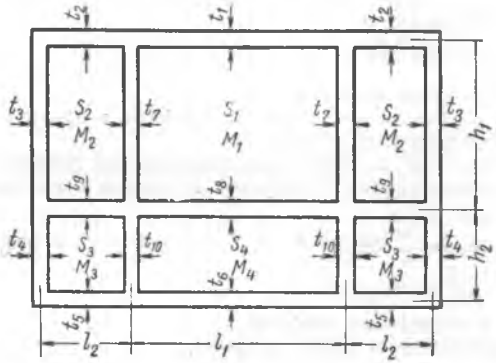


Рис. 11.

$$M_1 = \frac{M}{C} C_1;$$

$$M_2 = \frac{M}{C} C_2;$$

$$M_3 = \frac{M}{C} C_3;$$

$$M_4 = \frac{M}{C} C_4.$$

Касательное напряжение во внешней стенке, имеющей толщину t_1,

$$\tau = \frac{M_1}{2S_1 t_1}$$

Касательное напряжение во внутренней стенке, имеющей толщину t_7,

$$\tau = \frac{M_1}{2S_1 t_7} - \frac{M_2}{2S_2 t_7}.$$

12. Напряжения и деформации при свободном кручении прокатных профилей

Характер распределения касательных напряжений показан на рис. 12.

Распределение касательных напряжений по толщине, за исключением небольших участков у коротких сторон, — линейное.

На средней линии $\tau = 0$.

Краевое напряжение

$$\tau = \frac{M_к}{J_к} \delta.$$

Максимальное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{J_к} \delta_{max}$$

Рис. 12.

Опасная точка — посредине края наиболее толстой стенки.

Момент инерции при кручении

$$J_к = \frac{1}{3} \int_S [\delta(S)]^3 \, ds \approx \frac{S\delta^3}{3},$$

где S — периметр средней линии;

δ — осредненная толщина.

При нескольких стенках постоянной толщины в пределах стенки

$$J_к = \frac{1}{3} \sum_i S_i \delta_i^3.$$

Относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{M_к}{G J_к^{\alpha}} \; см^{-1},$$

где α — экспериментальный поправочный коэффициент, равный 1,2 для прокатных двутавров и 1,12 для швеллеров.

§ 7. Стесненное кручение тонкостенных стержней с открытым профилем

Чистым (сен-венановым) кручением стержня называют такое, при котором в его поперечных сечениях нет нормальных напряжений, а касательные напряжения распределены по всем сечениям одинаково.

Этот случай является теоретически возможным лишь при отсутствии препятствий свободному искривлению сечений стержня.

В судостроении, где все элементы конструкций, составляющих корпус корабля, взаимно перевязаны, имеет место, как правило, стеснение свободного искривления (депланации) сечений стержней. Поскольку в этом случае стеснены продольные перемещения точек сечения, то кручение таких элементов конструкций сопровождается появлением нормальных напряжений. Так как внешними силами, вызвавшими появление этих нормальных напряжений, являются только крутящие моменты, то эпюра нормальных напряжений, возникающих в сечениях стержня, является самоуравновешенной как по силе, так и по изгибающему моменту.

Нормальные напряжения в сечениях стержней уравновешиваются благодаря возникновению вторичных или так называемых секториальных касательных напряжений, приводящих к возникновению поперечных сил в плоскости полок стержня.

Таким образом, внешний крутящий момент уравновешивается в сечениях стержня крутящими моментами двух видов — сен-венановым крутящим моментом и крутящим моментом от секториальных касательных напряжений.

Описанное явление принято называть стесненным, или изгибным, кручением, так как изгиб элементов профиля имеет место во всех случаях кручения со стесненным искажением поперечных сечений.

При кручении прокатных профилей существенную роль играют напряжения как свободного, так и стесненного кручения.

1. Деформации при стесненном кручении

Рассмотрим произвольное сечение открытого тонкостенного профиля. На рис. 13 изображено сечение срединной поверхности этого профиля (контур профиля).

Основные принятые при выводе гипотезы:

1) деформации сдвига в срединной поверхности профиля равны нулю или, иначе говоря, во всех случаях нагружения тонкостенного стержня с открытым профилем в срединной поверхности касательные напряжения отсутствуют;

2) контур поперечного сечения не деформируется, т. е. проекция между любыми двумя точками поперечного сечения на плоскость сечения остается постоянной при переходе стержня в деформированное состояние.

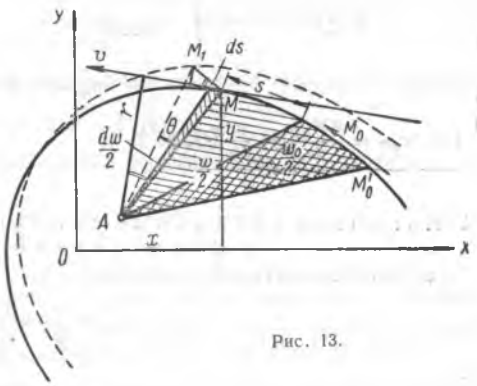


Рис. 13.

Сечение повернуто на некоторый малый угол θ вокруг центра кручения A Положительный угол — против часовой стрелки.

Новое положение произвольной точки $M(x, y)$ — M_1.

Проекция полного перемещения MM_1 на касательную к контуру

$$v = r\theta,$$

где r — перпендикуляр из центра кручения на касательную к контуру в точке M.

Проекция полного перемещения MM_1 на ось z

$$u = -\theta'\omega(s) + \zeta(z), \tag{26}$$

где $\theta' = \frac{\partial\theta}{\partial z}$;

$\omega(s)$ — секториальная площадь точки M (удвоенная площадь сектора, ограниченного дугой $M_0'M$ и радиусами-векторами AM_0' и AM, соединяющими концы этой дуги с центром кручения или полюсом A); секториальная площадь считается положительной, если она описывается вращением подвижного радиуса-вектора AM против часовой стрелки;

M_0' — произвольная точка — начало отсчета секториальных площадей;

$\zeta(z)$ — произвольная функция, зависящая только от z.

Формула (26) выражает закон изменения продольных перемещений u тонкостенного стержня, имеющего в поперечном сечении жесткий недеформируемый контур.

Перемещения эти возникают при кручении вследствие искажения (депланации) сечений и меняются, как видно из формулы (26), по закону секториальных площадей.

Подробно об определении секториальной площади см. ниже.

Используя введенные обозначения и дифференциальное уравнение равновесия, получим зависимости, аналогичные применяемым в теории изгиба.

Кручение	Размерность	Изгиб	Размерность
$EJ_\omega\theta^{IV} = m_\omega$	*кг*	$EJ_x v^{IV} = q$	*кг/см*
$EJ_\omega\theta''' = -M_\omega$	*кгсм*	$EJ_x v''' = Q_y$	*кг*
$EJ_\omega\theta'' = -B_\omega$	*кгсм*^{2}	$EJ_x v'' = M_x$	*кгсм*
$EI_\omega\theta'$	*кгсм*^{3}	$EJ_x v'$	*кгсм*^{2}
$EJ_\omega\theta$	*кгсм*^{4}	$EJ_x v$	*кгсм*^{3}

Здесь $m_\omega = m + m_{кр}$,

где $m_{кр} = \frac{dM_{кр}}{dz} = \frac{d}{dz}(GJd\theta')$.

2. Изгибно-крутильные силовые факторы, связанные с депланацией сечения

а) Изгибно-крутящий бимомент

$$\left.\begin{aligned} B_\omega &= \int_F \sigma\omega dF \\ \text{или} \quad B_\omega &= -EJ_\omega\theta'' \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Изгибно-крутящий бимомент определяется работой внешних продольных усилий σdF на единичных перемещениях, распределенных по сечению стержня по закону секториальных площадей. Единица измерения — *кгсм*^{2}.

б) Изгибно-крутящий момент, измеряемый в *кгсм*,

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dz} = -EJ_\omega\theta'''. \tag{28}$$

3. Дифференциальное уравнение равновесия стержня, находящегося в условиях стесненного кручения

Дифференциальное уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = m, \tag{29}$$

где E — модуль нормальной упругости материала;
G — модуль сдвига;
θ — угол закручивания сечения;
$J_\omega = \int\limits_F \omega^2 dF$ — секториальный момент инерции;
J_d — момент инерции при свободном кручении;
$m = \frac{dM}{dz}$ — интенсивность изменения по длине стержня внешних крутящих моментов.

4. Координаты центра изгиба

Центр изгиба — особая точка сечения, обладающая тем свойством, что если действующая на стержень поперечная нагрузка проходит через нее и нормальные напряжения на концах стержня равны нулю или распределены по линейному закону, то стержень будет испытывать только изгиб (без кручения).

Координаты центра изгиба определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{S_\omega B y}{J_x} \\ a_y &= -\frac{S_\omega B x}{J_y} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Здесь $S_\omega = \int\limits_F \omega dF$ — секториальный статический момент, величина которого зависит от формы и размеров поперечного сечения профиля, а также от положения точки начала отсчета секториальных площадей.

Выбирая начало отсчета так, что секториальный статический момент обращается в нуль, получаем формулу для нормальных напряжений в виде

$$\sigma_\omega = -E\theta''\omega.$$

В общем случае нормальные напряжения при кручении определяются выражением

$$\sigma_\omega = -E\,[\theta''\omega - \zeta'(z)].$$

Секториальные касательные напряжения определяются по выражению

$$\tau_\omega = \frac{E\theta'''}{\delta} \int\limits_0^s \omega dF + \zeta(z), \tag{31}$$

где δ — толщина стенки профиля;
$\zeta(z) = \tau_{\omega_{s=0}}$ — величина касательного напряжения по продольному сечению $s = 0$ (начало отсчета дуги s); выбирая начало отсчета у края сечения, свободного от сдвигающих сил, получим $\zeta(z) = 0$;
$\int\limits_0^s \omega dF$ — секториальный статический момент отсеченной части сечения

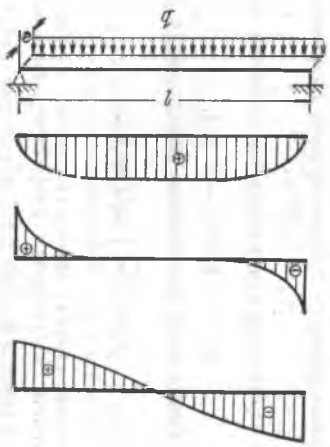
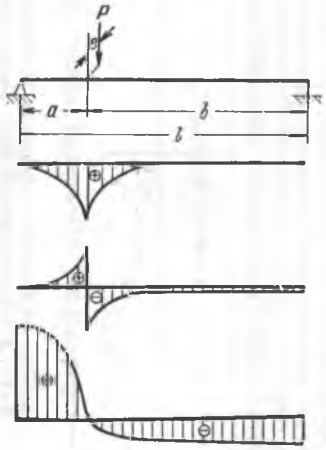
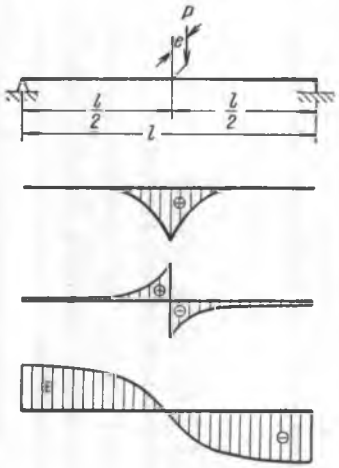
$$\int\limits_0^s \omega dF = S_\omega^{\text{отс}};$$

тогда

$$\tau_\omega = E\theta''' \frac{S_\omega^{\text{отс}}}{\delta}. \tag{32}$$

Таблица 4

Эпюры изгибно-крутящих бимоментов B_ω, изгибно-крутящих моментов M_ω и крутящих моментов $M_{кр}$

	1	2	3
Схема балки и нагрузки Эпюра B_ω Эпюра M_ω Эпюра $M_{кр}$			
	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $B_\omega=0$ При $z=\frac{l}{2}$ $B_\omega = qel^2\,\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-1}{k^{3/2}\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $B_\omega=0$ При $z=a$ $B_\omega = Pel\,\frac{\operatorname{sh}ka\operatorname{sh}kb}{kl\operatorname{sh}kl}$	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $B_\omega=0$ При $z=\frac{l}{2}$ $B_\omega = 0{,}5Pel\,\frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$

Значения B_ω, M_ω и $M_{кр}$ в характерных сечениях балки	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $M_\omega = \pm qel \dfrac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ При $z=\frac{l}{2}$ $M_\omega = 0$	При $z=0$ $M_\omega = Pe\dfrac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl}$ При $z=l$ $M_\omega = -Pe\dfrac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kl}$ При $z=a$ $\begin{cases} M_{\omega(1)} = Pe\dfrac{\operatorname{sh} kb \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl} \\ M_{\omega(2)} = -Pe\dfrac{\operatorname{sh} ka \operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kl} \end{cases}$	При $z=0$ $M_\omega = 0{,}5Pe\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ При $z=l$ $M_\omega = -0{,}5Pe\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ При $z=\frac{l}{2}$ $\Big\}$ $M_{\omega(1)} = +0{,}5Pe$, $M_{\omega(2)} = -0{,}5Pe$
	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $M_{кр} = \pm qel \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right)$ При $z=\frac{l}{2}$ $M_{кр} = 0$	При $z=0$ $M_{кр} = Pe\left(\dfrac{b}{l} - \dfrac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl}\right)$ При $z=l$ $M_{кр} = -Pe\left(\dfrac{a}{l} - \dfrac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kl}\right)$ При $z=a$ $M_{кр} = Pe\left(\dfrac{b}{l} - \dfrac{\operatorname{sh} kb \operatorname{ch} ka}{\operatorname{sh} kl}\right)$	При $z=0$ $M_{кр} = 0{,}5Pe\left(1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right)$ При $z=l$ $M_{кр} = -0{,}5Pe\left(1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right)$ При $z=\frac{l}{2}$ $M_{кр} = 0$

Продолжение

	4	5	6
Схема балки и нагрузки			
Эпюра B_ω			
Эпюра M_ω			
Эпюра $M_{кр}$			
	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $B_\omega=0$ При $z=\frac{l}{4}$ и $z=\frac{3}{4}l$ $\Big\}$ $B_\omega = 0{,}5Pel\,\frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$	При $z=0$ и $z=l$ $\Big\}$ $B_\omega=0$ При $z=a$ $\begin{cases} B_{\omega(1)} = -Me\,\frac{\operatorname{ch}kb\operatorname{sh}ka}{\operatorname{sh}kl} \\ B_{\omega(2)} = Me\,\frac{\operatorname{ch}ka\operatorname{sh}kb}{\operatorname{sh}kl} \end{cases}$	При $z=0$ $B_\omega=0$ При $z=l$ $B_\omega=0$

	При $z=\frac{l}{2}$ $B_\omega = Pel\dfrac{\operatorname{sh}\frac{kl}{4}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$		
Значения B_ω, M_ω и $M_{кр}$ в характерных сечениях балки	При $z=0$ $M_\omega = Pe\dfrac{\operatorname{ch}\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ При $z=\frac{l}{4}$ $M_{\omega(1)} = Pe\dfrac{\operatorname{ch}^2\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$, $M_{\omega(2)} = -Pe\dfrac{\operatorname{sh}^2\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ При $z=\frac{l}{2}$ $M_\omega = 0$	При $z=0$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{ch}kb}{\operatorname{sh}kl}$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{ch}ka}{\operatorname{sh}kl}$ При $z=a$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{ch}ka\operatorname{ch}kb}{\operatorname{sh}kl}$	При $z=0$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{ch}kl}{\operatorname{sh}kl}$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl}{\operatorname{sh}kl}$
	При $z=0$ $M_{кр} = Pe\left(1-\dfrac{\operatorname{ch}\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right)$ При $z=\frac{l}{4}$ $M_{кр} = Pe\dfrac{\operatorname{sh}^2\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}$ При $z=\frac{l}{2}$ $M_{кр}=0$	При $z=0$ $M_{кр} = -\frac{Me}{l}\left(1-kl\frac{\operatorname{ch}kb}{\operatorname{sh}kl}\right)$ При $z=a$ $M_{кр} = \frac{Me}{l}\left(kl\frac{\operatorname{ch}ka\operatorname{ch}kb}{\operatorname{sh}kl}-1\right)$ При $z=l$ $M_{кр} = -\frac{Me}{l}\left(1-kl\frac{\operatorname{ch}ka}{\operatorname{sh}kl}\right)$	При $z=0$ $M_{кр} = -\frac{Me}{l}\left(\frac{kl\operatorname{ch}kl}{\operatorname{sh}kl}-1\right)$ При $z=l$ $M_{кр} = -\frac{Me}{l}\left(1-\frac{kl}{\operatorname{sh}kl}\right)$

Продолжение

	7	8	9
Схема балки и нагрузки			
Эпюра B_ω			
Эпюра M_ω			
Эпюра $M_{кр}$			
	При $z=0$ $B_\omega=0$ При $z=l$ $B_\omega=-Me$	При $z=0$ $B_\omega=-\frac{qel^2}{k^2l^2\,\mathrm{ch}\,kl}\times$ $\times(kl\,\mathrm{sh}\,kl-\mathrm{ch}\,kl+1)$ При $z=l$ $B_\omega=0$	При $z=0$ $B_\omega=-\frac{Pel}{kl\,\mathrm{ch}\,kl}\times$ $\times[\mathrm{sh}\,kl-\mathrm{sh}\,k(l-a)]$ При $z=a$ $B_\omega=\frac{Pel}{kl\,\mathrm{ch}\,kl}\times$ $\times\,\mathrm{sh}\,k(l-a)(\mathrm{ch}\,ka-1)$ При $z=l$ $B_\omega=0$

Значения B_ω, M_ω и $M_{кр}$ в характерных сечениях балки	При $z=0$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl}{\operatorname{sh} kl}$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl}$	При $z=0$ $M_\omega = qel$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{qel}{kl \operatorname{ch} kl}(\operatorname{sh} kl - kl$	При $z=0$ $M_\omega = Pe$ При $z=a$ $\begin{cases} M_{\omega(1)} = \frac{Pe}{\operatorname{ch} kl}\times \\ \times[\operatorname{ch} k(l-a) + \\ + \operatorname{sh} k(l-a)\operatorname{sh} ka] \\ M_{\omega(2)} = -\frac{Pe}{\operatorname{ch} kl}\times \\ \times \operatorname{ch} k(l-a)\times \\ \times(\operatorname{ch} ka - 1) \end{cases}$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{Pe}{\operatorname{ch} kl}(\operatorname{ch} ka - 1)$
	При $z=0$ $M_{кр} = -\frac{Me}{l}\left(1 - \frac{kl}{\operatorname{sh} kl}\right)$ При $z=l$ $M_{кр} = \frac{Me}{l}\left(\frac{kl \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl} - 1\right)$	При $z=0$ $M_{кр} = 0$ При $z=l$ $M_{кр} = \frac{qel}{kl \operatorname{ch} kl}(\operatorname{sh} kl - kl)$	При $z=0$ $M_{кр} = 0$ При $z=a$ $M_{кр} = \frac{Pe}{\operatorname{ch} kl}\times$ $\times \operatorname{ch} k(l-a)(\operatorname{ch} ka - 1)$ При $z=l$ $M_{кр} = \frac{Pe}{\operatorname{ch} kl}(\operatorname{ch} ka - 1)$

Продолжение

	10	11	12
Схема балки и нагрузки Эпюра B_ω Эпюра M_ω Эпюра $M_{кр}$			
	При $z=0$ $B_\omega = -Pel\,\frac{\operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl}$ При $z=l$ $B_\omega = 0$	При $z=0$ $B_\omega = -Me\,\frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{ch} kl}$ При $z=a$ $B_{\omega(1)} = -Me \times \frac{\operatorname{ch} k(l-a) \operatorname{ch} ka}{\operatorname{ch} kl}$ $B_{\omega(2)} = Me \times \frac{\operatorname{sh} k(l-a) \operatorname{sh} ka}{\operatorname{ch} kl}$ При $z=l$ $B_\omega = 0$	При $z=0$ $B_\omega = -Me\,\frac{1}{\operatorname{ch} kl}$ При $z=l$ $B_\omega = -Me$

Значения B_ω, M_ω и $M_{кр}$ в характерных сечениях балки	При $z=0$ $M_\omega = Pe$ При $z=l$ $M_\omega = Pe\frac{1}{\operatorname{ch} kl}$	При $z=0$ $M_\omega=0$ При $z=a$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{ch} k(l-a)\operatorname{sh} ka}{\operatorname{ch} kl}$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{sh} ka}{\operatorname{ch} kl}$	При $z=0$ $M_\omega=0$ При $z=l$ $M_\omega = -\frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl}$
	При $z=0$ $M_{кр}=0$ При $z=l$ $M_{кр} = Pe\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch} kl}\right)$	При $z=0$ $M_{кр}=0$ При $z=a$ $M_{кр} = \frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{ch} k(l-a)\operatorname{sh} ka}{\operatorname{ch} kl}$ При $z=l$ $M_{кр} = \frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{sh} ka}{\operatorname{ch} kl}$	При $z=0$ $M_{кр}=0$ При $z=l$ $M_{кр} = \frac{Me}{l}\cdot\frac{kl\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl}$

Продолжение

	13	14
Схема балки и нагрузки		
Эпюра B_ω		
Эпюра M_ω		
Эпюра $M_{кр}$		
	При $z=0$ и $z=l$ $B_\omega = -qel^2\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}{2kl\operatorname{sh}\frac{kl}{2}} - \frac{1}{k^2l^2}\right)$ При $z=\frac{l}{2}$ $B_\omega = qel^2\left(\frac{1}{k^2l^2} - \frac{1}{2kl\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\right)$	При $z=0$ и $z=l$ $B_\omega = -0{,}5Pel\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-1}{kl\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}$ При $z=\frac{l}{2}$ $B_\omega = 0{,}5Pel\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}-1}{kl\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}$

Значения B_ω, M_ω и $M_{кр}$ в характерных сечениях балки	При $z=0$ $M_\omega = 0{,}5qel$ При $z=\frac{l}{2}$ $M_\omega = 0$ При $z=l$ $M_\omega = -0{,}5qel$	При $z=0$ $M_\omega = 0{,}5Pe$ При $z=\frac{l}{2}$ $\begin{cases} M_{\omega\,(1)} = 0{,}5Pe \\ M_{\omega\,(2)} = -0{,}5Pe \end{cases}$ При $z=\frac{l}{4}$ и $z=\frac{3l}{4}$ $M_\omega = \pm 0{,}5Pe \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{4}}$ При $z=l$ $M_\omega = -0{,}5Pe$
	При $z=0$, $z=\frac{l}{2}$ и $z=l$ $M_{кр}=0$	При $z=0$, $z=\frac{l}{2}$ и $z=l$ $M_{кр}=0$ При $z=\frac{l}{4}$ и $z=\frac{3l}{4}$ $M_{кр} = \pm 0{,}5Pe\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{kl}{4}}\right)$

Продолжение

	15	16
Схема балки и нагрузки		
Эпюра B_ω		
Эпюра M_ω		
Эпюра $M_{кр}$		
	При $z=0$ $B_\omega=0$ При $z=l$ $B_\omega=-qel^2\dfrac{1+0{,}5kl\,\mathrm{sh}\,kl-\mathrm{ch}\,kl}{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl)}$	При $z=0$ $B_\omega=0$ При $z=\dfrac{l}{2}$ $B_\omega=Pel\dfrac{\left(k'\,\mathrm{ch}\,\dfrac{kl}{2}-\mathrm{sh}\,\dfrac{kl}{2}-\dfrac{kl}{2}\right)\mathrm{sh}\,\dfrac{kl}{2}}{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl)}$ При $z=l$ $B_\omega=-\dfrac{Pel}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{sh}\,kl-2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl-\mathrm{sh}\,kl}$

Значения B_ω, M_ω и $M_{кр}$ в характерных сечениях балки	При $z = 0$ $M_\omega = qel\,\frac{1 + kl\,\mathrm{sh}\,kl - \mathrm{ch}\,kl - 0{,}5k^2l^2}{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl)}$ При $z = l$ $M_\omega = -\,qel\,\frac{1 + 0{,}5k^2l^2\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{ch}\,kl}{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl)}$	При $z = 0$ $M_\omega = Pe\,\frac{kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - \mathrm{sh}\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}$ При $z = \frac{l}{2}$ $M_{\omega\,(1)} = Pe\,\frac{\left(kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - \mathrm{sh}\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right)\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}$ При $z = \frac{l}{2}$ $M_{\omega\,(2)} = -\,Pe\,\frac{\left(kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - \mathrm{sh}\,\frac{kl}{2} + \frac{kl}{2}\right)\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - kl}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}$ При $z = l$ $M_\omega = -\,Pe\,\frac{\frac{kl}{2}\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}$
	При $z = 0$ $M_{кр} = qel\,\frac{2\,(\mathrm{ch}\,kl - 1) - 2kl\,\mathrm{sh}\,kl + 0{,}5k^2l^2\,(\mathrm{ch}\,kl + 1)}{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl)}$ При $z = l$ $M_{кр} = 0$	При $z = 0$ $M_{кр} = Pe \times$ $\times\,\frac{0{,}5\,kl\,(\mathrm{ch}\,kl + 1) - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}\left(\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1\right) - kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}$ При $z = \frac{l}{2}$ $M_{кр} = -\,Pe\,\frac{\left(\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2} - 0{,}5kl\right)\left(\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1\right)}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}$ При $z = l$ $M_{кр} = 0$

В табл. 4 приведены эпюры изменения по длине стержня значений изгибно-крутящих бимоментов B_ω, изгибно-крутящих моментов M_ω и крутящих моментов $M_{кр}$, а также приведены формулы для определения указанных величин в характерных сечениях стержня.

Используемая в табл. 4 изгибно-крутильная характеристика k ($см^{-1}$) определяется выражением

$$k^2 = \frac{GJ_d}{EJ_\omega}.$$

Пример.

Определить изгибно-крутящие бимоменты, изгибно-крутящие моменты и крутящие моменты в характерных сечениях балки, изображенной на рис. 14:

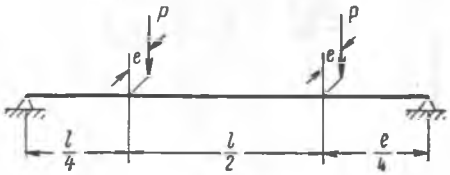


Рис. 14.

$l = 6{,}0$ *м*; $P = 21{,}6$ *т*;
$e = 3{,}67$ *см*; $k = 0{,}00418$ $см^{-1}$.

Вычисляем:

$$\frac{kl}{2} = 1{,}254;$$

$$\frac{kl}{4} = 0{,}627.$$

По формулам табл. 4 имеем:

При $z = 0$ $B_\omega = 0$

$$M_\omega = Pe\frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = 5{,}059\cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{кр} = Pe\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right) = 2{,}868\cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

В сечении под грузом $\left(z = \frac{l}{4}\right)$

$$B_\omega = 0{,}5Pel\frac{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}{kl\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = 8{,}048\cdot 10^6 \text{ кгсм}^2;$$

$$M_{\omega(1)} = Pe\frac{\operatorname{ch}^2\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = 6{,}097\cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{\omega(2)} = -Pe\frac{\operatorname{sh}^2\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = -1{,}899\cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{кр} = Pe\frac{\operatorname{sh}^2\frac{kl}{4}}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}} = 1{,}899\cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

§ 8. Расчет валов

Пусть N — работа в лошадиных силах, передаваемая круглым валом; n — число оборотов вала в минуту.

Тогда диаметр вала

$$d \geqslant 7{,}1\sqrt[3]{\frac{N}{n\tau_д}}, \text{ см}.$$

Если при этом поставлено условие, чтобы угол φ не превосходил 1/4° на метр, то, кроме того,

$$d \geqslant 6{,}7 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}, \text{ см.}$$

§ 9. Кручение вала переменного сечения

Если поперечные сечения вала изменяются плавно, то напряжения в них с практически достаточной точностью могут быть получены по формулам для призматического вала.

В местах резких изменений сечения вала появляется местная концентрация напряжений, существенно влияющая на прочность вала, особенно при действии на него знакопеременной нагрузки. Для вала переменного сечения, показанного на рис. 15, наибольшее касательное напряжение (в точках m) может быть получено по формуле

$$\tau_{max} = k \frac{2M}{\pi r^3}.$$

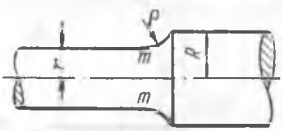


Рис. 15.

Значения коэффициента k приведены в табл. 5 в зависимости от отношений $\frac{\rho}{r}$ и $\frac{R}{r}$, где ρ — радиус заточки, а r и R — радиусы двух частей вала.

Таблица 5

$R:r$	$\rho:r$				
	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025
1	1	1	1	1	1
1,1	1,15	1,2	1,3	1,45	1,7
1,2	1,25	1,4	1,55	1,8	2,1
1,3	1,3	1,5	1,65	1,95	2,3
1,4	1,35	1,55	1,7	2,05	2,35
1,5	1,35	1,55	1,75	2,1	2,4

ГЛАВА 3

СДВИГ

§ 10. Напряжения при сдвиге

Силы, перпендикулярные оси балки, P_x и P_y вызывают в поперечных ее сечениях касательные напряжения τ_y и τ_x, производящие деформацию сдвига.

Закон распределения касательных напряжений зависит от профиля балки и известен точно пока лишь для весьма ограниченного числа профилей.

При допущении о равномерном распределении напряжений τ_x по линиям, параллельным оси x, и напряжений τ_y по линиям, параллельным оси y, закон распределения касательных напряжений выражается следующими формулами (рис. 16):

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= \frac{V_y S_x}{J_x a_x} \\ \tau_y &= \frac{V_x S_y}{J_y a_y} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

где (например, в формуле для τ_y)

τ_y — касательные напряжения по линии ab;

V_x — срезывающая сила, т. е. проекция равнодействующих всех внешних сил P_x, действующих на часть балки, лежащую по одну сторону рассматриваемого сечения;

J_y — момент инерции сечения относительно оси y;

a_y — ширина сечения по линии ab;

S_y — статический момент части площади сечения, лежащей выше линии ab, относительно оси y.

Формулы эти тем точнее, чем высота балки больше по сравнению с шириной; так, например, для прямоугольника при отношении сторон, равном двум, ошибка формул составляет $\sim 4\%$, а для квадрата $\sim 15\%$.

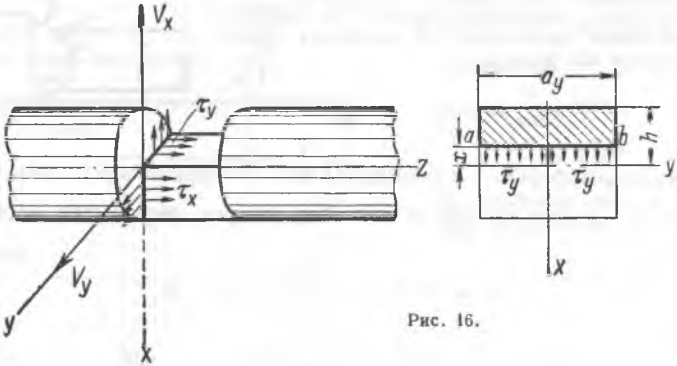


Рис. 16.

Для составных профилей формулы (33) могут быть применяемы с достаточной точностью лишь для тонких стенок.

Наибольшей величины касательные напряжения τ_y достигают в слое, совпадающем с осью y, а касательные напряжения τ_x — в слое, совпадающем с осью x.

Примеры. Для прямоугольного сечения шириной a и высотой b

$$\tau_y = \frac{3}{2}\frac{V_x}{ab}\left[1 - \left(x : \frac{b}{2}\right)^2\right], \tag{34}$$

где x — отстояние слоя от оси y.

При $x = 0$, т. е. посредине,

$$(\tau_y)_{x=0} = \frac{3}{2}\cdot\frac{V_x}{ba} = \frac{3}{2}\cdot\frac{V_x}{F}, \tag{35}$$

где F — площадь сечения.

Для круглого сечения диаметром $d = 2r$

$$\tau_y = \frac{4}{3}\frac{V_x}{F}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}. \tag{36}$$

При $x = 0$

$$(\tau_y)_{x=0} = \frac{4}{3}\frac{V_x}{F}.$$

Для кольцевого сечения средним диаметром d, если предположить, что толщина стенки t мала по сравнению с d,

$$(\tau_y)_{x=0} = 2\frac{V_x}{\pi d t} = 2\frac{V_x}{F}. \tag{37}$$

§ 11. Расчетные формулы прочности

При действии в сечении одной лишь срезывающей силы V_x или одной срезывающей силы V_y соответствующие касательные напряжения τ_y и τ_x будут наибольшими касательными напряжениями τ_{max} в данной точке балки; при одновременном же действии V_x и V_y наибольшее касательное напряжение будет

$$\tau_{max} = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

Поэтому расчетные формулы:

при действии срезывающей силы V_x

$$\tau_{max} = (\tau_y)_{x=0} = \left| \frac{V_x S_y}{J_y a_y} \right|_{x=0} \leqslant \tau_д; \qquad (38)$$

при действии срезывающей силы V_y

$$\tau_{max} = (\tau_x)_{y=0} = \left| \frac{V_y S_x}{J_x a_x} \right|_{y=0} \leqslant \tau_д; \qquad (39)$$

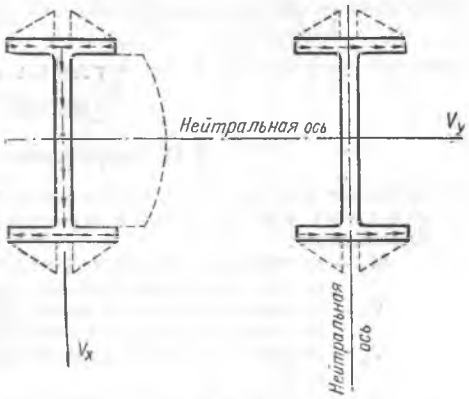


Рис. 17.

при одновременном действии V_x и V_y

$$\tau_{max} = \sqrt{(\tau_x)^2_{y=0} + (\tau_y)^2_{x=0}} \leqslant \tau_д. \qquad (40)$$

Здесь $\tau_д$ — допускаемое напряжение.

Необходимо иметь в виду, что в тонкостенных замкнутых или незамкнутых профилях наибольшее касательное напряжение в сечении всегда направлено вдоль полок профиля. В этих случаях в формулы (38), (40) необходимо вводить статический момент S той части полки, которая как бы отсекается тем сечением, в котором разыскивается напряжение, и брать толщину a равной толщине полки.

В соответствии с этим при одновременном действии усилий V_x и V_y касательные напряжения в полках должны складываться алгебраически.

На рис. 17 показан характер распределения касательных напряжений в полках профилей при действии усилий V_x и V_y.

О деформациях бруса при действии на него срезывающих сил см. гл. 4.

§ 12. Расчет на перерезывание

Иногда расчет ведут просто по формуле

$$\frac{V}{F} \leqslant \tau_д, \qquad (41)$$

т. е. предполагают равномерное распределение срезывающей силы по площади сечения балки.

При таком предположении касательные напряжения получаются меньше действительных (для прямоугольного сечения на 50%, для круглого на 33,5% и для кольцевого на 100%), поэтому в этом случае надо соответственно уменьшать $\tau_д$.

§ 13. Расчет на скалывание

В телах волокнистого строения (дерево) касательные напряжения по направлению волокон производят скалывание, т. е. сдвиг вдоль волокон, поэтому для таких тел в предыдущих расчетных формулах под τ надо понимать допускаемое напряжение на скалывание.

При расчете деревянных врубок и замков предполагается равномерность распределения скалывающих напряжений по их площади.

ГЛАВА 4

ИЗГИБ

§ 14. Напряжения при изгибе

1. Плоскость изгибающих пар и сил совпадает с одной из главных плоскостей балки xz [1] (рис. 18)

Обозначения:

M_y — изгибающий момент в сечении балки, т. е. момент всех внешних сил и пар, лежащих по одну сторону сечения, относительно оси y;

V_x — срезывающая сила в данном сечении, т. е. алгебраическая сумма всех сил, лежащих по одну сторону сечения;

J_y — момент инерции площади сечения относительно оси y (нейтральной оси);

S_y — статический момент заштрихованной площади относительно нейтральной оси;

δ_y — ширина сечения в расстоянии x от нейтральной оси;

S_0 и δ_0 — те же значения для нейтрального слоя;

e_1 — отстояние наиболее растянутого волокна от нейтральной оси;

e_2 — отстояние наиболее сжатого волокна от нейтральной оси;

σ_z — нормальное напряжение в плоскости сечения балки;

τ_y — касательное напряжение;

x_1, y_1 — координаты какой-либо точки сечения;

$\sigma_д$ — допускаемое нормальное напряжение;

$\sigma_{д.с}$ — допускаемое нормальное напряжение на сжатие;

$\tau_д$ — допускаемое касательное напряжение;

W_y и W'_y — моменты сопротивления сечения для растянутой и сжатой зоны, равные соответственно: $J_y : e_1$ и $J_y : e_2$.

Если $V_x = 0$, т. е. внешние силы для данного сечения приводятся лишь к изгибающему моменту M_y (случай чистого изгиба), то в сечении возбуждаются одни нормальные напряжения σ_z, распределенные согласно линейному закону по высоте сечения и равномерно по ширине его. Эти нормальные напряжения по разную сторону нейтральной оси — разного знака, и величина их определяется выражением

$$\sigma_z = \frac{M_y x_1}{J_y}. \tag{42}$$

Наибольшее растягивающее напряжение

$$\max \sigma_z = \frac{M_y e_1}{J_y} = \frac{M_y}{W_y}. \tag{43}$$

Наибольшее сжимающее напряжение

$$\max \sigma'_z = \frac{M_y e_2}{J_y} = \frac{M_y}{W'_y}. \tag{44}$$

[1] Главными называются плоскости балки, содержащие главные центральные оси инерции сечений балки (главные оси)

Если V_x не равно нулю, то, кроме нормальных напряжений, в сечении возбуждаются касательные напряжения, распределенные по закону, указанному в разделе о сдвиге, т. е.

$$\tau_y = \frac{V_x S_y}{J_y \delta_y}. \qquad (45)$$

Наибольшая величина их в точках на нейтральной оси

$$\max \tau_y = \frac{V_x S_0}{J_y \delta_0}. \qquad (46)$$

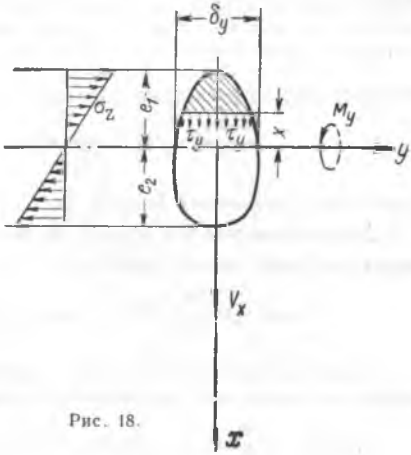


Рис. 18.

В точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, касательные напряжения в сечении отсутствуют, поэтому напряжения $\max \sigma_z$ и $\max \sigma_z'$ являются главными напряжениями для этих точек.

В точках нейтрального слоя действуют одни лишь касательные напряжения $\max \tau_y$, поэтому эти напряжения являются наибольшими напряжениями для этих точек.

Во всех других точках сечения действуют и нормальные и касательные напряжения, поэтому главные напряжения $\sigma_{\substack{\max\\ \min}}$ и наибольшие касательные $\tau_{\max}$ в этих точках могут быть получены по формулам:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}; \quad \tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Имея в виду сказанное, можно составить табл. 6, наглядно показывающую, какими расчетными формулами следует пользоваться при принятии той или иной теории прочности [1].

Таблица 6

Напряжение в точке	Положение точки		
	в крайних точках сечения	в точках нейтрального слоя	в любой точке
Главные напряжения $\sigma_{\substack{\max\\ \min}}$	0 и $\max \sigma_z$	$\pm \max \tau_y$	$\frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2}$
Наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max}$	$\pm \frac{\max \sigma_z}{2}$	$\pm \max \tau_y$	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2}$
Приведенное напряжение $\sigma_{пр}$	$\max \sigma_z$	$1{,}3 \max \tau_y$	$0{,}35\sigma_z \pm 0{,}65\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2}$

[1] Предполагается, что $\max \sigma_z > \max \sigma_z'$, т. е. $e_2 > e_1$.

Напряжения в промежуточных точках сечений обыкновенно меньше (а если и больше, то не на много), чем напряжения в крайних точках и в нейтральном слое. Поэтому обычно при расчетах проверяют напряжения только по формулам двух первых столбцов; лишь для сечений, состоящих из тонких стенок и толстых поясков, необходимо проверять напряжения в промежуточных точках, именно в точках соединения стенки с пояском.

Если принять за основание расчета вторую теорию прочности, как наиболее достоверную, то расчетные формулы прочности на изгиб будут:

$$\frac{\max \sigma_z}{2} \leqslant \tau_д; \quad \max \tau_y \leqslant \tau_д; \quad \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2} \leqslant \tau_д \tag{47}$$

(для точек, указанных в табл. 6).

Для изотропных тел $\tau_д = \frac{1}{2}\sigma_д$, поэтому для них расчетные формулы прочности на изгиб имеют такой вид:

$$\max \sigma_z = \frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_д; \quad \max \tau_y \leqslant \frac{1}{2}\sigma_д; \quad \sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2} \leqslant \sigma_д. \tag{48}$$

Большим распространением в настоящее время, однако, еще пользуются формулы, выведенные на основании третьей теории прочности,

$$\max \sigma_z = \frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_д; \quad \max \tau_y \leqslant 0{,}8\sigma_д; \quad 0{,}35\sigma_z \pm 0{,}65\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2} \leqslant \sigma_д. \tag{49}$$

При проверке прочности в сжатой зоне в формулы (48) и (49) следует подставить вместо W_y величину W_y' и вместо $\sigma_д$ величину $\sigma_{д.\,с}$.

2. Плоскость изгибающих сил и пар не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки (косой изгиб)

Разлагая все силы и пары по направлению координатных осей, получим для данного сечения (рис. 19):

M_x — изгибающий момент в плоскости yz;
M_y — изгибающий момент в плоскости xz;
V_x — срезывающая сила по направлению оси x;
V_y — срезывающая сила по направлению оси y.

На основании принципа наложения каждая из срезывающих сил и каждый из моментов, действующих в сечении бруса, вызовут в нем напряжения такие же, какие бы они вызвали, если бы действовали отдельно. Поэтому при совместном их действии напряжения в какой-либо точке сечения с координатами x_1 и y_1 будут:

нормальное напряжение

$$\sigma_z = \pm \frac{M_x y_1}{J_x} \pm \frac{M_y x_1}{J_y}; \tag{50}$$

касательное напряжение

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \tag{51}$$

где τ_x и τ_y — касательные напряжения в этой точке, вызываемые срезывающими силами V_x и V_y.

Наибольшие касательные напряжения будут в центре тяжести сечения

$$\max \tau = \sqrt{\max \tau_x^2 + \max \tau_y^2}. \tag{52}$$

Наибольшие нормальные напряжения $\max \sigma_z$ будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, причем в тех из них, в которых напряжения от моментов M_x и M_y будут одного знака.

Положение нейтральной линии определится углом α, составляемым ею с осью y, из отношения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_y}{J_x}\frac{M_x}{M_y} = \frac{J_y}{J_x}\operatorname{tg}\varphi. \tag{53}$$

Величина $M_y : M_x$, как легко видеть из рис.19, равна тангенсу угла φ, составляемого плоскостью равнодействующего момента M с осью x.

Если для сечения построен эллипс инерции (рис. 19), то нейтральная линия на нем определится как сопряженный диаметр с направлением плоскости равнодействующего момента.

Таким образом, если x_1 и y_1 будут координаты точки, которая наиболее удалена от нейтральной линии и в которой напряжения складываются, то расчетные формулы для косого изгиба будут:

$$\left|\frac{M_x y_1}{J_x}\right| + \left|\frac{M_y x_1}{J_y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_д; \quad \max\tau \leqslant \tau_д. \tag{54}$$

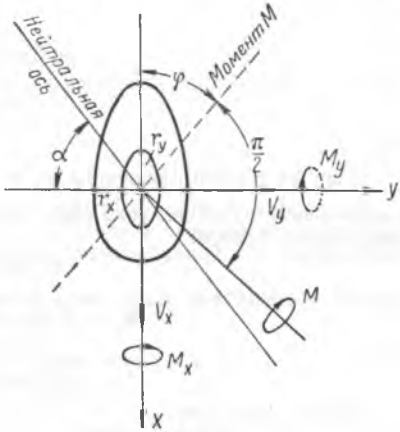


Рис. 19.

Кроме того, для некоторых сечений следует проверять наибольшие касательные напряжения, или приведенные напряжения, для промежуточных точек, как об этом было сказано выше.

§ 15. Подбор профилей изогнутых балок

Размер профиля балки определяется на основании следующих расчетных формул прочности при изгибе (§ 14):

при расчете по наибольшим касательным напряжениям:

$$\frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_д; \tag{55}$$

$$\frac{V_x S_0}{J_y \sigma_0} \leqslant \tau_д; \tag{56}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2} \leqslant \tau_д, \tag{57}$$

причем $\tau_д = 0{,}5\sigma_д$;

при расчете по приведенным напряжениям

$$\frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_д; \tag{58}$$

$$\frac{V_x S_0}{J_y \delta_0} \leqslant \tau_д; \tag{59}$$

$$0{,}35\sigma_z + 0{,}65\sqrt{4\tau_y^2 + \sigma_z^2} \leqslant \sigma_д, \tag{60}$$

причем $\tau_д = 0{,}8\sigma_д$.

В этих формулах M_y и V_x — наибольшие значения изгибающего момента и срезывающей силы по длине балки. По формулам (57), (60) проверяют напряжения в сечениях балки, в которых действуют одновременно изгибающие моменты и срезывающие силы, близкие к наибольшим, причем для проверки берутся точки сечения, в которых стенка профиля соприкасается с полками его.

Можно показать, что однопролетные балки со свободно вращающимися опорными сечениями при нагрузке их по трапеции не нуждаются в проверке прочности по формулам (57), (60).

По формулам (55) и (56) величины, характеризующие размеры профиля, могут быть выражены через заданные величины M_y, V_x, $\sigma_д$ и $\tau_д$ следующим образом:

$$W_y \geqslant \frac{M_y}{\sigma_д}; \tag{61}$$

$$\frac{J\delta_0}{S_0} \geqslant \frac{V_x}{\tau_д}. \tag{62}$$

С другой стороны, величины W_y и $\frac{J_y\delta_0}{S_0}$, характеризующие профиль, могут быть выражены приближенно через величины, определяющие размеры профиля, следующим образом:

$$W_y = \frac{1}{2}\eta F h; \tag{63}$$

$$W_y = h\left[S + \omega\frac{4S_1 - 2S + \omega}{6(2S_1 + \omega)}\right]; \tag{64}$$

$$\frac{J_y\delta_0}{S_0} = k\omega = \omega_1. \tag{65}$$

В этих формулах:

F — площадь профиля;
h — высота профиля;
ω — площадь стенки профиля;
δ_0 — толщина стенки;
S — площадь меньшего пояска;
S_1 — площадь большего пояска;
η — коэффициент утилизации профиля;
$\omega_1 = k\omega$ — приведенная площадь стенки.

Величина коэффициента η для прокатных профилей составляет: для двутаврового профиля при $h > 10$ *см* — от 0,65 до 0,61, для швеллерного — от 0,61 до 0,59, для зетового — от 0,57 до 0,60. В клепаных и сварных балках величина его может быть доведена до 0,7 и даже несколько выше. Для некоторых других простейших профилей η имеет следующие значения:

круглое или эллиптическое сечение . . . . . $\eta = 1/4$
прямоугольное сечение . . . . . $\eta = 1/3$
весьма тонкое круговое кольцо . . . . . $\eta = 1/2$
труба квадратного сечения с весьма тонкими стенками . . . . . $\eta = 2/3$

В формуле (64) множитель при ω заключается в пределах $1/3$—$1/6$; из формулы видно, что величина W_y главным образом зависит от площади меньшего пояска S, второстепенное значение имеет площадь стенки ω; увеличение большего пояска S_1 — почти бесполезно. При применении этой формулы к клепаным балкам можно площадь уголков, соединяющих пояски со стенкой, присчитывать к площади соответствующих поясков, если высота профиля значительно превышает ширину полок уголков; при этом получаемый результат будет на 5—7% больше истинного. Более точный результат будет получаться, если под буквой h подразумевать высоту профиля, уменьшенную на сумму толщин обоих поясков.

Полагая в формуле (64) $S = S_1$, получим для симметричных профилей

$$W_y = h\left(S + \frac{\omega}{6}\right) \tag{66}$$

или с незначительной ошибкой

$$W = hS. \tag{67}$$

Коэффициент k в формуле (65) находится в пределах 1—$2/3$; для клепаных балок величина k составляет обыкновенно около 0,9 и более, для прокатных или сварных симметричных профилей — 0,80—0,85.

О выгодности или невыгодности профилей различных типов удобно судить по величине удельной площади профиля

$$C = \frac{F}{W_1^{2/3}}, \tag{68}$$

где C — удельная площадь профиля;
F — площадь сечения профиля;
W — момент сопротивления сечения профиля.

Для профилей, работающих совместно с пластинами поддерживаемых перекрытий, удельная площадь профиля

$$C_1 = \frac{F}{W_1'^{2/3}}, \tag{69}$$

где F — площадь профиля, приклепанного или приваренного к пластине;
W'_1 — момент сопротивления профиля, вычисленный с учетом всего его сечения, т. е. как самого профиля, так и приклепанной или приваренной к нему пластины.

Величина C_1 для двутавровых профилей может быть приближенно определена по следующей формуле:

$$C_1 = \frac{S + \omega}{\left\{h\left[S + \omega\,\frac{4S_1 - 2S + \omega}{6\,(2S_1 + \omega)}\right]\right\}^{2/3}}, \tag{70}$$

где S — площадь меньшего пояска профиля;
S_1 — площадь большего пояска;
ω — площадь стенки профиля;
h — высота профиля.

Определение размеров профиля нужно начинать с выбора высоты его h; при той же площади сечения F профиль тем выгоднее, чем больше его высота h [формула (63)]. Однако при увеличении высоты будет уменьшаться толщина стенки δ_0, так как площадь ее ω, определяемая формулой (65), не зависит от высоты. Но поскольку при слишком тонкой стенке профиль становится неустойчивым, нельзя произвольно увеличивать высоту стенки h, необходимо соблюдать некоторые нормы, или взятые из практики, или выведенные на основании расчета устойчивости.

Если толщина стенки профиля определяется условием сохранения его устойчивости, то заданным должно считаться отношение $n = h : \delta_0$, которое не должно превышать известного предела. Так, для того чтобы стенка балки не теряла устойчивости под действием скалывающих напряжений до 1500 *атм*, достаточно положить $n \leqslant 85$; для сохранения устойчивости стенки под действием нормальных напряжений, меняющихся по высоте по линейному закону от $+3000$ до -3000 *атм*, достаточно положить $n < 125$. Кроме того, толщина стенки не должна быть меньше известного предела, определяемого практическим условием износа.

Обыкновенно в балках, применяющихся в кораблестроении, высота профиля при значительных нагрузках (5; 10; 20 *т* на 1 пог. *м*) принимается равной $^1/_{10}$—$^1/_{12}$ пролета; профили же большей высоты применяют только при неполных допускаемых напряжениях. При малых нагрузках (меньше 1 *т* на 1 пог. *м*) используют низкие балки, высотой до $^1/_{20}$ длины пролета и даже менее, особенно если берутся прокатные профили.

После того как высота профиля h и толщина стенки δ_0 будут установлены, причем получающаяся при этом площадь стенки ω окажется удовлетворяющей условию прочности (62), т. е.

$$\omega \geqslant \frac{V_x}{k\tau_д},$$

определяют площадь меньшего пояска S по приближенной формуле (67)

$$S = \frac{W_y}{h} = \frac{M_y}{h\sigma_д}.$$

Что касается площади большего пояска S_1, то в судостроительных конструкциях (листы настилов, обшивок и переборок) она обыкновенно определяется особыми условиями местной прочности судового корпуса (см. расчеты корпуса) и поэтому в данном случае должна считаться заданной; если она не задана, то следует брать $S = S_1$.

Определив h, ω, S и S_1, следует подсчитать по более точной формуле (64) момент сопротивления W_y для найденного профиля и сообразно результату этой проверки, если понадобится, изменить найденную площадь меньшего пояска S.

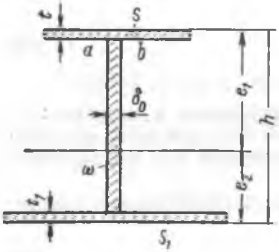


Рис. 20.

Найдя таким образом по приближенным формулам все размеры профиля балки, по табл. 7 находят точные значения величин W_y и $\omega_1 = \frac{J_y \delta_0}{S_0}$.

Если эти величины не будут в достаточной степени удовлетворять расчетным формулам прочности (61) и (62), то по схеме нетрудно видеть, в каком направлении и в какой степени должны быть изменены элементы профиля.

В последнем столбце таблицы вычисляется также величина S'_y — статический момент площади меньшего пояска (и его уголков для клепаных балок) относительно нейтральной оси, необходимая для определения касательного напряжения τ_y для проверки прочности по формулам (57), (60) в сечении ab (рис. 20). Что касается нормального напряжения σ_z, входящего в эти формулы, то оно легко вычисляется по величине нормального напряжения по наружной грани пояска умножением его на отношение расстояния линии ab от нейтральной линии к расстоянию наружной грани до той же линии e_1.

§ 16. Определение элементов составного профиля

Таблица 7

Части профиля	I	II	III	IV	V	VI
	Площади	x	I×II	III×II	$e_1 - x$	I×V
Меньший поясок	S	$\frac{1}{2} t$	. . .	. . .	$e_1 - \frac{1}{2} t$	. . .
Стенка	ω	$\frac{1}{2}(h + t - t_1)$	. . .	. . .		S'_y
Собственный момент инерции стенки	—	—	—	$\frac{\omega h^2}{12}$	$e_1 - t$	$\frac{\frac{1}{2}(e_1 - t)^2 \delta_0}{S_0}$
Больший поясок	S_1	$h - \frac{1}{2} t_1$	. . .	. . .		
	F		B	C		

$$J_y = C - \frac{B^2}{F}; \quad e_1 = \frac{B}{F}; \quad e_2 = h - e_1;$$

$$W_y = J_y : e_1; \quad W'_y = J_y : e_2;$$

$$\omega_1 = k\omega = \frac{J_y \delta_0}{S_0}$$

За плоскость, относительно которой берутся все моменты, взята наружная грань меньшего пояска (рис. 20).

Обозначения:

x — отстояние *ц. т.* частей профилей от оси моментов;

t и t_1 — толщина меньшего и большего поясков.

§ 17. Влияние присоединения листа и пояска к симметричному профилю

В судовых конструкциях приходится часто встречаться с симметричным профилем, присоединенным к листу; момент сопротивления полученного таким образом нового профиля может быть приближенно найден по следующей формуле:

$$W = W_0 + \frac{1}{2} Fh \frac{(1-\eta) S_1}{F + 2S_1}, \tag{71}$$

где W — новый момент сопротивления;

W_0 — момент сопротивления симметричного профиля;

F — площадь симметричного профиля;

h — высота симметричного профиля;

η — коэффициент утилизации симметричного профиля (около 0,6);

S_1 — площадь сечения присоединенного листа.

Второй член этой формулы, выражающий увеличение момента сопротивления, колеблется обычно в пределах (0,25—0,45) W_0.

Если к свободной полке симметричного профиля, соединенного с листом, присоединить поясок (или приклепать уголок) площадью S, то увеличение вследствие этого момента сопротивления профиля пояска определится выражением

$$Sh\left(1 - \frac{1}{2}\frac{F}{F+2S_1}\right), \tag{72}$$

которое при $F < S_1$ будет близко к Sh.

Момент сопротивления полученного таким образом нового профиля может быть определен по формуле

$$W = h\left(\frac{1}{2}\eta F + S\right) + \frac{1}{2} Fh \frac{(S_1 - S)(1-\eta)}{F + 2S_1}. \tag{73}$$

§ 18. Выражения для изгибающих моментов и срезывающих сил

Внешние силы, действующие на балку, по их характеру можно разделить:

а) на сосредоточенные силы, т. е. силы и пары, распределенные на сравнительно коротких участках балки, так что длину этих участков без большой погрешности можно считать близкой к нулю и таким образом положение силы задавать одной координатой;

б) на распределенную нагрузку, действующую по всей длине балки или на значительной части ее длины; распределенная нагрузка задается величиной нагрузки q на единицу длины балки, т. е. в виде функции $q = f(c)$, где c — отстояние сечения от начала координат.

Введем обозначения:

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ — внешние сосредоточенные силы, приложенные в сечениях балки с координатами $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ — внешние пары, приложенные в сечениях с координатами $b_1, b_2 \ldots, b_n$;

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ — распределенные нагрузки, заданные в функциях от текущей координаты c, причем эти функции могут быть и прерывными, если соответствующая нагрузка распределена не по всей длине балки.

Срезывающая сила для какого-либо сечения с координатой z выразится суммой всех сил, лежащих по одну сторону этого сечения, т. е.

$$V_x = \sum_{i=1}^{i=k} P_i + \int_0^z q dc, \tag{74}$$

причем индекс k должен удовлетворять условию $c_k < z < c_{k+1}$.

Точно так же изгибающий момент для какого-либо сечения с координатой z выразится суммой моментов всех сил и пар, лежащих по одну сторону этого сечения, т. е.

$$M_y = \sum_{i=1}^{i=k} P_i (z - c_i) + \sum_{i=1}^{i=k_1} \mathfrak{M}_i + \int_0^z q (z - c) dc, \tag{75}$$

причем индексы k и k_1 должны удовлетворять условиям

$$c_k < z < c_{k+1} \text{ и } b_{k_1} < z < b_{k_1+1}.$$

Вычисленные по приведенным выражениям V_x и M_y представят собой уравнения срезывающих сил и изгибающих моментов для соответствующего участка балки.

§ 19. Выражения для упругой кривой призматической балки

Рассмотрение деформации балки при изгибе сводится к рассмотрению перемещений точек ее оси, причем перемещения эти называются стрелками прогиба, а изогнутая вследствие изгиба ось балки называется упругой кривой. Если все силы и пары, действующие на балку, лежат в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей сечения балки, то изгиб будет происходить в той же плоскости и упругая кривая будет плоской кривой. Стрелки прогиба, т. е. ординаты упругой кривой, считая их от первоначального положения оси, зависят от величины изгибающих моментов, от величины срезывающих сил и от перемещения опор вследствие неполной их жесткости.

Введем следующие обозначения:

M_y — уравнение кривой изгибающего момента в плоскости xz;

V_x — уравнение кривой срезывающих сил;

v_0 — уравнение упругой кривой, т. е. стрелки прогиба балки;

v — уравнение упругой кривой от действия изгибающего момента (от нормальных напряжений);

v_1 — уравнение упругой кривой от срезывающих сил (стрелки прогиба от сдвигов);

v_2 — уравнение упругой кривой от перемещения опор.

Согласно сказанному выше $v_0 = v + v_1 + v_2$.

1. Стрелки прогиба от нормальных напряжений определяются выражением

$$EJ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = M_y$$

или

$$v = \frac{1}{EJ} \int_0^z \int_0^z M_y dz dz + Cz + C_1. \tag{76}$$

2. Стрелки прогиба от сдвигов определяются одним из следующих выражений:

$$v_1 = \frac{S_0}{GJ\delta_0} \int_0^z V_x dz + Cz + C_1 \tag{77}$$

или

$$v_1 = \frac{S_0 M_y}{GJ\delta_0} + Cz + C_1, \tag{78}$$

или

$$v_1 = 2(1+\mu)\frac{S_0}{\delta_0}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + Cz + C_1. \tag{79}$$

Входящая в выражение (78) величина $\frac{J\delta_0}{S_0}$ в § 15 о подборе профилей обозначена $\omega_1 = k\omega$, поэтому это выражение можно переписать в следующем наиболее удобном для вычислений виде:

$$v_1 = \frac{M_y}{G\omega_1} + Cz + C_1. \tag{80}$$

Для балок со сплошным профилем стрелки прогиба от сдвигов v_1 при обычных нагрузках получаются настолько малыми, что ими можно пренебречь по сравнению со стрелками прогиба от нормальных напряжений v (отношение $v_1 : v$ является величиной второго порядка малости, если отношение высоты профиля к длине пролета, т. е. $h : l$, принять за величину первого порядка малости). Так, например, для балки эллиптического сечения при сосредоточенном грузе посредине пролета и при отношении $h : l = \frac{1}{20}$ v_1 составляет лишь $^2/_3\%$ полной стрелки.

Для балок со сложным профилем, а также для балок со сплошным профилем, но нагруженных у опорного сечения, отношение $v_1 : v$ становится величиной однопорядковой с отношением $h : l$, и в этих случаях пренебрегать стрелками прогиба от сдвигов можно лишь для очень длинных и низких балок. Пренебрежение же стрелками v_1 для балок коротких и высоких может повлечь за собой ошибки.

Поясним сказанное примерами для балки двутаврового сечения, лежащей на двух опорах.

При равномерно распределенной нагрузке

$$(v_1 : v)_{\max} = 2.4\,(h : l).$$

При симметричной по треугольнику нагрузке

$$(v_1 : v)_{\max} = \frac{10}{3}(h : l).$$

При сосредоточенной нагрузке посредине

$$(v_1 : v)_{\max} = 6\,(h : l).$$

При нагрузке сосредоточенным грузом в расстоянии c от опоры отношение стрелок в нагруженном сечении

$$(v_1 : v)_{z=c} = 3\frac{h}{l}\frac{l}{l-c}$$

при $c < l - c$.

В приведенные выше выражения для v и v_1 входят произвольные постоянные C и C_1. Величины их определяются из начальных условий, т. е. условий, в которых находятся опорные сечения балки или крайние сечения того участка балки, для которого написаны уравнения стрелок. При этом очевидно, что эти начальные условия должны быть учтены лишь один раз, т. е. если при вычислении v были определены C и C_1 из начальных условий, то при вычислении v_1 произвольные постоянные следует откинуть.

3. Стрелки прогиба от смещения опор. Для балки, свободно лежащей на двух опорах, и для балки, закрепленной одним концом, влияние перемещения опор (вследствие неполной их жесткости) на величину стрелок прогиба обыкновенно выделяют в виде отдельного члена v_0 общего выражения для стрелок прогиба v_0. Понятно, что в этом случае при определении произвольных постоянных в выражении для v и v_1 опоры должны считаться абсолютно жесткими.

Выражения для v_2 являются линейными функциями от координаты z, и вид их легко может быть определен из рис. 21 и 22.

Балка, свободно лежащая на двух опорах (рис. 21),

$$v_2 = A_1R_1 + \frac{A_2R_2 - A_1R_1}{l} z = A_1R_1\left(1 - \frac{z}{l}\right) + A_2R_2\frac{z}{l}. \tag{81}$$

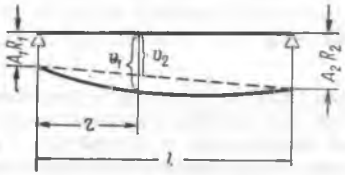


Рис. 21.

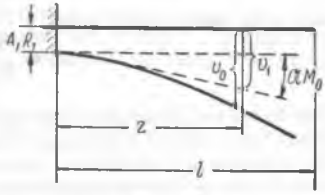


Рис. 22.

Балка, заделанная одним концом (рис. 22),

$$v_2 = A_1R_1 + \mathfrak{A}M_0. \tag{82}$$

В этих выражениях:

R_1 — реакция на левой опоре;
R_2 — реакция на правой опоре;
M_0 — момент на опоре;
A_1, A_2, $\mathfrak{A}$ — коэффициенты податливости опор;
l — длина балки;
z — текущая координата;
начало координат — на левой опоре.

§ 20. Связь между уравнениями изгибающих моментов, срезывающих сил, упругой кривой, углов поворота и распределенной нагрузки

Непосредственно из выражений (74)—(76) вытекает следующий ряд зависимостей между перечисленными в заголовке уравнениями:

$$q = EJ\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = \frac{\partial V}{\partial z}; \tag{83}$$

$$V = EJ\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = \frac{\partial M}{\partial z} = \int_0^z q dc + C; \tag{84}$$

$$M = EJ\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \int_0^z V dz + C = \int_0^z\int_0^z q dc^2 + Cz + C_1; \tag{85}$$

$$EJ\frac{\partial v}{\partial z} = \int_0^z M dz + C = \int_0^z\int_0^z V dz^2 + Cz + C_1; \tag{86}$$

$$EJv = \int_0^z\int_0^z M dz^2 + Cz + C_1. \tag{87}$$

Примечание. Нижним пределом в интегралах уравнений (84) — (87) должна служить координата, соответствующая левому крайнему сечению того участка балки, для которого написаны эти уравнения; в случае, если начало координат совпадает с этим сечением, нижним пределом будет нуль.

Произвольные постоянные C и C_1 в приведенных выражениях определяются из начальных условий, т. е. в зависимости от значений функций V, M, $\frac{dv}{dz}$ и v в крайних сечениях того участка бруса, для которого написаны эти выражения.

Таким образом, пользуясь выражениями (83)—(87), можно по одному из заданных уравнений для q, V M, $\frac{\partial v}{\partial z}$ и v найти все остальные дифференцированием или интегрированием этого уравнения и подстановкой произвольных постоянных.

Графическая зависимость. Для облегчения нахождения опасных сечений балки и проверки правильности вычислений обыкновенно все или некоторые из найденных уравнений для v, $\frac{\partial v}{\partial z}$, M, V и q выстраивают графически в виде кривых линий. Полученные таким образом кривые (эпюры) должны находиться между собой в следующей зависимости, непосредственно вытекающей из рассмотрения выражений (83)—(87):

а) если $q = 0$ на всем участке, то $V = \text{const}$; $M =$ прямая линия;

б) если $q = 0$ в данном сечении, то в этом сечении V достигает максимума или минимума, а M имеет точку перегиба;

в) если $V = 0$ на всем участке, то $q = 0$; $M = \text{const}$; $\frac{\partial v}{\partial z}$ — прямая линия;

г) если $V = 0$ в данном сечении, то в этом сечении M достигает максимума или минимума; $\frac{\partial v}{\partial z}$ имеет точку перегиба;

д) если $M = 0$ на всем участке, то $V = 0$; $q = 0$; v — прямая линия; $\frac{\partial v}{\partial z} = \text{const}$.

е) если $M = 0$ в данном сечении, то в этом сечении v имеет точку перегиба; $\frac{\partial v}{\partial z}$ достигает максимума или минимума.

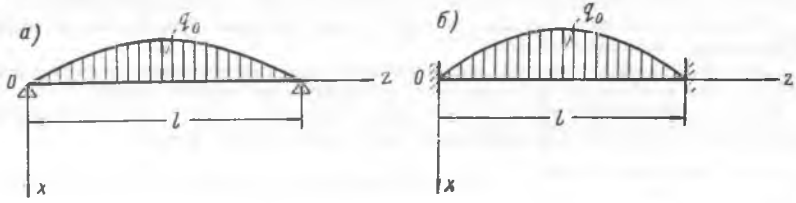


Рис. 23.

Пример. Балка на двух опорах, загруженная синусоидальной нагрузкой (рис. 23):

$$q = q_0 \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = q_0 \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$EJ \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = -\frac{l}{\pi} q_0 \cos \frac{\pi z}{l} + C;$$

$$EJ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{l^2}{\pi^2} q_0 \sin \frac{\pi z}{l} + Cz + C_1;$$

$$EJ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{l^3}{\pi^3} q_0 \cos \frac{\pi z}{l} + \frac{Cz^2}{2} + C_1 z + C_2;$$

$$EJv = \frac{l^4}{\pi^4} q_0 \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{Cz^3}{6} + C_1 \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_3.$$

Произвольные постоянные C, C_1, C_2, C_3 определяются из начальных условий: для случая свободно опертой балки (рис. 23, *а*)

$$C = C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

из условий $EJv'' = 0$ и $v = 0$ при $z = 0$ и $z = l$;

для случая жестко заделанной балки (рис. 23, *б*)

$$C = C_3 = 0;\ \ C_1 = 2\frac{l^2}{\pi^3}q_0;\ \ C_2 = -\frac{l^3}{\pi^3}q_0$$

из условия $v' = 0$ и $v = 0$ при $z = 0$ и $z = l$.

§ 21. Опоры и реакции. Определение реакций

Опорой называется часть конструкции, препятствующая свободным перемещениям некоторых сечений балки. Действие опор на балку выражается силами, называемыми реактивными воздействиями опор, или реакциями, причем силы эти входят в число внешних сил во всех уравнениях предыдущих параграфов.

Перемещение опорного сечения балки можно разложить на вращательное около оси y, проходящей через его ц. т., и два поступательных по координатным осям x и z. В зависимости от того, какие из этих перемещений встречают противодействия со стороны опоры, различают три типа опор:

1) опора заделанная, препятствующая всем трем перемещениям опорного сечения и, следовательно, дающая три реакции M, R_z и R_x;

2) опора, неподвижно опертая, препятствующая поступательному перемещению сечения и, следовательно, дающая две реакции R_x и R_z,

3) опора, подвижно опертая (свободная), препятствующая поступательному перемещению сечения по одной оси x и, следовательно, дающая одну реакцию R_x.

В зависимости от того, в какой степени опора препятствует перемещению опорного сечения, различают опоры абсолютно жесткие и опоры упругие.

Абсолютно жесткой называется опора, допускающая пренебрежимо малые перемещения опорного сечения.

Упругой называется опора, допускающая такие перемещения опорного сечения, которые необходимо принимать во внимание при расчете балки.

Зависимость между величиной реакции упругой опоры и соответственным перемещением опорного сечения может быть представлена в виде

$$r_i = A_i R_i,$$

где r_i — поступательное или вращательное перемещение опорного сечения;
R_i — реактивное воздействие, т. е. сила или пара;
A_i — коэффициент жесткости, характеризующий степень жесткости опоры. Очевидно, что для абсолютно жесткой опоры коэффициент жесткости должен быть принят равным нулю.

Если все внешние силы, действующие на балку, лежат в одной плоскости и не дают составляющих по направлению ее оси, то для определения реакции опор можно воспользоваться лишь двумя условиями равновесия статики, которые для этого случая могут быть написаны в следующем общем виде:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i + \int_0^l q dc = 0; \tag{88}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i c_i + \sum_{i=1}^{i=m} \mathfrak{M}_i + \int_0^l q c dc = 0, \tag{89}$$

где n и m — число внешних сил P_x и пар $\mathfrak{M}_y$ (с учетом реакций).

Для балки, свободно лежащей на двух опорах, и для балки, заделанной одним концом, т. е. для балок с опорами, дающими лишь две реакции, этих условий равновесия достаточно для определения реакций, поэтому такие балки называются статически определимыми.

Балки, для которых уравнений статики недостаточно для определения реакций, называются балками статически неопределимыми, причем лишние (сверх двух) реакции называются лишними неизвестными.

§ 22. Балка на двух опорах

Обозначения:

l — длина балки;
R_1 — реакция левой опоры;
R_2 — реакция правой опоры;
c — координата нагруженного сечения;
$c' = l - c$ — отстояние нагруженного сечения от правой опоры;
z — координата какого-нибудь сечения;
P — сосредоточенный груз;
$\mathfrak{M}$ — момент внешней пары;
$q = F(c)$ — распределенная нагрузка;
A_1, A_2, $\mathfrak{A}$ — коэффициенты жесткости опор;
$B = \frac{l^3}{EJ}$ — коэффициент жесткости балки;
v — стрелки прогиба от нормальных напряжений;
v_1 — стрелки прогиба от сдвига;
v_2 — стрелки прогиба от смещения опор;
$\frac{J\delta_0}{S_0} = \omega_1$ — приведенная площадь стенки.

Начало координат на левой опоре; положительное направление сил — вниз; положительное направление пар — против часовой стрелки.

1. Нагрузка одной сосредоточенной силой (рис. 24)

Реакции опор

$$R_1 = -P\frac{c'}{l}; \quad R_2 = -P\frac{c}{l}. \tag{90}$$

Уравнение срезывающих сил

$$V = -P\frac{c'}{l} + |P. \tag{91}$$

Уравнение изгибающего момента

$$M = P\left[-\frac{c'}{l}z + |(z-c)\right]. \tag{92}$$

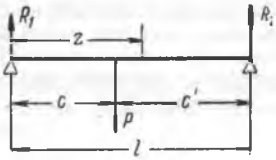


Рис. 24.

Уравнение упругой кривой от нормальных напряжений

$$v = \frac{Pl^3}{EJ}\left[\frac{1}{6}\frac{c'}{l}\frac{z}{l}\left(1 - \frac{c'^2}{l^2} - \frac{z^2}{l^2}\right) + \left|\frac{1}{6}\left(\frac{z-c}{l}\right)^3\right]\right. . \tag{93}$$

Уравнение упругой кривой от сдвигов

$$v_1 = \frac{PS_0}{GJ\delta_0}\left[\frac{c'}{l}z - |(z-c)\right]. \tag{94}$$

Уравнение упругой кривой от осадки опор

$$v_2 = PA_1\frac{c'}{l}\left(1 - \frac{z}{l}\right) + PA_2\frac{c}{l}\frac{z}{l}. \tag{95}$$

В выражениях для V, M, v и v_1 члены, стоящие за вертикальной чертой, должны приниматься в расчет лишь для $z > c$, т. е. для части балки, лежащей вправо от нагруженного сечения.

Уравнение упругой кривой от нормальных напряжений можно представить в следующем виде:

$$v = PB\{f(z, c) + |\varphi(z, c)\}. \tag{96}$$

где $f(z, c)$ — функция, входящая в первый член уравнения (93);
$\varphi(z, c)$ — функция, входящая во второй его член;

B — выражение $\frac{l^3}{EJ}$, характеризующее размеры балки и ее материал, т. е.

$$f(z, c) = \frac{1}{6}\frac{c'}{l}\frac{z}{l}\left\{1 - \frac{c'^2}{l^2} - \frac{z^2}{l^2}\right\}; \tag{97}$$

$$\varphi(z, c) = \frac{1}{6}\left(\frac{z}{l} - \frac{c}{l}\right)^3. \tag{98}$$

Наибольшей величины изгибающий момент достигает в нагруженном сечении

$$M_{\max} = -P\frac{cc'}{l}$$

Сечение с наибольшей стрелкой прогиба находится на более длинном участке балки, причем где бы ни находился груз, координата этого сечения z_1 заключается в пределах $0{,}577l > z_1 > 0{,}423\,l$; для приближенных расчетов можно за наибольшую стрелку прогиба принимать стрелку в среднем сечении, т. е. $v_{\max} = v_{z=\frac{1}{2}l}$ (с ошибкой, не превосходящей 3%). При $c = c' = \frac{1}{2}l$

$$v_{\max} = \frac{1}{48}PB.$$

2. Нагрузка рядом сосредоточенных сил

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — ряд сосредоточенных сил, приложенных в сечениях балки с координатами $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Согласно принципу наложения одновременное действие всех сил можно рассматривать как сумму действий каждой силы в отдельности, поэтому, пользуясь уравнениями предыдущего случая для одной сосредоточенной силы, можно написать следующие выражения:

реакции опор

$$R_1 = -\sum_{i=1}^{i=n} P_i\frac{c_i'}{l}; \quad R_2 = -\sum_{i=1}^{i=n} P_i\frac{c_i}{l};$$

уравнение изгибающего момента

$$M = l^3\sum_{i=1}^{i=n} P_i f_z''(z, c_i) + \Big| l^3\sum_{i=1}^{i=k} P_i\varphi_z''(z, c_i);$$

уравнения упругой кривой

$$v = B\sum_{i=1}^{i=n} P_i f(z, c_i) + \Big| B\sum_{i=1}^{i=k} P_i\varphi(z, c_i);$$

$$v_1 = -\frac{M}{G\omega_1};$$

$$v_2 = -R_1A_1\left(1 - \frac{z}{l}\right) - R_2A_2\frac{z}{l}.$$

причем в выражениях для M и v величина индекса k у сумм, стоящих за чертой, определяется условием

$$c_k < z < c_{k+1}.$$

Эпюра изгибающих моментов получается в виде ломаной линии, сломы которой приходятся против нагруженных сечений; наибольший изгибающий момент имеет место в одном из этих сечений.

Наибольшая стрелка прогиба будет в сечении вблизи середины балки; делая небольшую ошибку, можно считать это сечение совпадающим с серединой балки и наибольшую стрелку прогиба вычислять по выражению

$$v_{\max} = \sum_{i=1}^{i=n} v_i \Big|_{z=\frac{l}{2}}.$$

Нахождение стрелок прогиба в нагруженных сечениях (для расчета статически неопределимых балок) может быть значительно облегчено применением следующей теоремы Максвелла.

Стрелка прогиба v в каком-нибудь сечении балки от действия груза, приложенного в другом сечении, равна стрелке прогиба в этом последнем, если груз будет перенесен в первое сечение.

3. Нагрузка парой сил

Действие пары можно рассматривать как действие двух равных и противоположных сил P и $-P$, приложенных в сечениях с координатами c и $c+\Delta c$, причем момент пары $\mathfrak{M} = P\Delta c$, где Δc — плечо пары — величина того же порядка, что и поперечные размеры балки.

Действие на балку каждой из сил P и $-P$, составляющих пару, может быть получено по уравнениям предыдущего параграфа.

Сумма действий обеих сил даст действие на балку пары, приложенной в сечении с координатой c.

Пусть $PF(z, c)$ представляет одно из выражений изгиба балки сосредоточенной силой P, приложенной в сечении с координатой c; тогда соответственное выражение изгиба для силы $-P$, приложенной в сечении с координатой $c+\Delta c$, будет $-PF(z, c+\Delta c)$, а то же выражение изгиба балки под действием пары $\mathfrak{M}$—

$$P\left[F(z, c) - F(z, c+\Delta c)\right].$$

Последнее выражение после разложения второго члена в скобках в ряд Тейлора по степени приращения Δc и пренебрежения членами, содержащими квадраты и кубы малой величины, примет следующий вид:

$$P\left[F(z, c) - F(z, c) - F_c'(z, c)\,\Delta c\right] = -P\Delta c F_c'(z, c) = -\mathfrak{M}\,F_c'(z, c).$$

Из этого выражения видно, что для получения уравнения изгиба балки парой $\mathfrak{M}$ нужно продифференцировать по c соответственное уравнение для изгиба балки сосредоточенной силой P и заменить в нем множитель P на $-\mathfrak{M}$.

Пример. Реакция от пары $\mathfrak{M}$, приложенной в сечении с координатой c. Дифференцируя выражения (90) по c и заменяя P на $-\mathfrak{M}$, получим

$$R_1 = -\frac{\mathfrak{M}}{l};\quad R_2 = +\frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Уравнение изгибающего момента. Производя те же действия над уравнением (92), получим

$$M = \mathfrak{M}\left(-\frac{z}{l} + |1|\right).$$

Все уравнения и выражения для случая действия одной пары могут быть распространены и на случай действия нескольких пар тем же приемом, как и при действии на балку нескольких сосредоточенных сил.

4. Нагрузка распределенными силами

Все уравнения изгиба балки под действием распределенной нагрузки можно получить из соответственных уравнений для сосредоточенной силы, применяя метод наложения.

Распределенная нагрузка задается уравнением $q = F(c)$, где q — величина нагрузки на единицу длины балки в данном сечении, c — отстояние сечения от левой опоры, F — функция, определяющая закон распределения нагрузки по длине балки.

Всякий элемент распределенной нагрузки qdc, приложенный в сечении c, действует независимо от остальной нагрузки; действие его может быть рассматриваемо как действие сосредоточенного груза и, следовательно, выражено уравнениями, полученными для этого случая.

Интегрируя затем эти уравнения по всей длине балки, получим уравнения для изгиба балки распределенной нагрузкой. При этом очевидно, что при интегрировании за переменную должна считаться координата c, а за постоянную — координата z.

Член за вертикальной чертой в уравнениях изгиба для сосредоточенного груза нужен только для грузов, лежащих влево от сечения с координатой z, т. е. для которых $c < z$. Поэтому пределы интеграла, соответствующего этому члену, должны быть 0 и z, пределы интеграла, соответствующего первому члену, должны быть 0 и l, так как этот член берется для всех грузов.

Пример. Реакции опор

$$R_1 = -\frac{1}{l}\int_0^l qc'dc; \quad R_2 = -\frac{1}{l}\int_0^l qcdc.$$

Уравнение упругой кривой

$$v = \int_0^l f(z, c)\, qdc + B\int_0^z \varphi(z, c)\, qdc.$$

§ 23. Балка с одним заделанным концом

1. Нагрузка одной сосредоточенной силой (рис. 25)

Реакции опор

$$R_1 = -P, \quad \mathfrak{M} = Pc.$$

Уравнение срезывающих сил

$$V = -P + |P. \tag{99}$$

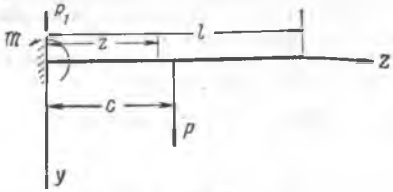


Рис. 25.

Уравнение изгибающих моментов

$$M = P(c - z) + |P(z - c). \tag{100}$$

Уравнение упругой кривой от нормальных напряжений

$$v = \frac{Pl^3}{EJ}\left[\frac{z^2}{l^2}\left(\frac{c}{2l} - \frac{z}{6l}\right) + \left|\frac{1}{6}\left(\frac{z}{l} - \frac{c}{l}\right)^3\right]\right. \tag{101}$$

Уравнение упругой кривой от сдвигов

$$v_1 = \frac{P}{G\omega_1}[z - |(z - c)] = \frac{\mathfrak{M} - M}{G\omega_1}. \tag{102}$$

Уравнение упругой кривой от осадки опор

$$v_2 = P(A + \mathfrak{A}cz). \tag{103}$$

2. Нагрузка рядом сосредоточенных грузов

Применяя принцип наложения, можно предыдущие уравнения распространить на случай действия ряда сосредоточенных грузов, подобно тому, как это делалось для балки, лежащей на двух опорах (см. § 22).

3. Нагрузка парой сил

Рассуждая так же, как и для балки на двух опорах, можно убедиться, что для получения уравнений изгиба закрепленной балки парой $\mathfrak{M}$ нужно продифференцировать по переменной c соответственные уравнения для изгиба такой балки сосредоточенной силой P и в полученных выражениях заменить множитель P на $-\mathfrak{M}$.

4. Нагрузка распределенными силами

Применяя тот же метод, что и для балки на двух опорах (§ 22), можно получить все уравнения изгиба для распределенной нагрузки, исходя из соответственных уравнений изгиба для сосредоточенного груза.

§ 24. Влияние на изгиб способа распределения нагрузки на отдельных участках балки

Иногда не представляется возможным определить точно закон распределения нагрузки на отдельных участках балки. В этом случае такую нагрузку принимают за сосредоточенную, приложенную посредине участка, или за равномерно распределенную. При этом погрешность в расчете может быть оценена следующим образом (для балки на двух опорах).

1. Погрешность в изгибающих моментах будет лишь в нагруженном участке балки, причем величина наибольшей абсолютной погрешности определится выражением

$$\Delta M_{\max} = -k\frac{Pb}{4} \qquad (104)$$

где P — величина нагрузки на данном участке;
b — длина участка;
k — отвлеченный множитель, меньший единицы.

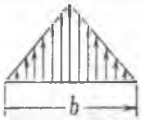


Рис. 26.

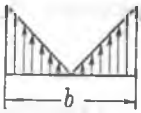


Рис. 27.

При замене двух равных сосредоточенных грузов, приложенных на границах участка, одним, приложенным посредине участка, множитель k обращается в единицу.

При замене сосредоточенным грузом нагрузки, показанной на рис. 26, $k = \frac{1}{3}$.

При замене сосредоточенным грузом нагрузки, показанной на рис. 27, $k = \frac{2}{3}$

Если же нагрузки, показанные на рис. 26 и 27, заменяются равномерно распределенной нагрузкой, $k = \frac{1}{6}$.

Наибольшая относительная погрешность в изгибающем моменте вследствие указанных выше изменений нагрузок будет малой величиной, порядка $\frac{b}{l}$.

2. Погрешность в углах поворота и в стрелках прогиба будет на всем пролете балки; наибольшая абсолютная погрешность в стрелке прогиба определится выражением

$$(\Delta v)_{\max} = \frac{Bk_1}{6} P \frac{cc'}{l}\left(\frac{b}{l}\right)^2. \qquad (105)$$

где c и c' — отстояния сосредоточенного груза от левой и правой опор;
k_1 — отвлеченный множитель.

При замене двух равных сосредоточенных грузов, приложенных на границах участка, одним, приложенным посредине, $k_1 = 1$.

При замене сосредоточенным грузом нагрузки, показанной на рис. 26, $k_1 = \frac{1}{6}$.

При замене сосредоточенным грузом нагрузки, показанной на рис. 27, $k_1 = \frac{1}{2}$.

При замене сосредоточенным грузом равномерно распределенной нагрузки $k_1 = \frac{1}{3}$.

Абсолютная погрешность в углах поворота сечений для левого участка балки определится выражением

$$\Delta v' = \frac{Bk_1}{8} P \frac{c'}{l^2} \left(\frac{b}{l}\right)^2.$$

Для получения погрешности на правом участке балки в этом выражении букву c' нужно заменить на c.

3. Относительные погрешности в углах поворота и в стрелках прогиба будут малыми величинами, порядка $\frac{b}{l}$; такого же порядка будет, следовательно, и погрешность в величинах лишних неизвестных для статически неопределимых балок. Если балку разделить на несколько участков и в каждом из них распределенную нагрузку заменить сосредоточенным грузом или, наоборот, сосредоточенный груз заменить распределенной нагрузкой, то происходящие от такой замены относительные погрешности в изгибающих моментах, стрелках прогиба и углах поворота сечений будут малыми величинами порядка $\left(\frac{b}{l}\right)^2$ или $\left(\frac{l}{n}\right)^2$, где n — число участков.

Основываясь на этом, можно нагрузку из сосредоточенных грузов и нагрузку, распределенную по какой-либо неправильной линии, заменять нагрузкой, равномерно распределенной по длине балки, если взять пять или больше участков, так как получающаяся при этом погрешность вполне допустима в практическом расчете.

ГЛАВА 5

ТАБЛИЦЫ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗГИБА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

В таблицах приведены уравнения и выражения для элементов изгиба статически определимых балок, для наиболее часто встречающихся на практике случаев нагрузки.

Обозначения:

l — расстояние между опорами, или длина балки;
a — отстояние места приложения силы от начала координат (от левого конца балки);
$b = l - a$ — отстояние места приложения силы от правого конца балки;
P — сосредоточенная сила;
Q — распределенная нагрузка;
R_1, R_2, $\mathfrak{M}$ — реакции опорных сечений;
v — стрелка прогиба от нормальных напряжений;
M — текущий изгибающий момент.

Начало координат — на левом конце балки; положительное направление сил — вниз, положительное направление моментов — против часовой стрелки.

Эпюры изгибающих моментов показаны сплошными линиями; эпюры срезывающих сил — пунктирными линиями.

Стрелку прогиба от сдвигающих напряжений v_1 и от осадки опор v_2 можно получить по приведенным в табл. 8 данным, пользуясь выражениями, приведенными в § 19.

Примечания: 1. Отстояние места приложения сосредоточенной силы от концов балки в таблице обозначены через a и b, а не через c и c' (как делалось раньше) для большей ясности написания формул.

2. Для случаев нагрузки 1, 2, 4—7, 9—12, показанных в табл. 9, начало координат принято на свободном опускающемся конце балки.

3. Входящая в выражение для стрелок прогиба величина $\frac{l^3}{EJ}$, характеризующая степень жесткости балки, в дальнейшем будет обозначаться буквой B.

4. В выражении для стрелок прогиба и углов поворота упругой кривой члены, стоящие за вертикальной чертой, относятся лишь к сечениям, для которых $z > a$.

§ 25. Балка, свободно лежащая на двух опорах

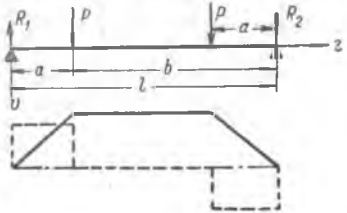
Таблица 8

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
1	Сосредоточенный груз в середине пролета	$R_1 = -\frac{P}{2}$ $R_2 = -\frac{P}{2}$	$M = -Pl\left[\frac{z}{2l} - \left\|_{\frac{l}{2}}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)\right.\right]$ $M_{max} = -\frac{Pl}{4}$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{Pl^2}{16EJ}\left[1 - 4\frac{z^2}{l^2} + \left\|_{\frac{l}{2}} 8\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right.\right]$ $v'_0 = \frac{Pl^2}{16EJ}$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{Pl^2}{16EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{Pl^3}{16EJ}\left[\frac{z}{l} - \frac{4}{3}\frac{z^3}{l^3} + \left\|_{\frac{l}{2}} \frac{8}{3}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^3\right.\right]$ $v_{max} = \frac{Pl^3}{48EJ}$ при $z = \frac{l}{2}$
2	Сосредоточенный груз в пролете	$R_1 = -P\frac{b}{l}$ $R_2 = -P\frac{a}{l}$	$M = -Pl\left[\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l} - \left\|_{a}\left(\frac{z-a}{l}\right)\right.\right]$ $M_{max} = -\frac{Pab}{l}$ при $z = a$	$v' = \frac{Pl^2}{6EJ}\left[\frac{b}{l}\left(1 - \frac{b^2}{l^2} - 3\frac{z^2}{l^2}\right) + \left\|_{a} 3\left(\frac{z-a}{l}\right)^2\right.\right]$ $v'_0 = \frac{Pab}{6EJ}\left(1 + \frac{b}{l}\right)$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{Pab}{6EJ}\left(1 + \frac{a}{l}\right)$ при $z = l$ $v'_{0max} = 0{,}03629\frac{Pl^2}{EJ}$ при $a = 0{,}4226l$	$v = \frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l}\left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{z^2}{l^2}\right) + \left\|_{a}\left(\frac{z-a}{l}\right)^3\right.\right]$ $v_a = \frac{Pa^2b^2}{3EJl}$ при $z = a$ $v_{max} = 0{,}0641\frac{Pbl^2}{EJ}\times\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ при $z = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$, если $a > b$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
3	Сосредоточенный груз вне пролета	$R_1 = \frac{Pb}{l}$ $R_2 = -\frac{Pa}{l}$	$M = Pb\frac{z}{l}$ при $z \leqslant l$ $M = P(a - z)$ при $z \geqslant l$ $M_{max} = Pb$ при $z = l$	$v' = \frac{Pl^2}{6EJ} \times$ $\times \left[\frac{b}{l}\left(3\frac{z^2}{l^2} - 1\right) - \right.$ $\left. - \left[3\frac{a}{l}\left(\frac{z-l}{l}\right)^2\right]\right.$ $v_0' = -\frac{Pbl}{6EJ}$ при $z = 0$ $v_l' = \frac{Pbl}{3EJ}$ при $z = l$ $v_a' = \frac{Pl^2}{6EJ}\left(2\frac{b}{l} + 3\frac{b^2}{l^2}\right)$ при $z = a$	$v = \frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l} \times\right.$ $\times \left(\frac{z^2}{l^2} - 1\right) - \left[\frac{a}{l} \times\right.$ $\times \left.\left(\frac{z-l}{l}\right)^3\right]$ $v_a = \frac{Pl^3}{3EJ}\left(\frac{b^2}{l^2} + \frac{b^3}{l^3}\right)$ при $z = a$

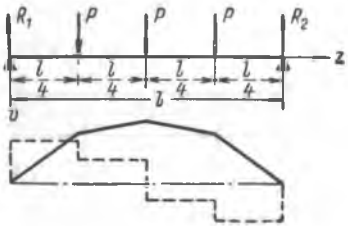
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
4	Два симметричных груза 	$R_1 = R_2 = -P$	$M = -Pl\left[\frac{z}{l} - \left\|_{a}\frac{z-a}{l} - \left\|_{a+b}\frac{z-a-b}{l}\right.\right.\right]$ $M_{max} = -Pa$ при $a \leqslant z \leqslant a+b$	$v' = \frac{Pl^2}{2EJ}\left[\frac{ab}{l^2} - \frac{z^2}{l^2} + \left\|_{a}\left(\frac{z-a}{l}\right)^2 + \left\|_{a+b}+\left(\frac{z-b}{l}\right)^2\right.\right.\right]$ $v_0' = -v_l' = \frac{Pab}{2EJ}$	$v = \frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{z}{l}\left(3\frac{ab}{l^2} - \frac{z^2}{l^2}\right) + \left\|_{a}\left(\frac{z-a}{l}\right)^3 + \left\|_{a+b}\left(\frac{z-b}{l}\right)^3\right.\right.\right]$ $v_a = \frac{Pla^2}{6EJ}\left(3\frac{b}{l} - \frac{a}{l}\right)$ при $z = a$ $v_{max} = \frac{Pl^2a}{6EJ}\left(\frac{3}{4} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = \frac{l}{2}$

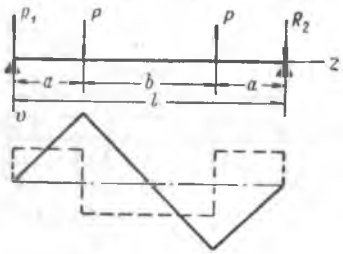
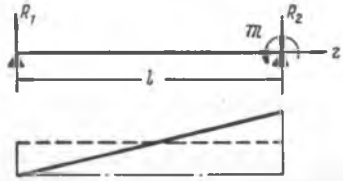
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
5	Два симметричных груза	$R_1 = R_2 = -P$	$M = -Pz$ при $z \leqslant \frac{l}{3}$ $M = -\frac{Pl}{3}$ при $\frac{l}{3} \leqslant z \leqslant \frac{2l}{3}$ $M = -P\left(\frac{2l}{3} - z\right)$ при $z \geqslant \frac{2l}{3}$ $M_{max} = -\frac{Pl}{3}$	$v' = \frac{Pl^2}{18EJ}\left[2 - \left(\frac{3z}{l}\right)^2 + \left\|\left(\frac{3z}{l} - 1\right)^2 + \left\|_{\frac{l}{3}} + \left\|_{\frac{2l}{3}}\left(\frac{3z}{l} - 2\right)^2\right.\right.\right.$ $v'_0 = \frac{Pl^2}{9EJ}$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{Pl^2}{9EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{Pl^3}{18EJ}\left[2\frac{z}{l} - 3\frac{z^3}{l^3} + \left\|3\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{3}\right)^3 + \left\|_{\frac{l}{3}} + \left\|_{\frac{2l}{3}}3\left(\frac{z}{l} - \frac{2}{3}\right)^3\right.\right.\right.$ $v_{max} = \frac{23}{648} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$ при $z = \frac{l}{2}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
6	Три груза 	$R_1 = R_2 = -\frac{3}{2}P$	$M = \frac{3}{2}Pz$ при $z \leqslant \frac{l}{4}$ $M = -P\left(\frac{l}{4} + \frac{z}{2}\right)$ при $\frac{l}{4} \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$ $M = -P\left(\frac{3l}{4} - \frac{z}{2}\right)$ при $\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant \frac{3l}{4}$ $M = -P\left(\frac{3l}{2} - \frac{3z}{2}\right)$ при $z \geqslant \frac{3l}{4}$ $M_{max} = -\frac{Pl}{2}$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{Pl^2}{32EJ}\left[5 - 24\frac{z^2}{l^2} + \left\|_{\frac{l}{4}}\left(\frac{4z}{l} - 1\right)^2 + \left\|_{\frac{l}{2}}\left(\frac{4z}{l} - 2\right)^2 + \left\|_{\frac{3l}{4}}\left(\frac{4z}{l} - 3\right)^2\right.\right.$ $v'_0 = \frac{5}{32} \cdot \frac{Pl^2}{EJ}$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{5}{32} \cdot \frac{Pl^2}{EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{Pl^3}{96EJ}\left[15\frac{z}{l} - 24\frac{z^3}{l^3} + \left\|_{\frac{l}{4}} 16\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{4}\right)^3 + \left\|_{\frac{l}{2}}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^3 + \left\|_{\frac{3l}{4}} 16\left(\frac{z}{l} - \frac{3}{4}\right)^3\right.\right.$ $v_{max} = \frac{19}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$ при $z = \frac{l}{2}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
7	Два антисимметричных груза 	$R_1 = -\frac{Pb}{l}$ $R_2 = +\frac{Pb}{l}$	$M = -\frac{Pb}{l} z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{Pa}{l}(l - 2z)$ при $a \leqslant z \leqslant a + b$ $M = -\frac{Pb}{l}(z - l)$ при $z \geqslant a + b$	$v' = \frac{Pl^2}{6EJ}\left[\frac{b}{l} \times \left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right) - 3\frac{b}{l} \times \frac{z^2}{l^2} - \Big\|_a 3\left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l}\right)^2 - \Big\|_{a+b} 3\left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l} - \frac{b}{l}\right)^2\right]$ $v'_0 = \frac{Pbl}{6EJ}\left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = 0$ $v'_l = \frac{Pbl}{6EJ}\left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = l$	$v = \frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{b}{l}\left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right) \times \frac{z}{l} - \frac{b}{l} \cdot \frac{z^3}{l^2} + \Big\|_a \left(\frac{z-a}{l}\right)^3 - \Big\|_{a+b} \left(\frac{z-a-b}{l}\right)^3\right]$ $v_{\max} = \frac{Pa^2b}{6EJ}\left(1 - 2\frac{a}{l}\right)$ при $z = a$
8	Сосредоточенный момент на опоре 	$R_1 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$ $R_2 = \frac{\mathfrak{M}}{l}$	$M = -\mathfrak{M}\frac{z}{l}$ $M_{\max} = -\mathfrak{M}$ при $z = l$	$v' = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}\left(1 - 3\frac{z^2}{l^2}\right)$ $v'_0 = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{\mathfrak{M}l}{3EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{\mathfrak{M}l^2}{6EJ}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right)$ $v_{\max} = 0{,}0778\frac{\mathfrak{M}l^2}{EJ}$ при $z = 0{,}5774l$

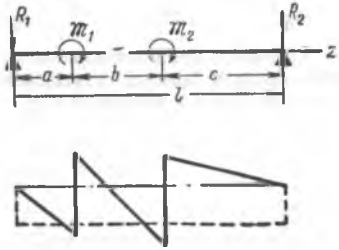
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
9	Сосредоточенный момент в пролете	$R_1 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$ $R_2 = \frac{\mathfrak{M}}{l}$	$M = -\mathfrak{M}\frac{z}{l}$ при $z \leqslant a$ $M = \mathfrak{M}\left(1 - \frac{z}{l}\right)$ при $z \geqslant a$ $M_{max} = -\mathfrak{M}\frac{a}{l}$ или $M_{max} = \mathfrak{M}\frac{b}{l}$ в зависимости от того, какой из них по абсолютному значению больше	$v' = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}\left[1 - 3\frac{b^2}{l^2} - 3\frac{z^2}{l^2} + \Big\|_a 6\left(\frac{z-a}{l}\right)\right]$ $v'_0 = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}\left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$ при $z = 0$ $v'_l = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = l$ $v'_a = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}\left(3\frac{ab}{l^2} - 1\right)$ при $z = a$	$v = \frac{\mathfrak{M}l^2}{6EJ} \times \left[\frac{z}{l}\left(1 - 3\frac{b^2}{l^2} - \frac{z^2}{l^2}\right) + \Big\|_a 3\left(\frac{z-a}{l}\right)^2\right]$ $v_a = \frac{\mathfrak{M}ab}{3EJ}\left(\frac{a-b}{l}\right)$ Если момент приложен вблизи середины пролета ($0{,}4227 < \frac{a}{l} < 0{,}5773$), то упругая линия имеет максимум, минимум и точку перегиба. Если момент приложен левее указанного интервала, упругая линия имеет только минимум (выпуклость кверху); если правее — только максимум (выпуклость книзу)

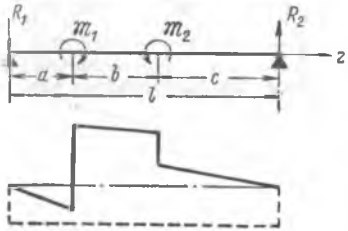
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
10	Сосредоточенный момент на опоре	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$	$M = -\frac{\mathfrak{M}}{l}(l - z)$ $M_{\max} = -\mathfrak{M}$ при $z = 0$	$v' = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ} \times$ $\times \left(2 - 6\frac{z}{l} + 3\frac{z^2}{l^2}\right)$ $v_0' = \frac{\mathfrak{M}l}{3EJ}$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{\mathfrak{M}l}{6EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{\mathfrak{M}l}{6EJ} z \times$ $\times \left(2 - 3\frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2}\right)$ $v_{z=\frac{l}{2}} = \frac{\mathfrak{M}l^2}{16EJ}$ $v_{\max} = 0.0641\frac{\mathfrak{M}l^2}{EJ}$ при $z = 0{,}423l$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
11	Два сосредоточенных момента в пролете 	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l}$	$M = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l} z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l} \times (l - z) + \frac{\mathfrak{M}_2}{l} z$ при $a \leqslant z \leqslant (a + b)$ $M = -\frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l} \times (l - z)$ при $z \geqslant (a + b)$ $M_{\max_1} = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l} \times (l - a) + \frac{\mathfrak{M}_2}{l} a$ при $z = a$ $M_{\max_2} = -\frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l} c$ при $z = l - c$	$v' = -\frac{\mathfrak{M} l}{6EJ} \times \left[-3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_1 - 3\frac{c^2}{l^2}\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - 3\frac{z^2}{l^2}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) + \Big\|_a 6\frac{z-a}{l} \times \mathfrak{M}_1 + \Big\|_{a+b} 6\frac{z-a-b}{l}\mathfrak{M}_2\right]$ $v_0' = -\frac{l}{6EJ}\left[\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - 3\frac{c^2}{l^2}\mathfrak{M}_2 - 3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_1\right]$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{l}{6EJ} \times \left[\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - 3\frac{a^2}{l^2} \times \mathfrak{M}_1 - 3\left(\frac{a+b}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_2\right]$ при $z = l$	$v = -\frac{l^2}{6EJ}\left\{\frac{z}{l} \times \left[\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) - 3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2 \times \mathfrak{M}_1 - 3\frac{c^2}{l^2}\mathfrak{M}_2\right] + \Big\|_a 3\left(\frac{z-a}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_1 + \Big\|_{a+b} 3\left(\frac{z-a-b}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_2\right\}$

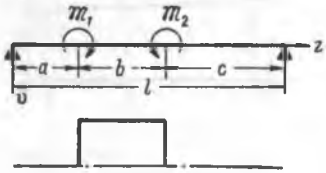
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
12	Два неравных сосредоточенных момента в пролете, действующих в противоположные стороны 	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}$	$M = \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l} z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l} \times (l - z) - \frac{\mathfrak{M}_2}{l} z$ при $a \leqslant z \leqslant (a + b)$ $M = -\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l} \times (l - z)$ при $z \geqslant (a + b)$ $M_{max} = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l} \times (l - a) - \frac{\mathfrak{M}_2}{l} a$ при $z = a$	$v' = -\frac{l}{6EJ} \times \left[-3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_1 + 3\frac{c^2}{l^2}\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - 3\frac{z^2}{l^2} \times (\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) + \Big\|_a 6\frac{z-a}{l}\mathfrak{M}_1 - \Big\|_{a+b} 6\frac{z-a-b}{l}\mathfrak{M}_2\right]$ $v_0' = -\frac{l}{6EJ} \times \left[\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 + 3\frac{c^2}{l^2} \times \mathfrak{M}_2 - 3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_1\right]$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{l}{6EJ} \times \left[\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - 3\frac{a^2}{l^2} \times \mathfrak{M}_1 + 3\left(\frac{a+b}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_2\right]$ при $z = l$	$v = -\frac{l^2}{6EJ}\left\{\frac{z}{l} \times \left[\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) \times (\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) - 3 \times \left(\frac{b+c}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_1 + 3\frac{c^2}{l^2} \times \mathfrak{M}_2\right] + \Big\|_a 3\left(\frac{z-a}{l}\right)^2 \times \mathfrak{M}_1 - \Big\|_{a+b} 3 \times \left(\frac{z-a-b}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_2\right\}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
13	Сосредоточенные моменты на обеих опорах	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}$	$M = -\mathfrak{M}_1 \frac{l-z}{l} - \mathfrak{M}_2 \frac{z}{l}$ $M_{max} = -\mathfrak{M}_1$ при $z = 0$	$v' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left[2 + \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}_1} - 6\frac{z}{l} - 3\left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} - 1\right) \times \frac{z^2}{l^2}\right]$ $v_0' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left(2 + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left(1 + 2\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)$ при $z = l$	$v = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ} z \left[2 + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} - 3\frac{z}{l} - \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} - 1\right)\frac{z^2}{l^2}\right]$ $v_{z=\frac{l}{2}} = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{16EJ} \times \left(1 + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)$
14	Сосредоточенные моменты на обеих опорах	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{l}$	$M = -\mathfrak{M}_1 \frac{l-z}{l} + \mathfrak{M}_2 \frac{z}{l}$ $M_{max} = -\mathfrak{M}_1$ при $z = 0$	$v' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left[2 - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} - 6\frac{z}{l} + 3\left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} + 1\right)\frac{z^2}{l^2}\right]$ $v_0' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left(2 - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{\mathfrak{M}_2 l}{6EJ}\left(1 - \frac{2\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)$ при $z = l$	$v = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ} z \left[2 - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} + 1\right)\frac{z^2}{l^2}\right]$ $v_{z=\frac{l}{2}} = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{16EJ} \times \left(1 - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
15	Два равных сосредоточенных момента в пролете, действующих в противоположные стороны 	$R_1 = R_2 = 0$	$M = 0$ при $z < a$ $M = -\mathfrak{M}_1$ при $a \leqslant z \leqslant (a+b)$ $M = 0$ при $z > (a+b)$ $M_{max} = -\mathfrak{M}_1$	$v' = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left[3\frac{c^2}{l^2} - 3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2 + \Big\|_a 6 \times \frac{z-a}{l} - \Big\|_{a+b} 6\frac{z-a-b}{l}\right]$ $v_0' = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left[3\frac{c^2}{l_2} - 3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2\right]$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ} \times \left[3\left(\frac{a+b}{l}\right)^2 - 3\frac{a^2}{l^2}\right]$ при $z = l$	$v = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\left\{\frac{z}{l} \times \left[3\frac{c^2}{l^2} - 3\left(\frac{b+c}{l}\right)^2\right] + \Big\|_a 3\left(\frac{z-a}{l}\right)^3 - \Big\|_{a+b} 3 \times \left(\frac{z-a-b}{l}\right)^2\right\}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
16	Равномерно распределенная нагрузка по всему пролету	$R_1 = R_2 = -\frac{Q}{2}$	$M = -\frac{Ql}{2} \times \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right)$ $M_{max} = -\frac{Ql}{8} = -0{,}125Ql$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{Ql^2}{24EJ} \times \left(1 - 6\frac{z^2}{l^2} + 4\frac{z^3}{l^3}\right)$ $v'_0 = -v'_l = \frac{Ql^2}{24EJ}$	$v = \frac{Ql^3}{24EJ} \times \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4}\right)$ $v_{max} = \frac{5Ql^3}{384EJ}$ при $z = \frac{l}{2}$
17	Равномерно распределенная нагрузка на участке	$R_1 = -\frac{Qb}{2l}$ $R_2 = -Q \times \left(1 - \frac{b}{2l}\right)$	$M = -\frac{Ql}{2}\left[\frac{b}{l} \cdot \frac{z}{l} - \left\|\!\!\underset{a}{\|}\frac{(z-a)^2}{lb}\right]$ $M_{max} = -\frac{Qb}{8} \times \left(1 + \frac{a}{l}\right)^2$	$v' = \frac{Qlb}{24EJ}\left[1 + 2\frac{a}{l} - 6\frac{z^2}{l^2} + \left\|\!\!\underset{a}{\|}4\frac{(z-a)^3}{lb^2}\right]$ $v'_0 = \frac{Qlb}{24EJ} \times \left(1 + 2\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ $v'_l = -\frac{Qlb}{24EJ}\left(1 + \frac{a}{l}\right)^2$	$v = \frac{Ql^2b}{24EJ}\left[\frac{z}{l} \times \left(1 + 2\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} - 2\frac{z^2}{l^2}\right) + \left\|\!\!\underset{a}{\|}\frac{(z-a)^4}{l^2b^2}\right]$ Если $a > 0{,}547l$, v_{max} будет на левом участке при $z = \sqrt{\frac{1}{6}(l^2 + 2al - a^2)}$; если $a < 0{,}547l$, v_{max} будет на правом загруженном участке

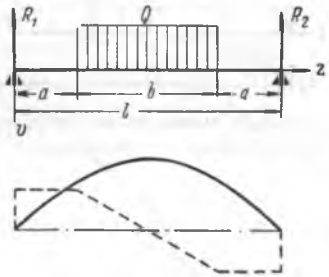
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
18	Консольная балка с равномерно распределенной нагрузкой	$R_1 = -Q \times \frac{l-b}{2l}$ $R_2 = -Q\frac{a}{2l}$	$M = -\frac{Ql}{2}\left[\frac{l-b}{l} \times \frac{z}{l} - \frac{l}{a}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$ при $z \leqslant l$ $M = \frac{Q}{2a}(a-z)^2$ при $z \geqslant l$	$v' = \frac{Ql^3}{12EJ}\left[2\frac{l}{a}\left(\frac{z}{l}\right)^3 - 3\frac{l-b}{l}\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \frac{l^3-2b^3}{2al} - \Big\|_l 3\frac{a}{l} \times \frac{(z-l)^2}{l^2}\right]$ $v'_0 = \frac{Q}{24EJ} \cdot \frac{l(l^3-2b^3)}{a}$ $v'_l = -\frac{Ql^2}{24EJ} \times \left(8\frac{a}{l} - 3\frac{l}{a} - 4\right)$	$v = \frac{Ql^3}{12EJ}\left[\frac{l}{2a}\left(\frac{z}{l}\right)^4 - \frac{l-b}{l}\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \frac{l^3-2b^3}{2al} \cdot \frac{z}{l} - \Big\|_l \frac{a}{l}\left(\frac{z-l}{l}\right)^3\right]$

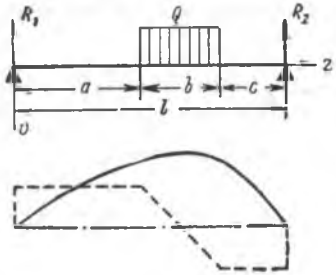
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
19	Равномерно распределенная нагрузка на половине пролета	$R_1 = -\frac{1}{4}Q$ $R_2 = -\frac{3}{4}Q$	$M = -\frac{Q}{4}z$ при $z \leqslant \frac{l}{2}$ $M = -\frac{Q}{4} \times \left(5z - 4\frac{z^2}{l} - l\right)$ при $z \geqslant \frac{l}{2}$ $M_{max} = \frac{9}{64}Ql$ при $z = \frac{5}{8}l$	$v' = \frac{Ql^3}{192EJ}\left[7 - 24 \times \frac{z^2}{l^2} + \left\|_{\frac{l}{2}} 8\left(2\frac{z}{l} - 1\right)^3\right]$ $v_0' = \frac{7}{192} \cdot \frac{Ql^3}{EJ}$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{9}{192} \cdot \frac{Ql^3}{EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{Ql^3}{192EJ}\left[7\frac{z}{l} - 8\frac{z^3}{l^3} + \left\|_{\frac{l}{2}} \left(2\frac{z}{l} - 1\right)^4\right]\right.$ $v_{max} = 0{,}0131\frac{Ql^3}{EJ}$ при $z \cong 054l$

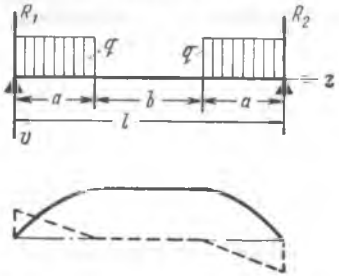
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
20	Равномерно распределенная нагрузка на участке, расположенная симметрично 	$R_1 = R_2 = -\frac{Q}{2}$	$M = -\frac{Q}{2} z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{Q}{2} \times \left[z - \frac{(z-a)^2}{b}\right]$ при $a \leqslant z < (a+b)$ $M = -\frac{Q}{2} \times (2a + b - z)$ при $z \geqslant (a+b)$ $M_{max} = -\frac{Q}{8} \times (2l - b)$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{Q}{48EJ}\left[3l^2 - b^2 - 12z^2 + \Big\|_a 8\frac{(z-a)^3}{b} - \Big\|_{a+b} 8\frac{(z-a-b)^3}{b}\right]$ $v_0' = \frac{Q}{48EJ} \times (3l^2 - b^2)$ при $z = 0$ $v_l' = -\frac{Q}{48EJ} \times (3l^2 - b^2)$ при $z = l$	$v = \frac{Q}{48EJ}\left[(3l^2 - b^2)z - 4z^3 + \Big\|_a 2\frac{(z-a)^4}{b} - \Big\|_{a+b} 2\frac{(z-a-b)^4}{b}\right]$ $v_{max} = \frac{Ql^3}{48EJ} \times \left[1 - \frac{b^2}{2l^2} + 2\frac{l}{b} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)^4\right]$ при $z = \frac{l}{2}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
21	Равномерно распределенная нагрузка на участке 	$R_1 = -\frac{Q}{2l} \times (b+2c)$ $R_2 = -\frac{Q}{2l} \times (b+2a)$	$M = -\frac{Q}{2l} \times (b+2c)\,z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{Q}{2l} \times (b+2c)\,z + \frac{Q}{2b}(z-a)^2$ при $a \leqslant z \leqslant (a+b)$ $M = -\frac{Q}{2l} \times (b+2c-2l)\,z - Q\left(a+\frac{b}{2}\right)$ при $z \geqslant (a+b)$	$v' = \frac{Ql^3}{24EJ}\left\{4\frac{c+\frac{b}{2}}{l} \times \left(1-3\frac{z^2}{l^2}\right) - \left[4\frac{\left(c+\frac{b}{2}\right)^3}{l^3} - \frac{ab^2}{l^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{l^3} + \frac{b^2}{l^2}\right]\right\}$ при $z \leqslant a$ $v' = \frac{Ql^3}{24EJ}\left\{4\frac{+\frac{b}{2}}{l} \times \left(1-3\frac{z^2}{l^2}\right) - \left[4\frac{\left(c+\frac{b}{2}\right)^3}{l^3} - \frac{ab^2}{l^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{l^3} + \frac{b^2}{l^2}\right] + 4\frac{(z-a)^3}{bl^2}\right\}$ при $a \leqslant z \leqslant a+b$	$v = \frac{Ql^3}{48EJ}\left\{8\frac{c+\frac{b}{2}}{l} \times \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - \frac{z}{l} \times \left[8\frac{\left(c+\frac{b}{2}\right)^3}{l^3} - 2\frac{ab^2}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2\frac{b^2}{l^2}\right]\right\}$ при $z \leqslant a$ $v = \frac{Ql^3}{48EJ}\left\{8\frac{c+\frac{b}{2}}{l} \times \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - \frac{z}{l} \times \left[8\frac{\left(c+\frac{b}{2}\right)^3}{l^3} - 2\frac{ab^2}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2\frac{b^2}{l^2}\right] + 2\frac{(z-a)^4}{bl^3}\right\}$ при $a \leqslant z \leqslant a+b$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
				$v_0' = \frac{Ql^2}{24EJ}\left[4\frac{c+\frac{b}{2}}{l} - 4\frac{\left(c+\frac{b}{2}\right)^3}{l^3} + \frac{ab^2}{l^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{l^3} - \frac{b^2}{l^2}\right]$ при $z=0$	
22	Равномерно распределенная нагрузка на двух участках 	$R_1 = R_2 = -qa$	$M = -\frac{q}{2}(2a - z)z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{qa^2}{2}$ при $a \leqslant z \leqslant (a+b)$ $M = -\frac{qa}{2}\times\left[\frac{a^2-(z-a-b)^2}{a}\right]$ при $z \geqslant (a+b)$	$v' = \frac{ql^3}{48EJ}\left[-24\frac{a}{l}\times\frac{z^2}{l^2} + 8\frac{z^3}{l^3} + 2 - 3\frac{b}{l} + \frac{b^3}{l^3} - \Big\|_{a} 8\times\frac{(z-a)^3}{l^3} + \Big\|_{a+b} 8\frac{(z-l+a)^3}{l^3}\right]$ $v_0' = \frac{ql^3}{48EJ}\left(2 - 3\frac{b}{l} + \frac{b^3}{l^3}\right)$ при $z=0$ $v_l' = -\frac{ql^3}{48EJ}\times\left(2 - 3\frac{b}{l} + \frac{b^3}{l^3}\right)$ при $z=l$	$v = \frac{ql^4}{48EJ}\left[-8\frac{a}{l}\times\frac{z^3}{l^3} + 2\frac{z^4}{l^4} + \left(2 - 3\frac{b}{l} + \frac{b^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} - \Big\|_{a} 2\frac{(z-a)^4}{l^4} + \Big\|_{a+b} 2\frac{(z-l+a)^4}{l^4}\right]$ $v_{max} = \frac{ql^4}{48EJ}\times\left(\frac{5}{8} - \frac{b}{l} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{l^3}\right)$ при $z = \frac{l}{2}$

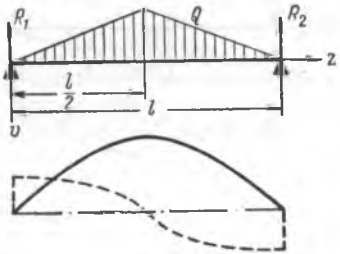
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
23	Нагрузка по треугольнику на всем пролете	$R_1 = -\frac{Q}{3}$ $R_2 = -\frac{2}{3}Q$	$M = -\frac{Ql}{3} \times \left[\frac{z}{l} - \left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$ $M_{max} = -0{,}1283Ql$ при $z = 0{,}5773l$	$v' = \frac{Ql^3}{180EJ} \times \left(7 - 30\frac{z^2}{l^2} + 15\frac{z^4}{l^4}\right)$ $v'_0 = \frac{7}{180} \times \frac{Ql^3}{EJ} \approx 0{,}03889\frac{Ql^3}{EJ}$ $v'_l = -\frac{2}{45} \times \frac{Ql^3}{EJ} \approx -0{,}04444\frac{Ql^3}{EJ}$	$v = \frac{Ql^4}{180EJ} \times \left(7\frac{z}{l} - 10\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{z^5}{l^5}\right)$ $v_{max} = 0{,}01304 \times \frac{Ql^4}{EJ}$ при $z = 0{,}5193l$

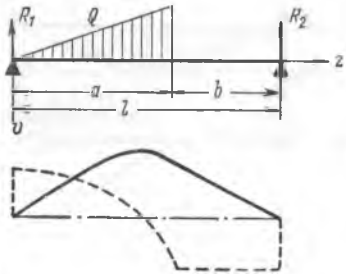
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
24	Нагрузка по треугольнику на части пролета	$R_1 = -\frac{Q}{3}\cdot\frac{b}{l}$ $R_2 = -Q\times\left(1-\frac{1}{3}\frac{b}{l}\right)$	$M = -\frac{Ql}{3}\left[\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l} - \left\|\limits_{a}\frac{(z-a)^3}{lb^2}\right.\right]$	$v' = \frac{Ql^3}{180EJ}\left[\frac{b}{l}\times\left(7+6\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2}\right) - 30\frac{z^2}{l^2} + \left\|\limits_{a}15\frac{(z-a)^4}{l^2b^2}\right.\right]$ $v_0' = \frac{Qlb}{180EJ}\times\left(7+6\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2}\right)$ $v_l' = -\frac{Qlb}{180EJ}\times\left(8+9\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$v = \frac{Ql^3}{180EJ}\left[\frac{b}{l}\times\left(7+6\frac{a}{l}-3\frac{a^2}{l^2} - 10\frac{z^2}{l^2}\right)\frac{z}{l} + \left\|\limits_{a}3\frac{(z-a)^5}{l^3b^2}\right.\right]$

Продолжение

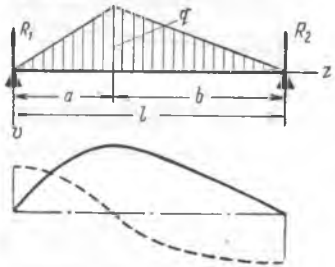
№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
25	Симметричная нагрузка по треугольнику 	$R_1 = R_2 = -\frac{Q}{2}$	$M = -\frac{Ql}{6} \times \left(3 - 4\frac{z^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}$ при $z \leqslant \frac{l}{2}$ $M_{\max} = -\frac{Ql}{6}$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{Ql^2}{96EJ}\left(5 - 24\frac{z^2}{l^2} + 16\frac{z^4}{l^4}\right)$ при $z \leqslant \frac{l}{2}$ $v_0' = -v_l' = \frac{5Ql^2}{96EJ} \approx 0.05208\frac{Ql^2}{EJ}$	$v = \frac{Ql^3}{30EJ} \cdot \frac{z}{l} \times \left(1{,}5625 - 2{,}5\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^4}{l^4}\right)$ или $v = \frac{Ql^3}{60EJ}\left[\frac{z}{8l} \times \left(25 - 40\frac{z^2}{l^2} + 16\frac{z^4}{l^4}\right)\right]$ $v_{\max} = \frac{Ql^3}{60EJ}$ при $z = \frac{l}{2}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
26	Нагрузка по треугольнику на части пролета 	$R_1 = -Q \times \left(1 - \frac{2}{3}\frac{a}{l}\right)$ $R_2 = -\frac{2Qa}{3l}$	$M = -Q\left(1 - \frac{2}{3} \times \frac{a}{l}\right)z + \frac{Q}{3a^2}z^3$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{2Qa}{3l}(l - z)$ при $z \geqslant a$	$v' = \frac{Qa^2}{180EJ}\left[15\frac{z^4}{a^4} + 30\left(2\frac{a}{l} - 3\right)\frac{z^2}{l^2} - 3\left(15 - 4\frac{a}{l}\right) + 40\frac{l}{a}\right]$ при $z < a$ $v' = \frac{Qal}{45EJ} \times \left[15\frac{z^2}{l^2} - 30\frac{z}{l} + 3\frac{a^2}{l^2} + 10\right]$ при $z > a$ $v_0' = \frac{Qal}{180EJ} \times \left(12\frac{a^2}{l^2} - 45\frac{a}{l} + 40\right)$ при $z = 0$ $v_l' = \frac{Qal}{45EJ} \times \left(5 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = l$	$v = \frac{Qa^2z}{180EJ}\left[3\frac{z^4}{a^4} + 10\left(2\frac{a}{l} - 3\right)\frac{z^2}{a^2} - 3\left(15 - 4\frac{a}{l}\right) + 40\frac{l}{a}\right]$ при $z < a$ $v = \frac{Qal^2}{45EJ}\left[5\frac{z^3}{l^3} - 15\frac{z^2}{l^2} + \left(3\frac{a^2}{l^2} + 10\right)\frac{z}{l} - 3\frac{a^2}{l^2}\right]$ при $z > a$ $v_{z=a} = \frac{2Qa^2l}{45EJ} \times \left(5 - 9\frac{a}{l} + 4\frac{a^2}{l^2}\right)$

Продолжение

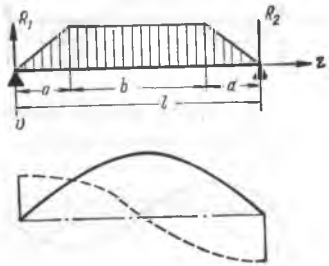
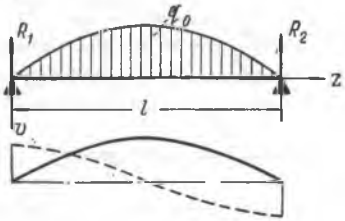
№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
27	Несимметричная нагрузка по треугольнику	$R_1 = -\frac{q}{6}(l+b)$ $R_2 = -\frac{q}{6}(l+a)$	$M = -\frac{q}{6} \times (l+b)z + \frac{qz^3}{6a}$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{q}{6}(l+a) \times (l-z) + \frac{q(l-z)^3}{6b}$ при $z \geqslant a$ M_{max} при $z = l - \sqrt{\frac{b(l+a)}{3}}$	$v' = \frac{q}{360EJ}[-30 \times (2l-a)z^2 + 15\frac{z^4}{a} + 3a^3 - 12a^2l + 8al^2 + 8l^3]$ при $z \leqslant a$ $v'_0 = (3a^3 - 12a^2l + 8al^2 + 8l^3)\frac{q}{360EJ}$ при $z = 0$ $v'_l = -(3b^3 - 12b^2l + 8bl^2 + 8l^3)\frac{q}{360EJ}$ при $z = l$	$v = \frac{q}{360EJ}\Big[-10 \times (2l-a)z^3 + 3\frac{z^5}{a} + z(3a^3 - 12a^2l + 8al^2 + 8l^3)\Big]$ при $z \leqslant a$ $v_{z=a} = \frac{q}{45EJ}(2a^4 - 4a^3l + a^2l^2 + al^3)$



Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
28	Нагрузка по трапеции	$R_1 = -\frac{l}{6} \times (q_2 + 2q_1)$ $R_2 = -\frac{l}{6} \times (q_1 + 2q_2)$	$M = -\frac{l}{6} \times (q_2 + 2q_1) z + \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{z^3}{6l} \times (q_2 - q_1)$	$v' = \frac{l^3}{360EJ} \times \left[15 (q_2 - q_1) \frac{z^4}{l^4} + 60q_1 \frac{z^3}{l^3} - 30 \times (2q_1 + q_2) \frac{z^2}{l^2} + 8q_1 + 7q_2\right]$ $v'_0 = \frac{(8q_1 + 7q_2) l^3}{360EJ}$ $v'_l = -\frac{(7q_1 + 8q_2) l^3}{360EJ}$	$v = \frac{l^4}{360EJ} \times \left[3 (q_2 - q_1) \frac{z^5}{l^5} + 15q_1 \frac{z^4}{l^4} - 10 (2q_1 + q_2) \frac{z^3}{l^3} + (8q_1 + 7q_2) \frac{z}{l}\right]$ $v_{z=\frac{l}{2}} = \frac{5 (q_1 + q_2) l^4}{768EJ}$

Продолжение

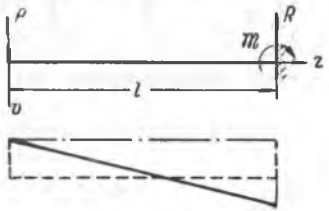
№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
29		$R_1 = R_2 = -\frac{q}{2} \times (a+b)$	$M = -\frac{q}{2} \times \left(a + b - \frac{z^2}{3a}\right) z$ при $z \leqslant a$ $M = -\frac{ql}{2} z + \frac{qa^2}{6}\left(1 + \frac{3z^2}{a^2}\right)$ при $a \leqslant z \leqslant (a+b)$	—	—
30	Распределенная нагрузка по закону синуса $q_0 \sin \frac{\pi z}{l}$ 	$R_1 = -\frac{l}{\pi} q$ $R_2 = -\frac{l}{\pi} q_0$	$M = -\frac{l^2}{\pi^2} q_0 \times \sin \frac{\pi z}{l}$ $M_{max} = -\frac{l^2}{\pi^2} q_0$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{\pi^3} \times q_0 \cos \frac{\pi z}{l}$ $v'_0 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{\pi^3} q_0$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{\pi^3} q_0$ при $z = l$	$v = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{\pi^4} \times q_0 \sin \frac{\pi z}{l}$ $v_{max} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{\pi^4} q_0$ при $z = \frac{l}{2}$

Продолжение

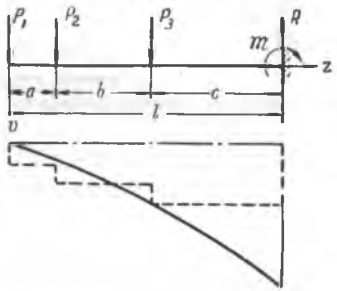
№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
31	Распределенная нагрузка по закону синуса $q_0 \sin\frac{2\pi z}{l}$	$R_1 = -\frac{l}{2\pi} q_0$ $R_2 = \frac{l}{2\pi} q_0$	$M = -\frac{l^2}{4\pi^2} q_0 \times \sin\frac{2\pi z}{l}$ $M_{max} = -\frac{l^2}{4\pi^2} q_0$ при $z = \frac{l}{4}$ $M_{max} = \frac{l^2}{4\pi^2} q_0$ при $z = \frac{3l}{4}$	$v' = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{8\pi^3} \times q_0 \cos\frac{2\pi z}{l}$ $v'_0 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{8\pi^3} q_0$ при $z = 0$ $v'_l = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{8\pi^3} q_0$ при $z = l$	$v = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{16\pi^4} \times q_0 \sin\frac{2\pi z}{l}$ $v_{max} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{16\pi^4} q_0$ при $z = \frac{l}{4}$ $v_{max} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{16\pi^4} q_0$ при $z = \frac{3l}{4}$
32	Распределенная нагрузка по закону синуса $q_0 \sin\frac{3\pi z}{l}$	$R_1 = -\frac{l}{3\pi} q_0$ $R_2 = -\frac{l}{3\pi} q_0$	$M = -\frac{l^2}{9\pi^2} q_0 \times \sin\frac{3\pi z}{l}$ $M_{max} = -\frac{l^2}{9\pi^2} q_0$ при $z = \frac{l}{6}$ и $z = \frac{5l}{6}$ $M_{max} = \frac{l^2}{9\pi^2} q_0$ при $z = \frac{l}{2}$	$v' = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{27\pi^3} \times q_0 \cos\frac{3\pi z}{l}$ $v'_0 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{27\pi^3} q_0$ при $z = 0$ $v'_l = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^3}{27\pi^3} q_0$ при $z = l$	$v = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{81\pi^4} \times q_0 \sin\frac{3\pi z}{l}$ $v_{max} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{81\pi^4} q_0$ при $z = \frac{l}{6}$ и $z = \frac{5l}{6}$ $v_{max} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^4}{81\pi^4} q_0$ при $z = \frac{l}{2}$

Таблица 9

§ 26. Балка с одним заделанным концом

№ п/п	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
1	Сосредоточенная нагрузка на конце балки 	$R = -P$ $\mathfrak{M} = -Pl$	$M = Pz$ $M_{max} = Pl$	$v' = -\frac{Pl^2}{2EJ}\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)$ $v'_0 = -\frac{Pl^2}{2EJ}$ $v'_l = 0$	$v = -\frac{Pl^3}{6EJ}\left(3\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right)$ $v_{max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}$ при $z = l$

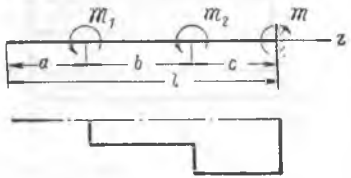
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
2	Три сосредоточенные силы 	$R = -(P_1 + P_2 + P_3)$ $\mathfrak{M} = -P_1 l - P_2(l - a) - P_3 c$	$M = P_1 z$ для $z \leqslant a$; $M = P_1 z + P_2(z - a)$ для $a \leqslant z \leqslant (a + b)$ $M = P_1 z + P_2(z - a) + P_3(z - a - b)$ для $z \geqslant (a + b)$; $M_{\max} = \mathfrak{M}$ при $z = l$	$v' = -\frac{l^2}{2EJ} \times \left[P_1\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) + P_2\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + P_3 \frac{c^2}{l^2} - \Big\|_a P_2\left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l}\right)^2 - \Big\|_{a+b} P_3 \times \left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l} - \frac{b}{l}\right)^2\right]$ $v'_0 = -\frac{l^2}{2EJ} \times \left[P_1 + P_2\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + P_3 \frac{c^2}{l^2}\right]$ при $z = 0$; $v'_l = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{l^3}{6EJ}\left\{P_1 \times \left(3\frac{z}{l} - 2 - \frac{z^3}{l^3}\right) + P_2\left[3\frac{z}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + 3\frac{a}{l} - \frac{a^3}{l^3} - 2\right] + P_3\left(3\frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{z}{l} + \frac{c^3}{l^3} - 3\frac{c^2}{l^2}\right) - \Big\|_a P_2 \times \left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l}\right)^3 - \Big\|_{a+b} P_3 \times \left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l} - \frac{b}{l}\right)^3\right\}$ $v = \frac{l^3}{6EJ}\left[2P_1 + P_2 \times \left(2 + \frac{a^3}{l^3} - 3\frac{a}{l}\right) + P_3\left(3\frac{c^2}{l^2} - \frac{c^3}{l^3}\right)\right]$ при $z = 0$

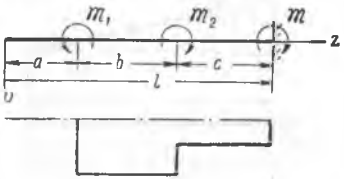
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
3	Сосредоточенный момент на конце балки	$R = 0$ $\mathfrak{M}_{\text{опори}} = -\mathfrak{M}$	$M = M_{\max} = -\mathfrak{M}$	$v' = -\frac{\mathfrak{M}z}{EJ}$ $v'_0 = 0$ $v'_l = -\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$v = -\frac{\mathfrak{M}z^2}{2EJ}$ $v_{\max} = -\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$ при $z = l$
4	Сосредоточенный момент в пролете	$R = 0$ $\mathfrak{M}_{\text{опори}} = -\mathfrak{M}$	$M = 0$ при $z < a$ $M = \mathfrak{M}$ при $z \geqslant a$	$v' = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ}\left(-\frac{b}{l} + \Big\|_a \times \frac{z-a}{l}\right)$ $v'_0 = -\frac{\mathfrak{M}b}{EJ}$ при $z = 0$; $v'_l = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}\left[-2\frac{z}{l}\cdot\frac{b}{l} + 2\frac{b}{l} - \frac{b^2}{l^2} + \Big\|_a\left(\frac{z-a}{l}\right)^2\right]$ $v = -\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ} \times \left(2\frac{b}{l} - \frac{b^2}{l^2}\right)$ при $z = 0$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
5	Два сосредоточенных момента в пролете, действующих в одну сторону 	$R = 0$ $\mathfrak{M} = -(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$	$M = 0$ при $z < a$ $M = \mathfrak{M}_1$ при $a \leqslant z \leqslant (a+b)$ $M = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ при $z \geqslant (a+b)$	$v' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{EJ}\left[-\left(1-\frac{a}{l}\right) - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\cdot\frac{c}{l} + \Big\|_a \frac{z-a}{l} + \Big\|_{a+b} \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\cdot\frac{z-a-b}{l}\right]$ $v_0' = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{EJ} \times \left(1-\frac{a}{l}+\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\cdot\frac{c}{l}\right)$ при $z = 0$ $v_l' = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ}\left[-2 \times \left(1-\frac{a}{l}\right)\frac{z}{l} - 2\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \times \frac{c}{l}\cdot\frac{z}{l} + 1 - \frac{a^2}{l^2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\left(2\frac{c}{l} - \frac{c^2}{l^2}\right) + \Big\|_a \left(\frac{z-a}{l}\right)^2 + \Big\|_{a+b} \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\left(\frac{z-a-b}{l}\right)^2\right]$ $v = -\frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ}\left[1 - \frac{a^2}{l^2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\left(2\frac{c}{l} - \frac{c^2}{l^2}\right)\right]$ при $z = 0$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
6	Два сосредоточенных момента в пролете, действующих в противоположные стороны 	$R = 0$ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1$	$M = 0$ при $z < a$ $M = \mathfrak{M}_1$ при $a \leqslant z \leqslant (a+b)$ $M = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$ при $z \geqslant (a+b)$	$v' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{EJ}\left[\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\cdot\frac{c}{l} - \left(1-\frac{a}{l}\right) + \Big\|_a \frac{z-a}{l} - \Big\|_{a+b} \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\cdot\frac{z-a-b}{l}\right]$ $v_0' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{EJ} \times \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\cdot\frac{c}{l} - 1 + \frac{a}{l}\right)$ при $z = 0$; $v_l' = 0$ при $z = l$	$v = \frac{-\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ}\left[2\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \times \frac{c}{l}\cdot\frac{z}{l} - 2\left(1-\frac{a}{l}\right) \times \frac{z}{l} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\left(\frac{c^2}{l^2} - 2\frac{c}{l}\right) + 1 - \frac{a^2}{l^2} + \Big\|_a \left(\frac{z-a}{l}\right)^2 - \Big\|_{a+b} \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \times \left(\frac{z-a-b}{l}\right)^2\right]$ $v = \frac{-\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ}\left[1 - \frac{a^2}{l^2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\left(\frac{c^2}{l^2} - 2\frac{c}{l}\right)\right]$ при $z = 0$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
7	Равномерно распределенная нагрузка на всей длине	$R = -Q$ $\mathfrak{M} = -\frac{Ql}{2}$	$M = \frac{Qz^2}{2l}$ $M_{\max} = \frac{Ql}{2}$ при $z = l$	$v' = -\frac{Ql^2}{6EJ}\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)$ $v'_0 = -\frac{Ql^2}{6EJ}$ $v'_l = 0$	$v = -\frac{Ql^3}{6EJ} \times$ $\times \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^4}{l^4}\right)$ $v_{\max} = -\frac{Ql^3}{8EJ}$ при $z = l$
8	Равномерно распределенная нагрузка на участке	$R = -Q$ $\mathfrak{M} =$ $= \frac{Q(a+l)}{2}$	$M = \frac{Ql}{2}\left[1 + \frac{a}{l} - \right.$ $\left. - 2\frac{z}{l} + \left\|\frac{(z-a)^2}{bl}\right.\right]$ $M_{\max} = \frac{Q(a+l)}{2}$ при $z = 0$	$v' = -\frac{Ql^2}{2EJ} \times$ $\times \left[\left(1 + \frac{a}{l}\right)\frac{z}{l} - \right.$ $\left. - \frac{z^2}{l^2} + \left\|\frac{(z-a)^3}{3bl^2}\right.\right]$ $v'_0 = 0$ при $z = 0$ $v'_l = \frac{Ql^2}{6EJ} \times$ $\times \left(1 + \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = l$ $v'_a = \frac{Qla}{2EJ}$ при $z = a$	$v = \frac{Ql^3}{24EJ} \times$ $\times \left[6\left(1 + \frac{a}{l}\right)\frac{z^2}{l^2} - \right.$ $\left. - 4\frac{z^3}{l^3} + \left\|\frac{(z-a)^4}{bl^3}\right.\right]$ $v_l = \frac{Ql^3}{24EJ} \times$ $\times \left(2 + 6\frac{a}{l} + \frac{b^3}{l^3}\right)$ при $z = l$ $v_a = \frac{Qla^2}{4EJ}\left(1 + \frac{a}{3l}\right)$ при $z = a$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
9	Нагрузка по треугольнику	$R = -Q$ $\mathfrak{M} = -\frac{Ql}{3}$	$M = \frac{Qz^3}{3l^2}$ $M_{\max} = \frac{Ql}{3}$ при $z = l$	$v' = -\frac{Ql^2}{12EJ}\left(1 - \frac{z^4}{l^4}\right)$ $v_0' = -\frac{Ql^2}{12EJ}$ при $z = 0$ $v_l' = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{Ql^3}{60EJ}\left(5\frac{z}{l} - \frac{z^5}{l^5}\right)$ $v_0 = 0$ при $z = 0$ $v_l = -\frac{Ql^3}{15EJ}$ при $z = l$
10	Нагрузка по треугольнику	$R = -\frac{ql}{2}$ $\mathfrak{M} = -\frac{ql^2}{3}$	$M = \frac{qz^2}{6l}(3l - z)$ $M_{\max} = \mathfrak{M}$ при $z = l$	$v' = \frac{ql^3}{24EJ} \times$ $\times\left(4\frac{z^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4} - 3\right)$ $v_0' = -\frac{ql^3}{8EJ}$ при $z = 0$ $v_l' = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{ql^4}{120EJ}\left(5\frac{z^4}{l^4} - \right.$ $\left. - \frac{z^5}{l^5} - 15\frac{z}{l} + 11\right)$ $v = -\frac{11}{120} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$ при $z = 0$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
11	Нагрузка по треугольнику на части пролета	$R = -\frac{qa}{2}$ $\mathfrak{M} = -\frac{qa}{6} \times (l + 2b)$	$M = \frac{qz^3}{6a}$ при $z \leqslant a$ $M = \frac{qa}{6}(3z - 2a)$ при $z \geqslant a$ $M_{max} = \mathfrak{M}$ при $z = l$	$v' = \frac{ql^4}{24aEJ} \times \left[\frac{z^4}{l^4} + 8\frac{a^3}{l^3} - 6\frac{a^2}{l^2} - \Big\|_a \left(\frac{z^4}{l^4} + 8\frac{a^3}{l^3}\cdot\frac{z}{l} - 6\frac{a^2}{l^2}\cdot\frac{z^2}{l^2}\right)\right]$ $v_0' = -\frac{ql^3}{12EJ} \times \left(3\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^2}\right)$ при $z = 0$ $v_l' = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{ql^5}{24aEJ}\left[\frac{z^5}{5l^5} + \frac{z}{l}\left(8\frac{a^3}{l^3} - 6\frac{a^2}{l^2}\right) - 4\left(\frac{a^3}{l^3} - \frac{a^2}{l^2}\right) - \Big\|_a \left(\frac{z^5}{5l^5} + 4\frac{a^3}{l^3}\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{a^2}{l^2}\frac{z^3}{l^3}\right)\right]$ $v = -\frac{ql^4}{6EJ}\left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ при $z = 0$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
12	Нагрузка по треугольнику на части пролета	$R = -\frac{qa}{2}$ $\mathfrak{M} = -\frac{qa}{6} \times (2l + b)$	$M = \frac{qz^2}{6a}(3a - z)$ при $z \leqslant a$; $M = \frac{qa}{6}(3z - a)$ при $z \geqslant a$ $M_{\max} = \mathfrak{M}$ при $z = l$	$v' = \frac{qa^3}{24EJ}\left[4\frac{z^3}{a^3} - \frac{z^4}{a^4} + 4\frac{l}{a} - 6\frac{l^2}{a^2} + \left\|_a\left(6\frac{z^2}{a^2} - 4\frac{z^3}{a^3} + \frac{z^4}{a^4} - 4\frac{z}{a}\right)\right.\right]$ $v_0' = \frac{qa^3}{12EJ} \times \left(2\frac{l}{a} - 3\frac{l^2}{a^2}\right)$ при $z = 0$ $v_l' = 0$ при $z = l$	$v = -\frac{qa^4}{24EJ}\left[\frac{z^4}{a^4} - \frac{z^5}{5a^5} + \left(4\frac{l}{a} - 6\frac{l^2}{a^2}\right)\frac{z}{a} + 4\frac{l^3}{a^3} - 2\frac{l^2}{a^2} + \left\|_a\left(2\frac{z^3}{a^3} - \frac{z^4}{a^4} + \frac{z^5}{5a^5} - 2\frac{z^2}{a^2}\right)\right.\right.$ $v = -\frac{qa^4}{12EJ} \times \left(2\frac{l^3}{a^3} - \frac{l^2}{a^2}\right)$ при $z = 0$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты	Углы	Прогибы
13	Сосредоточенная нагрузка на конце балки [1]	$R = -P$ $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = -\frac{Pl}{2}$	$M = Pl\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)$ $M_{max} = -\frac{Pl}{2}$ при $z = 0$ и $M_{max} = \frac{Pl}{2}$ при $z = l$	$v' = -\frac{Pl^2}{2EJ}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right)$ $v'_0 = v'_l = 0$ $v'_{l/2} = -\frac{Pl^2}{8EJ}$ при $z = \frac{l}{2}$	$v = -\frac{Pl^3}{12EJ} \times$ $\times \left(3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3}\right)$ $v_0 = 0$ при $z = 0$ $v_l = -\frac{Pl^3}{12EJ}$ при $z = l$

[1] Балка абсолютно заделана на правой опоре и не имеет возможности менять угол наклона упругой линии с осью z на левой опоре (случай, эквивалентный нагрузке двумя равными моментами одного знака, приложенными по концам свободно опертой балки).

Таблица 10

§ 27. Балка на двух опорах с консолями

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты
1	Сосредоточенный момент на конце	$R_1 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$ $R_2 = +\frac{\mathfrak{M}}{l}$	$M = +\mathfrak{M}$ при $z \leqslant a$ $M = \frac{\mathfrak{M}}{l} \times$ $\times (l - z + a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$ $M = 0$ при $z > (a + l)$
2	Сосредоточенный момент на конце	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$	$M = 0$ при $z < a$ $M = \frac{\mathfrak{M}}{l} \times$ $\times (z - a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$ $M = \mathfrak{M}$ при $z \geqslant (a + l)$
3	Сосредоточенные моменты на обоих концах	$R_1 = -\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}$ $R_2 = \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}$	$M = \mathfrak{M}_1$ при $z \leqslant a$ $M = \mathfrak{M}_1 \times$ $\times \left(1 - \frac{z - a}{l}\right) +$ $+ \mathfrak{M}_2 \frac{z - a}{l}$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$ $M = \mathfrak{M}_2$ при $z \geqslant (a + l)$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты
4	Сосредоточенные силы на обоих концах	$R_1 = -P_1 - \frac{a}{l}(P_1 - P_2)$ $R_2 = -P_2 - \frac{a}{l}(P_2 - P_1)$	$M = P_1 z$ при $z \leqslant a$ $M = P_1 a - \frac{a}{l}(P_1 - P_2) \times (z - a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$
5	Сосредоточенные силы на обоих концах	$R_1 = -P_1 - \frac{a}{l}(P_1 + P_2)$ $R_2 = P_2 + \frac{a}{l}(P_1 + P_2)$	$M = P_1 z$ при $z \leqslant a$ $M = P_1 a - \frac{a}{l}(P_1 + P_2) \times (z - a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$
6	Сосредоточенная сила на конце	$R_1 = -P\frac{l + a}{l}$ $R_2 = P\frac{a}{l}$	$M = Pz$ при $z \leqslant a$ $M = \frac{Pa}{l} \times (l - z + a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$ $M = 0$ при $z \geqslant (a + l)$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты
7	Сосредоточенная сила на конце	$R_1 = P\frac{a}{l}$ $R_2 = -P\frac{a+l}{l}$	$M = 0$ при $z \leqslant a$ $M = P\frac{a}{l}(z-a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a+l)$
8	Равномерно распределенная нагрузка на части консоли	$R_1 = -\frac{qc}{2l} \times$ $\times (2l + 2a - c)$ $R_2 = \frac{qc}{2l}(2a - c)$	$M = \frac{qz^2}{2}$ при $z \leqslant c$ $M = \frac{qc}{2}(2z - c)$ при $c \leqslant z \leqslant a$ $M = \frac{qc}{2} \times$ $\times (2a - c) \times$ $\times (l - z + a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$ $M = 0$ при $z \geqslant (a + l)$
9	Равномерно распределенная нагрузка на части длин двух консолей	$R_1 = -qc_1 -$ $-\frac{q}{2l}(c_1 - c_2) \times$ $\times (2a - c_1 - c_2)$ $R_2 = -qc_2 -$ $-\frac{q}{2l}(c_2 - c_1) \times$ $\times (2a - c_1 - c_2)$	$M = \frac{qz^2}{2}$ при $z \leqslant c_1$ $M = \frac{qc_1}{2} \times$ $\times (2z - c_1)$ при $c_1 \leqslant z \leqslant a$ $M = \frac{qc_1}{2} \times$ $\times (2a - c_1) \times$ $\times (l - z + a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки, эпюры	Опорные реакции	Изгибающие моменты
10	Равномерно распределенная нагрузка на консоли	$R_1 = -qa \times \left(1 + \frac{a}{2l}\right)$ $R_2 = q\frac{a^2}{2l}$	$M = q\frac{z^2}{2}$ при $z \leqslant a$ $M = \frac{qa^2}{2l} \times (l - z + a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$ $M = 0$ при $z \geqslant (a + l)$
11	Равномерно распределенная нагрузка по всей длине балки	$R_1 = R_2 = -\frac{q}{2}(l + 2a)$	$M = q\frac{z^2}{2}$ при $z \leqslant a$ $M = q\frac{a^2}{2} - \frac{q}{2} \times (l - z)(z - a)$ при $a \leqslant z \leqslant (a + l)$

ГЛАВА 6

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

§ 28. Способ наложения

Наиболее простым способом определения лишних неизвестных является способ, основанный на принципе наложения; этим способом лишние неизвестные определяются в следующем порядке:

а) из общего числа n реакций выбирают две такие, например R_1 и R_2, при которых балка обратилась бы в свободно лежащую на двух опорах или в закрепленную одним концом, т. е. в балку статически определимую, причем остальные $n-2$ реакции (лишние неизвестные) пока откидывают;

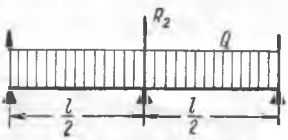


Рис. 28.

б) в получившейся таким образом статически определимой балке находят перемещения ее опорных сечений, соответствующие откинутым лишним неизвестным, считая, что балка эта подвержена действию заданной внешней нагрузки; пусть эти перемещения будут $r_3', r_4', \ldots, r_n'$;

в) в той же статически определимой балке находят перемещения тех же опорных сечений, считая, что балка подвержена действию откинутых раньше лишних неизвестных, приложенных в соответствующих опорных сечениях; пусть эти перемещения будут $r_3'', r_4'', \ldots, r_n''$;

г) на основании принципа наложения составляют $n-2$ уравнения вида $r_i = A_i R_i = r_i' + r_i''$, в каждое из которых входят линейно $n-2$ лишние неизвестные; решая эти уравнения, находят $n-2$ реакции, принятые за лишние неизвестные; остальные две реакции находятся из двух уравнений статики.

Пример 1 (рис. 28). Балка на трех упругих опорах, находящихся на равном расстоянии друг от друга, нагружена равномерной нагрузкой Q; коэффициенты податливости опор A_1, A_2 и A_3.

За лишнюю неизвестную R_2 возьмем реакцию средней опоры; откинув эту реакцию, получим балку на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки.

Перемещением, соответствующим лишней неизвестной, будет стрелка прогиба в сечении над средней опорой.

Перемещение этого сечения от равномерной нагрузки

$$v = \frac{5}{384} BQ;$$

$$v_2 = \frac{1}{4} Q (A_1 + A_2);$$

$$r' = \frac{5}{384} BQ + \frac{1}{4} Q (A_1 + A_2).$$

Перемещение того же сечения под действием лишней неизвестной

$$v = \frac{1}{48} BR_2; \quad v_2 = \frac{1}{4} R_2 (A_1 + A_2),$$

$$r'' = \frac{1}{48} BR_2 + \frac{1}{4} R_2 (A_1 + A_2).$$

Уравнение для определения лишней неизвестной будет $r = r' + r''$, где r — перемещение средней опоры от лишней неизвестной, т. е. $r = A_2 R_2$.

Подставляя в это уравнение найденные значения r' и r'' и решая его относительно R_2, получим

$$R_2 = -\frac{5}{8} Q \frac{1 + 19{,}2 \dfrac{A_1 + A_3}{B}}{1 + 12 \dfrac{A_1 + 4A_2 + A_3}{B}}.$$

Из рассмотрения этого выражения можно сделать следующие выводы: при вполне жестких опорах ($A_1 = A_2 = A_3 = 0$)

$$R_2 = -\frac{5}{8} Q;$$

при очень мягких опорах, когда отношения $\frac{A_1}{B}$, $\frac{A_2}{B}$ и $\frac{A_3}{B}$ велики по сравнению с единицей,

$$R_2 \leqslant -Q \frac{A_1 + A_3}{A_1 + 4A_2 + A_3}.$$

Если при этом все опоры равной жесткости, то $R_2 = -\frac{1}{3} Q$, т. е. груз будет одинаково давить на все три опоры; если средняя опора будет более жесткой, чем крайние, то она воспримет бо́льшую долю нагрузки, и в пределе, если A_1 и A_3 велики сравнительно с A_2, — воспримет всю нагрузку.

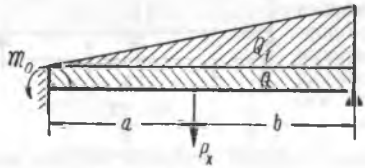


Рис. 29.

Пример 2 (рис. 29). Балка, один конец которой закреплен, а другой свободно лежит на опоре, нагружена равномерной нагрузкой Q, нагрузкой по треугольнику Q_1 и сосредоточенным грузом P на расстоянии a от левой опоры. Найти пару закрепления, предполагая опоры абсолютно жесткими и пренебрегая деформациями от сдвигов.

Принимая за лишнюю неизвестную пару закрепления, находим перемещение, соответствующее этой лишней неизвестной, под действием внешней нагрузки, т. е. угол поворота левого опорного сечения.

Угол поворота от нагрузки Q

$$v_0' = \frac{BQ}{24l}.$$

Угол поворота от нагрузки Q_1

$$v_0' = \frac{7}{180} \frac{BQ_1}{l}.$$

Угол поворота от нагрузки P

$$v_0' = \frac{BPab}{6EJl^3} \left(1 + \frac{b}{l}\right).$$

Угол поворота того же сечения при действии на балку одной пары закрепления

$$v_0' = \frac{B\mathfrak{M}_0}{3l^2}.$$

Так как по условию задачи угол поворота закрепленного сечения должен быть равен нулю, то, беря сумму найденных углов поворота и приравнивая ее нулю, получим уравнение для определения лишней неизвестной $\mathfrak{M}_0$; решая это уравнение, найдем

$$\mathfrak{M}_0 = l \left[\frac{Q}{8} + \frac{7}{60} Q_1 + \frac{P}{2} \frac{ba}{l^2} \left(1 + \frac{b}{l}\right)\right].$$

Для однопролетных статически неопределимых балок с абсолютно жесткими опорами разыскание лишних неизвестных упрощается применением следующего приема.

Пусть $P \cdot F(c)$ — выражение лишней неизвестной при нагрузке балки сосредоточенной силой P, находящейся на расстоянии c от левой опоры; тогда при нагрузке балки рядом сосредоточенных сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$ приложенных в сечениях с координатами $c_1, c_2, \ldots, c_n$, значение лишней неизвестной определится суммой

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i F(c_i).$$

При действии на балку распределенной нагрузки q значение лишней неизвестной определится интегралом

$$\int_0^l qF(c)\,dc$$

взятым по всей длине балки.

При нагрузке балки парами $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$, приложенными в сечениях с координатами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, значение лишней неизвестной определится суммой

$$\sum_{i=1}^{i=n} -\mathfrak{M}_i F'_c(a_i).$$

Если принять за лишние неизвестные опорные моменты, то функция $P \cdot F(c)$ будет иметь следующий вид [1].

Рис. 30.

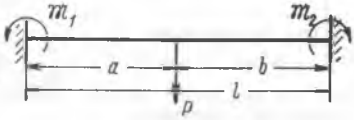


Рис. 31.

Для балки с одним заделанным концом и другим свободно лежащим на опоре (рис. 30)

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2l^2}(a^3 - 3la^2 + 2l^2a).$$

Для балки с заделанными концами (рис. 31)

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{P}{l^2}ab^2,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{P}{l^2}a^2b.$$

После того как все лишние неизвестные найдены, балку можно рассматривать как статически определимую и для получения нужных уравнений и выражений изгиба пользоваться данными таблиц, включая найденные лишние неизвестные в число действующих на балку внешних сил.

Пример 3 (рис. 32).

Нагрузка по треугольнику

$$q = \frac{2Qa}{l^2}.$$

Нагрузка равномерная

$$q_1 = \frac{Q_1}{l}.$$

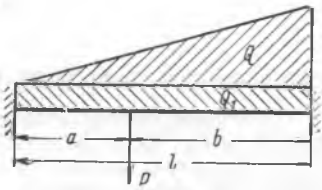


Рис. 32.

Пара закрепления на левой опоре

$$\mathfrak{M}_1 = \int_0^l \frac{q \cdot da}{l^2} ab^2 + \int_0^l \frac{q_1 \cdot da}{l^2} ab^2 + \frac{P}{l^2} ab^2 =$$

$$= \frac{2Q}{l^4}\int_0^l a^2b^2 \cdot da + \frac{Q_1}{l^2}\int_0^l ab^2 \cdot da + \frac{P}{l^2} ab^2 = \frac{1}{15} Ql + \frac{1}{12} Q_1 l + \frac{P}{l^2} ab^2.$$

[1] При исследовании изгиба балок принимаются обозначения: для отстояния силы от левой опоры — буквы c или a, для отстояния силы от правой опоры — буквы $c' = l - c$ или $b = l - a$.

Подобным же образом найдется пара закрепления на правой опоре

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{10} Ql + \frac{1}{12} Q_1 l + \frac{P}{l^2} a^2 b$$

Реакция на левой опоре R_1:
от нагрузки по треугольнику

$$R_1 = \frac{1}{3} Q,$$

от равномерной нагрузки

$$R_1 = \frac{1}{2} Q;$$

от сосредоточенного груза

$$R_1 = \frac{Pb}{l};$$

от пар закрепления

$$R_1 = \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l};$$

суммарная реакция

$$R_1 = \frac{1}{3} Q + \frac{1}{2} Q_1 + \frac{Pb}{l} + \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{l}.$$

Стрелка прогиба посредине:
от нагрузки по треугольнику

$$v = \frac{5}{384} BQ;$$

от равномерной нагрузки

$$v = \frac{5}{384} BQ_1;$$

от сосредоточенного груза

$$v = (v)_{z=\frac{1}{2}l};$$

от пар закрепления

$$v = -\frac{B}{16l} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2).$$

§ 29. Теорема трех моментов

Применение способа наложения к раскрытию статической неопределимости многопролетных балок нецелесообразно по следующим причинам:

а) все лишние неизвестные входят во все уравнения системы, раскрывающей статическую неопределимость;

б) определение неизвестных из полученной системы приводит к необходимости вычисления малых разностей близких величин, что требует искусственного повышения точности промежуточных выкладок;

в) построение эпюры изгибающих моментов по найденным значениям реакций приводит снова к вычислению малых разностей близких величин, причем в самом конце вычисления, когда точность уже в значительной степени утеряна.

Для раскрытия статической неопределимости многопролетных балок предпочтительно пользоваться теоремой трех моментов. Чтобы воспользоваться ею, надо мысленно разрезать балку во всех ее опорных сечениях и, отнеся статически неопределимые моменты, действующие во всех опорных сечениях балки, к числу внешних усилий, приложенных к отдельным пролетам балки, определить величину этих моментов из условия непрерывности углов поворота балки. Это приводит определение неизвестных опорных моментов к простой системе уравнений, в каждое из которых входит всего по три последовательных неизвестных.

Схема эта позволяет учитывать влияние на балку не только пролетных нагрузок, но и смещений ее отдельных опор.

В общем случае, когда опоры балки имеют смещения и моменты инерции балки меняются от пролета к пролету, теорему трех моментов можно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}
2(\lambda_1+\lambda_{1,2})M_1+\lambda_{1,2}M_2=A_{1,2}^{(л)}+B_{1,2}\\
\lambda_{1,2}M_1+2(\lambda_{1,2}+\lambda_{2,3})M_2+\lambda_{2,3}M_3=-A_{1,2}^{(п)}+A_{2,3}^{(л)}-B_{1,2}+B_{2,3}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda_{i-1,i}M_{i-1}+2(\lambda_{i-1,i}+\lambda_{i,i+1})M_i+\lambda_{i,i+1}M_{i+1}=\\
=-A_{i-1,i}^{(п)}+A_{i,i+1}^{(л)}-B_{i-1,i}+B_{i,i+1}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda_{n-1,n}M_{n-1}+2(\lambda_{n-1,n}+\lambda_n)M_n=-A_{n-1,n}^{(п)}-B_{n-1,n}
\end{array}\right\}\quad(106)$$

Здесь M_i — изгибающий момент в сечении балки, совпадающем с ее i-и опорой;

$$\lambda_1=\frac{3EJ_0}{l_0}\mathfrak{A}_1;$$

$$\lambda_{i-1,i}=\frac{EJ_0}{l_0}\frac{l_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}};$$

$$\lambda_n=\frac{3EJ_0}{l_0}\mathfrak{A}_n;$$

$$A_{i,i+1}^{(л)}=\frac{6EJ_0}{l_0}\alpha_л(Q_{i,i+1});$$

$$A_{i,i+1}^{(п)}=\frac{6EJ_0}{l_0}\alpha_п(Q_{i,i+1});$$

$$B_{i,i+1}=\frac{6EJ_0}{l_0}\frac{f_{i+1}-f_i}{l_{i,i+1}};$$

$$B_{i-1,i}=\frac{6EJ_0}{l_0}\frac{f_i-f_{i-1}}{l_{i-1,i}};$$

где f_i — поперечное смещение i-й опоры;

$l_{i,j}$ — пролет балки между опорами i и j;

$J_{i,j}$ — момент инерции поперечного сечения балки на протяжении этого пролета;

$Q_{i,j}$ — пролетная нагрузка балки между i-й и j-й опорами;

$\alpha_л(Q_{i,j})$ — угол поворота левого опорного сечения того участка балки, который перекрывает пролет между i-й и j-й ее опорами, вычисленный в предположении, что оба конца этого участка балки свободно оперты на жесткие опоры и загружены только пролетной нагрузкой Q_{ij};

$\alpha_п(Q_{i,j})$ — угол поворота правого опорного сечения того же пролета балки, вычисленный в том же предположении;

$\mathfrak{A}_1$ — коэффициент податливости заделки балки на ее крайней левой опоре, т. е. угол поворота этой опоры, соответствующий случаю, когда эта опора прилагает к балке момент, равный единице;

$\mathfrak{A}_n$ — коэффициент податливости заделки балки на ее n-й, т. е. крайней правой опоре;

J_0 — произвольно выбранная фиксированная величина, имеющая размерность момента инерции площади поперечного сечения (момент инерции сечения одного из пролетов балки);

l_0 — произвольно выбранная величина, соизмеримая с длиной пролетов балки (длина одного из пролетов балки).

В предположении, что опоры абсолютно жестки и не имеют смещений, а момент инерции балки по всей длине постоянен, теорема трех моментов для i-й опоры примет вид

$$M_{i-1}l_{i-1,\,i} + 2(l_{i-1\;i} + l_{i,\,i+1})\,M_i + M_{i+1}l_{i,\,i+1} = \\ = 6EJ\,[\alpha_л\,(Q_{i,\,i+1}) - \alpha_п\,(Q_{i-1\;i})]. \qquad (107)$$

Пример (рис. 33). Левый конец балки свободно оперт, правый — жестко заделан; нагрузка балки распределена по закону треугольника и составляет всего 32,4 *т*; профиль балки во всех пролетах одинаков, все опоры жесткие и смещений не имеют.

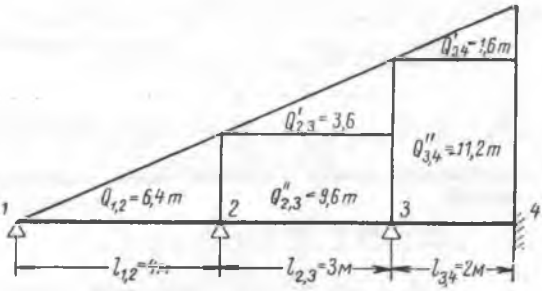


Рис. 33.

Интенсивность нагрузки можно выразить формулой

$$q = 2\,\frac{32{,}4}{9^2}\,z = 0.8z,$$

над опорой *2* $q = 3{,}2$ *тм*;
над опорой *3* $q = 5{,}6$ *тм*;
над опорой *4* $q = 7{,}2$ *тм*.
Пролет *1—2* несет нагрузку

$$Q_{1,2} = \frac{3{,}2\cdot 4}{2} = 6{,}4\ m,$$

распределенную по закону треугольника;
пролет *2—3* несет нагрузку по закону треугольника

$$Q'_{2,3} = \frac{2{,}4\cdot 3}{2} = 3{,}6\ m$$

и равномерно распределенную нагрузку

$$Q''_{2,3} = 3{,}2\cdot 3 = 9{,}6\ m.$$

Пролет *3—4* несет нагрузку по закону треугольника

$$Q'_{3,4} = \frac{1{,}6\cdot 2}{2} = 1{,}6\ m$$

и равномерно распределенную нагрузку

$$Q''_{3,4} = 5.6\cdot 2 = 11{,}2\ m.$$

Этой нагрузке балки соответствуют следующие углы поворота:

$$\alpha_п\,(Q_{1,2}) = -\frac{8}{160}\,\frac{Q_{1,2}l^2_{1,2}}{EJ};$$

$$\alpha_л\,(Q_{2,3}) = \frac{7}{160}\,\frac{Q'_{2,3}l^2_{2,3}}{EJ} + \frac{1}{24}\,\frac{Q''_{2,3}l^2_{2,3}}{EJ};$$

$$\alpha_{\text{п}}(Q_{2,3}) = -\frac{8}{180}\frac{Q'_{2,3}l^2_{2,3}}{EJ} - \frac{1}{24}\frac{Q''_{2,3}l^2_{2,3}}{EJ};$$

$$\alpha_{\text{л}}(Q_{3,4}) = \frac{7}{180}\frac{l^2_{3,4}}{EJ}Q'_{3,4} + \frac{1}{24}\frac{l^2_{3,4}}{EJ}Q''_{3,4};$$

$$\alpha_{\text{п}}(Q_{3,4}) = -\frac{8}{180}\frac{l^2_{3,4}}{EJ}Q'_{3,4} - \frac{1}{24}\frac{l^2_{3,4}}{EJ}Q''_{3,4}.$$

Опорные моменты определятся из уравнений

$$2(4+3)M_2 + 3M_3 = 56.4;$$
$$3M_2 + 2(3+2)M_3 + 2M_4 = 42.93;$$
$$2M_3 + 2\cdot 2M_4 = 12.9.$$

Отсюда

$$M_2 = 3.4\ тм;$$
$$M_3 = 2.9\ тм;$$
$$M_4 = 1.76\ тм.$$

Пример. Балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой q, лежит на трех равноотстоящих опорах, причем средняя из опор расположена на f ниже крайних опор

$$M_{i-1} = M_{i+1} = 0;$$
$$l_{i-1,i} = l_{i,i+1} = l.$$

Уравнение трех моментов примет вид

$$2\left(\frac{l}{EJ} + \frac{l}{EJ}\right)M = 6\left(\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql^3}{24EJ}\right) - \frac{12f}{l},$$

откуда

$$M = \frac{1}{8}ql^2 - 3\frac{EJf}{l^2}.$$

Из этого выражения следует, что с увеличением f момент на средней опоре уменьшается, причем тем больше, чем больше жесткость балки. Наивыгоднейшее расположение опор будет такое, при котором момент на опоре сделается равным наибольшему изгибающему моменту между опорами. Это будет при $f = 0{,}013\frac{ql^4}{EJ}$, причем $M = 0{,}0858\,ql^2$ (при $f = 0$ $M_{\max} = 0{,}125\,ql^2$, т. е. в 1,46 раза больше).

§ 30. Построение эпюр моментов и перерезывающих сил для балок, рассчитанных при помощи теоремы трех моментов

1. Построение эпюры моментов

Для построения эпюры моментов достаточно построить ее для всех отдельных пролетов балки, считая каждый отдельный участок балки между двумя смежными ее опорами свободно опертой балкой, загруженной пролетной нагрузкой и опорными моментами, величина которых найдена при решении уравнения трех моментов.

Величина изгибающего момента в сечении, определяемом координатой $z_{i,j}$, вычисляется по выражению

$$M = M(Q_{i,j}) + \left(1 - \frac{z_{i,j}}{l_{i,j}}\right)M_i + \frac{z_{i,j}}{l_{i,j}}M_j.$$

где $M(Q_i, j)$ — величина изгибающего момента, вычисленного для рассматриваемого сечения балки в предположении, что балка, соединяющая i-ю и j-ю опоры, свободно оперта на эти опоры;

$l_{i,j}$ — пролет балки между опорами i и j;

$z_{i,j}$ — отстояние рассматриваемого сечения балки от i-й опоры;

M_i — величина изгибающего момента в сечении, совпадающем с i-й опорой;

M_j — величина его в сечении, совпадающем с j-й опорой.

При графическом построении эпюры моментов следует (рис. 34):

а) в каждом сечении балки абсолютную величину изгибающего момента от действия пролетной нагрузки откладывать от оси балки в сторону сжатых волокон;

б) абсолютные величины опорных моментов откладывать от той же оси в сторону растягивающих волокон;

в) эпюру полных изгибающих моментов в сечениях балки получать как разность эпюр моментов от пролетной нагрузки и от опорных моментов (см. заштрихованную площадь на рис. 34).

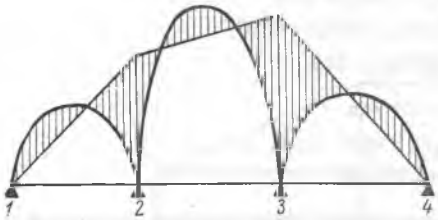


Рис. 34.

2. Построение эпюры перерезывающих сил

Для построения эпюры перерезывающих сил неразрезной балки, статическая неопределимость которой раскрыта при помощи теоремы трех моментов, достаточно построить эпюру перерезывающих сил для отдельных однопролетных участков балки, считая их загруженными пролетной нагрузкой $Q_{i,j}$ и опорными моментами M_i и M_j, приложенными к ее концам.

Величина перерезывающей силы в каждом сечении балки между опорами i и j определяется выражением

$$N = N(Q_{i,j}) + \frac{M_j - M_i}{l_{i,j}}, \tag{108}$$

где $N(Q_{i,j})$ — величина перерезывающей силы, вычисленной для рассматриваемого сечения балки в предположении, что балка, соединяющая i-ю и j-ю опоры, свободно оперта на эти опоры;

M_i и M_j — изгибающие моменты в сечениях балки, совпадающих с i-й и j-й опорами соответственно;

$l_{i,j}$ — пролет балки между опорами i и j.

§ 31. Определение опорных реакций для многопролетных балок, рассчитанных при помощи теоремы трех моментов

Опорная реакция для i-й опоры балки определяется выражением

$$R_i = R^{(п)}(Q_{i-1,i}) + R^{(л)}(Q_{i,\,i+1}) - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_{i-1,i}} - \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i,\,i+1}}, \tag{109}$$

где $R^{(п)}(Q_{i-1,i})$ — реакция i-й опоры от пролетной нагрузки в пролете между опорами $i-1$ и i в предположении, что балка свободно оперта на эти опоры;

$R^{(л)}(Q_{i,i+1})$ — реакция i-й опоры от пролетной нагрузки в пролете между опорами i и $i+1$.

Пример. Балка на четырех опорах нагружена треугольной нагрузкой (рис 33):

$$R_1 = -\frac{1}{3}\cdot 6{,}4 - \frac{M_2}{l_{1,2}} = -2{,}13 - \frac{3{,}40}{4} = -1{,}28\ m;$$

$$R_2 = -\frac{2}{3}\cdot 6\,4 - \frac{1}{3}\cdot 3.6 - \frac{1}{2}\cdot 9.6 - \frac{M_2}{l_{1,2}} - \frac{M_2 - M_3}{l_{2,3}} = -11.27\ m;$$

$$R_3 = -\frac{2}{3}\cdot 3.6 - \frac{1}{2}\cdot 9.6 - \frac{1}{2}\cdot 1.6 - \frac{1}{2}\cdot 11.2 - \frac{M_3 - M_2}{l_{2,3}} - \frac{M_3 - M_4}{l_{3,4}} = -13.75\ m.$$

$$R_4 = -\frac{2}{3}\cdot 1.6 - \frac{1}{2}\cdot 11.2 - \frac{M_4 - M_3}{l_{3,4}} = -6.08\ m.$$

§ 32. Применение теоремы трех моментов к расчету стоек переборок

1 Уравнение трех моментов для вертикальной стойки переборки (рис. 35)

Пусть $h_п$ — высота напора воды в метрах над средней опорой. Расстояние между стойками равно 1 *м* Линейные меры — в метрах, моменты — в тонно-метрах

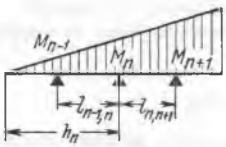


Рис. 35.

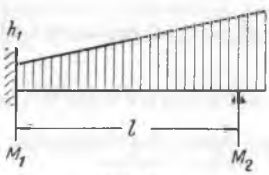


Рис. 36.

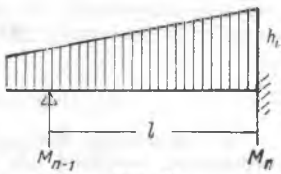


Рис. 37.

Тогда в выражении правой части уравнения (107) для трапециевидной нагрузки надо положить $q = h_п$ и $\alpha = 1$, после чего уравнение трех моментов можно представить в таком виде

$$l_{n-1,n}M_{n-1} + 2\,(l_{n-1,n} + l_{n,n+1})\,M_n + l_{n,n+1}M_{n+1} = \\ = \frac{1}{12}\left[3h_n\left(l^3_{n-1,n} + l^3_{n,n+1}\right) + 1.4\left(l^4_{n,n+1} - l^4_{n-1,n}\right)\right] \qquad (110)$$

Для морской воды плотностью 1,025 коэффициент правой части будет не $\frac{1}{12}$, а $\frac{1}{11,7}$.

2. Уравнение трех моментов в случае заделанных концов стоек

Чтобы получить уравнение трех моментов для пролета, в котором верхний конец заделан, надо в уравнении (110) положить $l_{n-1,n} = 0$, для пролета с заделанным нижним концом — положить $l_{n,n+1} = 0$.

При заделке верхней опоры (рис. 36)

$$2M_1 + M_2 = \frac{1}{11,7}\,(3h_1l^2 + 1,4l^3). \qquad (111)$$

При заделке нижней опоры (рис. 37)

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{1}{11,7}\,(3h_nl^2 - 1,4l^3). \qquad (112)$$

3. Уравнение трех моментов для стоек, неполностью нагруженных (рис. 38)

$$l_{1,2}M_1 + 2\,(l_{1,2} + l_{2,3})\,M_2 + l_{2,3}M_3 = \frac{1}{11,7}\left[h_2^3\left(4l_{1,2} - 3h_2 + 0,6\,\frac{h_2^2}{l_{1,2}}\right) + \right. \\ \left. + 3h_2l^3_{2,3} + 1,4l^4_{2,3}\right]. \qquad (113)$$

Для случая заделанной нижней опоры ($l_{2,\ 3} = 0$) (рис. 39)

$$M_1 + 2M_2 = \frac{1}{11{,}7} h_2^3 \left(4 - \frac{3h_2}{l} + \frac{0{,}6h_2^2}{l^2}\right). \tag{114}$$

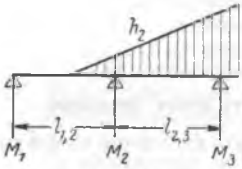


Рис. 38.

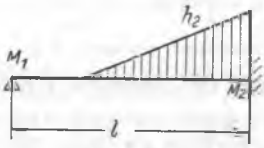


Рис. 39.

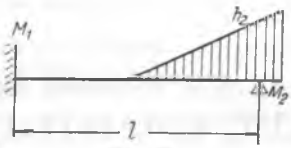


Рис. 40.

Для случая заделанной верхней опоры (рис. 40)

$$2M_1 + M_2 = \frac{1}{11{,}7}\left(2h_2^3 - 0{,}6\,\frac{h_2^5}{l^2}\right). \tag{115}$$

4. Определение реакций (рис. 41)

На основании изложенного выше об определении реакций, реакция стойки переборки, например на n-й опоре, будет:

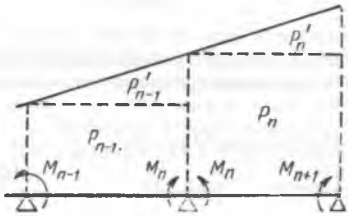


Рис. 41.

реакция от левого участка

$$-\frac{P_{n-1}}{2} - \frac{2}{3} P'_{n-1} - \frac{M_n}{l_{n-1,\,n}} + \frac{M_{n-1}}{l_{n-1,\,n}};$$

реакция от правого участка

$$-\frac{P_n}{2} - \frac{1}{3} P'_n - \frac{M_n}{l_{n,\,n+1}} + \frac{M_{n+1}}{l_{n,\,n+1}};$$

полная реакция

$$R_n = -\frac{1}{2}(P_{n-1} + P_n) - \frac{1}{3}\left(2P'_{n-1} + P'_n\right) - \frac{l_{n,\,n+1} + l_{n-1,\,n}}{l_{n,\,n+1} l_{n-1,\,n}} M_n -$$

$$- \frac{M_{n-1}}{l_{n-1,\,n}} + \frac{M_{n+1}}{l_{n,\,n+1}}. \tag{116}$$

Пример 1. Случай закрепления, показанный на рис. 42. Статическая неопределимость раскрывается уравнением (112), в котором надо положить: $M_{n-1} = 0$; $h_n = l$; $2M_2 = \frac{1}{11{,}7}(3l^3 - 1{,}4l^3)$; $M_2 = 0{,}133Pl$.

Реакция на левой опоре

$$R_1 = -\frac{1}{3}P + \frac{M_2}{l} = -0{,}2P.$$

Реакция на правой опоре

$$R_2 = -(P + R_1) = -0{,}8P.$$

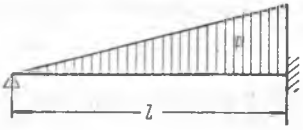


Рис. 42.

Пример 2. Случай закрепления, показанный на рис. 43. Статическая неопределимость раскрывается уравнением (111), в котором надо положить: $M_2 = 0$; $h_1 = 0$; $2M_1 = \frac{1}{11{,}7} 1{,}4l^3$; $M_1 = 0{,}1166Pl$.

Реакция на левой опоре

$$R_1 = -\frac{1}{3}P - \frac{M_1}{l} = -0{,}45P.$$

Реакция на правой опоре

$$R_2 = -(P + R_1) = -0{,}55P.$$

Рис. 43.

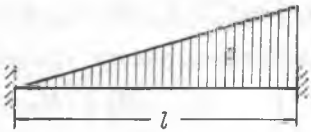


Рис. 44.

Пример 3. Случай закрепления, показанный на рис. 44. Статическая неопределимость раскрывается уравнением (111) при $h_1 = 0$ и уравнением (112) при $h_1 = l$:

$$2M_1 + M_2 = \frac{1}{11{,}7}\cdot 1{,}4l^3;$$

$$M_1 + 2M_2 = \frac{1}{11{,}7}\cdot 1{,}6l^3; \quad M_1 = 0{,}0667Pl; \quad M_2 = 0{,}1Pl.$$

Реакция на левой опоре

$$R_1 = -\frac{1}{3}P - \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{l} = -0{,}3P.$$

Реакция на правой опоре

$$R_2 = -(P + R_1) = -0{,}7P.$$

Пример 4. Балка на четырех опорах (рис. 45)

$l_{1,2} = 2{,}9$ *м*; $h_1 = 2{,}3$ *м*;

$l_{2,3} = 4{,}6$ *м*; $h_2 = 5{,}2$ *м*;

$l_{3,4} = 0{,}9$ *м*; $h_3 = 9{,}8$ *м*;

$h_4 = 10{,}7$ *м*.

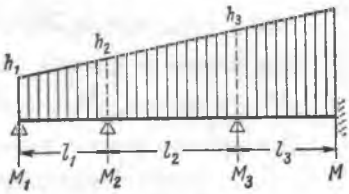


Рис. 45.

Статическая неопределимость раскрывается уравнением (110), которое надо написать для участков первого и второго и для второго и третьего:

$$2(2{,}9 + 4{,}6)M_2 + 4{,}6M_3 = \frac{1}{11{,}7}[3\cdot 5{,}2(2{,}9^3 + 4{,}6^3) + 1{,}4(4{,}6^4 - 2{,}9^4)];$$

$$4{,}6M_2 + 2(4{,}6 + 0{,}9)M_3 = \frac{1}{11{,}7}[3\cdot 9{,}8(4{,}6^3 + 0{,}9^3) + 1{,}4(0{,}9^4 - 4{,}6^4)],$$

откуда

$$M_1 = 0; \quad M_2 = 9{,}4 \ \text{тм}; \quad M_3 = 13 \ \text{тм}; \quad M_4 = 0.$$

Реакции определятся по выражению (116); например, реакция на третьей опоре будет

$$R_3 = -\left[\frac{1}{2}(h_2 l_{2,3} + h_3 l_{3,4}) + \frac{1}{3}\left(2\frac{l_{2,3}^2}{2} + \frac{l_{3,4}^2}{2}\right)\right]1{,}025 -$$

$$-\frac{l_{3,4} + l_{2,3}}{l_{3,4}l_{2,3}}M_3 + \frac{M_2}{l_{2,3}} + \frac{M_4}{l_{3,4}} = 39 \ m.$$

Пример 5 (рис. 46). Статическая неопределимость раскрывается уравнениями (110) — (112).

Для первого участка уравнение (111)

$$2M_1 + M_2 = \frac{1}{11,7}\left(3h_1 l_{1,2}^2 + 1.4 l_{1,2}^3\right).$$

Для первого и второго участков уравнение (110)

$$l_1 M_1 + 2\left(l_{1,2} + l_{2,3}\right) M_2 + l_{2,3} M_3 = \frac{1}{11,7}\left[3h_2\left(l_{1,2}^3 + l_{2,3}^3\right) + 1.4\left(l_{2,3}^4 - l_{1,2}^4\right)\right].$$

Для второго участка уравнение (112)

$$M_2 + 2M_3 = \frac{1}{11,7}\left(3h_3 l_{2,3}^2 - 1.4 l_{2,3}^3\right).$$

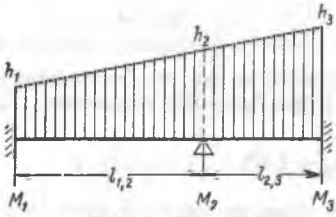


Рис. 46.

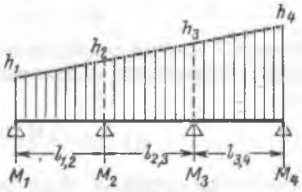


Рис. 47.

Пример 6 (рис. 47). Статическая неопределимость раскрывается уравнениями (110) и (112).

Для первого и второго участков уравнение (110), $M_1 = 0$

$$2\left(l_{1,2} + l_{2,3}\right) M_2 + l_{2,3} M_3 = \frac{1}{11,7}\left[3h_2\left(l_{1,2}^3 + l_{2,3}^3\right) + 1.4\left(l_{2,3}^4 - l_{1,2}^4\right)\right].$$

Для второго и третьего участков уравнение (110)

$$l_{2,3} M_2 + 2\left(l_{2,3} + l_{3,4}\right) M_3 + l_{3,4} M_4 = \frac{1}{11,7}\left[3h_3\left(l_{2,3}^3 + l_{3,4}^3\right) + 1.4\left(l_{3,4}^4 - l_{2,3}^4\right)\right].$$

Для третьего участка уравнение (112)

$$M_3 + 2M_4 = \frac{1}{11,7}\left(3h_4 l_{3,4}^2 - 1.4 l_{3,4}^3\right).$$

Пример 7 (рис. 48). Равномерная нагрузка *pm* на 1 *пог. м.* Статическая неопределимость раскрывается уравнением (107).

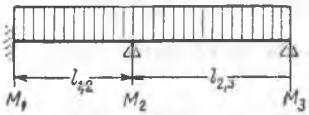


Рис. 48.

Для первого участка

$$2M_1 + M_2 = \frac{1}{4} p l_{1,2}.$$

Для второго участка

$$l_{1,2} M_1 + 2\left(l_{1,2} + l_{2,3}\right) M_2 = \frac{1}{4} p\left(l_{1,2}^3 + l_{2,3}^3\right).$$

Реакция на левой опоре

$$R_1 = -\frac{p l_{1,2}}{2} - \frac{M_1}{l_{1,2}} + \frac{M_2}{l_{1,2}}.$$

Реакция на средней опоре

$$R_2 = -\left(\frac{p l_{1,2}}{2} - \frac{M_1}{l_{1,2}} + \frac{M_2}{l_{1,2}}\right) - \left(\frac{p l_{2,3}}{2} + \frac{M_2}{l_{2,3}}\right).$$

Реакция на правой опоре

$$R_3 = -\frac{p l_{2,3}}{2} + \frac{M_2}{l_{2,3}}.$$

§ 33. Уравнения трех углов поворота

Если на балку действует ряд внешних моментов, приложенных в опорных сечениях, то удобно принимать за основные неизвестные не моменты в опорных сечениях балки, а углы поворота в этих сечениях.

В этом случае следует использовать уравнения трех углов поворота:

$$
\left.
\begin{aligned}
&2(k_{1,2}+k_1)K_0\alpha_1+k_{1.2}K_0\alpha_2=\boxed{M_{1,2}}+\mathfrak{M}_1^0+\frac{6EJ_{1,2}}{l_{1,2}}\varphi_{1,2}\\
&k_{1,2}K_0\alpha_1+2(k_{1,2}+k_{2,3})K_0\alpha_2+k_{2,3}K_0\alpha_3=\\
&=\boxed{M_{2,1}}+\boxed{M_{2,3}}+\mathfrak{M}_2^0+\frac{6EJ_{1,2}}{l_{1,2}}\varphi_{1,2}+\frac{6EJ_{2,3}}{l_{2,3}}\varphi_{2,3}\\
&k_{2,3}K_0\alpha_2+2(k_{2,3}+k_{3,4})K_0\alpha_3+k_{3,4}K_0\alpha_4=\\
&=\boxed{M_{3,2}}+\boxed{M_{3,4}}+\mathfrak{M}_3^0+\frac{6EJ_{2,3}}{l_{2,3}}\varphi_{2,3}+\frac{6EJ_{3,4}}{l_{3,4}}\varphi_{3,4}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{n-1,}K_0\alpha_{n-1}+2(k_{n-1,n}+k_n)K_0\alpha_n=\\
&=\boxed{M_{n,n-1}}+\mathfrak{M}_n^0+\frac{6EJ_{n-1,n}}{l_{n-1,n}}\varphi_{n-1,n}
\end{aligned}
\right|\qquad(117)
$$

$$k_1=\frac{l_0}{4EJ_0}\frac{1}{\mathfrak{A}_1};\qquad k_{n-1,n}=\frac{J_{n-1,n}}{J_0}\frac{l_0}{l_{n-1,n}};$$

$$k_{1.2}=\frac{J_{1,2}}{J_0}\frac{l_0}{l_{1,2}};\qquad k_n=\frac{l_0}{4EJ_0}\frac{1}{\mathfrak{A}_n};$$

$$k_{2,3}=\frac{J_{2.3}}{J_0}\frac{l_0}{l_{2,3}};\qquad K_0=2\frac{EJ_0}{l_0};$$

$$\dots\dots$$

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ — углы поворота опорных сечений балки;

$\varphi_{i,j}=\dfrac{f_j-f_j}{l_{i,j}}$ — угол поворота оси балки, возникающий из-за смещения опор;

$\mathfrak{M}_1^0,\ \mathfrak{M}_2^0,\ \dots,\ \mathfrak{M}_n^0$ — внешние моменты, приложенные к опорным сечениям балки;

$\mathfrak{A}_1$ — коэффициент податливости заделки балки на ее крайней левой опоре;

$\mathfrak{A}_n$ — то же на крайней правой опоре;

$J_{1,2},\ J_{2,3},\ \dots,\ J_{n-1,n}$ — моменты инерции отдельных пролетов балки;

$l_{1.2},\ l_{2,3},\ \dots,\ l_{n-1,n}$ — длины отдельных пролетов балки;

$$\left.
\begin{aligned}
\boxed{M_{i,j}}&=\frac{2EJ_{i,j}}{l_{i,j}}\left[2\alpha^{(л)}(Q_{i,j})+\alpha^{(п)}(Q_{i,j})\right]\\
\boxed{M_{j,i}}&=\frac{2EJ_{i,j}}{l_{i,j}}\left[\alpha^{(л)}(Q_{i,j})+2\alpha^{(п)}(Q_{i,j})\right]
\end{aligned}
\right|\text{ — моменты, возникающие в опорных сечениях балки под действием пролетной нагрузки, когда оба конца балки жестко заделаны;}$$

$\alpha^{(л)}(Q_{i,j})$ — угол поворота от пролетной нагрузки на левой опоре пролета $l_{i,j}$, считая балку длиной $l_{i,j}$ свободно опертой на опоры $i,\ j$;

$\alpha^{(п)}(Q_{i,j})$ — то же для правой опоры.

Для балки, у которой момент инерции на протяжении всех пролетов постоянен и смещений опор нет, уравнения трех углов поворота принимают вид:

$$
\left.\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{l_{1,2}}+\frac{1}{4EJ\mathfrak{A}_1}\right)\alpha_1+\frac{1}{l_{1,2}}\alpha_2=\frac{1}{l_{1,2}}\left[2\alpha^{(л)}(Q_{1,2})+\alpha^{(п)}(Q_{1,2})\right]+\frac{\mathfrak{M}_1^0}{2EJ}\\
&\frac{1}{l_{1,2}}\alpha_1+2\left(\frac{1}{l_{1,2}}+\frac{1}{l_{2,3}}\right)\alpha_2+\frac{1}{l_{2,3}}\alpha_3=\frac{1}{l_{1,2}}\left[\alpha^{(л)}(Q_{1,2})+2\alpha^{(п)}(Q_{1,2})\right]+\\
&\qquad+\frac{1}{l_{2,3}}\left[2\alpha^{(л)}(Q_{2,3})+\alpha^{(п)}(Q_{2,3})\right]+\frac{\mathfrak{M}_2^0}{2EJ}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{l_{n-1,n}}\alpha_{n-1}+2\left(\frac{1}{l_{n-1,n}}+\frac{1}{4EJ\mathfrak{A}_n}\right)\alpha_n=\\
&=\frac{1}{l_{n-1,n}}\left[\alpha^{(л)}(Q_{n-1,n})+2\alpha^{(п)}(Q_{n-1,n})\right]+\frac{\mathfrak{M}_n^0}{2EJ}
\end{aligned}\right\}\qquad(118)
$$

§ 34. Метод фокальных отношений

Много задач, относящихся к расчету неразрезных балок, свободно опертых на ряд жестких опор, может быть решено путем рассмотрения соотношений между последовательными значениями изгибающего момента в различных опорных сечениях балки. Особенно упрощается решение задачи в тех случаях, когда рассчитываемая балка загружена либо внешним моментом в одном из ее опорных сечений, либо пролетной нагрузкой, но не на всех пролетах, а лишь на небольшой их части.

1. Внешний момент приложен на крайней опоре балки (рис. 49)

Точки, в которых эпюра моментов пересекает ось абсцисс (рис. 49, пунктир), замечательны тем, что изгибающий момент в них равен нулю, если балка не нагружена ни левее того пролета, к которому относится данная точка, ни на протяжении самого этого пролета. Иными словами, положение этих точек не зависит от загрузки той части балки, которая лежит правее пролета, включающего данную точку. Эти точки называются фокусами балки. Все фокусы балки, соответствующие загрузке ее правого конца, лежат всегда в пределах левой половины каждого пролета и называются ее левыми фокусами в отличие от правых фокусов, в которых изгибающий момент равен нулю, когда внешним моментом загружен левый конец балки.

Между опорными моментами балки, загруженной моментом на крайней правой опоре, имеют место следующие зависимости:

$$
\left.\begin{aligned}
M_0&=-k_{0,1}M_1\\
M_1&=-k_{1,2}M_2\\
M_2&=-k_{2,3}M_3\\
&\cdots\cdots\\
M_{n-2}&=-k_{n-2,n-1}M_{n-1}\\
M_{n-1}&=-k_{n-1,n}M_n
\end{aligned}\right\}\qquad(119)
$$

где числа k_{ij}, называемые фокальными отношениями соответствующих пролетов балки, могут быть вычислены при помощи следующих рекуррентных зависимостей:

$$\left.\begin{aligned}
&k_{0,1}=0;\ \varepsilon_{0,1}=\lambda_{0,1}(2-k_{0,1})\\
&k_{1,2}=\frac{1}{2+\frac{\varepsilon_{0,1}}{\lambda_{1,2}}};\ \varepsilon_{1,2}=\lambda_{1,2}(2-k_{1,2})\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{i-2,\,n-1}=\frac{1}{2+\frac{\varepsilon_{n-3,\,n-2}}{\lambda_{n-2,\,n-1}}};\ \varepsilon_{n-2,\,n-1}=\lambda_{n-2,\,n-1}(2-k_{n-2,\,n-1})\\
&k_{n-1,\,n}=\frac{1}{2+\frac{\varepsilon_{n-2,\,n-1}}{\lambda_{n-1,\,n}}}
\end{aligned}\right\}\quad(120)$$

Рис. 49.

Здесь

$$\lambda_{i-1,\,i}=\frac{EJ_0}{l_0}\,\frac{l_{i-1,\,i}}{EJ_{i-1,\,i}}.$$

Для балки, загруженной моментом на крайнем левом конце, имеют место следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned}
&M_n=-k_{n,\,n-1}M_{n-1}\\
&M_{n-1}=-k_{n-1,\,n-2}M_{n-2}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&M_2=-k_{2,1}M_1\\
&M_1=-k_{1,0}M_0\\
&k_{n,\,n-1}=0;\quad \varepsilon_{n,\,n-1}=\lambda_{n,\,n-1}(2-k_{n,\,n-1})\\
&k_{n-1,\,n-2}=\frac{1}{2+\frac{\varepsilon_{n,\,n-1}}{\lambda_{n-1,\,n-2}}},\quad \varepsilon_{n-1,\,n-2}=\lambda_{n-1,\,n-2}(2-k_{n-1,\,n-2})\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k_{2,1}=\frac{1}{2+\frac{\varepsilon_{3,2}}{\lambda_{2,1}}};\quad \varepsilon_{2,1}=\lambda_{2,1}(2-k_{2,1})\\
&k_{1,0}=\frac{1}{2+\frac{\varepsilon_{2,1}}{\lambda_{2,1}}}
\end{aligned}\right\}\quad(121)$$

Все правые фокусы отличаются тем, что в совпадающих с ними сечениях балки изгибающий момент, как бы ни была загружена балка левее рассматриваемого пролета, всегда равен нулю, если только сам этот пролет и все пролеты правее его ничем не загружены.

2. Внешний момент приложен к балке на одной из ее промежуточных опор (рис. 50)

В этом случае имеют место следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned} M_i' &= -\mu_i' \mathfrak{M}_i \\ M_i'' &= \mu_i'' \mathfrak{M}_i \end{aligned}\right| \qquad (122)$$

где M_i' — изгибающий момент в сечении, лежащем непосредственно слева у i-й опоры;

M_i'' — то же, в сечении справа у i-й опоры;

$$\left.\begin{aligned} \mu_i' &= \frac{\varepsilon_{i+1,\,i}}{\varepsilon_{i+1,\,i} + \varepsilon_{i-1,\,i}} \\ \mu_i'' &= \frac{\varepsilon_{i-1,\,i}}{\varepsilon_{i+1,\,i} + \varepsilon_{i-1,\,i}} \end{aligned}\right| \qquad (123)$$

— коэффициенты распределения

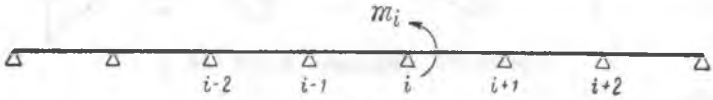


Рис. 50.

Изгибающие моменты в опорных сечениях:

$$\left.\begin{aligned} M_{i-1} &= -k_{i-1,\,i} M_i'; & M_{i+1} &= -k_{i+1,\,i} M_i'' \\ M_{i-2} &= -k_{i-2,\,i-1} M_{i-1}; & M_{i+2} &= -k_{i+2,\,i+1} M_{i+1} \\ M_{i-3} &= -k_{i-3,\,i-2} M_{i-2}; & M_{i+3} &= -k_{i+3,\,i+2} M_{i+2} \end{aligned}\right| \qquad (124)$$

Величины $k_{i,\,j}$ и $\varepsilon_{i,\,j}$ вычисляются в соответствии с формулами п. 1.

3. Влияние, оказываемое свободными членами отдельных уравнений трех моментов на величину изгибающих моментов, действующих во всех опорных сечениях балки

Если свободный член k-го уравнения трех моментов для балки, свободно опертой на все опоры, равен K_k, то изгибающий момент на k-й опоре:

$$M_k = \frac{K_k}{\varepsilon_{k+1,\,k} + \varepsilon_{k-1,\,k}} \qquad (125)$$

Влияние K_k на все M_i, которым соответствуют значения индекса i меньшие, чем k, можно определить при помощи зависимостей

$$\left.\begin{aligned} M_{k-1} &= -k_{k-1,\,k} M_k \\ M_{k-2} &= -k_{k-2,\,k-1} M_{k-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_1 &= -k_{1,2} M_2 \end{aligned}\right| \qquad (126)$$

влияние же k_k на все M_i, которым соответствуют i, большие, чем k, — при помощи равенств

$$\left.\begin{aligned} M_{k+1} &= -k_{k+1,\,k} M_k \\ M_{k+2} &= -k_{k+2,\,k+1} M_{k+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| \qquad (127)$$

Пример 1. Определить опорные моменты для балки, изображенной на рис. 51, считая ее загруженной внешним моментом $M_5 = 20$ *тм* на крайней правой опоре.

Определим опорные моменты по формулам:

$$M_4 = -k_{4,5}M_5;$$
$$M_3 = -k_{3,4}M_4;$$
$$M_2 = -k_{2,3}M_3;$$
$$M_1 = -k_{1,2}M_2;$$
$$M_0 = -k_{0,1}M_1$$

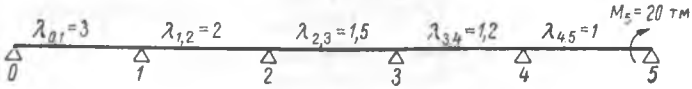


Рис 51.

Вычислим все левые фокальные отношения:

$$k_{0,1} = 0; \quad \varepsilon_{0,1} = 3\,(2 - 0) = 6;$$

$$k_{1,2} = \frac{1}{2 + \frac{6}{2}} = 0{,}2 \quad \varepsilon_{1,2} = 2\,(2 - 0{,}2) = 3{,}6;$$

$$k_{2,3} = \frac{1}{2 + \frac{3{,}6}{1{,}5}} = 0{,}228, \quad \varepsilon_{2,3} = 1{,}5\,(2 - 0{,}228) = 2{,}58;$$

$$k_{3,4} = \frac{1}{2 + \frac{2{,}58}{1{,}2}} = 0{,}238; \quad \varepsilon_{3,4} = 1{,}2\,(2 - 0{,}238) = 2{,}11;$$

$$k_{4,5} = \frac{1}{2 + \frac{2{,}11}{1{,}00}} = 0{,}243.$$

Опорные моменты рассматриваемой балки:

$$M_4 = -4{,}86 \text{ тм},$$
$$M_3 = +1{,}16 \text{ тм},$$
$$M_2 = -0{,}26 \text{ тм};$$
$$M_1 = +0{,}05 \text{ тм}$$
$$M_0 = 0.$$

Пример 2. Рассчитаем ту же балку, предполагая, что момент $M = 20$ *тм* приложен к ее левому концу.

В этом случае:

$$M_0 = 20 \text{ тм},$$
$$M_1 = -k_{1,0}M_0,$$
$$M_2 = -k_{2,1}M_1;$$
$$M_3 = -k_{3,2}M_2;$$
$$M_4 = -k_{4,3}M_3;$$
$$M_5 = -k_{5,4}M_4;$$

$$k_{5,4} = 0; \quad \varepsilon_{5,4} = 1\,(2 - 0) = 2{,}0;$$

$$k_{4,3} = \frac{1}{2 + \frac{2}{1{,}2}} = 0{,}272; \quad \varepsilon_{4,3} = 1{,}2\,(2 - 0{,}272) = 2{,}08;$$

$$k_{3,2} = \frac{1}{2 + \frac{2{,}08}{1{,}50}} = 0{,}295; \quad \varepsilon_{3,2} = 1{,}5\,(2 - 0{,}295) = 2{,}55;$$

$$k_{2,1} = \frac{1}{2 + \frac{2,55}{2}} = 0,307; \quad \varepsilon_{2,1} = 2,0\,(2 - 0,307) = 3,39;$$

$$k_{1,0} = \frac{1}{2 + \frac{3,39}{3}} = 0,320.$$

Отсюда

$$M_0 = 20,0 \text{ тм};$$
$$M_1 = -6,4 \text{ тм};$$
$$M_2 = +1,96 \text{ тм};$$
$$M_3 = -0,58 \text{ тм};$$
$$M_4 = +0,16 \text{ тм};$$
$$M_5 = 0.$$

Пример 3. Определить опорные моменты для балки примера 2, если внешний момент $\mathfrak{M} = 20$ *тм* приложен на второй опоре (рис. 52).

Для рассматриваемой балки

$$\varepsilon_{1,2} = 3,60;$$
$$\varepsilon_{3,2} = 2,55;$$

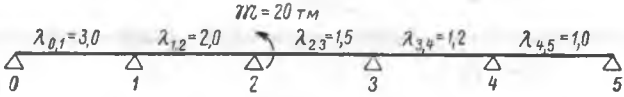


Рис. 52.

откуда

$$\mu_2' = \frac{2,55}{3,60 + 2,55} = 0,415;$$

$$\mu_2'' = \frac{3,60}{6,15} = 0,585.$$

Таким образом,

$$M_2' = -0,415 \cdot 20 = -8,3 \text{ тм};$$

$$M_2'' = +0,585 \cdot 20 = +11,7 \text{ тм}.$$

Изгибающие моменты над остальными опорами:

$$M_1 = -k_{1,2} M_2' = +1,66 \text{ тм};$$

$$M_3 = -k_{3,2} M_2'' = -3,45 \text{ тм};$$

$$M_4 = -k_{4,3} M_3 = +0,94 \text{ тм};$$

$$M_5 = -k_{5,4} M_4 = 0.$$

Пример 4. Рассчитать балку, изображенную на рис. 53, в предположении что ее средний пролет загружен равномерно распределенной нагрузкой $Q = 12$ *т*.

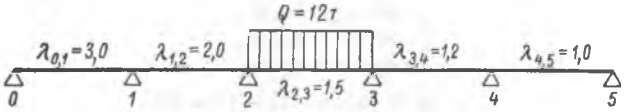


Рис. 53.

За величины l_0 и J_0 при вычислении чисел $\lambda_{i,j}$ были приняты длина и жесткость загруженного пролета балки. Длина этого пролета $l_{2,3}$ задана и равна 4 *м*.

Уравнения трех моментов для балки выписываются в следующем виде:

$$M_0 = 0;$$

$$\lambda_{0,1} M_0 + 2\,(\lambda_{0,1} + \lambda_{1,2})\, M_1 + \lambda_{1,2} M_2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2}M_1 + 2(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,3})M_2 + \lambda_{2,3}M_3 = \frac{Ql}{4} = 12 \text{ тм},$$

$$\lambda_{2,3}M_2 + 2(\lambda_{2,3} + \lambda_{3,4})M_3 + \lambda_{3,4}M_4 = \frac{Ql}{4} = 12 \text{ тм},$$

$$\lambda_{3,4}M_3 + 2(\lambda_{3,4} + \lambda_{4,5})M_4 + \lambda_{4,5}M_5 = 0;$$

$$M_5 = 0.$$

Для рассматриваемой балки фокальные отношения уже найдены (см. предыдущие примеры), поэтому простейшей схемой раскрытия ее статической неопределимости является расчетная схема п. 3.

Влияние свободного члена 3-го уравнения

$$M_k = M_2' = \frac{12}{\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,2}} = \frac{12}{6,15} = 1,96;$$

$$M_3' = -0,295 \cdot 1,96 = -0,58.$$

Влияние свободного члена 4-го уравнения

$$M_k = M_3'' = \frac{12}{\varepsilon_{2,3} + \varepsilon_{4,3}} = \frac{12}{4,66} = 2,58;$$

$$M_2'' = -0,228 \cdot 2,58 = -0,59.$$

Суммарные опорные моменты на опорах *2* и *3*

$$M_2 = M_2' + M_2'' = +1,37 \text{ тм};$$

$$M_3 = M_3' + M_3'' = +2,00 \text{ тм}.$$

Моменты над остальными опорами

$$M_0 = 0;$$

$$M_1 = -0,27 \text{ тм}.$$

ГЛАВА 7

ТАБЛИЦЫ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗГИБА ОДНОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Обозначения:

l — пролет балки;
c — координата нагруженного сечения;
$c' = l - c$;
z — координата какого-либо поперечного сечения балки;
P — сосредоточенный груз;
$\mathfrak{M}$ — момент, действующий в плоскости XOZ и приложенный на любом расстоянии от начала координат;
q — распределенная нагрузка на единицу длины;
Q — полная величина распределенной нагрузки, действующей на балку;
E — модуль нормальной упругости материала балки;
J — момент инерции поперечного сечения балки, подверженной изгибу в плоскости XOZ;
$B = \frac{l^3}{EJ}$ — коэффициент податливости балки;
v — стрелка прогиба оси балки в любом ее поперечном сечении;
M — изгибающий момент в любом сечении балки;
V — перерезывающая сила в любом сечении балки;
R_1 — реакция левой опоры;
R_2 — реакция правой опоры;
$\mathfrak{M}_1$ — опорный момент левой опоры;
$\mathfrak{M}_2$ — опорный момент правой опоры.

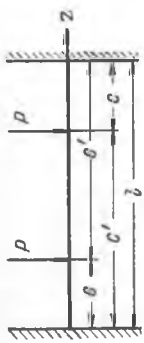
Начало координат на левой опоре; ось x-в направлена вниз; положительное направление моментов — против часовой стрелки.

Таблица 11

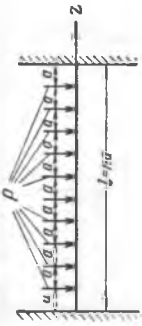
§ 35. Балка, закрепленная обоими концами

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
1	Сосредоточенная сила в пролете	$v = \frac{PB}{6} \cdot \frac{c'^2}{l^2} \cdot \frac{z^2}{l^2} \left(3\frac{c}{l} - \frac{3c+c'}{l} \cdot \frac{z}{l}\right) + \Big\|_c \frac{PB}{6} \left(\frac{z-c}{l}\right)^6$	$M = P\frac{c'^2}{l}\left(\frac{c}{l} - \frac{3c+c'}{l} \cdot \frac{z}{l}\right) + \Big\|_c P(z-c)$	$V = -P\frac{c'^2}{l^2} \cdot \frac{3c+c}{l} + \Big\|_c^{\prime} P$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{cc'^2}{l^2} P$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{c^2c'}{l^2} P$	$R_1 = -\frac{c'^2}{l^3}(3c+c')P$ $R_2 = -\frac{c^2}{l^3}(c+3c')P$	При $z = c$; $v_c = \frac{PB}{3} \cdot \frac{c^3}{l^3} \cdot \frac{c'^3}{l^3}$ Максимальная при $z = \frac{2cl}{3c+c'}$; $v_{max} = \frac{2}{3} PB \frac{c^2c'^2}{l^2(3c+c')^2}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
2	Две симметричные сосредоточенные силы 	$v = \frac{PB}{6} \cdot \frac{z^2}{l^2} \left(3\ \frac{cc'}{l^2} - \frac{z}{l}\right) + \Vert_c \frac{PB}{6} \left(\frac{z-c}{l}\right)^3 + \Vert_{c'} \frac{PB}{6} \left(\frac{z-c'}{l}\right)^3$	$M = P\left(\frac{cc'}{l} - z\right) + \Vert_c P\ (z-c) + \Vert_{c'} P\ (z-c')$	$V = -P + \Vert_c P + \Vert_{c'} P$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{cc'}{l} P$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{cc'}{l} P$	$R_1 = -P$ $R_2 = -P$	При $z = c$ $v_c = \frac{PB}{6} \cdot \frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{2c' - c}{l}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
3	Ряд сосредоточенных сил в пролете 	$v = \frac{Pl^3}{24EJ}\left\{-2(n-1)\frac{z^3}{l^3} + \frac{n^2-1}{n}\cdot\frac{z^2}{l^2} + \left\|_a 4\left(\frac{z-a}{l}\right)^3 + \left\|_{2a} 4\left(\frac{z-2a}{l}\right)^3 + \left\|_{(n-1)a} 4\left[\frac{z-(n-1)a}{l}\right]^3\right.\right.$	$M = -\frac{P(n-1)}{2}z + \frac{n^2-1}{12n}Pl + \left\|_a P(z-a) + \left\|_{2a} P(z-2a) + \ldots + \left\|_{(n-1)a} P[z-(n-1)a]\right.\right.$	$V = -\frac{P(n-1)}{2} + \left\|_a P + \left\|_{2a} P + \ldots + \right|_{(n-1)a} P$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{n^2-1}{12n}Pl$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{n^2-1}{12n}Pl$	$R_1 = -\frac{P(n-1)}{2}$ $R_2 = -\frac{P(n-1)}{2}$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
4	Равномерно распределенная нагрузка по всему пролету	$v = \frac{QB}{24} \cdot \frac{z^2}{l^2}\left(1 - 2\frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2}\right)$	$M = \frac{Ql}{12}\left(1 - 6\frac{z}{l} + 6\frac{z^2}{l^2}\right)$ В середине пролета $M_{\frac{l}{2}} = \frac{Ql}{24}$	$V = \frac{Q}{2}\left(-1 + 2\frac{z}{l}\right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Ql}{12}$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{Ql}{12}$	$R_1 = -\frac{Q}{2}$ $R_2 = -\frac{Q}{2}$	Максимальная при $z = \frac{l}{2}$ $v_{max} = \frac{1}{384} OB$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
5	Равномерно распределенная нагрузка на части пролета с левой стороны балки	$v=\frac{qB}{24}\left\{\frac{z^2}{l^2}\left[\frac{z}{l}z-2\left(2-2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c^3}{l^3}\right)\frac{cz}{l}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{c^2}{l}\left(6-8\frac{c}{l}+3\frac{c^2}{l^2}\right)\right]-\Big\|_c\frac{(z-c)^4}{l^3}\right\}$	$M=\frac{ql^2}{12}\left\{6\frac{z^2}{l^2}-6\frac{c}{l}\left(2-2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c^3}{l^3}\right)\frac{z}{l}+\right.$ $\left.+\frac{c^2}{l^2}\left(6-8\frac{c}{l}+3\frac{c^2}{l^2}\right)\right\}-\Big\|_c\frac{q}{2}(z-c)^2$	$V=\frac{ql}{2}\left[2\frac{z}{l}-\frac{c}{l}\left(2-2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c^3}{l^3}\right)\right]-\Big\|_c q(z-c)$	$\mathfrak{M}_1=\frac{qc^2}{12}\left(6-8\frac{c}{l}+3\frac{c^2}{l^2}\right)$ $\mathfrak{M}_2=-\frac{qc^2}{12}\left(4-3\frac{c}{l}\right)\frac{c}{l}$	$R_1=-\frac{qc}{2}\left(2-2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c^3}{l^3}\right)$ $R_2=-\frac{qc}{2}\left(2-\frac{c}{l}\right)\frac{c^2}{l^2}$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
9	Равномерно распределенная нагрузка на части пролета с правой стороны балки	$v = \frac{qB}{24}\left\{z\frac{z}{l}\left[\frac{z}{l}\left(2\frac{c^4}{l^4} - 4\frac{c^3}{l^3} + 4\frac{c}{l} - 2\right) + 1 - 6\frac{c^2}{l^2} + 8\frac{c^3}{l^3} - 3\frac{c^4}{l^4}\right] + \Big\|_c \frac{(z-c)^4}{l^3}\right\}$	$M = \frac{ql^2}{12}\left[6\left(\frac{c^4}{l^4} - 2\frac{c^3}{l^3} + 2\frac{c}{l} - 1\right)\frac{z}{l} + \left(1 - 6\frac{c^2}{l^2} + 8\frac{c^3}{l^3} - 3\frac{c^4}{l^4}\right)\right] + \Big\|_c \frac{q}{2}(z-c)^2$	$V = \frac{ql}{2}\left(\frac{c^4}{l^4} - 2\frac{c^3}{l^3} + 2\frac{c}{l} - 1\right) + \Big\|_c q(z-c)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{ql^2}{12}\left(1 - 6\frac{c^2}{l^2} + 8\frac{c^3}{l^3} - 3\frac{c^4}{l^4}\right)$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{ql^2}{12}\left(1 - 4\frac{c^3}{l^3} + 3\frac{c^4}{l^4}\right)$	$R_1 = -\frac{ql}{2}\left(1 - 2\frac{c}{l} + 2\frac{c^3}{l^3} - \frac{c^4}{l^4}\right)$ $R_2 = -\frac{ql}{2}\left(1 - 2\frac{c^3}{l^3} + \frac{c^4}{l^4}\right)$	—

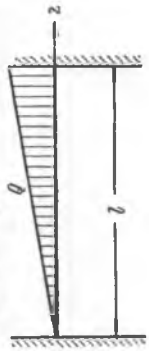
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Стрелки прогиба	Опорные реакции	Опорные моменты	Перерезывающая сила	Изгибающий момент	Упругая линия балки
7	Равномерно распределенная нагрузка на участке	—	$R_1 = -\frac{2mq}{l^3}\left[l^2c' + (cc' - m^2)(c' - c)\right]$ $R_2 = -\frac{2mq}{l^3}\left[l^2c + (cc' - m^2)(c - c')\right]$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{2mq}{3l^2}\left[cc'l + (2c' - c)(cc' - m^2)\right]$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{2mq}{3l^2}\left[cc'l + (2c - c')(cc' - m^2)\right]$	$V = -ql\left[2\frac{m}{l}\cdot\frac{c'}{l} + 2\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'^2}{l^2} - 2\frac{m}{l}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{c'}{l} - 2\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c'}{l} + 2\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c}{l} - \Big\|_{c-m}\frac{z-c+m}{l} + \Big\|_{c+m}\frac{z-c-m}{l}\right]$	$M = -\frac{ql^2}{6}\left[6\left(2\frac{m}{l}\cdot\frac{c'}{l} + 2\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'^2}{l^2} - 2\frac{m}{l}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{c'}{l} - 2\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c'}{l} + 2\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c}{l}\right)\frac{z}{l} - 4\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l} - 8\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'^2}{l^2} + 8\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c'}{l} + 4\frac{m}{l}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{c'}{l} - 4\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c}{l} - \Big\|_{c-m}3\left(\frac{z-c+m}{l}\right)^2 + \Big\|_{c+m}3\left(\frac{z-c-m}{l}\right)^2\right]$	$v = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[4\left(2\frac{m}{l}\cdot\frac{c'}{l} + 2\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'^2}{l^2} - 2\frac{m}{l}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{c'}{l} - 2\frac{m^3c'}{l^3l} + 2\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c}{l}\right)\frac{z^3}{l^3} - \left(8\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l} + 16\frac{m}{l}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'^2}{l^2} - 16\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c'}{l} - 8\frac{m}{l}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{c'}{l} + 8\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{c}{l}\right)\frac{z^2}{l^2} - \Big\|_{c-m}\left(\frac{z-c+m}{l}\right)^4 + \Big\|_{c+m}\left(\frac{z-c-m}{l}\right)^4\right]$

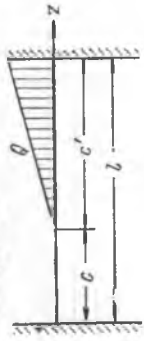
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Изгибающий момент	Упругая линия балки	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
8	Равномерно распределенная нагрузка на участке, симметричная относительно середины балки	$M = -\frac{ql^2}{12}\left[12\frac{m}{l}\cdot\frac{z}{l} - 3\frac{m}{l} + 4\frac{m^3}{l^3} - \left\|_{\frac{l}{2}-m} 6\left(\frac{z-\frac{l}{2}+m}{l}\right)^2 + \left\|_{\frac{l}{2}+m} 6\left(\frac{z-\frac{l}{2}-m}{l}\right)^2\right.\right]$	$v = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[4\frac{m}{l}\cdot\frac{z^3}{l^3} - \left(3\frac{m}{l} - 4\frac{m^3}{l^3}\right)\frac{z^2}{l^2} - \left\|_{\frac{l}{2}-m}\left(\frac{z-\frac{l}{2}+m}{l}\right)^4 + \left\|_{\frac{l}{2}+m}\left(\frac{z-\frac{l}{2}-m}{l}\right)^4\right.\right]$	$V = -mq + \left\|_{\frac{l}{2}-m} q\left(z-\frac{l}{2}+m\right) - \left\|_{\frac{l}{2}+m} q\left(z-\frac{l}{2}-m\right)\right.$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{mq}{12l}(3l^2 - 4m^2)$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{mq}{12l}(3l^2 - 4m^2)$	$R_1 = -mq$ $R_2 = -mq$	$v_{z=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^4}{96EJ}\left(-\frac{m}{l} + 4\frac{m^3}{l^3} - 4\frac{m^4}{l^4}\right)$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
6	Нагрузка по треугольнику по всему пролету 	$v = \frac{QB}{60} \cdot \frac{z^2}{l^2} \left(\frac{z^3}{l^3} - 3\frac{z}{l} + 2 \right)$	$M = \frac{Ql}{30} \left(10\frac{z^3}{l^3} - 9\frac{z}{l} + 2 \right)$ Максимальный в пролете при $z = 0{,}548l \quad M_{max} = -\frac{Ql}{23{,}3}$	$V = \frac{Q}{10} \left(10\frac{z^2}{l^2} - 3 \right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Ql}{15}$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{Ql}{10}$	$R_1 = -0{,}3Q$ $R_2 = -0{,}7Q$	При $z = \frac{l}{2} \quad v_{\frac{l}{2}} = \frac{1}{384} QB$ Максимальная при $z = 0{,}525l$ $v_{max} \approx \frac{1}{382} QB$

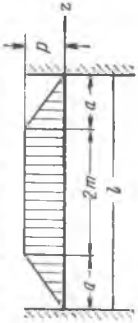
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
10	Нагрузка по треугольнику на части пролета 	$v = \frac{QB}{60}\left\{\frac{c'}{l}\cdot\frac{z^2}{l^2}\left[2+\frac{c}{l}-3\frac{c^2}{l^2}+\frac{z}{l}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times\left(2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c}{l}-3\right)\right]+\Big\|_c\frac{(z-c)^5}{l^3c'^2}\right\}$	$M = \frac{Qc'}{30}\left[2+\frac{c}{l}-3\frac{c^2}{l^2}+3\times\right.$ $\left.\times\left(2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c}{l}-3\right)\frac{z}{l}\right]+\Big\|_c\frac{Q}{3}\cdot\frac{(z-c)^3}{c'^2}$	$V = \frac{Qc'}{10l}\left(2\frac{c^2}{l^2}+\frac{c}{l}-3\right)+\Big\|_c Q\frac{(z-c)^2}{c'^2}$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Q}{30}\cdot\frac{c'^2}{l^2}(2l+3c)$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{Qc'}{30}\left(10\frac{c}{l}+3\frac{c'^2}{l^2}\right)$	$R_1 = -\frac{Q}{10}\cdot\frac{c'^2}{l^3}\left(3+2\frac{c}{l}\right)$ $R_2 = -\frac{Q}{10}\left(10-3\frac{c'^2}{l^2}-2\frac{cc'^2}{l^2}\right)$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
11	Нагрузка по треугольнику, симметричная относительно середины балки	$v = \frac{Pl^4}{96EJ}\left[4\frac{z^3}{l^3} - \frac{8z^5}{5l^5} - \frac{5}{2}\cdot\frac{z^2}{l^2} + \Big\|_{\frac{l}{2}} \frac{16}{5}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^5\right]$	$M = -\frac{Pl^2}{96}\left[24\frac{z}{l} - 32\frac{z^3}{l^3} - 5 + \Big\|_{\frac{l}{2}} 64\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^3\right]$	$V = -Pl\left[\frac{1}{4} - \frac{z^2}{l^2} + \Big\|_{\frac{l}{2}} 2\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right]$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{5}{96}Pl^2$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{5}{96}Pl^2$	$R_1 = -\frac{Pl}{4}$ $R_2 = -\frac{Pl}{4}$	$v_{z=\frac{l}{2}} = \frac{7}{3840}\cdot\frac{Pl^4}{EJ}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Изгибающий момент	Упругая линия балки	Опорные реакции	Опорные моменты	Перерезывающая сила	Стрелки прогиба
12	Нагрузка по трапеции 	$M = \frac{Pl^3}{12a}\left[6\frac{(l-a)}{l}\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{z}{l} - 2\frac{z^3}{l^3} - 3\frac{a}{l}\cdot\frac{m}{l} + 4\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^3} + 3\frac{a^4}{l^4} + \Big\|_a 2\left(\frac{z-a}{l}\right)^3 + \Big\|_{a+2m} 2\left(\frac{z-l+a}{l}\right)^3\right]$	$v = -\frac{Pl^5}{24aEJ}\left[2\frac{(l-a)}{l}\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{z^3}{l^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{z^5}{l^5} + \left(-3\frac{a}{l}\cdot\frac{m}{l} + 4\frac{m^3}{l^3}\cdot\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^3} + 3\frac{a^4}{l^4}\right)\frac{z^2}{l^2} + \Big\|_a \frac{1}{5}\left(\frac{z-a}{l}\right)^5 + \Big\|_{a+2m}\frac{1}{5}\left(\frac{z-l+a}{l}\right)^5\right]$	$R_1 = -\frac{P(l-a)}{2}$ $R_2 = -\frac{P(l-a)}{2}$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{P}{3l}\left(\frac{3ml^2}{4} - m^3 + a^2l - \frac{3}{4}a^3\right)$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{P}{3l}\left(\frac{3ml^2}{4} - m^3 + a^2l - \frac{3}{4}a^3\right)$	$V = -\frac{P}{2}\left[l - a - \frac{z^2}{a} + \Big\|_a \frac{(z-a)^2}{a} + \Big\|_{a+2m}\frac{(z-l+a)^2}{a}\right]$	$v_{z=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^4}{24EJ}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right]$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
13	Нагрузка сосредоточенным моментом	$v = \frac{\mathfrak{M}B}{6l}\left\{\frac{z}{l}\left(3\frac{c}{l}-2\right)\left[2\frac{c}{l}-\frac{z}{l}\left(3\frac{c}{l}-2\right)\right]+ + \frac{z^2}{l^2}\left(1-2\frac{cz}{l^2}\right)+\Big\|_c\, 3\left(\frac{z-c}{l}\right)^2\right\}$	$M = \mathfrak{M}\frac{c'}{l^2}\left[(2c-c')-6\frac{c}{l}z\right]+\Big\|_c\,\mathfrak{M}$	$V = -6\frac{cc'}{l^3}\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{c'(2c-c')}{l^2}\mathfrak{M}$ $\mathfrak{M}_2 = \frac{c(2c'-c)}{l^2}\mathfrak{M}$	$R_1 = -\frac{6cc'}{l^3}\mathfrak{M}$ $R_2 = \frac{6cc'}{l^3}\mathfrak{M}$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
14	Нагрузка сосредоточенным моментом на опоре	$v = \frac{\mathfrak{M} l^2}{6EJ} \cdot \frac{z^3}{l^3}$	$M = \frac{\mathfrak{M}}{l} z$	$R = \frac{\mathfrak{M}}{l}$	$\mathfrak{M}_1 = 0$ $\mathfrak{M}_2 = -\mathfrak{M}$	$R_1 = \frac{\mathfrak{M}}{l}$ $R_2 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$	—

Продолжение

№ п/п	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
15	Распределенная нагрузка по закону синуса $q_0 \sin\frac{\pi z}{l}$	$v = \frac{q_0 l^4}{EJ\pi^4}\left(\sin\frac{\pi z}{l} + \pi\frac{z^2}{l^2} - \pi\frac{z}{l}\right)$	$M = -\frac{q_0 l^2}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi z}{l} - \frac{2}{\pi}\right)$	$V = -\frac{l}{\pi} q_0 \cos\frac{\pi z}{l}$	$\mathfrak{M}_1 = 2\frac{l^2}{\pi^3} q_0$ при $z = 0$ $\mathfrak{M}_2 = 2\frac{l^2}{\pi^3} q_0$ при $z = l$	$R_1 = -\frac{l}{\pi} q_0$ $R_2 = -\frac{l}{\pi} q_0$	$v_{\max} = \frac{q_0 l^4}{EJ\pi^4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ при $z = \frac{l}{2}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
16	Распределенная нагрузка по закону синуса $q_0 \sin \frac{2\pi z}{l}$	$v = \frac{q_0 l^4}{16\pi^4 EJ}\left(\sin\frac{2\pi z}{l} - 4\pi\frac{z^3}{l^3} + \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{z^2}{l^2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{z}{l}\right)$	$M = -\frac{q_0 l^2}{4\pi^2}\left(\sin\frac{2\pi z}{l} + \frac{6}{\pi}\cdot\frac{z}{l} - \frac{3}{\pi}\right)$	$V = -\frac{q_0 l}{2\pi}\left(\cos\frac{2\pi z}{l} + \frac{3}{\pi^2}\right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{3l^2}{4\pi^3} q_0$ при $z = 0$ $\mathfrak{M}_2 = -\frac{3l^2}{4\pi^3} q_0$ при $z = l$	$R_1 = -\frac{q_0 l}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right)$ $R_2 = \frac{q_0 l}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right)$	$v_{max} = \frac{q_0 l^4}{16\pi^4}\left(1 - \frac{3\pi}{32}\right)$ при $z = \frac{l}{4}$ $v_{max} = -\frac{q_0 l^4}{16\pi^4}\left(1 - \frac{3\pi}{32}\right)$ при $z = \frac{3l}{4}$

Продолжение

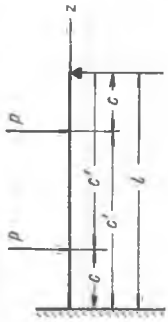
№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
17	Распределенная нагрузка по закону синуса $q_0 \sin \frac{3\pi z}{l}$	$v = \frac{q_0 l^4}{81EJ\pi^4}\left(\sin\frac{3\pi z}{l} + \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{z^2}{l^2} - 3\pi\frac{z}{l}\right)$	$M = -\frac{q_0 l^2}{9\pi^2}\left(\sin\frac{3\pi z}{l} - \frac{2}{3\pi}\right)$	$V = -\frac{l}{3\pi} q_0 \cos\frac{3\pi z}{l}$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{2}{27}\cdot\frac{l^2}{\pi^3} q_0$ при $z = 0$ $\mathfrak{M}_2 = \frac{2}{27}\cdot\frac{l^2}{\pi^3} q_0$ при $z = l$	$R_1 = -\frac{l}{3\pi} q_0$ $R_2 = -\frac{l}{3\pi} q_0$	—

Таблица 12

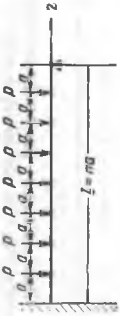
§ 36. Балка, закрепленная одним концом, а другим концом опертая

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
1	Сосредоточенная сила в пролете	$v = \frac{PB}{6}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}\left(1+\frac{c'}{l}\right)\frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{c'}{l}\left(2+\frac{c}{l}+\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}\right)\frac{z^3}{l^3}\right] + \Big\|_c P\frac{(z-c)^3}{6EJ}$	$M = \frac{Pl}{6}\left[3\cdot\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}\left(1+\frac{c'}{l}\right) - 3\,\frac{c'}{l}\left(2+\frac{c}{l}+\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}\right)\frac{z}{l}\right] + \Big\|_c P(z-c)$	$V = -\frac{P}{2}\cdot\frac{c'}{l}\left(2+\frac{c}{l}+\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}\right) + \Big\|_c P$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{P}{2}\cdot\frac{cc'}{l}\left(1+\frac{c'}{l}\right)$	$R_1 = -\frac{P}{2}\cdot\frac{c'}{l}\left(2+\frac{c}{l}+\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}\right)$ $R_2 = -\frac{P}{2}\cdot\frac{c}{l}\left(1+\frac{c}{l}-\frac{c'^2}{l^2}\right)$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
2	Две симметричные сосредоточенные силы 	$v = \frac{PB}{6} \cdot \frac{z^2}{l^2} \left\{ \frac{9}{2} \cdot \frac{c}{l} \left(1 - \frac{c}{l}\right) - \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{l^2}\right] \frac{z}{l} \right\} + \Big\|_c \frac{P(z-c)^3}{6EJ} + \Big\|_{c'} \frac{C(z-c')^3}{6EJ}$	$M = Pl \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \left(1 - \frac{c}{l}\right) - \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{l^2}\right] \frac{z}{l} \right\} + \Big\|_c P(z-c) + \Big\|_{c'} P(z-c')$	$V = -P\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{l^2}\right) - \Big\|_c P - \Big\|_{c'} P$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{cc'}{l} P$	$R_1 = -P\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{cc'}{l^2}\right)$ $R_2 = -P\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{cc'}{l^2}\right)$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
3	Ряд сосредоточенных сил 	$v = \frac{Pl^3}{48EJ}\left\{-(n-1)(n+5)\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{n^2-1}{n}\cdot\frac{z^3}{l^3} + \Big\|_a 8\left(\frac{z-a}{l}\right)^3 + \Big\|_{2a} 8\left(\frac{z-2a}{l}\right)^3 + \ldots + \Big\|_{(n-1)a} 8\left[\frac{z-(n-1)a}{l}\right]^3\right\}$	$M = -\frac{P(n-1)(n+5)}{8}z + \frac{n^2-1}{8n}Pl + \Big\|_a P(z-a) + \Big\|_{2a} P(z-2a) + \ldots + \Big\|_{(n-1)a} P[z-(n-1)a]$	$V = -\frac{P(n-1)(n+5)}{8} + \Big\|_a P + \Big\|_{2a} P + \ldots + \Big\|_{(n-1)a} P$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{n^2-1}{8n}Pl$	$R_1 = -\frac{P(n-1)(n+5)}{8}$ $R_2 = -\frac{P(n-1)(3-n)}{8}$	—

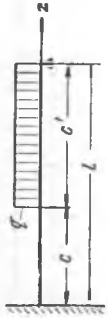
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
4	Равномерно распределенная нагрузка по всему пролету	$v = \frac{QB}{24} \cdot \frac{z^2}{l^2} \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{l} + \frac{3}{2} \right)$	$M = \frac{Ql}{8} \left(1 - 5 \frac{z}{l} + 4 \frac{z^2}{l^2} \right)$ Максимальный в пролете при $z = 0{,}625l$ $M_{max} = -\frac{9}{128} Ql = -\frac{Ql}{14{,}2}$	$V = -Q \left(\frac{5}{8} - \frac{z}{l} \right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Ql}{8}$	$R_1 = -\frac{5}{8} Q$ $R_2 = -\frac{3}{8} Q$	В середине пролета при $z = \frac{l}{2}$ $v_{\frac{l}{2}} = \frac{1}{192} QB$ Максимальная при $z = 0{,}579l$ $v_{max} = \frac{1}{185} QB$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
5	Равномерно распределенная нагрузка на части пролета со стороны закрепленного конца	$v = \frac{qB}{24}\left\{z\frac{z}{l}\left[\frac{c^2}{l^2}\left(6 - 6\frac{c}{l} + \frac{3}{2}\cdot\frac{c^2}{l^2}\right) + \frac{z}{l}\left(\frac{z}{l} - 4\frac{c}{l} + 2\frac{c^2}{l^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^4}{l^4}\right)\right] - \Big\|_c \frac{(z-c)^4}{l^3}\right\}$	$M = \frac{ql^2}{8}\left[\frac{c^2}{l^2}\left(2 - \frac{c}{l}\right)^2 - 2\frac{c}{l}\left(4 - 2\frac{c^2}{l^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} + 4\frac{z^2}{l^2}\right] - \Big\|_c q\frac{(z-c)^2}{2}$	$V = \frac{qc}{8}\left(8 - 4\frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3} - 8\frac{z}{l}\right) - \Big\|_c q(z-c)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{qc^2}{8}\left(2 - \frac{c}{l}\right)^2$	$R_1 = -\frac{qc}{8}\left(8 - 4\frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3}\right)$ $R_2 = -\frac{qc^3}{8l^2}\left(4 - \frac{c}{l}\right)$	—

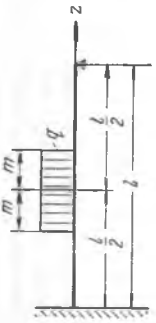
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
6	Равномерно распределенная нагрузка на части пролета со стороны свободного конца 	$v = \frac{qB}{24}\left\{\frac{c'^2}{l^2}\cdot\frac{z}{l}\cdot\frac{z}{2}\left[3\left(2-\frac{c'^2}{l^2}\right)+\frac{z}{l}\left(\frac{c'^2}{l^2}-6\right)\right]+ \right.$ $\left. + \Big\|_c \frac{(z-c)^4}{l^3}\right\}$	$M = \frac{qc'^2}{8}\left\{\left(2-\frac{c'^2}{l^2}\right)+\left(\frac{c'^2}{l^2}-6\right)\frac{z}{l}\right\}+\Big\|_c q\,\frac{(z-c)^2}{2}$	$V = \frac{qc'^2}{8l}\left(\frac{c'^2}{l^2}-6\right)+\Big\|_c q\,(z-c)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{qc'^2}{8}\left(2-\frac{c'^2}{l^2}\right)$	$R_1 = -\frac{qc'^2}{8l}\left(6-\frac{c'^2}{l^2}\right)$ $R_2 = -\frac{qc'}{8}\left(8-6\frac{c'}{l}+\frac{c'^3}{l^3}\right)$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
7	Равномерно распределенная нагрузка на участке в пролете	$v = \frac{ql^4}{24EJ}\left[-4\frac{m}{l}\cdot\frac{c'}{l}\left(3-\frac{c'^2}{l^2}-\frac{m^2}{l^2}\right)\frac{z^3}{l^3}+12\frac{m}{l}\cdot\frac{c'}{l}\times\right.$ $\times\left(\frac{c}{l}+\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}-\frac{m^2}{l^2}\right)\frac{z^2}{l^2}+\Big\|_{c-m}\left(\frac{z-c+m}{l}\right)^4-$ $\left.-\Big\|_{c+m}\left(\frac{z-c-m}{l}\right)^4\right]$	$M = -qmc'\left(3-\frac{c'^2}{l^2}-\frac{m^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}+qmc'\left(\frac{c}{l}+\frac{c}{l}\cdot\frac{c'}{l}-\frac{m^2}{l^2}\right)+$ $+\Big\|_{c-m}q\frac{(z-c+m)^2}{2}-\Big\|_{c+m}q\frac{(z-c-m)^2}{2}$	$V = -\frac{qmc'}{l^3}(3l^2-c'^2-m^2)+\Big\|_{c-m}q(z-c+m)-$ $-\Big\|_{c+m}q(z-c-m)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{qmc'}{l^2}(cl+cc'-m^2)$	$R_1 = -\frac{qmc'}{l^3}(3l^2-c'^2-m^2)$ $R_2 = -\frac{qm}{l^3}[2c^2l+(m^2+c^2)(l-c)]$	—

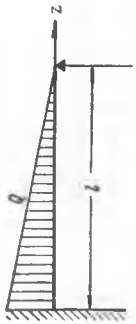
Продолжение

№ п. п.	Способ нагрузки	Стрелки прогиба	Опорные реакции	Опорные моменты	Перерезывающая сила	Изгибающий момент	Упругая линия балки
8	Равномерно распределенная нагрузка на участке, симметричная относительно середины балки 	—	$R_1 = -\frac{qm}{8l^2}(11l^2 - 4m^2)$ $R_2 = -\frac{qm}{8l^2}(5l^2 + 4m^2)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{qm}{8l}(3l^2 - 4m^2)$	$V = -\frac{qm}{8l^2}(11l^2 - 4m^2) + \Big\|_{\frac{l}{2}-m} q\left(z - \frac{l}{2} + m\right) - \Big\|_{\frac{l}{2}+m} q\left(z - \frac{l}{2} - m\right)$	$M = \frac{ql^2}{8}\left[-\frac{m}{l}\left(11 - 4\frac{m^2}{l^2}\right)\frac{z}{l} + \frac{m}{l}\left(3 - 4\frac{m^2}{l^2}\right) + \Big\|_{\frac{l}{2}-m} 4\left(\frac{z - \frac{l}{2} + m}{l}\right)^2 - \Big\|_{\frac{l}{2}+m} 4\left(\frac{z - \frac{l}{2} - m}{l}\right)^2\right]$	$v = \frac{ql^4}{48EJ}\left[-\frac{m}{l}\left(11 - 4\frac{m^2}{l^2}\right)\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{m}{l}\left(3 - 4\frac{m^2}{l^2}\right)\frac{z^2}{l^2} + \Big\|_{\frac{l}{2}-m} 2\left(\frac{z - \frac{l}{2} + m}{l}\right)^4 - \Big\|_{\frac{l}{2}+m} 2\left(\frac{z - \frac{l}{2} - m}{l}\right)^4\right]$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
6	Нагрузка по треугольнику с вершиной на свободном конце	$v = \frac{QB}{120} \cdot \frac{z^2}{l^2}\left(7 - 9\frac{z}{l} + 2\frac{z^3}{l^3}\right)$	$M = \frac{Ql}{60}\left(7 - 27\frac{z}{l} + 20\frac{z^3}{l^3}\right)$ Максимальный в пролете при $z = 0{,}671l$ $M_{max} = -\frac{Ql}{11{,}8}$	$V = -\frac{Q}{20}\left(9 - 20\frac{z^2}{l^2}\right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{7}{60}Ql$	$R_1 = -\frac{9}{20}Q$ $R_2 = -\frac{11}{20}Q$	В середине пролета при $z = \frac{l}{2}$ $v_{\frac{l}{2}} = \frac{QB}{174{,}5}$ Максимальная в пролете при $z = 0{,}598l$ $v_{max} = \frac{QB}{163{,}9}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
10	Нагрузка по треугольнику с вершиной на закрепленном конце 	$v = \frac{QB}{60} \cdot \frac{z^2}{l^2}\left(4 - 8\frac{z}{l} + 5\frac{z^2}{l^2} - \frac{z^3}{l^3}\right)$	$M = \frac{Ql}{15}\left(2 - 12\frac{z}{l} + 15\frac{z^2}{l^2} - 5\frac{z^3}{l^3}\right)$ Максимальный в пролете при $z = 0{,}553l$ $M_{max} = -\frac{Ql}{16{,}8}$	$V = -\frac{Q}{5}\left(4 - 10\frac{z}{l} + 5\frac{z^2}{l^2}\right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Ql}{7{,}5}$	$R_1 = -0{,}8Q$ $R_2 = -0{,}2Q$	В середине пролета при $z = \frac{l}{2}$ $v_{\frac{l}{2}} = \frac{QB}{213{,}3}$ Максимальная при $z = 0{,}552l$ $v_{max} = \frac{QB}{209{,}3}$

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
11	Нагрузка по треугольнику на части пролета с вершиной на свободном конце	$v = \frac{QB}{120}\left\{\frac{c'}{l}\cdot\frac{z^2}{l^2}\left[7 + 6\frac{c}{l} - 3\frac{c^2}{l^2} - \frac{z}{l}\left(10 - \frac{c'^2}{l^2}\right)\right] + \right.$ $\left. + \Big\|_c \frac{2(z-c)^5}{l^3 c'^2}\right\}$	$M = \frac{Qc'}{60}\left[7 + 6\frac{c}{l} - 3\frac{c^2}{l^2} - 3\left(10 - \frac{c'^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}\right] +$ $+ \Big\|_c \frac{Q}{3}\cdot\frac{(z-c)^3}{c'^2}$	$V = -\frac{Q}{20}\cdot\frac{c'}{l}\left(10 - \frac{c'^2}{l^2}\right) + \Big\|_c \frac{Q(z-c)^2}{c'^2}$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Qc'}{60}\left(7 + 6\frac{c}{l} - 2\frac{c^2}{l^2}\right)$	$R_1 = -\frac{Q}{20}\cdot\frac{c'}{l}\left(10 - \frac{c'^2}{l^2}\right)$ $R_2 = -\frac{Q}{20}\left(11 + 7\frac{c}{l} + 3\frac{c^2}{l^2} - \frac{c^3}{l^3}\right)$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
12	Нагрузка по треугольнику на части пролета с вершиной на закрепленном конце	$v=\frac{QB}{120}\left\{\frac{c'}{l}\cdot\frac{z}{l}\left[2+\frac{c}{l}-3\frac{c^2}{l^2}-\frac{z^2}{l^2}\left(4-3\frac{c}{l}-\frac{c^2}{l^2}\right)\right]+\right.$ $\left.+\Big\|_c\frac{2(z-c)^5}{l^3c'^2}\right\}$	$M=-\frac{Qc'}{20l}\left(4-3\frac{c}{l}-\frac{c^2}{l^2}\right)z+\Big\|_c\frac{Q}{3}\cdot\frac{(z-c)^3}{c'^2}$	$V=-\frac{Qc'}{20l}\left(4-3\frac{c}{l}-\frac{c^2}{l^2}\right)+\Big\|_c\frac{Q(z-c)^2}{c'^2}$	$\mathfrak{M}_2=\frac{Qc'}{60}\left(8+9\frac{c}{l}+3\frac{c^2}{l^2}\right)$	$R_1=-\frac{Qc'}{20l}\left(4-3\frac{c}{l}-\frac{c^2}{l^2}\right)$ $R_2=-\frac{Q}{20}\left(16+7\frac{c}{l}-2\frac{c^2}{l^2}-\frac{c^3}{l^3}\right)$	—

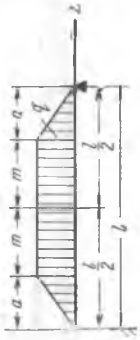
Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
13	Нагрузка по треугольнику на части пролета	—	—	$V = -\frac{Pa^2}{10l^3}(5l^2 - a^2) + \Big\|_c \frac{P}{2}\left[\frac{(l-z)(z-c)}{a} + (z-c)\right]$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Pa^2}{30l^2}(5l^2 - 3a^2)$	$R_1 = -\frac{Pa^2}{10l^3}(5l^2 - a^2)$ $R_2 = -\frac{Pa}{30l^3}[15l^2(l-a) + 3a^3]$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
14	Нагрузка по треугольнику на части пролета	$v = \frac{Pl^4}{120EJ}\left\{-\frac{a}{l}\left(10-\frac{15}{2}\cdot\frac{a}{l}+2\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z^3}{l^3}+\frac{l}{a}\cdot\frac{z^5}{l^5}+\right.$ $\left.+\frac{a^2}{l^2}\left(6\frac{a}{l}-\frac{5}{2}\right)\frac{z^2}{l^2}-\Big\|_a\left[5\left(\frac{z-a}{l}\right)^4+\frac{l}{a}\left(\frac{z-a}{l}\right)^5\right]\right\}$	$M = \frac{Pl^2}{120}\left\{-3\frac{a}{l}\left(20-15\frac{a}{l}+4\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}+20\frac{z^3}{l^3}\cdot\frac{l}{a}+\right.$ $\left.+\frac{a^2}{l^2}\left(12\frac{a}{l}-5\right)-\Big\|_a\left[60\left(\frac{z-a}{l}\right)^2+20\frac{l}{a}\left(\frac{z-a}{l}\right)^3\right]\right\}$	$V = -\frac{Pa}{40l^2}(20l^2-15al+4a^2)+\frac{Pz^2}{2a}-\Big\|_a P\left[(z-a)+\frac{(z-a)^2}{2a}\right]$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{Pa^2}{120l}(12a-5l)$	$R_1 = -\frac{Pa}{40l^2}(20l^2-15al+4a^2)$ $R_2 = -\frac{Pa^2}{40l^2}(15l-4a)$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
15	Нагрузка по трапеции 	—	—	—	$\mathfrak{M}_1 = \frac{P}{64l}[(l+2m)(5l^2-4m^2)]$	$R_1 = -\frac{P}{64l^2}[(l+2m)(21l^2-4m^2)]$ $R_2 = -\frac{P}{64l^2}[(l+2m)(11l^2+4m^2)]$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
16	Нагрузка сосредоточенным моментом	$v = \frac{\mathfrak{M}B}{4l}\left\{\frac{z^2}{l^2}\left[\frac{c}{l}\cdot\frac{z}{l}\left(\frac{c}{l}-2\right)-2+6\frac{c}{l}-3\frac{c^2}{l^2}\right]+ \right.$ $\left. + \Big\|_c\, 2\frac{(z-c)^2}{l^2}\right\}$	$M = \frac{\mathfrak{M}}{2}\left[3\frac{c}{l}\left(\frac{c}{l}-2\right)\frac{z}{l}-\left(2-6\frac{c}{l}+3\frac{c^2}{l^2}\right)\right]+\Big\|_c\,\mathfrak{M}$	$V = \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathfrak{M}}{l}\cdot\frac{c}{l}\left(\frac{c}{l}-2\right)$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{\mathfrak{M}}{2}\left(1-3\frac{c'^2}{l^2}\right)$	$R_1 = -\frac{\mathfrak{M}}{l}\cdot\frac{3c(c+2c')}{2l^2}$ $R_2 = \frac{\mathfrak{M}}{l}\cdot\frac{3c(c+2c')}{2l^2}$	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Упругая линия балки	Изгибающий момент	Перерезывающая сила	Опорные моменты	Опорные реакции	Стрелки прогиба
17	Нагрузка сосредоточенным моментом на свободной опоре	$v = \frac{\mathfrak{M} l^2}{4EJ}\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{z^3}{l^3}\right)$	$M = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(1 - 3\frac{z}{l}\right)$	$V = -\frac{3\mathfrak{M}}{2l}$	$\mathfrak{M}_1 = \frac{\mathfrak{M}}{2}$	$R_1 = -\frac{3\mathfrak{M}}{2l}$ $R_2 = \frac{3\mathfrak{M}}{2l}$	$v_{max} = \frac{\mathfrak{M} l^2}{27EJ}$ при $z = \frac{2l}{3}$

ГЛАВА 8

ТАБЛИЦЫ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗГИБА НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Таблицы дают непосредственное решение для двух случаев нагрузок:

а) равномерно распределенная нагрузка, интенсивность которой q во всех загруженных пролетах одинакова;

б) сосредоточенные силы P, равные между собой и делящие загруженный пролет на равные части.

Величины максимальных моментов в пролете:

для равномерно распределенной нагрузки

$$M = k_i' q l^2;$$

для сосредоточенных грузов

$$M = k_i' P l.$$

Величины опорных моментов:

для равномерно распределенной нагрузки

$$\mathfrak{M}_i = k_i' q l^2;$$

для сосредоточенных грузов

$$\mathfrak{M}_i = k_i'' P l.$$

Величины опорных реакций:

для равномерно распределенной нагрузки

$$R_i = r_i q l;$$

для сосредоточенных грузов

$$R_i = r_i P.$$

Величины погибов:

для равномерно распределенной нагрузки

$$v = \frac{q l^4}{EJ} f_i;$$

для сосредоточенных грузов

$$v = \frac{P l^3}{EJ} f_i.$$

Обозначения:

l — пролет балки;

q — распределенная нагрузка на единицу длины;

P — сосредоточенный груз;

M — изгибающий момент в пролете балки;

$\mathfrak{M}_i$ — изгибающие моменты в опорных сечениях балки;

R_i — опорные реакции.

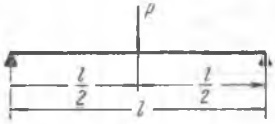
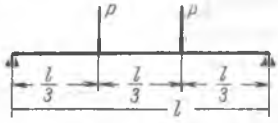
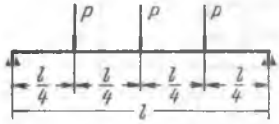
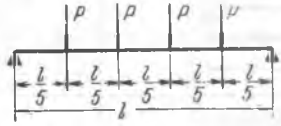
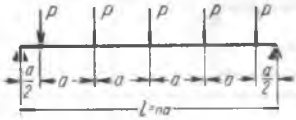
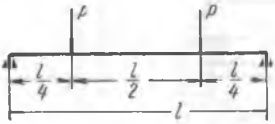
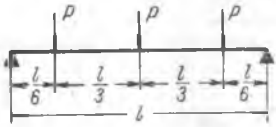
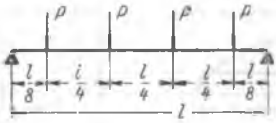
Приводимыми ниже таблицами можно также пользоваться для получения значений опорных моментов от одновременного действия любых одинаковых нагрузок, симметричных относительно середины загруженного пролета.

Для этого коэффициент k_i'' для равномерно распределенной нагрузки следует умножить на величину q_1, приведенную в табл. 13 в зависимости от вида нагрузки.

Величина опорных моментов при этом будет

$$\mathfrak{M}_i = k_i'' q_1 l^2.$$

Таблица 13

№ пп.	Вид нагрузки	q_1
1		$\frac{3}{2} \cdot \frac{P}{l}$
2		$\frac{8}{3} \cdot \frac{P}{l}$
3		$\frac{15}{4} \cdot \frac{P}{l}$
4		$\frac{24}{5} \cdot \frac{P}{l}$
5		$\frac{n^2-1}{n} \cdot \frac{P}{l}$
6		$\frac{9}{4} \cdot \frac{P}{l}$
7		$\frac{19}{6} \cdot \frac{P}{l}$
8		$\frac{33}{8} \cdot \frac{P}{l}$

Продолжение

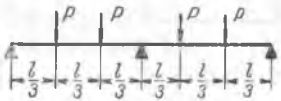
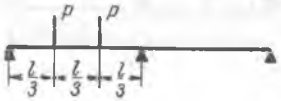
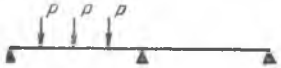
№ пп.	Вид нагрузки	q_1
9		$\frac{2n^2+1}{2n} \cdot \frac{P}{l}$
10		$\frac{\alpha(3-\alpha^2)}{2} q$ $\alpha = \frac{a}{b}$
11		$\frac{11}{16} q$
12		$\frac{2(2+\beta)a^2}{l^2} q$ $\beta = \frac{b}{l}$
13		$\frac{11}{27} q$
14		$\frac{5}{8} q$
15		$\frac{17}{32} q$
16		$\frac{\alpha}{4}\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) q$ $\alpha = \frac{a}{l}$
17		$\frac{5-\beta^2}{4l} Q$ $\beta = \frac{b}{l}$

§ 37. Балка на трех опорах

Таблица 14

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов		Коэффициент опорного момента	Коэффициенты опорных реакций			Прогиб в пролете
		k_1'	k_2'	k_1''	r_1	r_2	r_3	f_1
1	m_1, q, M_1, M_2	0,070	0,070	—0,125	—0,375	—1,250	—0,375	0,0052
2	q	0,096	—0,025	—0,063	—0,438	—0,625	0,063	0.00906
3	P, P, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	0,156	0,156	—0,188	—0,313	—1,375	—0,313	0,00915
4	P, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	0,203	—0,047	—0,094	—0,406	—0,688	0,094	0,01502

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов		Коэффициент опорного момента	Коэффициенты опорных реакций			Прогиб в пролете
		k_1'	k_2'	k_1''	r_1	r_2	r_3	f_1
5		0,222	0,222	—0,333	—0,667	—2,667	—0,667	0,01470
6		0,278	—0,056	—0,167	—0,833	—1,334	0,167	0,02505
7		0,266	0,266	—0,469	—1,042	—3,916	—1,042	—
8		0,383	—0,117	—0,234	—1,266	—1,968	—0,234	—

§ 38. Балка на четырех опорах

Таблица 15

№ пп.	Способ нагрузки	Прогиб в пролете		Коэффициенты пролетных моментов		Коэффициенты опорных моментов		Коэффициенты опорных реакций			
		f_1	f_2	k_1'	k_2'	k_1''	k_2''	r_1	r_2	r_3	r_4
1	m_1 m_2 q M_1 M_2 M_3	0,0068	0,0005	0,080	0,025	—0,100	—0,100	—0,400	—1,100	—1,100	—0,400
2	q	0,0099	—	0,101	—0,050	—0,050	—0,050	—0,450	—0,550	—0,550	—0,450
3	q	—	0,0068	—0,025	0,075	—0,050	—0,050	0,050	—0,550	—0,550	0,050
4	q	—	—	—	—	—0,117	—0,033	—0,393	—1,200	—0,450	0,033
5	q	0,0088	—	—	—	0,067	0,017	—0,433	—0,650	0,100	—0,017
6	P P P	0,0115	0,0021	0,175	0,100	—0,150	—0,150	—0,350	—1,150	—1,150	—0,350
7	P P	0,0162	—	0,213	—0,075	—0,075	—0,075	—0,425	—0,575	—0,575	—0,425

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Прогиб в пролете		Коэффициенты пролетных моментов		Коэффициенты опорных моментов		Коэффициенты опорных реакций			
		f_1	f_2	k_1'	k_2'	k_1''	k_2''	r_1	r_2	r_3	r_4
8		—	0,0115	—0,038	0 175	—0,075	—0,075	0,075	—0,575	—0,575	0,075
9		—	—	—	—	—0,175	—0,050	—0,325	—1,300	—0,425	0,050
10		0,0146	—	—	—	—0,100	—0,025	—0,400	—0,725	0,150	—0,025
11		0,0188	0,0021	0,244	0,067	—0,267	—0,267	—0,733	—2,267	—2,267	—0,733
12		0,0272	—	0,289	—0,133	—0,133	—0,133	—0,867	—1,133	—1,133	—0,867
13		—	0,0189	—0,044	0,200	—0,133	—0,133	0,133	—1,133	—1,133	0,133
14		—	—	—	—	—0,311	—0,089	—0 689	—2,533	—0,867	0,089

Продолжение

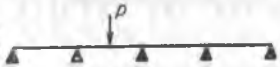
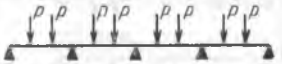
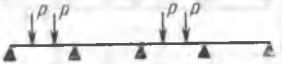
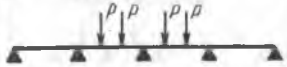
№ пп.	Способ нагрузки	Прогиб в пролете		Коэффициенты пролетных моментов		Коэффициенты опорных моментов		Коэффициенты опорных реакций			
		f_1	f_2	k_1'	k_2'	k_1''	k_2''	r_1	r_2	r_3	r_4
15		0,0244	—	—	—	—0,178	0,044	—0,822	—1,400	0,267	—0,044
16		—	—	0,313	0,125	—0,375	—0,375	—1,125	—3,375	—3,375	—1,125
17		—	—	0,406	—0,188	—0,188	—0,188	—1,313	—1,688	—1,688	—1,313
18		—	—	—0,094	0,313	—0,188	—0,188	0,188	—1,688	—1,688	0,188
19		—	—	—	—	—0,437	—0,125	—1,063	—3,750	—1,313	0,125
20		—	—	—	—	—0,250	0,062	—1,250	—2,062	0,374	—0,062

§ 39. Балка на пяти опорах

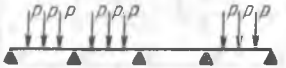
Таблица 16

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов				Коэффициенты опорных моментов			Коэффициенты опорных реакций					Прогиб в пролете		
		k_1'	k_2'	k_3'	k_4'	k_1''	k_2''	k_3''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	f_1	f_2	f_3
1		0,077	0,036	0,036	0,077	−0,107	−0,071	−0,107	−0,393	−1,143	−0,929	−1,143	−0,393	0,0063	0,0019	—
2		0,100	−0,045	0,081	−0,023	−0,054	−0,036	−0,054	−0,446	−0,572	−0,461	−0,572	0,054	0,0096	—	0,0074
3		0,072	0,079	—	0,098	−0,121	−0,018	−0,058	−0,380	−1,223	−0,357	−0,598	−0,442	—	—	—
4		—	0,056	0,056	—	−0,036	−0,107	−0,036	0,036	−0,465	−1,143	−0,465	0,036	—	—	—
5		0,094	—	—	—	−0,067	0,018	−0,004	−0,433	−0,652	0,107	−0,027	0,004	0,0088	—	—
6		—	0,738	—	—	−0,049	0,053	0,013	0,049	−0,545	−0,571	0,080	−0,013	—	0,0066	—
7		0,169	0,116	0,116	0,169	−0,161	−0,107	−0,161	−0,339	−1,214	−0,892	−1,214	−0,339	0,0109	0,0041	—
8		0,210	−0,067	0,183	−0,040	−0,080	−0,054	−0,080	−0,420	−0,607	−0,446	−0,607	0,080	0,0159	—	0,0125

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов				Коэффициенты опорных моментов			Коэффициенты опорных реакций					Прогиб в пролете		
		k_1'	k_2'	k_3'	k_4'	k_1''	k_2''	k_3''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	f_1	f_2	f_3
9		—	—	—	—	−0,181	−0,027	−0,087	−0,319	−1,335	−0,286	−0,617	−0,413	—	—	—
10		—	—	—	—	−0,054	−0,161	−0,054	0,054	−0,446	−1,214	−0,446	0,054	—	—	—
11		—	—	—	—	−0,100	0,027	−0,007	−0,400	−0,728	0,161	−0,043	0,007	0,0147	—	—
12		—	—	—	—	−0,074	−0,080	0,020	0,074	−0,567	−0,607	0,124	−0,020	—	0,0113	—
13		0,238	0,111	0,111	0,238	−0,286	−0,191	−0,286	−0,714	−2,381	−1,810	−2,381	−0,714	0,0177	0,0057	—
14		0,286	−0,111	0,222	−0,048	−0,143	−0,005	−0,143	−0,857	−1,190	−0,904	−1,191	0,143	0,0266	—	0,0206
15		—	—	—	—	−0,321	−0,048	−0,155	−0,679	−2,595	−0,619	−1,262	−0,845	—	—	—
16		—	—	—	—	−0,095	−0,286	−0,095	0,095	−0,905	−2,381	−0,905	0,095	—	—	—

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов				Коэффициенты опорных моментов			Коэффициенты опорных реакций					Прогиб в пролете		
		k_1'	k_2'	k_3'	k_4'	k_1''	k_2''	k_3''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	f_1	f_2	f_3
17		—	—	—	—	—0,178	—0,048	0,036	—0,821	—1,405	0,286	—0,071	0,012	0,0244	—	—
18		—	—	—	—	—0,131	0,143	—0,012	0,131	—1,119	—1,190	0,214	—0,036	—	0,0183	—
19		0,299	0,165	0,165	0,299	—0,402	—0,263	—0,402	—1,008	—3,536	—2,732	—3,536	—1,008	—	—	—
20		0,400	—0,167	0,333	—0,101	—0,201	—0,134	—0,201	—1,299	—1,768	—1,366	—1,768	0,201	—	—	—
21		—	—	—	—	—0,452	—0,067	—0,218	—1,048	3,837	—0,964	—1,869	—1,282	—	—	—
22		—	—	—	—	—0,134	0,402	—0,134	0,134	—1,366	—3,536	—1,366	0,134	—	—	—
23		—	—	—	—	—0,251	—0,067	—0,017	—1,249	—2,069	0,402	—0,101	0,017	—	—	—
24		—	—	—	—	—0,184	0,201	0,050	0,184	—1,667	—1,768	0,301	—0,500	—	—	—

§ 40. Балка на шести опорах

Таблица 17

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов			Коэффициенты опорных моментов				Коэффициенты опорных реакций					
		k_1'	k_2'	k_3'	k_1''	k_2''	k_3''	k_4''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
1		0,0780	0,0330	0,046	−0,105	−0,079	−0,079	−0,105	−0,395	−1,132	−0,974	−0,974	−1,132	−0,395
2		0,100	0,046	0,086	−0,053	−0,040	−0,040	−0,053	−0,447	−0,566	−0,487	−0,487	−0,566	−0,447
3		−0,026	0,079	−0,040	−0,053	−0,040	−0,040	−0,053	0,053	−0,566	−0,487	−0,487	−0,566	0,053
4		—	—	—	−0,119	−0,022	−0,044	−0,051	−0,380	−1,218	−0,379	−0,516	−0,559	−0,052
5		—	—	—	−0,035	−0,111	−0,020	−0,057	0,035	−0,458	−1,167	−0,372	−0,594	−0,443
6		—	—	—	−0,067	−0,018	−0,005	−0,001	−0,433	−0,652	0,108	−0,029	0,007	−0,001
7		—	—	—	−0,049	−0,054	−0,014	−0,004	0,049	−0,544	−0,573	0,086	−0,022	0,004
8		—	—	—	0,013	−0,053	−0,053	0,013	−0,013	0,079	−0,566	−0,566	0,079	−0,013
9		0,171	0,112	0,132	−0,158	−0,118	−0,118	−0,153	−0,342	−1,198	−0,960	−0,960	−1,198	−0,342

Продолжение

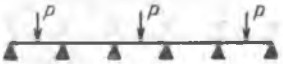
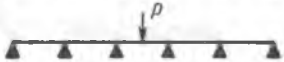
№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов				Коэффициенты опорных моментов			Коэффициенты опорных реакций					Прогиб в пролете		
		k_1'	k_2'	k_3'	k_4'	k_1''	k_2''	k_3''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	f_1	f_2	f_3
17		—	—	—	—	—0,178	—0,048	0,036	—0,821	—1,405	0,286	—0,071	0,012	0,0244	—	—
18		—	—	—	—	—0,131	0,143	—0,012	0,131	—1,119	—1,190	0,214	—0,036	—	0,0183	—
19		0,299	0,165	0,165	0,299	—0,402	—0,263	—0,402	—1,008	—3,536	—2,732	—3,536	—1,008	—	—	—
20		0,400	—0,167	0,333	—0,101	—0,201	—0,134	—0,201	—1,299	—1,768	—1,366	—1,768	0,201	—	—	—
21		—	—	—	—	—0,452	—0,067	—0,218	—1,048	3,837	—0,964	—1,869	—1,282	—	—	—
22		—	—	—	—	—0,134	0,402	—0,134	0,134	—1,366	—3,536	—1,366	0,134	—	—	—
23		—	—	—	—	—0,251	—0,067	—0,017	—1,249	—2,069	0,402	—0,101	0,017	—	—	—
24		—	—	—	—	—0,184	0,201	0,050	0,184	—1,667	—1,768	0,201	—0,500	—	—	—

§ 40. Балка на шести опорах

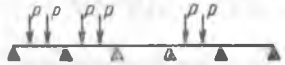
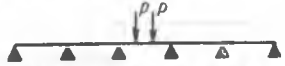
Таблица 17

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов			Коэффициенты опорных моментов				Коэффициенты опорных реакций					
		k_1'	k_2'	k_3'	k_1''	k_2''	k_3''	k_4''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
1		0,0780	0,0330	0,046	−0,105	−0,079	−0,079	−0,105	−0,395	−1,132	−0,974	−0,974	−1,132	−0,395
2		0,100	0,046	0,086	−0,053	−0,040	−0,040	−0,053	−0,447	−0,566	−0,487	−0,487	−0,566	−0,447
3		−0,026	0,079	−0,040	−0,053	−0,040	−0,040	−0,053	0,053	−0,566	−0,487	−0,487	−0,566	0,053
4		—	—	—	−0,119	−0,022	−0,044	−0,051	−0,380	−1,218	−0,379	−0,516	−0,559	−0,052
5		—	—	—	−0,035	−0,111	−0,020	−0,057	0,035	−0,458	−1,167	−0,372	−0,594	−0,443
6		—	—	—	−0,067	−0,018	−0,005	−0,001	−0,433	−0,652	0,108	−0,029	0,007	−0,001
7		—	—	—	−0,049	−0,054	−0,014	−0,004	0,049	−0,544	−0,573	0,086	−0,022	0,004
8		—	—	—	0,013	−0,053	−0,053	0,013	−0,013	0,079	−0,566	−0,566	0,079	−0,013
9		0,171	0,112	0,132	−0,158	−0,118	−0,118	−0,153	−0,342	−1,198	−0,960	−0,960	−1,198	−0,342

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов			Коэффициенты опорных моментов				Коэффициенты опорных реакций					
		k_1'	k_2'	k_3'	k_1''	k_2''	k_3''	k_4''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
10		0,211	−0,069	0,191	−0,079	−0,059	−0,059	−0,079	−0,421	−0,599	−0,480	−0,480	−0,599	−0,421
11		−0,039	0,181	−0,059	−0,079	−0,059	−0,059	−0,079	0,079	−0,599	−0,480	−0,480	−0,599	0,079
12		—	—	—	−0,179	−0,032	−0,066	−0,077	−0,321	−1,326	−0,319	−0,523	−0,588	0,077
13		—	—	—	−0,052	−0,167	−0,031	−0,086	0,052	−0,437	−1,251	−0,307	−0,642	−0,414
14		—	—	—	−0,100	0,027	−0,007	0,002	−0,400	−0,727	0,161	−0,043	0,011	−0,002
15		—	—	—	−0,073	−0,081	0,022	−0,005	0,073	−0,566	−0,690	0,120	−0,032	0,005
16		—	—	—	0,020	−0,079	−0,079	0,020	−0,020	0,118	−0,590	−0,590	0,118	−0,020
17		0,240	0,100	0,122	−0,281	−0,211	−0,211	−0,281	−0,719	−2,351	−1,930	−1,930	−2,351	−0,719

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов			Коэффициенты опорных моментов				Коэффициенты опорных реакций					
		k_1'	k_2'	k_3'	k_1''	k_2''	k_3''	k_4''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
18		0,287	—0,117	0,228	—0,140	—0,105	—0,105	—0,140	—0,860	—1,175	—0,965	—0,965	—1,175	—0,860
19		—0,047	0,216	—0,105	—0,140	—0,105	—0,105	—0,140	0,140	—1,175	—0,965	—0,965	—1,175	0,140
20		—	—	—	—0,319	—0,057	—0,118	—0,137	—0,681	—2,581	—0,677	—1,042	—1,156	0,137
21		—	—	—	—0,003	—0,297	—0,054	—0,153	0,093	—0,889	—2,447	—0,658	—1,252	—0,847
22		—	—	—	—0,179	0,048	—0,013	0,003	—0,821	—1,405	0,287	—0,077	—0,019	—0,003
23		—	—	—	—0,131	—0,144	0,038	—0,010	—0,131	—1,118	—1,195	0,230	—0,058	0,010
24		—	—	—	0,035	—0,140	—0,140	0,035	—0,035	0,210	—1,175	—1,175	0,210	—0,035
25		0,302	0,155	0,204	—0,395	—0,296	—0,296	—0,395	—1,105	—3,494	—2,901	—2,901	—3,494	—1,105

Продолжение

№ пп.	Способ нагрузки	Коэффициенты пролетных моментов			Коэффициенты опорных моментов				Коэффициенты опорных реакций					
		k_1'	k_2'	k_3'	k_1''	k_2''	k_3''	k_4''	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
26		0,401	−0,173	0,352	−0,198	−0,148	−0,148	−0,198	−1,302	−1,747	−1,450	−1,450	−1,747	−1,302
27		−0,099	0,327	−0,148	−0,198	−0,148	−0,148	−0,198	0,197	−1,747	−1,450	−1,450	−1,747	0,197
28		—	—	—	−0,449	−0,081	−0,166	−0,193	−1,051	−3,816	−1,048	−1,558	−1,720	0,193
29		—	—	—	−0,130	−0,417	−0,076	−0,215	0,130	−1,343	−3,628	−1,020	−1,854	−1,285
30		—	—	—	−0,251	0,067	−0,018	0,004	−1,249	−2,060	0,403	−0,107	0,027	−0,004
31		—	—	—	−0,184	−0,202	0,054	−0,013	0,184	−1,666	−1,774	0,323	−0,081	0,013
32		—	—	—	−0,049	−0,197	−0,197	0,049	−0,049	0,296	−1,747	−1,747	0,296	−0,049

§ 41. Неразрезные балки с равными пролетами и треугольной нагрузкой

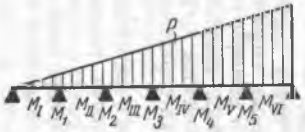


Таблица 18

Обозначение		Число пролетов 2	3	4	5	6	Множитель
Опорные моменты	M_1	—0,0625	—0,0148	—0,0112	—0,0065	—0,0047	Pl
	M_2	—	—0,0519	—0,0179	—0,0140	—0,0091	Pl
	M_3	—	—	—0,0424	—0,0176	—0,0144	Pl
	M_4	—	—	—	—0,0356	—0,0165	Pl
	M_5	—	—	—	—	0,0306	Pl
Наибольшие значения пролетных моментов	M_{I}	0,0040	0,0066	0,0025	0,0019	0,0012	Pl
	M_{II}	0,0670	0,0095	0,0089	0,0048	0,0036	Pl
	M_{III}	—	0,0468	0,0095	0,0092	0,0057	Pl
	M_{IV}	—	—	0,0361	0,0088	0,0088	Pl
	M_{V}	—	—	—	0,0292	0,0080	Pl
	M_{VI}	—	—	—	—	0,0247	Pl
Опорные реакции	R_0	—0,021	—0,022	—0,010	—0,007	—0,005	P
	R_1	—0,625	—0,200	—0,130	—0,079	—0,056	P
	R_2	—0,354	—0,533	—0,232	—0,164	—0,110	P
	R_3	—	—0,245	—0,442	—0,226	—0,170	P
	R_4	—	—	—0,187	—0,374	—0,210	P
	R_5	—	—	—	—0,151	—0,322	P
	R_6	—	—	—	—	—0,127	P

ГЛАВА 9

РАСЧЕТ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

§ 42. Случаи, статически определимые

Если изменение профиля балки по длине происходит без особенно больших скачков, то напряжения в ней могут определяться по тем же формулам, что и для балки с постоянным сечением; в противном случае при применении этих формул для определения размеров балки необходимо понижать величину допускаемых напряжений, так как в местах резких и значительных изменений профиля появляются неучитываемые обычными формулами изгиба перенапряжения материала. На эти перенапряжения материала, имеющие характер местных напряжений, должно быть обращено особое внимание при нагрузке балки переменными силами.

Точно так же необходимо уменьшать величину допускаемых напряжений и в том случае, если плавное изменение профиля балки происходит вследствие изменения ее высоты, так как в этом случае приобретают заметное влияние напряжения σ_x и σ_y (см. теорию упругости), пренебрежимо малые в балках с параллельными поясами.

Балка, все сечения которой определены на основании действующих в них изгибающих моментов и срезывающих сил, т. е. во всех сечениях которой получаются одинаковые наибольшие напряжения, называется балкой равного сопротивления; такая балка значительно легче, чем балка той же прочности постоянного сечения, но зато получаемый ею прогиб значительно больше.

Для получения балки равного сопротивления следует построить кривые изгибающих моментов и срезывающих сил и, задавшись допускаемым напряжением и некоторыми размерами профиля, определить остальные его размеры для нескольких сечений по формулам, приведенным в главе о подборе профилей (стр. 279), исходя из действующих в этих сечениях изгибающих моментов и срезывающих сил. Найденные таким образом несколько сечений балки определяют собой форму всей балки равного сопротивления.

В практике кораблестроения чаще всего приходится иметь дело с составными балками двутаврового сечения, образованного из вертикальной стенки, уголков и нескольких горизонтальных поясков. Для таких профилей балка равного сопротивления осуществляется или изменением высоты балки или изменением ширины и числа горизонтальных поясков. В первом случае, т. е. в случае изменения высоты, можно достигнуть непрерывного изменения профиля. Изменение же числа поясков неизбежно влечет за собой резкое изменение профиля и поэтому должно сопровождаться или уменьшением допускаемого напряжения или продлением поясков дальше тех сечений, на которых они по расчету должны заканчиваться.

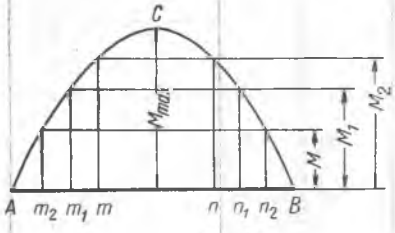


Рис. 54.

Пример (рис. 54). Кривая ACB представляет эпюру изгибающих моментов:

M_{max} — наибольшая ордината кривой ACB;

$\sigma_д$ — допускаемое напряжение.

Пусть профиль, вычисленный по наибольшему изгибающему моменту, представляет клепаное двутавровое сечение с тремя горизонтальными поясками, причем момент сопротивления того же профиля, но с двумя поясками, будет W_2, с одним пояском W_1 и без поясков W. Тогда соответствующие этим моментам сопротивления изгибающие моменты будут

$$M_2 = W_2\sigma_д;\ M_1 = W_1\sigma_д;\ M = W\sigma_д.$$

Чтобы найти те сечения балки, для которых достаточно только двух поясков, проводят линию, параллельную оси балки, на расстоянии M_2 от нее; точки пересечения этой линии с кривой ACB определят искомые сечения балки m и n.

Подобным же способом определяют сечения m_1, n_1 и m_2, n_2, начиная с которых можно продлевать балку с одним пояском и без поясков. После этого найденные сечения балки следует отодвинуть несколько к концам ее, чтобы компенсировать резкое изменение профиля, и поместить необходимое число заклепок, присоединяющих прерываемый поясок к остальной балке (см. заклепочные соединения). Полученные сечения, кроме того, необходимо проверить по одной из формул табл. 6.

§ 43. Деформации балок переменного сечения

Для балок переменного сечения в основных дифференциальных уравнениях (83), (87), устанавливающих зависимость между элементами изгиба балки, момент инерции J должен быть перенесен под знаки интегралов. Так, например, уравнение (87) для балок переменного сечения примет следующий вид:

$$y = \frac{1}{E}\int_0^z\int_0^z \frac{M_y}{J}\,dz^2 + Cz + C_1, \tag{128}$$

где через J обозначена функция от z, определяющая изменение по длине балки моментов инерции ее сечений.

В задачах практического характера изменение момента инерции по длине балки обыкновенно задается не в виде упомянутой выше функции, а значением момента инерции для любого сечения балки. В таком случае интеграл (128) может быть решен по одной из приближенных формул квадратур, и таким образом вместо уравнения упругой кривой будут известны частные значения ее ординат, т. е. стрелки прогиба для нескольких сечений балки.

Если величины момента инерции заданы лишь для двух-трех сечений, то уравнение упругой кривой находится следующим образом.

Пусть, например, для сечений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ известны величины моментов инерции $J_1, J_2, \ldots, J_n$ Тогда, найдя величины $\frac{1}{J_1}, \frac{1}{J_2}, \ldots, \frac{1}{J_n}$, принимают их за ординаты некоторой кривой (параболы $n-1$-й степени) и находят уравнение этой кривой в виде

$$\frac{1}{J} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{n-1} z^{n-1},$$

причем коэффициенты A могут быть определены, например, по формуле Лагранжа. Подставив найденное выражение для $\frac{1}{J}$ в интеграл (128), находят уравнение упругой кривой.

§ 44. Случаи, статически неопределимые

Размеры статически неопределимой балки равного сопротивления могут быть найдены методом последовательных приближений следующим образом.

Вначале вычисляют опорные моменты и опорные реакции, как для балки постоянного сечения; по этим данным находят кривые изгибающих моментов и срезывающих сил и подбирают размеры поперечных сечений, удовлетворяющие условию балки равного сопротивления. Для полученной таким образом балки переменного сечения опорные моменты и реакции, очевидно, будут уже другие, поэтому повторяют расчет, принимая во внимание выбранные размеры. Обыкновенно на полученных вторичным расчетом опорных моментах и реакциях можно остановиться и подобрать по ним окончательные размеры поперечных сечений.

Таким образом видно, что вопрос сводится к определению опорных моментов и реакций для статически неопределимой балки с заданным переменным сечением.

С такой же задачей приходится встречаться на практике, когда требуется для статически неопределимой балки заданного переменного сечения найти воз-

никающие в ней напряжения или когда задан лишь закон изменения поперечных сечений и требуется найти размеры этих сечений. Задача эта может быть решена способом наложения, а для неразрезных балок — также приложением теоремы трех моментов.

1. Способ наложения

Если элементы изгиба (стрелки прогиба и углы поворота), необходимые для разыскания лишних неизвестных по способу наложения (стр. 335), могут быть получены аналитическим путем (см. начало этой главы), то задача решается совершенно так же, как и для балки с постоянным сечением. В противном случае нужные для применения способа наложения элементы изгиба следует находить, применяя графический способ.

2. Уравнение трех моментов

Уравнение трех моментов для балки с переменным сечением может быть представлено в следующем виде (рис. 55):

$$\frac{1}{l_1}\left[\int_0^{l_1}\frac{m_1 z dz}{J_1}+\frac{M_0}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{(l_1-z)\,z dz}{J_1}+\frac{M_1}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{z^2 dz}{J_1}\right]=$$

$$=\frac{1}{l_2}\left[\int_0^{l_2}\frac{m_2\,(l_2-z)\,dz}{J_2}+\frac{M_1}{l_2}\int_0^{l_2}\frac{(l_2-z)^2\,dz}{J_2}+\frac{M_2}{l_2}\int_0^{l_2}\frac{(l_2-z)\,z dz}{J_2}\right], \qquad (129)$$

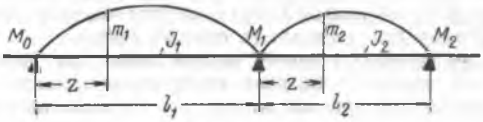


Рис. 55.

где l_1, l_2 — длины двух смежных пролетов балки;
M_0, M_1, M_2 — моменты над тремя смежными опорами, принятые за лишние неизвестные;
J_1, J_2 — переменные моменты инерции сечений балки в двух смежных пролетах;
m_1 — ордината кривой моментов от внешней нагрузки, лежащей в первом пролете (в расстоянии z от левой опоры);
m_2 — ордината кривой моментов от внешней нагрузки, лежащей во втором пролете (в расстоянии z от средней опоры).

Начало координат для левой части уравнения — на левой опоре, а для правой части — на средней опоре.

Входящие в уравнение (129) интегралы следует вычислять пользуясь приближенными формулами квадратур. Для этого придется предварительно вычислять ряд значений подинтегральных функций; лишь в частных случаях (например, когда J_1 и J_2 не меняются в пределах своих участков, а выражения для m_1 и m_2 получаются очень простыми) выгоднее решать интегралы аналитически.

При местном усилении профиля балки (например, усиление профиля над средней опорой у балки на трех опорах) в месте усиления появляется и больший изгибающий момент; поэтому на практике следует принять за правило: делая местные подкрепления, рассчитывать их с некоторым запасом сравнительно с усилиями, вычисленными в предположении постоянного профиля балки.

РАЗДЕЛ VI
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под сложным сопротивлением разумеется такой случай действия внешних сил, при котором в балке появляется одновременно несколько простых деформаций. Согласно принципу наложения каждая из этих простых деформаций вызывает в балке такие же напряжения и перемещения, какие она вызывала бы, если бы других, кроме нее, деформаций не было. Поэтому напряжения и перемещения при сложном сопротивлении слагаются из напряжений и перемещений, вычисляемых по формулам для простых деформаций.

Принцип наложения не распространяется на случай сложного продольного изгиба, рассматриваемый особо в гл. 2.

Поместив начало координат O в центре тяжести рассматриваемого поперечного сечения балки, направим оси x и y в плоскости сечения по направлениям главных осей, а ось z — перпендикулярно плоскости сечения.

В общем случае сложного сопротивления в поперечном сечении могут действовать шесть следующих внутренних усилий:

а) продольное усилие P_z, равное сумме проекций на ось z сил, приложенных к балке по одну сторону от рассматриваемого сечения;

б) поперечные силы Q_x и Q_y, равные суммам проекций на оси x и y соответственно сил, приложенных к балке по одну сторону от рассматриваемого сечения;

в) изгибающие моменты M_x и M_y, равные суммам проекций на оси x и y соответственно моментов сил, приложенных к балке по одну сторону от рассматриваемого сечения;

г) крутящий момент $M_{кр}$, равный сумме моментов сил, приложенных к балке по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси, перпендикулярной плоскости сечения и проходящей через центр изгиба.

Отдельно для каждого из этих усилий с помощью соответствующих формул определяются вызываемые ими напряжения. Так как нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при всех простых деформациях имеют одно и то же направление, а касательные напряжения могут иметь разные направления, то для сложения нормальных напряжений нужно брать их алгебраическую сумму, а для сложения касательных напряжений — геометрическую сумму.

Произведя указанное сложение для тех точек балки, в которых напряжения должны получиться наибольшей величины, следует вычислить для этих точек главные, наибольшие касательные или приведенные напряжения (в зависимости от принятой теории прочности, см. раздел III) и сравнить их с допускаемыми напряжениями. Таким образом, при расчете, например, по наибольшим касательным напряжениям расчетная формула для сложного сопротивления будет

$$\sqrt{4\tau^2 + \delta^2} \leqslant \sigma_{доп},$$

При расчете по наибольшим удлинениям расчетная формула будет

$$0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \leqslant \sigma_{доп}.$$

В этих формулах:

σ — нормальное напряжение в точке, равное алгебраической сумме нормальных напряжений от простых деформаций;

τ — касательное напряжение в этой точке, равное геометрической сумме касательных напряжений от простых деформаций;

$\sigma_{доп}$ — допускаемое нормальное напряжение.

Если поперечная нагрузка, приложенная к балке, не проходит через центр изгиба, возникает крутящий момент $M_{кр}$.

Для сечений с двумя осями симметрии или антисимметрии центр изгиба лежит на пересечении этих осей (круг, прямоугольник, двутавровое и зетовое сечение с равными полками); у сечений с одной осью симметрии центр изгиба лежит на этой оси.

ГЛАВА I

ПРОСТЫЕ СЛУЧАИ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 1. Косой изгиб

Сложное сопротивление, называемое косым изгибом, возникает в том случае, если плоскость действия изгибающего момента пересекает плоскость поперечного сечения по прямой, несовпадающей с главными центральными осями инерции.

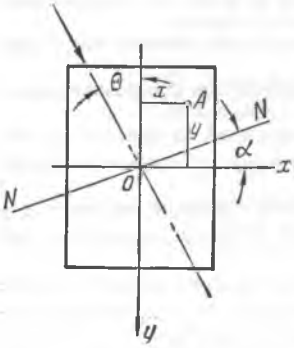


Рис. 1.

При определении нормальных напряжений при косом изгибе изгибающий момент M раскладывается по направлениям главных центральных осей:

$$M_x = M \cos \theta;$$

$$M_y = M \sin \theta.$$

Нормальные напряжения складываются алгебраически

$$\sigma = \pm \frac{M_x y}{J_x} \pm \frac{M_y x}{J_y} \tag{1}$$

Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения и не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента. Уравнение нейтральной линии

$$\frac{\cos \theta}{J_x} y + \frac{\sin \theta}{J_y} x = 0. \tag{2}$$

Угол α, образуемый нейтральной линией с главной центральной осью x, и угол θ между плоскостью действия изгибающего момента и главной центральной осью y (рис. 1) связаны между собой зависимостью

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \theta. \tag{3}$$

Полный прогиб балки f в направлении, перпендикулярном нейтральной линии, находится как геометрическая сумма прогибов f_x и f_y, вызываемых моментами M_x и M_y,

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f_x}{f_y} \tag{4}$$

Суммарное касательное напряжение вычисляется по формуле

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}. \tag{5}$$

§ 2. Внецентренная осевая сила (растяжение или сжатие с изгибом

Обозначения:

P_z — внецентренная сжимающая или растягивающая сила;
F — площадь поперечного сечения;
J_x, J_y — моменты инерции поперечного сечения относительно главных осей инерции;
m, n — координаты точки приложения силы P_z;
p, q — отрезки на главных осях, отсекаемые нейтральной линией;
r_x, r_y — радиусы инерции поперечного сечения относительно главных осей.

Нормальное напряжение в точке с координатами x и y (рис 2) определяется выражением

$$\sigma_z = \frac{P_z}{F} + \frac{P_z m y}{J_x} + \frac{P_z n x}{J_y} \qquad (6)$$

Положение нейтральной оси определяется уравнением

$$\frac{n}{r_y^2} x + \frac{m}{r_x^2} y + 1 = 0 \qquad (7)$$

или отрезками p и q

$$p = -\frac{r_x^2}{m}, \quad q = -\frac{r_y^2}{n}. \qquad (8)$$

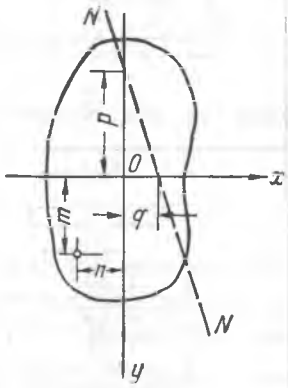


Рис. 2.

Наибольшее нормальное напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (точки касания контура с прямой, параллельной нейтральной линии).

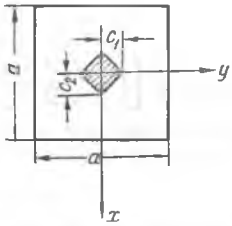
Часть сечения вокруг центра тяжести, ограниченная контуром, из которого не должна выходить точка приложения внецентренной сжимающей силы, чтобы не вызывать в сечении напряжений разных знаков, называется ядром сечения.

Для определения размеров и формы ядра сечения необходимо дать нейтральной линии несколько положений, касательных к контуру сечения, и вычислить для них координаты m и n точек, через которые проходит линия действия силы P_z.

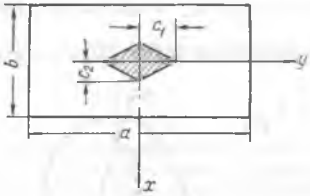
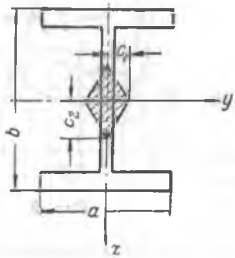
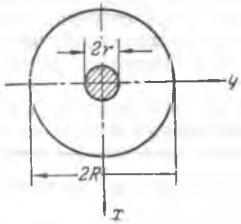
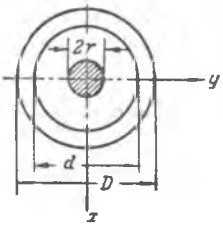
В табл 1 приведены размеры и форма ядра для некоторых типов сечений.

Таблица 1

Размеры и форма ядра сечения

Форма поперечного сечения и форма ядра сечения	Размеры ядра сечения
1	2
Квадрат 	$c_1 = c_2 = \frac{a}{6}$

Продолжение

Форма поперечного сечения и форма ядра сечения	Размеры ядра сечения
1	2
Прямоугольник 	$c_1 = \frac{a}{6}$; $c_2 = \frac{b}{6}$
Двутавр 	$c_1 = \frac{2J_x}{Fa}$; $c_2 = \frac{2J_y}{Fb}$
Круг 	$r = \frac{1}{4} R$
Труба 	$r = \frac{D}{8}\left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$

§ 3. Одновременное действие изгиба и кручения балки

В общем случае изгибающий момент M и перерезывающая сила Q, действующие в сечении, разлагаются на составляющие M_x, M_y и Q_x, Q_y по главным осям сечения. Для каждой из этих составляющих и крутящего момента $M_{кр}$ вычисляются соответствующие им нормальные и касательные напряжения. В тех точках сечения, где нормальное напряжение σ или касательные напряжения τ достигают наибольшей величины, определяются главные, наибольшие касательные или приведенные напряжения (в зависимости от принятой теории прочности) и производится сравнение их с допускаемыми напряжениями.

Для пластичных материалов, применяющихся в судостроении, проверка прочности производится по 2-й теории прочности

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_{доп},$$

где допускаемые напряжения назначаются как некоторая доля от предела текучести.

Для хрупких материалов

$$0{,}5\sigma + 0{,}5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_{доп}.$$

Здесь $\sigma_{доп}$ — некоторая доля от временного сопротивления материала на растяжение или сжатие.

В случае наличия концентрации напряжений в рассматриваемом сечении последняя должна быть учтена при нахождении в этих сечениях расчетных напряжений, сравниваемых с допускаемыми.

Вал круглого или кольцевого сечения. Для круглого поперечного сечения расчет может производиться по приведенному моменту $M_{пр}$.

Первая теория прочности

$$M_{пр} = 0{,}5M_{изг} + 0{,}5\sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}; \qquad (9)$$

вторая теория прочности

$$M_{пр} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}; \qquad (10)$$

третья теория прочности

$$M_{пр} = 0{,}35M_{изг} + 0{,}65\sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}, \qquad (11)$$

где

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

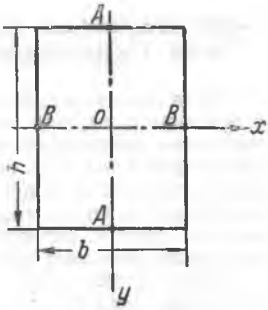


Рис. 3.

Условия прочности

$$\sigma_{доп} \geqslant \frac{M_{пр}}{W} \text{ или } \tau_{доп} \geqslant \frac{M_{пр}}{2W}, \qquad (12)$$

где $W = \frac{\pi D^3}{32}$ — для круглого сечения;

$W = \frac{\pi D^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$ — для кольцевого сечения.

Балка прямоугольного сечения (рис. 3). Нормальные напряжения от изгиба в точках A и B определяются по выражениям:

$$\frac{6M_x}{bh^2} \text{ и } \frac{6M_y}{hb^2}.$$

Если $h > b$, то касательные напряжения от кручения будут иметь наибольшие значения в точках B

$$\tau_B = \frac{M_{кр}}{\alpha_1 b^2 h}. \tag{13}$$

В точках A касательное напряжение от кручения будет

$$\tau_A = \alpha_2 \tau_B. \tag{14}$$

Значения коэффициентов α_1 и α_2 для разных значений отношения $b : h$ приведены в табл. 2.

Касательные напряжения от срезывающих сил Q_x и Q_y достигают наибольших значений на нейтральных линиях и равны, соответственно,

$$\frac{3}{2}\frac{Q_x}{bh} \text{ и } \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh}.$$

Найдя в точках A и B нормальные напряжения от изгиба и суммарные касательные напряжения от срезывающих сил и крутящего момента, следует произвести проверку прочности по принятой теории прочности.

Таблица 2

$h : b$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α_1	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
α_2	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

ГЛАВА 2

ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБАЮЩИХ И РАСТЯГИВАЮЩИХ ИЛИ СЖИМАЮЩИХ СИЛ (СЛОЖНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

Если величины сжимающих или растягивающих сил невелики по отношению к величине силы, при которой происходит потеря устойчивости, то при одновременном действии продольных и поперечных сил можно пользоваться принципом наложения, т. е. суммировать напряжения изгиба с напряжениями растяжения или сжатия от продольных сил. В противном случае напряжения в балке возрастают по более сложному закону, так как продольные силы, кроме растяжения и сжатия, вызывают дополнительные изгибающие моменты тем большие, чем ближе состояние балки к потере устойчивости.

Для расчета балок на сложный продольный изгиб обыкновенно служит следующая формула прочности (для опасного сечения):

$$\frac{P_z}{F} + \frac{M_y + P_z v}{W} \leqslant \sigma_{доп}, \tag{15}$$

где P_z — продольная сжимающая или растягивающая сила;
F — площадь поперечного сечения балки;
W — момент сопротивления;
M_y — изгибающий момент от одних поперечных сил;
v — ордината упругой кривой; в случае, если ось балки первоначально искривлена, к ординате v следует прибавить ординату начального искривления оси;
$\sigma_{доп}$ — допускаемое нормальное напряжение.

Формула (15), обычно применяемая к расчету балок на сложный продольный изгиб, не может считаться достаточно надежной для случая сжимающих продольных сил, так как не дает необходимого коэффициента запаса для нагрузки.

Действительно, пусть k — принятый при расчете коэффициент запаса, т. е. $\sigma_{доп} = \frac{1}{k}\sigma_т$, где $\sigma_т$ — критическое напряжение (предел текучести). Если все внешние изгибающие и продольные сжимающие силы увеличить в k раз, то наибольшее нормальное напряжение в стержне по формуле (15) будет

$$\frac{kP_z}{F} + \frac{k(M_y + P_z v_1)}{W},$$

причем $v_1 > v$, т. е. нормальное напряжение увеличится больше, чем в k раз, и, следовательно, будет больше предела текучести $\sigma_т$; отсюда видно, что пользование формулой (15) не гарантирует желаемого коэффициента запаса.

Для того чтобы в данном случае гарантировать в расчете заданный запас прочности k, нужно вводить его не в напряжение, а в нагрузку, т. е. за расчетные нагрузки нужно принимать увеличенные в k раз заданные нагрузки, причем в этом случае во столько же раз должно быть увеличено принятое допускаемое напряжение.

§ 4. Призматическая балка, подверженная изгибу и находящаяся под действием продольного растяжения

Основное дифференциальное уравнение сложного изгиба

$$EJv^{IV} - Sv'' = \bar{q}, \tag{16}$$

$$\bar{q} = q + Sv_0'', \tag{17}$$

где

q — интенсивность поперечной нагрузки;

v_0 — ордината начальной погиби;

S — растягивающая продольная сила, имеет следующие решения для простейших случаев, встречающихся на практике:

а) Для балки, первоначально прямой, свободно опертой на жесткие опоры и нагруженной:

1) сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 4)

$$v = \frac{Pl^3}{EJ(2u)^3}\left[\frac{kz}{2} - \frac{\operatorname{sh} kz}{2\operatorname{ch} u} + \Big\|_{0,5l} \operatorname{sh} k(z - 0,5l) - k(z - 0,5l)\right]; \tag{18}$$

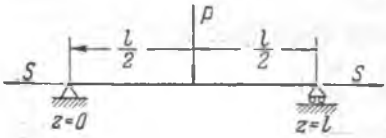


Рис. 4.

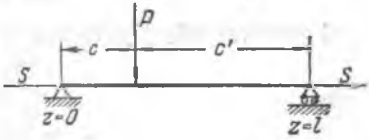


Рис. 5.

$$v' = \frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{ch} kz}{2\operatorname{ch} v} + \Big\|_{0,5l} \operatorname{ch} k(z - 0,5l) \quad 1\right]; \tag{19}$$

$$M = \frac{Pl}{2u}\left[-\frac{\operatorname{sh} kz}{2\operatorname{ch} u} + \Big\|_{0,5l} \operatorname{sh} k(z - 0,5l)\right]; \tag{20}$$

$$v(0,5l) = \frac{Pl^3}{EJ(2u)^2}\left(\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{th} u}{2}\right); \tag{21}$$

$$v'(0) = \frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\operatorname{ch} u}\right); \tag{22}$$

$$v'(l) = -\frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\operatorname{ch} u}\right); \tag{23}$$

$$M(0{,}5l) = -\frac{Pl}{2u}\cdot\frac{\operatorname{th} u}{2}. \tag{24}$$

2) сосредоточенной силой в сечении $z = c$ (рис. 5)

$$v = \frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left[\frac{kc'\cdot kz}{2u} - \frac{\operatorname{sh} kc'\cdot\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} 2u} + \Big\|_c \operatorname{sh} k(z-c) - k(z-c)\right]; \tag{25}$$

$$v' = \frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left[\frac{kc'}{2u} - \frac{\operatorname{sh} kc'\cdot\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} 2u} + \Big\|_c \operatorname{ch} k(z-c) - 1\right]; \tag{26}$$

$$M = \frac{Pl}{2u}\left[-\frac{\operatorname{sh} kc'\cdot\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} 2u} + \Big\|_c \operatorname{sh} k(z-c)\right]; \tag{27}$$

$$v'(0) = \frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left(\frac{kc'}{2u} - \frac{\operatorname{sh} kc'}{\operatorname{sh} 2u}\right); \tag{28}$$

$$v'(l) = -\frac{Pl^2}{EJ(2u)^2}\left(\frac{kc}{2u} - \frac{\operatorname{sh} kc}{\operatorname{sh} 2u}\right); \tag{29}$$

3) моментом $\mathfrak{M}_1$, приложенным на левой опоре (рис. 6)

Рис. 6.

Рис. 7.

$$v = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{EJ(2u)^2}\left[\frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} 2u} - \frac{k(l-z)}{2u}\right]; \tag{30}$$

$$v' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{EJ2u}\left[\frac{1}{2u} - \frac{\operatorname{ch} k(l-z)}{\operatorname{sh} 2u}\right]; \tag{31}$$

$$M = \mathfrak{M}_1\frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} 2u}; \tag{32}$$

$$v(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ(2u)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1\right); \tag{33}$$

$$v'(0) = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{3EJ}\psi_1(u); \tag{34}$$

$$v'(l) = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\psi_2(u); \tag{35}$$

$$M(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_1}{2\operatorname{ch} u}; \tag{36}$$

4) моментом $\mathfrak{M}_2$, приложенным на правой опоре (рис. 7):

$$v = \frac{\mathfrak{M}_2 l^2}{EJ(2u)^2}\left(\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} 2u} - \frac{kz}{2u}\right); \tag{37}$$

$$v' = \frac{\mathfrak{M}_2 l}{EJ2u}\left(\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} 2u} - \frac{1}{2u}\right); \tag{38}$$

$$M = \mathfrak{M}_2\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} 2u}; \tag{39}$$

$$v(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_2 l^2}{2EJ(2u)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1\right); \tag{40}$$

$$v'(0) = -\frac{\mathfrak{M}_2 l}{6EJ}\psi_2(u); \tag{41}$$

$$v'(l) = \frac{\mathfrak{M}_2 l}{3EJ}\psi_1(u); \tag{42}$$

$$M(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_2}{2\operatorname{ch} u}; \tag{43}$$

5) равномерно распределенной нагрузкой (рис. 8):

$$v = \frac{ql^4}{EJ\,(2u)^4}\left(\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} u} - 1 + \frac{u^2 - k^2z^2}{2}\right); \tag{44}$$

$$v' = \frac{ql^3}{EJ\,(2u)^3}\left(\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} u} - kz\right); \tag{45}$$

$$M = \frac{ql^2}{(2u)^2}\left(\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} u} - 1\right); \tag{46}$$

$$v\,(0) = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EJ}\,f_0\,(u); \tag{47}$$

$$v'\,(\pm\,0{,}5l) = \mp\,\frac{ql^3}{24\,EJ}\,\psi_0\,(u); \tag{48}$$

$$M\,(0) = -\,\frac{ql^2}{8}\,\varphi_0\,(u); \tag{49}$$

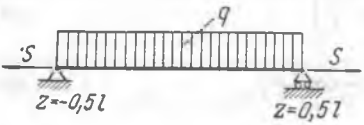


Рис. 8.

Рис. 9.

6) распределенной нагрузкой по треугольнику (рис. 9):

$$v = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(-\frac{z^3}{6l} + \frac{\operatorname{sh} kz}{k^2 \operatorname{sh} 2u} - \frac{z}{2uk} + \frac{lz}{6}\right); \tag{50}$$

$$v' = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(-\frac{z^2}{2l} + \frac{\operatorname{ch} kz}{k \operatorname{sh} 2u} - \frac{1}{2uk} + \frac{l}{6}\right); \tag{51}$$

$$M = \frac{ql^2}{(2u)^2}\left(-\frac{kz}{2u} + \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} 2u}\right); \tag{52}$$

$$v'\,(0) = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{1}{k \operatorname{sh} 2u} - \frac{1}{2uk} + \frac{l}{6}\right); \tag{53}$$

$$v'\,(l) = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(-\frac{l}{3} + \frac{1}{k \operatorname{th} 2u} - \frac{1}{2uk}\right); \tag{54}$$

$$M_{\max} \text{ при } = \frac{1}{k}\operatorname{arch}\left(\frac{\operatorname{sh} 2u}{2u}\right); \tag{55}$$

б) Для балки, свободно опертой, имеющей начальную синусоидальную погибь (рис. 10):

$$v_0 = b \sin\frac{\pi z}{l}; \tag{56}$$

$$v = -\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\,b \sin\frac{\pi z}{l}; \tag{57}$$

$$M = \frac{S}{1+\alpha^2}\,b \sin\frac{\pi z}{l}. \tag{58}$$

в) Для балки с жестко заделанными концами
1) первоначально прямой, загруженной равномерно (рис. 11):

$$v = \frac{ql^4}{EJ\,(2u)^4}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} u} - 1\right)\frac{u}{\operatorname{th} u} + \frac{u^2 - k^2z^2}{2}\right], \tag{59}$$

$$M = \frac{ql^2}{(2u)^2}\left[\frac{u \operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} u} - 1\right]; \tag{60}$$

$$v(0) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EJ} f_1(u), \tag{61}$$

$$M(\pm 0{,}5l) = \frac{ql^2}{12}\chi(u); \tag{62}$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{24}\varphi_1(u); \tag{63}$$

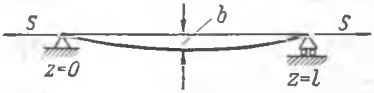


Рис. 10.

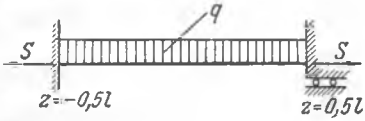


Рис. 11.

2) имеющей начальную косинусоидальную погибь (рис. 12):

$$v_0 = \frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{l}\right); \tag{64}$$

$$v = -\frac{\frac{\alpha^2}{4}}{1+\frac{\alpha^2}{4}}\,\frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{l}\right). \tag{65}$$

$$M = -\frac{S}{1+\frac{\alpha^2}{4}}\,\frac{c}{2}\cos\frac{2\pi z}{l}; \tag{66}$$

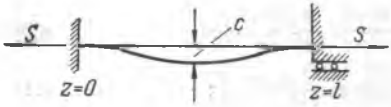


Рис. 12.

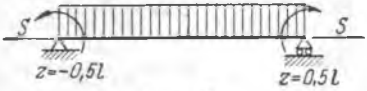


Рис. 13.

г) Для первоначально прямой балки, упруго заделанной на жестких опорах и загруженной равномерно (рис. 13):

$$v(0) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EJ}\left[(1-\varkappa)\,5f_0(u) + \varkappa f_1(u)\right]; \tag{67}$$

$$v'(\pm 0{,}5l) = \mp\frac{ql^3}{24EJ}(1-\varkappa)\,\psi_0(u); \tag{68}$$

$$M(\pm 0{,}5l) = \frac{ql^2}{12}\varkappa\chi(u) \tag{69}$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{24}\left[(1-\varkappa)\,3\varphi_0(u) + \varkappa\varphi_1(u)\right]; \tag{70}$$

$$\varkappa = \frac{\psi_0(u)}{\psi_0(u) + \frac{2\mathfrak{A}EJ}{l}\chi(u)}. \tag{71}$$

В приведенных выше формулах приняты следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{S}{EJ}}; \quad u = \frac{kl}{2}; \quad \alpha^2 = \frac{Sl^2}{\pi^2 EJ};$$

$$f_0(u) = \frac{24}{5}\cdot\frac{\frac{u^2-2}{2} + \frac{1}{\operatorname{ch} u}}{u^4};$$

$$f_1(u) = \frac{3}{\left(\frac{u}{2}\right)^3}\left(\frac{u}{2} - \operatorname{th}\frac{u}{2}\right);$$

$$\varphi_0(u) = \frac{2}{u^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u}\right);$$

$$\varphi_1(u) = \frac{6}{u}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\operatorname{sh} u}\right);$$

$$\chi(u) = \frac{3}{u}\left(\frac{1}{\operatorname{th} u} - \frac{1}{u}\right);$$

$$\psi_0(u) = \frac{3}{u^3}\left(u - \operatorname{th} u\right);$$

$$\psi_1(u) = \frac{3}{2u}\left(\frac{1}{\operatorname{th} 2u} - \frac{1}{2u}\right);$$

$$\psi_2(u) = \frac{6}{2u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{sh} 2u}\right).$$

Значения функций $f_0(u)$, $f_1(u)$, $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, $\chi(u)$, $\psi_0(u)$, $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ (функций И. Г. Бубнова) могут быть взяты из табл. 3

Таблица 3

u	$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi(u)$	$\psi_0(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	0,908	0,976	0,905	0,972	0,984	0,909	0,939	0,894
1 0	0,711	0,909	0,704	0,894	0,939	0,715	0,806	0,673
1,5	0,532	0,817	0,511	0,788	0,876	0,529	0,672	0,467
2,0	0,380	0,715	0,367	0,673	0,806	0,388	0,563	0,320
2,5	0,281	0,617	0,268	0,563	0,736	0,291	0,480	0,224
3,0	0,213	0,529	0,200	0,467	0,672	0,223	0,417	0,162
3,5	0,166	0,453	0,153	0,386	0,614	0,175	0,367	0,121
4,0	0,132	0,388	0,120	0,320	0,563	0,141	0,328	0,093
4,5	0,107	0,335	0,097	0,267	0,519	0,115	0,296	0,074
5,0	0,088	0,291	0,079	0,224	0,480	0,096	0 270	0,060
5,5	0,074	0,254	0,066	0,189	0,446	0,081	0,248	0,050
6,0	0,063	0,223	0,055	0,162	0,417	0,069	0,229	0,042
6,5	0,054	0,197	0,047	0,139	0,391	0,060	0,212	0,036
7,0	0,047	0,175	0,041	0,121	0,367	0,052	0,199	0,031
7,5	0,041	0,156	0,036	0,106	0,347	0,046	0,187	0,027
8,0	0,036	0,141	0,031	0,093	0,328	0,041	0,176	0,023
8,5	0,032	0,127	0,028	0,083	0,311	0,037	0,166	0,021
9,0	0,029	0,115	0,025	0,074	0,296	0,033	0,158	0.019
9,5	0,026	0,105	0,022	0,066	0,283	0,030	0,150	0,017
10,0	0,024	0,096	0,020	0,060	0,270	0,027	0,142	0,015
10,5	0,021	0,088	0,018	0,054	0,259	0,025	0,136	0,014
11,0	0,020	0,081	0,017	0,050	0,248	0,023	0,130	0,012
11,5	0,018	0,075	0,015	0,045	0,238	0,021	0,124	0,011
12,0	0,016	0,069	0,014	0,042	0,229	0,019	0,120	0,010

§ 5. Призматическая балка, подверженная изгибу и находящаяся под действием продольного сжатия

Основное дифференциальное уравнение

$$EJv^{\mathrm{IV}} + Sv'' = \bar{q}, \tag{72}$$

$$\bar{q} = q - Sv''_0, \tag{73}$$

где q — интенсивность поперечной нагрузки;

v_0 — ордината начальной погиби;

S — сжимающая продольная сила имеет следующие решения для простейших случаев, встречающихся на практике:

а) Для балки, первоначально прямой, свободно опертой на жесткие опоры и нагруженной:

1) сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 14)

$$v = \frac{Pl^3}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{\sin kz}{2\cos u} - \frac{kz}{2} + \Big\|_{0,5l} k\,(z-0,5l) - \sin k\,(z-0,5l)\right]; \qquad (74)$$

$$v' = \frac{Pl^2}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{\cos kz}{2\cos u} - \frac{1}{2} + \Big\|_{0,5l} 1 - \cos k\,(z-0,5l)\right], \qquad (75)$$

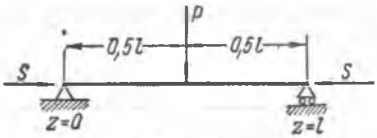


Рис. 14.

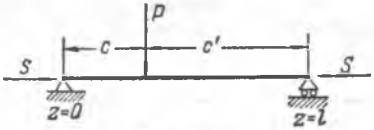


Рис. 15.

$$M = \frac{Pl}{2u}\left[-\frac{\sin kz}{2\cos u} + \Big\|_{0,5l} \sin k\,(z-0,5l)\right], \qquad (76)$$

$$v\,(0,5l) = \frac{Pl^3}{EJ\,(2u)^3}\left[\frac{\operatorname{tg} u}{2} - \frac{u}{2}\right], \qquad (77)$$

$$v'\,(0) = \frac{Pl^2}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{1}{2\cos u} - \frac{1}{2}\right], \qquad (78)$$

$$v'\,(l) = -\frac{Pl^2}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{1}{2\cos u} - \frac{1}{2}\right], \qquad (79)$$

$$M\,(0,5l) = -\frac{Pl}{2u}\cdot\frac{\operatorname{tg} u}{2} \qquad (80)$$

2) сосредоточенной силой в сечении $z = c$ (рис. 15):

$$v = \frac{Pl^3}{EJ\,(2u)^3}\left[\frac{\sin kc'\cdot\sin kz}{\sin 2u} - \frac{kc'\cdot kz}{2u} + \Big\|_{c} k\,(z-c) - \sin k\,(z-c)\right] \qquad 81)$$

$$v' = \frac{Pl^2}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{\sin kc'\cdot\cos kz}{\sin 2u} - \frac{kc'}{2u} + \Big\|_{c} 1 - \cos k\,(z-c)\right] \qquad (82)$$

$$M = \frac{Pl}{2u}\left[-\frac{\sin kc'\cdot\sin kz}{\sin 2u} + \Big\|_{c} \sin k\,(z-c)\right]; \qquad (83)$$

$$v'\,(0) = \frac{Pl^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{\sin kc'}{\sin 2u} - \frac{kc'}{2u}\right); \qquad (84)$$

$$v'\,(l) = -\frac{Pl^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{\sin kc}{\sin 2u} - \frac{kc}{2u}\right); \qquad (85)$$

3) моментом $\mathfrak{M}_1$, приложенным на левой опоре (рис. 16)

$$v = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{EJ\,(2u)^2}\left[\frac{k\,(l-z)}{2u} - \frac{\sin k\,(l-z)}{\sin 2u}\right]; \qquad (86)$$

$$v' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{EJ\,2u}\left[\frac{\cos k\,(l-z)}{\sin 2u} - \frac{1}{2u}\right]; \qquad (87)$$

$$M = \mathfrak{M}_1 \frac{\sin k(l-z)}{\sin 2u}, \tag{88}$$

$$v(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ(2u)^2}\left(1 - \frac{1}{\cos u}\right), \tag{89}$$

$$v'(0) = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{3EJ}\bar{\psi}_1(u); \tag{90}$$

$$v'(l) = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\bar{\psi}_2(u); \tag{91}$$

$$M(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_1}{2\cos u}; \tag{92}$$

Рис. 16.

Рис. 17.

4) моментом $\mathfrak{M}_2$, приложенным на правой опоре (рис. 17):

$$v = \frac{\mathfrak{M}_2 l^2}{EJ(2u)^2}\left(\frac{kz}{2u} - \frac{\sin kz}{\sin 2u}\right); \tag{93}$$

$$v' = \frac{\mathfrak{M}_2 l}{EJ2u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{\cos kz}{\sin 2u}\right); \tag{94}$$

$$M = \mathfrak{M}_2 \frac{\sin kz}{\sin 2u}; \tag{95}$$

$$v(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_2 l^2}{2EJ(2u)^2}\left(1 - \frac{1}{\cos u}\right); \tag{96}$$

$$v'(0) = -\frac{\mathfrak{M}_2 l}{6EJ}\bar{\psi}_2(u); \tag{97}$$

$$v'(l) = \frac{\mathfrak{M}_2 l}{3EJ}\bar{\psi}_1(u); \tag{98}$$

$$M(0{,}5l) = \frac{\mathfrak{M}_2}{2\cos u}; \tag{99}$$

5) равномерно распределенной нагрузкой (рис. 18):

$$v = \frac{ql^4}{EJ(2u)^4}\left(\frac{\cos kz}{\cos 2u} - 1 + \frac{k^2z^2 - u^2}{2}\right) \tag{100}$$

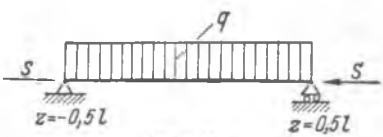


Рис. 18.

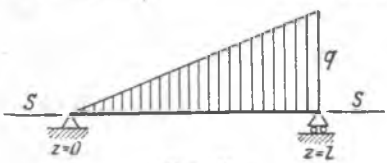


Рис. 19.

$$v' = \frac{ql^3}{EJ(2u)^3}\left(kz - \frac{\sin kz}{\cos 2u}\right); \tag{101}$$

$$M = \frac{ql^2}{EJ(2u)^2}\left(1 - \frac{\cos kz}{\cos 2u}\right); \tag{102}$$

$$v(0) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}\bar{f}_0(u); \tag{103}$$

$$v'(\pm 0{,}5l) = \mp\frac{ql^3}{24EJ}\bar{\psi}_0(u); \tag{104}$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{8}\bar{\varphi}_0(u); \tag{105}$$

б) распределенной нагрузкой по треугольнику (рис. 19):

$$v = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{z^2}{6l} + \frac{\sin kz}{k^2 \sin 2u} - \frac{z}{2uk} - \frac{lz}{6}\right), \tag{106}$$

$$v' = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{z^2}{2l} + \frac{\cos kz}{k \sin 2u} - \frac{1}{2uk} - \frac{l}{6}\right); \tag{107}$$

$$M = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{\sin kz}{\sin 2u} - \frac{kz}{2u}\right); \tag{108}$$

$$v'(0) = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{1}{k \sin 2u} - \frac{1}{2uk} - \frac{l}{6}\right); \tag{109}$$

$$v'(l) = \frac{ql^2}{EJ\,(2u)^2}\left(\frac{l}{3} + \frac{1}{k\,\mathrm{tg}\,2u} - \frac{1}{2uk}\right); \tag{110}$$

$$M_{\max} \text{ при } z = \frac{1}{k}\arccos\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right). \tag{111}$$

б) Для балки свободно опертой, имеющей начальную синусоидальную погибь (рис. 20):

$$v_0 = b \sin\frac{\pi z}{l}; \tag{112}$$

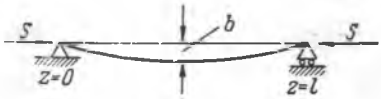


Рис. 20.

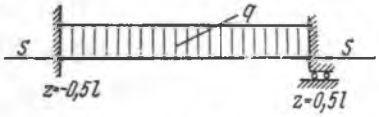


Рис. 21.

$$v = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\, b \sin\frac{\pi z}{l}; \tag{113}$$

$$M = \frac{-S}{1-\alpha^2}\, b \sin\frac{\pi z}{l}. \tag{114}$$

в) Для балки с жестко заделанными концами:

1) первоначально прямой, загруженной равномерно (рис. 21):

$$v = \frac{ql^4}{EJ\,(2u)^4}\left[\left(\frac{\cos kz}{\cos u} - 1\right)\frac{u}{\mathrm{tg}\,u} + \frac{k^2z^2 - u^2}{2}\right]; \tag{115}$$

$$M = \frac{ql^2}{(2u)^2}\left(1 - \frac{u \cos kz}{\sin u}\right); \tag{116}$$

$$v(0) = \frac{ql^4}{384EJ}\,\bar{f}_1(u); \tag{117}$$

$$M(\pm 0{,}5l) = \frac{ql^2}{12}\,\bar{\chi}(u); \tag{118}$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{24}\,\bar{\varphi}_1(u). \tag{119}$$

2) имеющей начальную косинусоидальную погибь (рис. 22):

$$v_0 = \frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{l}\right); \tag{120}$$

$$v = \frac{\frac{\alpha^2}{4}}{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot \frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{l}\right); \tag{121}$$

$$M = \frac{S}{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot \frac{c}{2}\cos\frac{2\pi z}{l}. \tag{122}$$

г) Для первоначально прямой балки, упруго заделанной на жестких опорах и загруженной равномерно (рис. 23):

$$v(0) = \frac{ql^4}{384EJ}\left[(1-\varkappa)\,5\bar{f}_0(u) + \varkappa\bar{f}_1(u)\right] \tag{123}$$

$$v'(\pm 0{,}5l) = \mp\frac{ql^3}{24EJ}(1-\varkappa)\,\bar{\psi}_0(u) \tag{124}$$

$$M(\pm 0{,}5l) = \frac{ql^2}{12}\varkappa\bar{\chi}(u) \tag{125}$$

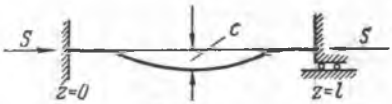


Рис. 22.

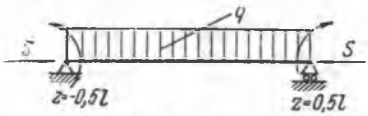


Рис. 23.

$$M(0) = -\frac{ql^2}{24}\left[(1-\varkappa)\,3\bar{\varphi}_0(u) + \varkappa\bar{\varphi}_1(u)\right] \tag{126}$$

$$\varkappa = \frac{\bar{\psi}_0(u)}{\bar{\psi}_0(u) + \frac{2\mathfrak{A}EJ}{l}\bar{\chi}(u)} \tag{127}$$

Примечания: 1. В приведенных выше формулах приняты следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{-S}{EJ}}, \quad u = \frac{kl}{2}, \quad \alpha = \frac{-Sl^2}{\pi^2 EJ}$$

(положительной считается растягивающая сила, поэтому, чтобы получить величину k вещественной, а α — положительной, перед сжимающей силой S введен знак минус «—»)

$$\bar{f}_0(u) = \frac{24}{5}\,\frac{\frac{1}{\cos u} - \frac{u^2+2}{2}}{u^4}$$

$$\bar{f}_1(u) = \frac{3}{\left(\frac{u}{2}\right)^3}\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2} - \frac{u}{2}\right)$$

$$\bar{\varphi}_0(u) = \frac{2}{u^2}\left(\frac{1}{\cos u} - 1\right);$$

$$\bar{\varphi}_1(u) = \frac{6}{u}\left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u}\right);$$

$$\bar{\chi}(u) = \frac{3}{u}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u}\right);$$

$$\bar{\psi}_0(u) = \frac{3}{u^3}(\operatorname{tg} u - u);$$

$$\bar{\psi}_1(u) = \frac{3}{2u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u}\right);$$

$$\bar{\psi}_2(u) = \frac{6}{2u}\left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u}\right).$$

2. Значения функций $\bar{f}_0(u)$, $\bar{f}_1(u)$, $\bar{\varphi}_0(u)$, $\bar{\varphi}_1(u)$, $\bar{\chi}(u)$, $\bar{\psi}_0(u)$, $\bar{\psi}_1(u)$ и $\bar{\psi}_2(u)$ могут быть заимствованы из табл. 4 и 5.

Таблица 4

u	$\overline{\varphi_1}(u)$	$\overline{\chi}(u)$	$\overline{f_1}(u)$	u	$\overline{\varphi_1}(u)$	$\overline{\chi}(u)$	$\overline{f_1}(u)$
0,00	1,000	1,000	1,000	2,40	2,66	1,89	2,38
0,50	1,030	1,017	1,026	2,45	2,84	1,98	2,53
1,00	1,130	1,074	1,111	2,50	3,05	2,09	2,70
1,10	1,162	1,091	1,138	2,55	3,30	2,21	2,90
1,20	1,198	1,111	1,169	2,60	3,59	2,36	3,14
1,30	1,240	1,135	1,204	2,65	3,94	2,54	3,43
1,40	1,288	1,161	1,245	2,70	4,38	2,76	3,79
1,50	1,343	1,192	1,291	2,75	4,92	3,04	4,23
1,60	1,408	1,227	1,346	2,80	5,63	3,40	4,81
1,70	1,483	1,267	1,409	2,85	6,59	3,88	5,59
1,80	1,571	1,315	1,482	2,90	7,93	4,56	6,68
1,90	1,675	1,370	1,569	2,95	9,99	5,59	8,35
2,00	1,799	1,437	1,672	3,00	13,51	7,37	11,20
2,10	1,949	1,516	1,797	3,05	20,86	11,03	17,17
2,20	2,134	1,612	1,949	3,10	45,92	23,57	37,48
2,30	2,364	1,733	2,139	π	∞	∞	∞

Таблица 5

u	$\overline{\varphi_0}(u)$	$\overline{f_0}(u)$	$\overline{\psi_0}(u)$	$\overline{\psi_1}(u)$	$\overline{\psi_2}(u)$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,50	1,117	1,114	1,111	1,074	1,130
0,60	1,176	1,173	1,169	1,111	1,198
0,70	1,255	1,250	1,245	1,161	1,288
0,80	1,361	1,354	1,346	1,227	1,408
0,90	1,504	1,494	1,482	1,315	1,571
1,00	1,704	1,690	1,672	1,437	1,799
1,10	1,989	1,962	1,949	1,612	2,134
1,20	2,44	2,40	2,38	1,89	2,66
1,30	3,24	3,18	3,14	2,36	3,59
1,40	4,94	4,82	4,81	3,40	5,63
1,45	6,94	6,79	6,68	4,56	7,93
1,50	11,67	11,49	11,20	7,37	13,51
$\frac{\pi}{2}$	∞	∞	∞	∞	∞

§ 6. Статически неопределимые балки под действием произвольной поперечной нагрузки и сжимающих или растягивающих усилий

Для расчета статически неопределимых и неразрезных балок, подверженных действию растягивающих или сжимающих усилий, можно пользоваться методом наложения совершенно так же, как это было показано для балок при отсутствии продольных усилий; необходимо лишь при написании выражений для перемещений балок учитывать действующие продольные усилия, пользуясь приведенными выше формулами.

Пример. Многопролетная балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой в каждом пролете и растягиваемая усилиями S (рис. 24).

Подсчитав для всех пролетов величины $u_{i-1,\,i}$ по выражению

$$u_{i-1,\,i} = \frac{l_{i-1,\,i}}{2}\sqrt{\frac{S_{i-1,\,i}}{EJ_{i-1,\,i}}} \tag{128}$$

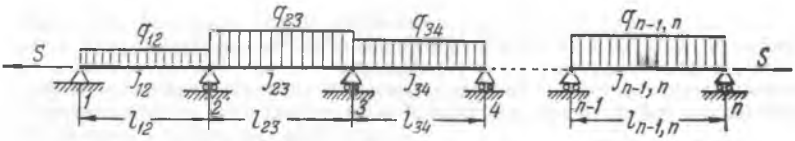


Рис. 24.

и разыскав по табл. 3 все величины $\psi\,(u_{i-1,\,i})$, можно составить уравнения трех моментов:

$$\frac{q_{12}l_{12}^3}{24EJ_{12}}\psi_0\,(u_{12}) - \frac{M_1 l_{12}}{3EJ_{12}}\psi_1\,(u_{12}) - \frac{M_2 l_{12}}{6EJ_{12}}\psi_2\,(u_{12}) = \mathfrak{A}_1 M_1 \tag{129}$$

. . . . . .

$$\frac{-q_{i-1,\,i}l_{i-1,\,i}^3}{24EJ_{i-1,\,i}}\psi_0\,(u_{i-1,\,i}) + \frac{M_{i-1}l_{i-1,\,i}}{6EJ_{i-1,\,i}}\psi_2\,(u_{i-1,\,i}) + \frac{M_i l_{i-1,\,i}}{3EJ_{i-1,\,i}}\psi_1\,(u_{i-1,\,i}) =$$

$$= \frac{q_{i,\,i+1}l_{i,\,i+1}^3}{24EJ_{i,\,i+1}}\psi_0\,(u_{i,\,i+1}) - \frac{M_i l_{i,\,i+1}}{3EJ_{i,\,i+1}}\psi_1\,(u_{i,\,i+1}) - \frac{M_{i+1}l_{i,\,i+1}}{6EJ_{i,\,i+1}}\psi_2\,(u_{i,\,i+1}); \tag{130}$$

. . . . . .

$$\frac{-q_{n-1,\,n}l_{n-1,\,n}^3}{24EJ_{n-1,\,n}}\psi_0\,(u_{n-1,\,n}) + \frac{M_{n-1}l_{n-1,\,n}}{6EJ_{n-1,\,n}}\psi_2\,(u_{n-1,\,n}) +$$

$$+ \frac{M_n l_{n-1,\,n}}{3EJ_{n-1,\,n}}\psi_1\,(u_{n-1,\,n}) = -\mathfrak{A}_n M_n. \tag{131}$$

Определив из этой системы значения опорных моментов M_i, можно определить по формуле

$$\chi_{i,\,i+1} = \frac{M_i + M_{i+1}}{2\,\dfrac{q_{i,\,i+1}l^3_{i,\,i+1}}{24}\,\chi\,(u_{i,\,i+1})} \tag{132}$$

средние значения коэффициентов опорной пары в каждом пролете, после чего при помощи формул § 4 можно определить изгибающие моменты в середине каждого отдельного пролета.

Если нагрузку на протяжении каждого пролета нельзя принять равномерной, расчет усложняется, так как необходимо предварительно составить общие выражения для углов поворота опорных сечений от действия пролетной нагрузки.

§ 7. Приближенные формулы для стрелок прогиба и изгибающих моментов при одновременном действии на балку поперечных и продольных усилий (изгибающие силы одного направления)

Балка, свободно лежащая на двух опорах (рис. 25). Наибольший прогиб может быть найден по приближенной формуле

$$f = \frac{f_0}{1 \pm \alpha^2}\,, \tag{133}$$

где знак минус «—» соответствует сжимающей продольной силе, знак плюс «+» — растягивающей;

f_0 — прогиб посредине балки при действии одних поперечных сил;

α^2 — отношение величины продольной силы S к величине эйлеровой нагрузки балки в плоскости изгиба

$$\alpha^2 = \frac{Sl^2}{\pi^2 EJ}.$$

Точность формулы (133) при сжимающей продольной силе не меньше 1%, при растягивающей продольной силе точность ее уменьшается с увеличением α^2, например для сосредоточенных изгибающих сил уже при $\alpha^2 = 2$ погрешность формулы достигает 4,3%. Для распределенной нагрузки точность этой формулы значительно больше, например при $\alpha^2 = 10$ погрешность не превосходит 1,7%.

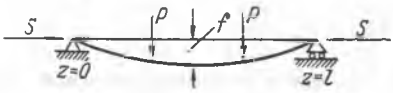


Рис. 25.

Стрелка прогиба в сечении балки, находящемся на расстоянии z от левой опоры, приближенно может быть найдена по формуле

$$v = f \sin \frac{\pi z}{l}. \tag{134}$$

Величины изгибающих моментов M находятся как алгебраические суммы изгибающих моментов от действия поперечных сил M' и от действия продольных сил, т. е.

$$M = M' \pm Sv. \tag{135}$$

Пример. Балка на двух опорах подвержена действию равномерной нагрузки Q, сосредоточенной силы P посредине пролета и сжимающих сил S. Стрелка прогиба посредине пролета от изгибающих сил (табл. 8 раздел V)

$$f_0 = \frac{5Ql^3}{384\,EJ} + \frac{Pl^3}{48\,EJ}.$$

Стрелка прогиба посредине пролета при действии всех сил

$$f = \frac{f_0}{1 - \alpha^2}.$$

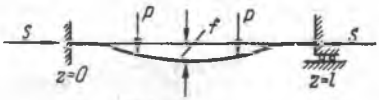


Рис. 26.

Наибольший изгибающий момент в середине пролета балки

$$M_{\max} = \frac{1}{8} Ql + \frac{1}{4} Pl + Sf.$$

Балка с заделанными концами (рис. 26). Сохраняя прежние обозначения, будем иметь:

$$f = \frac{f_0}{1 \pm \frac{1}{4}\alpha^2} \tag{136}$$

$$M = M' \pm Sv, \tag{137}$$

где v — стрелка прогиба в сечении балки на расстоянии z от опоры, которая может быть приближенно найдена по формуле

$$v = \frac{1}{2} f \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right). \tag{138}$$

Из формул (133) и (136) видно, что при заделанных концах влияние продольных сил гораздо меньше, чем при свободно опертых концах.

РАЗДЕЛ VII

КРИВЫЕ БАЛКИ

ГЛАВА I

ИЗГИБ КРИВЫХ БАЛОК

Пусть ось балки представляет собой плоскую кривую линию, причем плоскость этой кривой, а также плоскость действия всех внешних сил совпадают с одной из главных плоскостей балки.

Приводя все внешние силы, лежащие по одну сторону сечения, к одной силе и паре, подобно тому как это делалось для прямой балки, можно найти для каждого поперечного сечения кривой балки величины изгибающего момента M_y, срезывающей силы V_x и сжимающей или растягивающей осевой силы N (рис. 1).

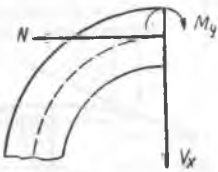


Рис. 1.

§ 1. Вычисление напряжений

Напряжения, вызываемые срезывающей и осевой силами, вычисляются по тем же формулам, что и для прямой балки, т. е.: нормальное напряжение (от осевой силы)

$$\sigma_z = \frac{N}{F};$$

касательное напряжение

$$\tau_y = \frac{V_x S_y}{J_y \delta}.$$

Если кривизна балки незначительна, то напряжение от изгибающего момента M_y может быть определено также по формуле для прямой балки, т. е.

$$\sigma_z = \frac{M_y x}{J_y}. \qquad (1)$$

Это обусловлено тем, что первоначальную кривизну балки в этом случае можно представить как результат действия на прямую балку некоторой воображаемой внешней силы, что в силу принципа независимости действия сил при малых деформациях и позволяет сделать указанное заключение.

Эту же формулу для упрощения расчета обыкновенно применяют и тогда, когда кривизна балки достигает значительной величины (например, при отношении радиуса кривизны к высоте профиля ~ 5), но в таких случаях рекомендуется несколько понижать норму допускаемого напряжения.

Таблица 1

ρ / h	1	2	3	4	10
Ошибка, %	35	17	11	9	3

Для прямоугольного сечения ошибка в опасную сторону приближенной формулы (1) не превосходит приведенных в табл. 1 величин, при разных отношениях радиуса кривизны ρ к высоте сечения h.

В случае значительной кривизны балки при определении напряжений от изгибающего момента следует пользоваться формулами, выведенными на основании гипотезы плоских сечений, дающей результаты, достаточно точно подтверждаемые опытными исследованиями.

Введем следующие обозначения (рис. 2):

M — изгибающий момент;

ρ — радиус кривизны балки в данном сечении, т. е. отстояние ц. т. сечения от центра кривизны;

r — отстояние нейтральной оси сечения от центра кривизны;

γ — отстояние нейтральной оси от ц. т. сечения;

F — площадь сечения;

e_1 — отстояние наиболее растянутого волокна от нейтральной оси;

e_2 — отстояние наиболее сжатого волокна от нейтральной оси;

$h = e_1 + e_2$ — высота профиля;

x — отстояние какой-либо точки сечения от нейтральной оси.

Нормальное напряжение в точке, находящейся в расстоянии x от нейтральной оси, определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{M}{F\gamma}\,\frac{x}{r+x}. \qquad (2)$$

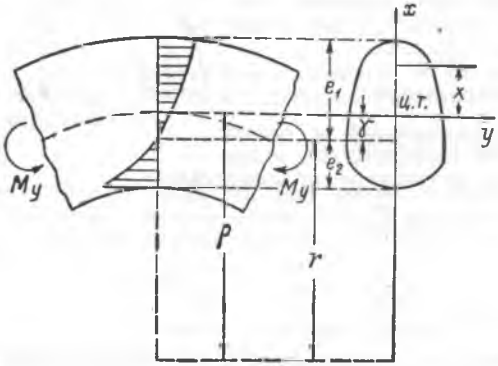


Рис. 2.

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{M}{F\gamma}\,\frac{e_2}{r-e_2}. \qquad (3)$$

Наименьшее нормальное напряжение

$$\sigma_{min} = \frac{M}{F\gamma}\,\frac{e_1}{r+e_1}. \qquad (4)$$

Из приведенных выражений видно, что для вычисления напряжений при изгибе кривой балки необходимо предварительно определить положение нейтральной оси, которая не проходит через ц. т. сечения, как это было при изгибе прямой балки.

Положение нейтральной оси для кривой балки определяется следующим уравнением:

$$\int_F \frac{x\,dF}{r+x} = 0 \qquad (5)$$

позволяющим найти r, а по нему и величину $\gamma = \rho - r$, входящую в знаменатель выражений (2)—(4).

При этом методе величина γ находится как разность двух близких величин. Поэтому для получения достаточной точности требуется бо́льшая точность вычисления, в противном случае можно совершенно исказить расчет.

Уравнение (5) дает для различных профилей сечения следующие выражения величины r:

1. Прямоугольное сечение (рис. 3)

$$r = \frac{h}{\ln\frac{u_2}{u_1}}.$$

2. Двутавровое сечение (рис. 4)

$$r = \frac{b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3}{b_1\ln\frac{u_2}{u_1} + b_2\ln\frac{u_3}{u_2} + b_3\ln\frac{u_4}{u_3}}. \qquad (7)$$

Для того чтобы в случае двутаврового сечения величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений были одинаковы, необходимо удовлетворить условию

$$\frac{u_4 - r}{u_4} = \frac{r - u_1}{u_1}. \tag{8}$$

Задавшись u_4 и u_1 и определив r из последнего уравнения, можно по выражению (7) найти необходимое соотношение между остальными размерами сечения.

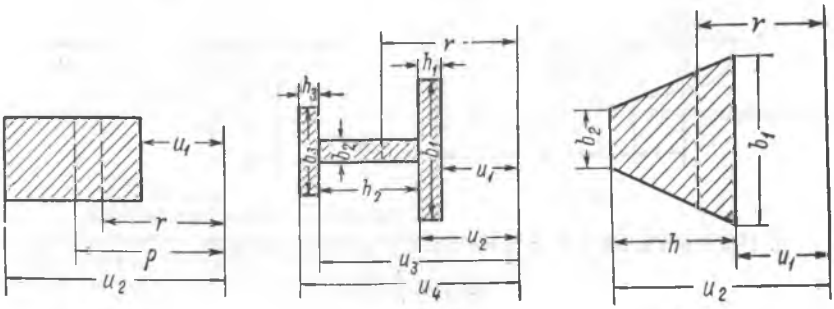


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

3. Трапецоидальное сечение (рис. 5)

$$r = \frac{F}{\frac{b_1 u_2 - b_2 u_1}{h} \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)}. \tag{9}$$

Полагая в этом выражении $b_1 = 0$, можно получить r для треугольного сечения.

4. Круглое сечение

$$r = \frac{F}{2\pi\left(\rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{d^2}{4}}\right)}, \tag{10}$$

где d — диаметр сечения.

Приведенными формулами можно пользоваться для определения величины r, но следует помнить, что r должно вычисляться с таким количеством знаков, чтобы разность $\gamma = \rho - r$ могла быть найдена с точностью до 1—2% ее величины.

В случае, если r мало отличается от ρ, положение нейтральной оси лучше искать по формуле

$$\gamma = \frac{\rho\varphi}{1 + \varphi}.$$

Здесь φ определяется выражением

$$\varphi = -\frac{1}{F}\int_F \frac{x_1 dF}{\rho + x_1}.$$

где $x_1 = x - \gamma$.

Величина входящего в выражение для φ интеграла может также определяться графически, что делается следующим образом.

Пусть имеется профиль кривой балки (рис. 6); линиями, перпендикулярными оси AB, разбиваем профиль на ряд прямоугольных площадок dF; уменьшив высоту каждой площадки в отношении $\frac{x_1}{\rho + x_1}$, получим некоторый контур (заштрихован), площадь которого по измерении, например планиметром, даст величину искомого интеграла.

5. Напряжение в проушине (рис. 7)

$$\sigma_{max} = \frac{P}{2ac}\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \qquad (11)$$

где σ_{max} — наибольшее напряжение в проушине;
a и b — радиусы внутреннего и наружного очертания проушины.
c — толщина проушины;
P — растягивающее усилие.

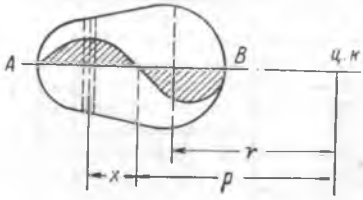


Рис 6.

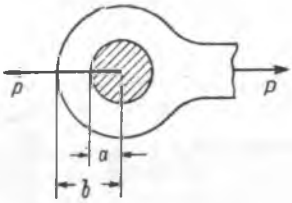


Рис. 7.

6. Напряжение в звеньях цепи (рис. 8)

$$\sigma_{max} = \frac{1{,}25P}{F \sin\alpha}. \qquad 12)$$

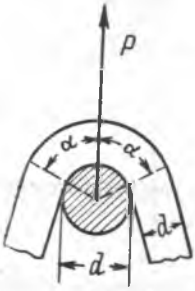


Рис. 8.

где σ_{max} — наибольшее напряжение в звене;
$F = \frac{1}{4}\pi d^2$ — площадь сечения (d — диаметр цепи);
α — угол соприкасания звеньев;
P — растягивающее усилие.

Пример. Определить σ_{max} и σ_{min} для подъемного крюка трапецоидального поперечного сечения, имеющего размеры: $b_1 = 4$ *см*, $b_2 = 1$ *см*, $u_1 = 3$ *см*, $u_2 = 12{,}5$ *см*, $h = 9{,}5$ *см*, $F = 23{,}7$ *см*², $P = 2$ *т*.

Определяем отстояние r от нейтральной оси по формуле (9)

$$r = \frac{23{,}7}{\frac{4\cdot 12{,}5 - 1\cdot 3}{9{,}5}\ln\frac{12{,}5}{3} - (4-1)} = 6{,}12 \text{ см}.$$

Положение центра тяжести сечения:

$$\rho = u_1 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}\frac{h}{3} = 6{,}8 \text{ см},$$

$$\gamma = \rho - r = 0{,}68 \text{ см}, \qquad F\gamma = 16{,}2 \text{ см}^2,$$

$$e_1 = u_2 - r = 12{,}5 - 6{,}12 = 6{,}38 \text{ см},$$

$$e_2 = r - u_2 = 6{,}12 - 3 = 3{,}12 \text{ см}.$$

Изгибающий момент

$$M = P\rho = 2000\cdot 6{,}8 = 13\,600 \text{ кгсм}.$$

Напряжения от изгиба

$$\sigma_{max} = \frac{13\,600}{16{,}2}\,\frac{3{,}12}{6{,}12 - 3{,}12} = 875 \text{ атм},$$

$$\sigma_{min} = -\frac{13\,600}{16{,}2}\,\frac{6{,}38}{6{,}12 + 6{,}38} = -428 \text{ атм}$$

Прибавляя напряжения от продольной силы, найдем:

$$\sigma_{max} = 875 + \frac{2000}{23{,}7} = 960 \text{ атм};$$

$$\sigma_{min} = -428 + 85 = -343 \text{ атм}.$$

7. Изгиб балки трубчатого сечения. Поперечные трубчатые сечения кривой балки при изгибе изменяют свою первоначальную форму (сплющиваются), вследствие чего первоначальная жесткость сечений уменьшается, а распределение напряжений в сечениях заметно изменяется.

Первоначальная жесткость изгиба балки EJ должна быть уменьшена введением коэффициента k, меньшего единицы,

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12\left(\frac{tR}{r^2}\right)^2}$$

где t — толщина стенки балки;
r — радиус сечения балки;
R — радиус кривизны оси балки.

Нормальные напряжения в сечении распределяются согласно выражению

$$\sigma = \frac{Mx}{kJ}\left(1 - \beta\frac{x}{r}\right),$$

где M — изгибающий момент в сечении;
x — отстояние волокна от оси, проходящей через центр сечения;
J — момент инерции сечения относительно той же оси;
β — коэффициент, определяемый выражением

$$\beta = -\frac{6}{5 + 6\left(\frac{tR}{r^2}\right)^2}. \tag{13}$$

Наибольшие нормальные напряжения имеют место в точках, отстоящих от оси на расстоянии

$$x_1 = \frac{r}{\sqrt{3\beta}}$$

и получают значения

$$\sigma_{max} = \gamma\frac{Mr}{J}$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3k\sqrt{3\beta}}.$$

8. Изгиб балки квадратного трубчатого сечения. Пользуясь выражениями, выведенными для изгиба кривых балок, необходимо жесткость сечения балки EJ помножить на коэффициент k, меньший единицы,

$$k = \frac{49{,}2 + 1{,}33\frac{b^4}{R^2t^2}}{49{,}2 + 3{,}23\frac{b^4}{R^2t^2}}$$

где b — длина стороны квадратного сечения балки.

§ 2. Упругие перемещения кривых балок

Все выводы и уравнения, относящиеся к деформациям прямой балки, могут быть применимы и для кривой балки до тех пор, пока радиус кривизны ее в 10—15 раз больше высоты профиля; если кривизна балки больше указанного предела, то деформацию следует находить по приводимым ниже формулам, выведенным для балок большей кривизны.

Пусть OB — кривой брус, закрепленный нижним концом (рис. 9). Угол поворота $\Delta\varphi_0$ какого-нибудь поперечного сечения балки mn и поступательные перемещения центра тяжести этого сечения Δx_0 и Δy_0 определяются следующими выражениями:

$$\Delta\varphi_0 = \int_0^s \left(\frac{M}{EF\gamma\rho} + \frac{N}{EF\rho}\right) ds \tag{14}$$

или приближенно

$$\Delta\varphi_0 = \int_0^s \frac{M ds}{EJ}. \tag{15}$$

Если кривизна балки не слишком велика, то для определения перемещений Δx_0 и Δy_0 можно пользоваться формулами

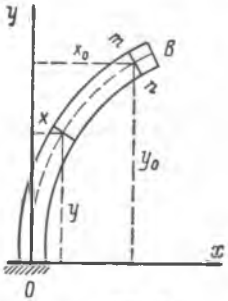


Рис. 9.

$$\Delta x_0 = y_0 \int_0^s \frac{M ds}{EJ} - \int_0^s \frac{M y ds}{EJ} + \int_0^{x_0} \frac{N dx}{EF}, \tag{16}$$

$$\Delta y_0 = -x_0 \int_0^s \frac{M ds}{EJ} + \int_0^s \frac{M x ds}{EJ} + \int_0^{y_0} \frac{N dy}{EF} \tag{17}$$

где M — изгибающий момент;
N — осевая сила;
F — площадь сечения балки;
γ — отстояние ц. т. сечения от нейтральной оси;
ρ — радиус кривизны;
x, y — координаты центров тяжести сечений.

Если кривая балка задана, то все эти величины могут быть определены для ее любого поперечного сечения.

Дуга s отсчитывается от закрепленного конца балки; верхние пределы интегралов соответствуют сечению, для которого определяются перемещения.

Входящие в формулу интегралы можно вычислить графически или по приближенным формулам квадратур.

§ 3. Статически неопределимые случаи изгиба кривых балок

Лишние неизвестные при изгибе статически неопределимых кривых балок проще всего можно найти, пользуясь выражением для потенциальной энергии упругих систем; в частных случаях может, однако, оказаться проще применение

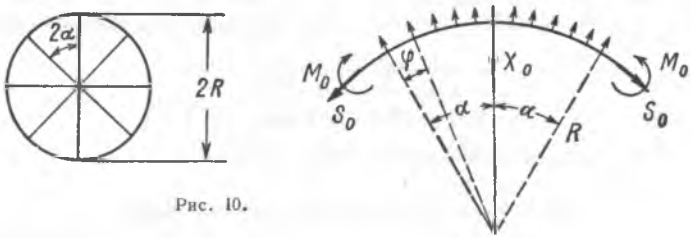


Рис. 10.

приема, изложенного при рассмотрении изгиба статически неопределимых прямых балок. Ниже приводятся решения некоторых встречающихся в практике задач изгиба статически неопределимых кривых балок.

1. Напряжения в ободе махового колеса. Обозначения (рис. 10):

R — средний радиус обода;
F — площадь сечения обода;
J — момент инерции сечения обода;
2α — угол между осями спиц;
F_1 — площадь поперечного сечения спиц;
ω — угловая скорость маховика;

$\frac{q}{g}$ — масса единицы длины обода;

$\frac{q_1}{g}$ — масса единицы длины спиц;

n — число спиц.

Растягивающая сила в спице (у обода)

$$X_0 = \frac{2}{3}\,\frac{q\omega^2 R^2}{g}\cdot\frac{1}{f_1 + \frac{FR^2}{J} f_2 + \frac{F}{F_1}}. \tag{18}$$

Изгибающий момент в ободе посредине между спицами

$$M_0 = \frac{X_0 R}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right), \tag{19}$$

где f_1 и f_2 приведены в табл. 2 для разных значений n — числа спиц.

Таблица 2

n	4	6	8	10	12
f_1	0,643	0,957	1,274	1,592	1,910
f_2	0,00608	0,00169	0,00076	0,000395	0,000125

Общее выражение для изгибающего момента

$$M_\varphi = M_0 + \frac{X_0 R}{2\sin\alpha}(1 - \cos\varphi), \tag{20}$$

где φ измеряется от линии, делящей пополам угол между осями спиц.

Растягивающая сила в спице в расстоянии r от оси обода

$$X_r = X_0 + \frac{q_1\omega^2}{2g}(R^2 - r^2). \tag{21}$$

Общее выражение для продольной силы в ободе

$$S = \frac{q\omega^2 R^2}{g} - \frac{R\cos\varphi}{2\sin\alpha}. \tag{22}$$

2. Замкнутое симметричное кольцо постоянного сечения под равномерным внутренним давлением (рис. 11). Общее выражение для изгибающего момента

$$M = M_0 - \frac{q}{2}(b^2 - x^2 - y^2); \tag{23}$$

$$M_0 = \frac{qb^2}{2} - \frac{q}{l}(J_x + J_y), \tag{24}$$

где b — полудиаметр в направлении оси x;

M_0 — изгибающий момент на конце этого полудиаметра;

q — интенсивность давления;

l — длина четверти кольца;

$$J_x = \int_0^l y^2 ds$$

$$J_y = \int_0^l x^2 ds.$$

3. Сечение, состоящее из полукругов и двух прямых (a и b — полудиаметры сечения, рис. 12). Момент на концах малой оси

$$M_0 = \frac{qa^2}{2} - \frac{q}{2b + (\pi - 2)a}\left[\frac{1}{3}(b-a)^3 + \frac{\pi}{2}a^3 + 3a^2(b-a) + \frac{\pi a}{2}(b-a)^2\right]. \quad (25)$$

Момент на концах большой оси

$$M_1 = M_0 - \frac{q}{2}(a^2 - b^2). \quad (26)$$

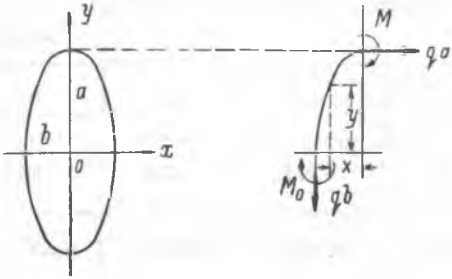


Рис. 11.

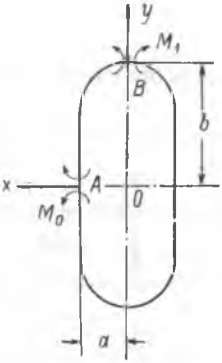


Рис. 12.

Если, например, $a : b = 1{,}2$, то $M_0 = -0{,}76qa^2$; $M_1 = +0{,}74qa^2$.

4. Эллиптическое кольцо (a и b — полуоси, рис. 13)

Момент на концах малой оси

$$M_0 = -\beta q b^2 \quad (27)$$

Момент на концах большой оси

$$M = \gamma q b^2. \quad (28)$$

где β и γ зависят от $b : a$ (табл. 3).

Таблица 3

$b : a$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
β	0	0,057	0,133	0,237	0,391	0,629	1,049	1,927
γ	0	0,060	0,148	0,283	0,498	0,870	1,576	3,128

При расчете колец по приведенным выражениям нельзя забывать складывать напряжения от изгиба с напряжением от действия осевых усилий.

5. Двухшарнирная арка на неподвижных опорах, нагруженная вертикальной нагрузкой (рис. 14).

Вертикальные реакции могут быть определены так же, как для прямой балки; горизонтальная реакция (распор) может быть определена по выражению

$$H = \frac{\int_0^{s_1} \frac{Myds}{EJ}}{\int_0^{s_1} \frac{y^2ds}{EJ} + \int_0^{s_1} \frac{ds}{EF}} \tag{29}$$

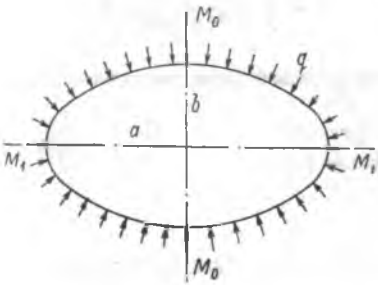


Рис. 13.

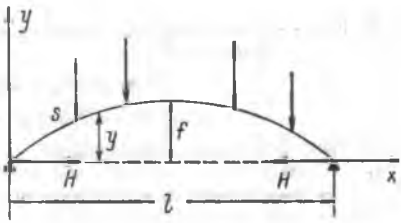


Рис. 14.

или в случае арки постоянного сечения

$$N = \frac{\int_0^{s_1} Myds}{\int_0^{s_1} y^2ds + r^2s_1}, \tag{30}$$

где s_1 — длина оси арки;

M — выражение изгибающего момента от внешней нагрузки для сечения в расстоянии s от начала координат, считая это расстояние по оси арки;

y — первоначальная стрелка прогиба арки в том же сечении;

$r = \sqrt{\frac{J}{F}}$ — радиус инерции сечения.

Начало координат — на левой опоре.

Если внешняя нагрузка q распределена равномерно по горизонтальной проекции арки и ось арки изогнута по параболе (наибольшая стрелка f), то распор можно вычислять по формуле

$$H = \frac{ql^2}{8f}, \tag{31}$$

этой же формулой можно пользоваться для приближенного определения распора и арок других очертаний.

Входящие в формулу для распора интегралы можно вычислить или графически, или по приближенным формулам квадратур.

После того как величина распора найдена, изгибающие моменты в сечениях арки могут быть вычислены по выражению $M_s = M - Hy$.

Величину осевой силы можно положить постоянной для всех сечений арки и равной распору H.

6. Арка с неподвижно заделанными концами (рис. 15). Принимая за лишние неизвестные величину изгибающего момента M_1 и величины R_1 и H_1 — вертикальной и горизонтальной составляющих левой опорной реакции, — значение этих величин можно найти, применяя начало наименьшей работы, т. е. по уравнениям:

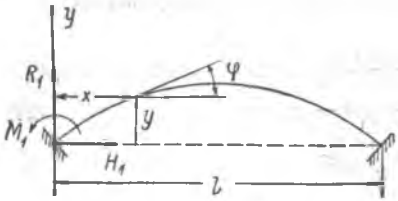


Рис. 15.

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial R_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial H_1} = 0.$$

При этом выражение для потенциальной энергии имеет следующий вид:

$$V = \int_0^{s_1} \left(\frac{M^2}{2EJ} + \frac{N^2}{2EF} \right) ds,$$

где M и N — уравнения изгибающего момента и осевой силы, вычисляемые по формулам:

$$M = -M_1 + R_1 x - H_1 y - M',$$

$$N = -R_1 \sin\varphi - H_1 \cos\varphi + N'.$$

В этих формулах обозначены:

x, y — координаты какого-либо сечения;

φ — угол поворота этого сечения;

M' — момент относительно этого сечения внешних сил, приложенных к левой части арки;

N' — проекция этих сил по направлению нормали к сечению.

Для случая пологой параболической арки (наибольшая стрелка f), находящейся под действием одной вертикальной силы P в расстоянии c от левой опоры, лишние неизвестные могут быть вычислены по формулам:

$$H_1 = \frac{2c^2(l-c)^2 P}{l^3} \cdot \frac{15}{8f\left(1 + \frac{45}{4}\frac{r^2}{f^2}\right)} \tag{32}$$

$$R_1 = P\frac{l^3 - 3c^2 l + 2c^3}{l^3} \tag{33}$$

По этим выражениям можно легко получить соответствующие выражения для любой нагрузки арки, пользуясь принципом наложения, подобно тому как это было показано для изгиба прямых балок.

7. Круговая балка с заделанными по диаметру концами, нагруженная двумя симметричными силами, перпендикулярными плоскости балки (рис. 16).

Изгибающий момент в сечении A

$$M = \frac{2}{\pi} Pr \left[\cos\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin\alpha \right] \tag{34}$$

Изгибающий момент в сечениях B и B'

$$M = Pr\cos\alpha. \tag{35}$$

Скручивающий момент в сечениях B и B'

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{\pi} Pr \left(\frac{\pi}{2} - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha \right). \tag{36}$$

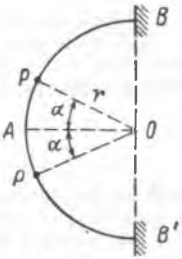


Рис. 16.

В этих формулах:

P — величина каждой из сосредоточенных сил;

r — радиус средней линии балки;

α — центральный угол, определяющий положение сил.

8. Круговая балка с заделанными по диаметру концами, нагруженная равномерно распределенными силами, перпендикулярными плоскости балки (рис. 17).

Изгибающий момент в сечении A

$$M = qr^2\left(1 - \frac{4}{\pi}\right). \tag{37}$$

Изгибающий момент в сечениях B и B'

$$M = qr^2. \tag{38}$$

Скручивающий момент в сечениях B и B'

$$\mathfrak{M} = 0{,}32qr^2. \tag{39}$$

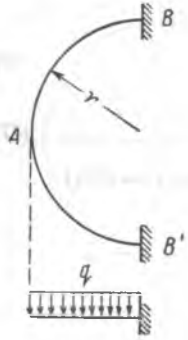


Рис. 17.

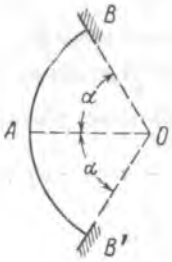


Рис. 18.

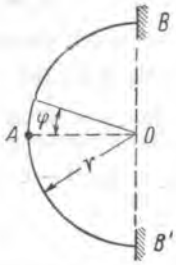


Рис. 19.

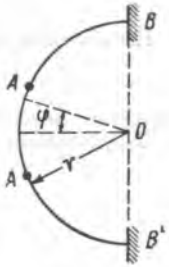


Рис. 20.

В этих формулах:

q — величина силы на единицу длины балки;

r — радиус средней линии балки.

9. Круговая балка с заделанными не по диаметру концами под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 18). 2α — центральный угол дуги; прочие обозначения те же, что и в предыдущем случае.

Изгибающий момент в точке B

$$M = M_1 \cos\alpha - qr^2(1 - \cos\alpha). \tag{40}$$

Скручивающий момент в точке B'

$$\mathfrak{M} = M_1 \sin\alpha - qr^2(1 - \sin\alpha). \tag{41}$$

Здесь M_1 — изгибающий момент в точке A, определяемый, если сечение балки прямоугольное, уравнением

$$\frac{1}{4}M_1(2\alpha + \sin 2\alpha) - qr^2\left(\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) + \\ + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)\left[\frac{1}{4}M_1(2\alpha - \sin 2\alpha) - \right. \\ \left. - qr^2\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right)\right] = 0 \tag{42}$$

где h — высота профиля;

b — ширина его.

10. Круговая балка на трех опорах; нагрузка распределена равномерно, концы заделаны и совпадают с концами диаметра (рис. 19).

Реакция в точке B

$$R = 0{,}571qr;$$

реакция в точке A

$$R_1 = 2.00qr.$$

Изгибающий момент в сечении, определяемом углом φ,

$$M_\varphi = R_1 r \sin\varphi - qr^2(1 - \cos\varphi) \tag{43}$$

и достигает максимума при $\varphi = 29°43'$.

Скручивающий момент там же

$$\mathfrak{M}_\varphi = R_1 r(1 - \cos\varphi) - qr^2(\varphi - \sin\varphi). \tag{44}$$

11. Круговая балка на четырех равноотстоящих опорах; концы предполагаются заделанными на концах диаметра (рис. 20)

Реакция в точке B

$$R = 0.416qr \tag{45}$$

Реакция в точке A

$$R_1 = 1.155qr \tag{46}$$

Изгибающий момент в точке, определяемой углом φ,

$$M_\varphi = R_1 r \sin\varphi - qr^2(1 - \cos\varphi) \tag{47}$$

и достигает максимума при $\varphi = 22°35'$, обращаясь в нуль при $\varphi = 45°11'$.

Скручивающий момент в том же сечении

$$\mathfrak{M}_\varphi = R_1 r(1 - \cos\varphi) - qr^2(\varphi - \sin\varphi). \tag{48}$$

ГЛАВА 2

ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЕЦ

Введем обозначения (рис. 21):

$\mathfrak{M}_\alpha$, N_α, P_α — изгибающий момент и силы по направлению касательной к окружности и по направлению радиуса, приложенные к сечению кольца, определяемому углом α (внешние силы);

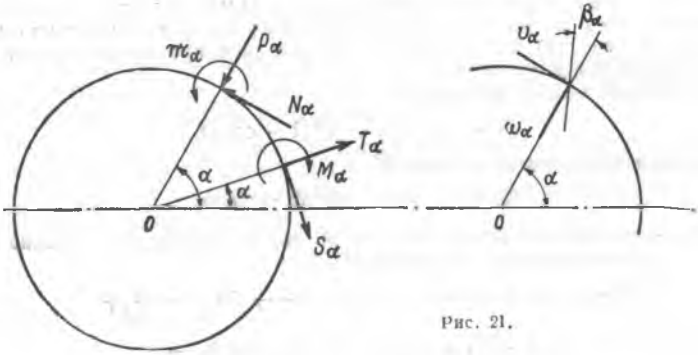


Рис. 21.

M_α, S_α, T_α — изгибающий момент, осевая сила и перерезывающая сила, действующие в сечении кольца, определяемом углом α (внутренние усилия);

ω_α, v_α — перемещения сечений кольца: в направлении радиуса, в направлении касательной к окружности;

β_α — угол поворота сечения;

r — радиус кольца;

J — момент инерции сечения кольца.

§ 4. Определение усилий и перемещений для кругового кольца

Исследование деформации кольца заключается в определении внутренних усилий, действующих в его сечениях, а также перемещений этих сечений при заданной системе действующих на кольцо внешних сил. Если кольцо имеет какие-либо добавочные крепления (например, распорки), то необходимо предварительно определить усилия в соответствующих узловых сечениях кольца, которые затем могут уже рассматриваться как внешние силы, действующие на свободное кольцо; в этом случае исследование изгиба кольца становится аналогичным исследованию изгиба статически неопределимых балок. При определении усилий и перемещений в кольце должно быть учтено влияние сжимающих усилий на изгиб кольца, подобно тому как это имеет место при изгибе балок, подвергающихся одновременному действию поперечной и продольной нагрузок.

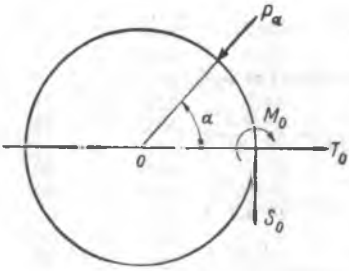


Рис. 22.

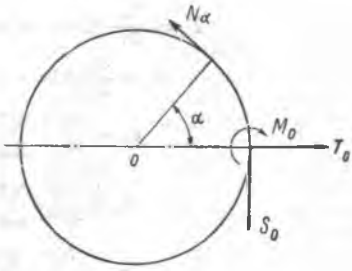


Рис. 23.

Наиболее простым и наглядным методом исследования деформации кольца является метод наложения, заключающийся в следующем.

Выводятся выражения для внутренних усилий M_0, S_0 и T_0 и перемещений ω_0, v_0 и β_0 в выбранном сечении кольца для случая действия на кольцо единичных нагрузок $\mathfrak{M}_\alpha$, N_α и P_α. После этого, аналогично применению принципа наложения к исследованию изгиба балок, эти выражения могут быть легко распространены на случай действия на кольцо любой системы внешних сил, а также для определения лишних неизвестных усилий в узловых сечениях кольца.

Для возможности применения такого метода будем предполагать, что кольцо, подверженное действию единичной и, следовательно, неуравновешенной нагрузки, находится в равновесии благодаря закреплению какого-либо из его сечений. Это фиктивное закрепление сечения кольца не окажет никакого влияния на окончательный результат деформации кольца, так как реактивные воздействия этого закрепления приведутся к нулю благодаря тому, что все силы, действующие на кольцо, должны взаимно уравновеситься.

Фиктивное закрепление кольца следует применять в том сечении, для которого должны быть найдены внутренние усилия и перемещения, причем от этого же сечения должны отсчитываться углы α, определяющие положения внешних нагрузок (в сторону против часовой стрелки).

Ниже приводятся выражения для усилий и перемещений в рассматриваемом сечении кольца при действии на кольцо единичных нагрузок, положение которых определяется углом α относительно этого сечения.

При действии нагрузки P_α (рис. 22):

$$M_0 = \frac{P_\alpha r}{2\pi}\left[(2\pi - \alpha)\sin\alpha - (1 - \cos\alpha)\right] = \varphi_1 P_\alpha r; \tag{49}$$

$$T_0 = \frac{P_\alpha}{2\pi}\left[\sin\alpha + (2\pi - \alpha)\cos\alpha\right] = \varphi_2 P_\alpha; \tag{50}$$

$$S_0 = -\frac{P_\alpha}{2\pi}(2\pi - \alpha)\sin\alpha = \varphi_3 P_\alpha; \tag{51}$$

$$\omega_0 = \frac{P_\alpha r^3}{EJ\pi} \sum \frac{\cos n\alpha}{(n^2-1)^2} = \varphi_4 \frac{P_\alpha r^3}{EJ}; \tag{52}$$

$$v_0 = -\frac{P_\alpha r^2}{EJ\pi} \sum \frac{\sin n\alpha}{n(n^2-1)^2} = \varphi_5 \frac{P_\alpha r^3}{EJ}; \tag{53}$$

$$\beta_0 = \frac{P_\alpha r^2}{EJ\pi} \sum \frac{n \sin n\alpha}{(n^2-1)^2} = \varphi_6 \frac{P_\alpha r^2}{EJ}. \tag{54}$$

При действии нагрузки N_α (рис. 23):

$$M_0 = \frac{N_\alpha r}{2\pi}(2\pi - \alpha)(1 - \cos\alpha) = \psi_1 N_\alpha r; \tag{55}$$

$$T_0 = \frac{N_\alpha}{2\pi}[(2\pi - \alpha)\sin\alpha + 2(1 - \cos\alpha)] = \psi_2 N_\alpha; \tag{56}$$

$$S_0 = \frac{N_\alpha}{2\pi}[(2\pi - \alpha)\cos\alpha + \sin\alpha] = \psi_3 N_\alpha; \tag{57}$$

$$\omega_0 = \frac{N_\alpha r^3}{EJ\pi} \sum \frac{\sin n\alpha}{n(n^2-1)^2} = \psi_4 \frac{N_\alpha r^3}{EJ}; \tag{58}$$

$$v_0 = \frac{N_\alpha r^3}{EJ\pi} \sum \frac{\cos n\alpha}{n^2(n^2-1)^2} = \psi_5 \frac{N_\alpha r^3}{EJ}; \tag{59}$$

$$\beta_0 = -\frac{N_\alpha r^2}{EJ\pi} \sum \frac{\cos n\alpha}{(n^2-1)^2} = \psi_6 \frac{N_\alpha r^2}{EJ} \tag{60}$$

При действии нагрузки $\mathfrak{M}_\alpha$ (рис. 24)

$$M_0 = \frac{\mathfrak{M}_\alpha}{2\pi}[(2\pi - \alpha) - 2\sin\alpha] = \chi_1 \mathfrak{M}_\alpha; \tag{61}$$

$$T_0 = \frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\pi r}(1 - \cos\alpha) = \chi_2 \frac{\mathfrak{M}_\alpha}{r}; \tag{62}$$

$$S_0 = \frac{\mathfrak{M}_\alpha}{\pi r}\sin\alpha = \chi_3 \frac{\mathfrak{M}_\alpha}{r}; \tag{63}$$

$$\omega_0 = -\frac{\mathfrak{M}_\alpha r^2}{EJ\pi} \sum \frac{\sin n\alpha}{(n^2-1)n} = \chi_4 \frac{\mathfrak{M}_\alpha r^2}{EJ}; \tag{64}$$

$$v_0 = \frac{\mathfrak{M}_\alpha r^2}{EJ\pi} \sum \frac{\cos n\alpha}{(n^2-1)n^2} = \chi_5 \frac{\mathfrak{M}_\alpha r^2}{EJ}; \tag{65}$$

$$\beta_0 = \frac{\mathfrak{M}_\alpha r}{EJ\pi} \sum \frac{\cos n\alpha}{(n^2-1)} = \chi_6 \frac{\mathfrak{M}_\alpha r}{EJ}. \tag{66}$$

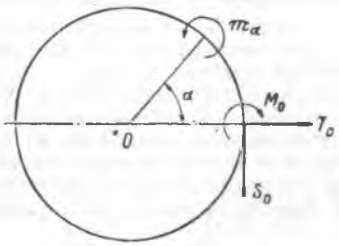


Рис. 24.

Численные значения входящих в выражения (49)—(66) коэффициентов φ, ψ и χ могут быть получены по табл. 4—6 в зависимости от угла α, определяющего положение силы относительно рассматриваемого сечения кольца.

Примечание. Приведенные формулы относятся к перемещениям, вызванным изгибом кольца. Что касается перемещений, вызванных перерезывающими и осевыми усилиями, то они обычно не рассматриваются вследствие их малости. В тех случаях, когда в кольце развиваются значительные осевые усилия, соответствующие им перемещения могут быть вычислены по формуле

$$\omega_1 = -\frac{S_{ср} r}{EF}, \tag{67}$$

где F — площадь сечения кольца;
$S_{ср}$ — среднее осевое усилие.

Таблица 4

α°	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
0	0,00	1,00	0,00	0,0429	0,0000	0,0000
10	0,18	0,99	—0,20	0,0391	—0,0078	0,0425
20	0,32	0,95	—0,32	0,0293	—0,0134	0,0689
30	0,43	0,88	—0,45	0,0162	—0,0175	0,0812
40	0,53	0,79	—0,52	0,0018	—0,0190	0,0814
45	0,56	0,73	—0,62	—0,0051	—0,0187	0,0776
50	0,60	0,68	—0,65	—0,0117	—0,0180	0,0714
60	0,64	0,60	—0,71	—0,0229	—0,0149	0,0547
70	0,65	0,43	—0,74	—0,0307	—0,0101	0,0332
80	0,64	0,30	—0,76	—0,0363	—0,0043	0,0096
90	0,59	0,16	—0,75	—0,0342	0,0016	—0,0126
100	0,52	0,03	—0,72	—0,0303	0,0074	—0,0331
110	0,44	0,09	—0,65	—0,0210	0,0119	—0,0483
120	0,34	—0,20	—0,58	—0,0136	0,0153	—0,0586
130	0,23	—0,29	—0,48	—0,0030	0,0166	—0,0621
135	0,17	—0,33	—0,44	0,0024	0,0166	—0,0612
140	0,12	—0,37	—0,39	0,0076	0,0162	—0,0592
150	0,00	—0,42	—0,29	0,0171	0,0140	—0,0503
160	—0,11	—0,46	—0,20	0,0250	0,0102	—0,0365
170	—0,21	—0,49	—0,10	0,0300	0,0054	—0,0193
180	—0,32	—0,50	0,00	0,0314	0,0000	0,0000
190	—0,39	—0,49	0,04	0,0300	—0,0054	0,0193
200	—0,45	—0,47	0,12	0,0250	—0,0102	0,0365
210	—0,50	—0,44	0,16	0,0171	—0,0140	0,0503
220	—0,52	—0,40	0,24	0,0076	—0,0162	0,0592
225	—0,54	—0,38	0,26	0,0024	—0,0166	0,0612
230	—0,54	—0,36	0,27	—0,0030	—0,0166	0,0621
240	—0,52	—0 30	0,29	—0,0136	—0,0153	0,0586
250	—0,50	—0,26	0,29	—0,0240	—0,0119	0,0483
260	—0,46	—0,21	0,28	—0,0303	—0,0074	0,0331
270	—0,41	—0,16	0,25	—0,0342	—0,0116	0,0126
280	—0,35	—0,12	0,22	—0,0363	0,0043	—0,0096
290	—0,28	—0,09	0,18	—0,0307	0,0101	—0,0382
300	—0,22	—0,06	0,15	—0,0229	0,0149	—0,0547
310	—0,16	—0,03	0,10	—0,0117	0,0180	—0,0714
315	—0,14	—0,02	0,09	—0,0051	0,0187	—0,0776
320	—0,11	—0,01	0,08	0,0018	0,0190	—0,0814
330	—0,06	—0,01	0,04	0,0162	0,0175	—0,0812
340	—0,03	0,00	0,02	0,0293	0,0134	—0,0689
350	—0,01	0,00	0,01	0,0391	0,0076	—0,0425
360	0,00	0,00	0,00	0,0429	0,000	0,000

Таблица 5

α°	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
0	0,00	0,00	1,00	0,0000	0,0095	—0,0429
10	0,01	0,14	0,99	0,0076	0,0086	—0,0391
20	0,05	0,23	0,95	0,0134	0,0080	—0,0293
30	0,12	0,49	0,88	0,0175	0,0042	—0,0162
40	0,21	0,64	0,79	0,0190	0,0010	—0,0018
45	0,26	0,71	0,73	0,0187	—0,0005	0,0051
50	0,31	0,76	0,68	0,0180	—0,0022	0,0117
60	0,42	0,87	0,60	0,0149	—0,0051	0,0229
70	0,52	0,96	0,43	0,0101	—0,0071	0,0307
80	0,64	1,02	0,30	0,0043	—0,0084	0,0363
90	0,75	1,07	0,16	—0,0016	—0,0087	0,0342
100	0,84	1,08	0,03	—0,0074	—0,0088	0,0303
110	0,94	1,08	—0,09	—0,0119	—0,0066	0,0240
120	1,00	1,06	—0,20	—0,0153	—0,0018	0,0136
130	1,05	1,02	—0,29	—0,0166	+0,0018	0,0030
135	1,07	0,98	—0,33	—0,0166	0,0030	—0,0024
140	1,08	0,96	—0,37	—0,0162	0,0036	—0,0076
150	1,09	0,88	—0,42	—0,0140	0,0049	—0,0171
160	1,08	0,81	—0,46	—0,0102	0,0064	—0,0250
170	1,05	0,73	—0,49	—0,0054	0,0080	—0,0300
180	1,00	0,64	—0,50	—0,0000	0,0095	—0,0314
190	0,94	0,56	—0,49	0,0054	0,0080	—0,0300
200	0,86	0,47	—0,47	0,0102	0,0064	—0,0250
210	0,78	0,39	—0,44	0,0140	0,0049	—0,0171
220	0,70	0,32	—0,40	0,0162	0,0036	—0,0076
225	0,64	0,28	—0,38	0,0166	0,0030	—0,0024
230	0,60	0,25	—0,36	0,0166	0,0018	0,0030
240	0,51	0,19	—0,30	0,0153	—0,0018	0,0136
250	0,42	0,14	—0,26	0 0119	—0,0066	0,0240
260	0,34	0,10	—0,21	0,0074	—0,0088	0,0303
270	0,25	0,07	—0,16	0,0016	—0,0087	0,0342
280	0,18	0,04	—0,12	—0,0043	—0,0084	0,0363
290	0,12	0,02	—0,09	—0,0101	—0,0071	0,0307
300	0,084	0,01	—0,06	—0,0149	—0,0051	0,0229
310	0,052	0,008	—0,03	—0,0180	—0,0022	0,0117
315	0,040	0,008	—0,02	—0,0187	—0,0005	0,0051
320	0,030	0,008	0,01	—0,0190	0,0010	—0,0018
330	0,012	0,004	—0,008	—0,0175	0,0042	—0,0162
340	0,006	0,000	0,000	—0,0134	0,0080	—0,0293
350	0,000	0,000	0,000	—0,0076	0,0086	—0,0391
360	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0095	—0,0429

Таблица 6

α°	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
0	1,000	0,000	0,000	0,0000	—0,0329	0,0429
10	0,917	0,005	0,058	—0,0470	—0,0315	0,0391
20	0,838	0,020	0,110	—0,0566	—0,0225	0,0293
30	0,756	0,040	0,160	—0,0608	—0,0115	0,0162
40	0,680	0,080	0,200	—0,0610	0,000	0,0018
45	0,650	0,090	0,230	—0,0605	0,0040	—0,0051
50	0,616	0,120	0,240	—0,0570	0,0080	—0,0117
60	0,554	0,160	0,270	—0,0430	0,0165	—0,0229
70	0,506	0,210	0,300	—0,0250	0,0215	—0,0307
80	0,465	0,260	0,310	—0,0080	0,0245	—0,0363
90	0,431	0,320	0,420	0,0106	0,0255	—0,0342
100	0,410	0,360	0,310	0,0290	0,0235	—0,0303
110	0,395	0,420	0,300	0,0408	0,0175	—0,0240
120	0,380	0,470	0,270	0,0422	0,0095	—0,0136
130	0,393	0,520	0,240	0,0415	0,0025	—0,0030
135	0,400	0,540	0,230	0,0410	—0,0020	0,0024
140	0,404	0,570	0,200	0,0399	—0,0065	0,0076
150	0,428	0,590	0,160	0,0370	—0,0130	0,0171
160	0,446	0,620	0,110	0,0315	—0,0190	0,0250
170	0,470	0,630	0,058	0,0214	—0,0225	0,0300
180	0,500	0,640	0,000	0,000	—0,0257	0,0314
190	0,528	0,630	—0,058	—0,0214	—0,0225	0,0300
200	0,554	0,620	—0,110	—0,0315	—0,0190	0,0250
210	0,576	0,590	—0,160	—0,0370	—0,0130	0,0171
220	0,594	0,560	—0,200	—0,0394	—0,0065	0,0076
225	0,601	0,540	—0,230	—0,0410	0,0020	0,0024
230	0,606	0,520	—0,240	—0,0415	0,0065	—0,0030
240	0,609	0,480	—0,270	—0,0422	0,0095	—0,0136
250	0,605	0,430	—0,300	—0,0408	0,0175	—0,0240
260	0,592	0,370	—0,310	—0,0290	0,0235	—0,0303
270	0,568	0,320	—0,320	—0,0106	0,0255	—0,0342
280	0,536	0,260	—0,310	0,0080	0,0245	—0,0363
290	0,494	0,210	—0,300	0,0250	0,0215	—0,0307
300	0,442	0,160	—0,270	0,0430	0,0165	—0,0229
310	0,383	0,110	—0,240	0,0570	0,0080	—0,0117
315	0,350	0,090	—0,230	0,0605	0,0040	—0,0051
320	0,316	0,080	—0,200	0,0610	0,000	0,0018
330	0,242	0,040	—0,160	0,0608	—0,0115	0,0162
340	0,163	0,020	—0,110	0,0566	—0,0220	0,0293
350	0,082	0,006	—0,058	0,0470	—0,0315	0,0391
360	0,000	0,000	0,000	0,0000	—0,0329	0,0429

§ 5. Влияние осевых усилий на изгиб кольца

При выводе выражений (49)—(66) не учитывалось влияние изменения формы кольца на характер его изгиба; в действительности же при деформации кольца, сопровождающейся заметным изменением его первоначальной круговой формы, осевые усилия S_α будут производить дополнительный изгиб кольца. Как и в случае изгиба балок, влияние осевых усилий на изгиб кольца будет тем большим, чем ближе величина этих усилий к той их величине, при которой кольцо теряет устойчивость. Осевые усилия S_α при изгибе кольца могут достигнуть бо́льших величин при действии на кольцо главным образом распределенных нагрузок, так как при таких нагрузках изгибающие усилия, определяющие прочность кольца, получаются сравнительно малыми.

Однако и при действии на кольцо даже одних лишь сосредоточенных усилий влияние осевых усилий может быть весьма существенным, и поэтому учет этого влияния следует считать обязательным во всех случаях.

Влияние осевых усилий на деформацию кольца следует учитывать следующим образом.

Перемещения кольца, вычисленные по приведенным выше выражениям (без учета влияния осевых усилий), следует помножить на коэффициент влияния осевых усилий, определяемый выражением

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{S_{ср}}{S_э}}, \tag{68}$$

где $S_э = -\frac{3EJ}{r^2}$ — осевое усилие, при котором теряется устойчивость кольца;

$S_{ср}$ — средняя величина действующего в кольце осевого усилия, которая определяется выражениями:

при действии единичной нагрузки P_α

$$S_{ср} = -\frac{P_\alpha}{2\pi}(1 - \cos\alpha); \tag{69}$$

при действии единичной нагрузки N_α

$$S_{ср} = +\frac{N_\alpha}{2\pi}\sin\alpha; \tag{70}$$

при действии единичной нагрузки $\mathfrak{M}_\alpha$:

$$S_{ср} = 0.$$

Для учета влияния осевых усилий на величину изгибающего момента следует изгибающий момент, вычисленный по выражениям (49), (55), (61), т. е. без учета осевых усилий, увеличить на величину

$$S_0 \mu \omega_0, \tag{71}$$

где S_0 — осевое усилие;

ω_0 — перемещение по направлению радиуса в рассматриваемом сечении кольца, вычисленное без учета осевых усилий.

Так как при учете влияния осевых усилий принцип наложения неприменим, необходимо это влияние учитывать не отдельно для каждой внешней нагрузки, а для суммы осевых усилий от всех нагрузок, действующих на кольцо.

§ 6. Примеры

1. Определить перемещения и усилия для сечения кольца A, подверженного действию двух сжимающих сил P, как показано на рис. 25.

Относя действующие на кольцо силы к точке A, получим для расчета:

силу P_α при $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

силу P_α при $\alpha = {}^3/_2\,\pi$.

Пользуясь табл. 4, найдем для сечения A:

изгибающий момент

$$M_0 = Pr\,(0{,}59 - 0{,}41) = 0{,}18Pr;$$

перерезывающую силу

$$T_0 = P\,(0{,}16 - 0{,}16) = 0;$$

осевую силу

$$S_0 = P\,(-0{,}750 + 0{,}250) = -0{,}5P;$$

перемещение ω

$$\omega_0 = \frac{Pr^3}{EJ}\,(-0{,}0342 - 0{,}0342) = -0{,}0684\,\frac{Pr^3}{EJ};$$

перемещение v

$$v_0 = \frac{Pr^3}{EJ}\,(0{,}0016 - 0{,}0016) = 0;$$

перемещение β

$$\beta_0 = \frac{Pr^2}{EJ}\,(-0{,}0126 + 0{,}0126) = 0.$$

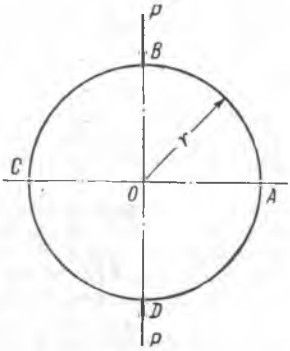


Рис. 25.

2. Определить перемещения и усилия в точке B для кольца, показанного на рис. 26.

Отнеся действующие на кольцо силы к точке B, получим для расчета:

силу P при $\alpha = 0$;

силу P при $\alpha = \pi$.

Пользуясь табл. 4, находим для точки B:

изгибающий момент

$$M_0 = Pr\,(0 - 0{,}319) = -0{,}319Pr;$$

перерезывающую силу

$$T_0 = P\,(1{,}000 - 0{,}50) = 0{,}5P;$$

осевую силу

$$S_0 = P\,(0 - 0) = 0;$$

перемещение ω

$$\omega_0 - \frac{Pr^3}{EJ}\,(0{,}0429 + 0{,}0314) = 0{,}0743\,\frac{Pr^3}{EJ}.$$

Перемещения v_0 и β_0 равны нулю.

3. Учесть влияние осевого усилия на перемещения и изгибающие моменты, найденные в предыдущих примерах.

Среднее значение осевого усилия по выражению (69)

$$S_{\text{ср}} = -\sum_{\alpha=0;\ \alpha=\pi} \frac{P_\alpha}{2\pi}\,(1 - \cos\alpha) = -\frac{P}{\pi}.$$

Коэффициент влияния осевого усилия по выражению (68)

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{Pr^2}{3EJ\pi}}.$$

Перемещения ω в точках A и B:

$$\omega_A = -0{,}0684\mu\,\frac{Pr^3}{EJ};$$

$$\omega_B = +0{,}0743\mu\,\frac{Pr^3}{EJ}.$$

Изгибающие моменты в точках A и B по выражению (71):

$$M_A = M_0 + S_A\omega_A = 0{,}18Pr + 0{,}5P\omega_A;$$

$$M_B = -0{,}319Pr - 0\cdot\omega_B = -0{,}319Pr.$$

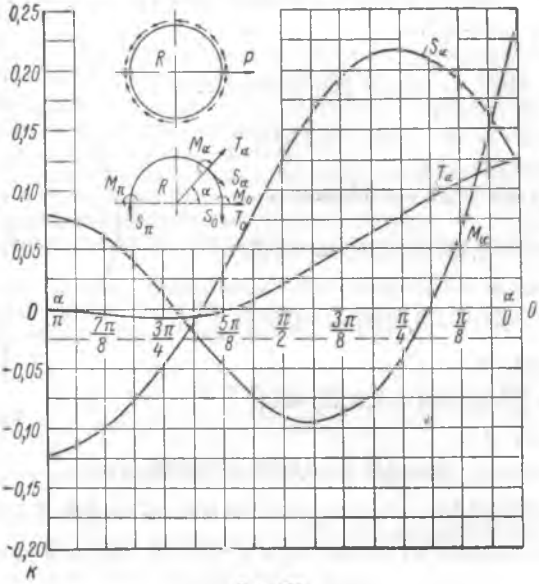


Рис. 26.

4. Кольцо под действием равномерно распределенного наружного давления p.

Вследствие полной симметричности нагрузки достаточно рассмотреть лишь одно любое сечение кольца. Для такого сечения кольца будем иметь:

изгибающий момент по выражению (49), принимая $P_\alpha = prd\alpha$ и интегрируя его в пределах от 0 до 2π,

$$M = \frac{pr^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(2\pi - \alpha)\sin\alpha - (1 - \cos\alpha)]\,d\alpha = 0;$$

срезывающее усилие по выражению (50)

$$T = \frac{pr}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sin\alpha + (2\pi - \alpha)\cos\alpha]\,d\alpha = 0;$$

осевое усилие по выражению (51)

$$S = -\frac{pr}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - \alpha)\sin\alpha\cdot d\alpha = -pr.$$

Перемещения от изгиба ω, v и β по выражениям (52), (53) и (54), полагая в них $P_\alpha = qr\cdot d\alpha$ и интегрируя от 0 до 2π, получают равными нулю.

Перемещение сечений кольца, вызванное действием осевых сжимающих усилий $S = -pr$, по формуле (67)

$$\omega = \frac{pr^2}{EF}$$

§ 7. Расчет местной прочности тонкостенных труб и барабанов

В практике кораблестроения встречаются конструкции в виде труб или барабанов цилиндрического или конического образования, подверженных действию усилий, приложенных по периметру сечения трубы или барабана и действующих в плоскости этого сечения (дымовые трубы и мачты при использовании их в качестве оснований для грузовых стрел; неподвижные основания для вращающихся частей поворотных установок, например поворотных кранов, башен под орудия и т. п.).

Отличительной особенностью таких конструкций является весьма большая общая прочность их по сравнению с местной прочностью в тех сечениях конструкции, в которых приложены внешние нагрузки. Это совершенно исключает возможность сколько-нибудь полно использовать общую прочность конструкции без дополнительного подкрепления ее сечений в местах приложения внешних нагрузок.

Расчет местной прочности конструкции сводится к расчету местного подкрепления ее в виде кольца, находящегося под действием заданной внешней нагрузки и реакций, распределенных по периметру кольца согласно закону распределения касательных напряжений при изгибе. При наличии такого кольца общая прочность тонкостенной трубы или барабана может быть рассчитана по обычным формулам изгиба.

Ниже приводятся формулы для расчета местной прочности тонкостенных труб и барабанов, т. е. прочности подкрепляющего кольца, для двух наиболее часто встречающихся на практике случаев действия внешних нагрузок: 1) сосредоточенная сила; 2) сила, передаваемая на кольцо через шары или катки.

1. Действие сосредоточенной силы (см. рис. 26).

Обозначения:

P — величина действующей на кольцо силы;
R — радиус кольца;
J — момент инерции сечения кольца;
M_α, T_α и S_α — изгибающий момент, срезывающая сила и осевая сила, действующие в сечении кольца, определяемом углом α.

Начало координат — в центре кольца; ось проходит через точку приложения силы P.

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned} M_\alpha &= kPR \\ T_\alpha &= k4P \\ S_\alpha &= kP \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Значения входящих в формулы (72) коэффициентов k приведены на диаграммах (рис. 26) в зависимости от величины угла α, определяющего рассматриваемое сечение кольца.

Перемещение кольца выразится в увеличении его диаметра по направлению силы P и уменьшении диаметра по направлению, перпендикулярному силе P на величину

$$\Delta D \approx \frac{2}{9\pi}\frac{PR^3}{EJ}. \qquad (73)$$

2. Нагрузка на кольцо передается через катки или шары (рис. 27); обозначения прежние.

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned} M_\alpha &= kPR \\ T_\alpha &= kP \\ S_\alpha &= k10P \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Значения входящих в формулы (74) коэффициентов k приведены на диаграммах (рис. 27) в зависимости от величины угла α, определяющего рассматриваемое сечение кольца.

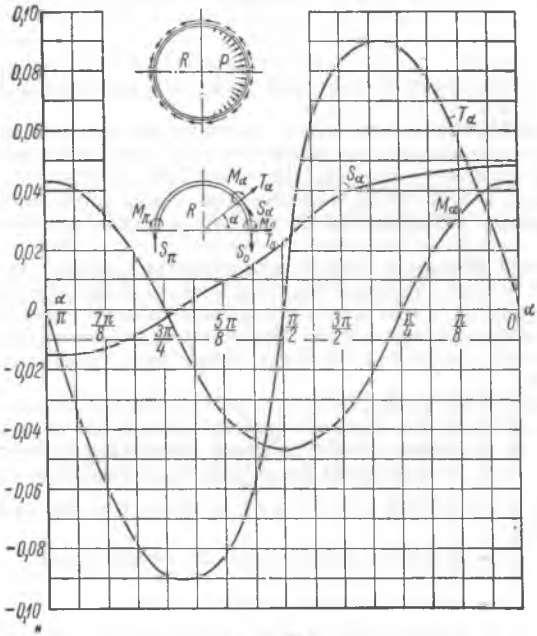


Рис. 27.

Нагрузка, передающаяся на кольца от шаров или катков и отнесенная к единице длины кольца, определяется по выражению

$$p_\alpha = \frac{2P}{\pi R} \cos \alpha. \tag{75}$$

Перемещение кольца выразится в увеличении его диаметра по направлению действия силы и уменьшении диаметра по перпендикулярному направлению на величину

$$\Delta D \approx \frac{8}{27\pi^2} \frac{PR^3}{EJ}. \tag{76}$$

§ 8. Изгиб и устойчивость эллиптического кольца

Обозначения (рис. 28):

a — большая полуось эллипса;
b — малая полуось эллипса;
$\gamma = a : b$ — отношение полуосей эллипса,
p — интенсивность равномерно распределенной нагрузки по периметру кольца;
J — момент инерции сечения кольца;
φ — угол, определяющий положение рассматриваемого сечения (отсчитывается от оси oy);
α — угол, составляемый касательной к эллипсу с осью oy ($\operatorname{tg} \alpha = \gamma^2 \operatorname{ctg} \varphi$);

$$\theta = \arccos\left(\frac{b}{a}\right); \quad \sin^2\theta = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right);$$

$$\rho_\varphi = \frac{b}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}}$$ — длина радиуса-вектора.

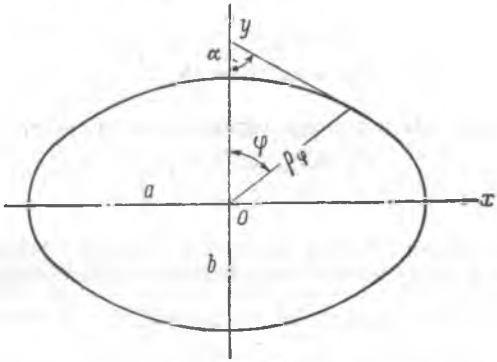


Рис. 28.

1. Усилия в сечениях кольца. Изгибающий момент в сечении, определяемом углом φ,

$$M_\varphi = k\frac{pb^2}{2}. \tag{77}$$

Численная величина коэффициента k находится по табл. 7 в зависимости от величин θ и φ.

Таблица 7

θ	0	5	10	15	20	25	30	35
k_1	0	0,0007	0,0024	0,0059	0,0114	0,0188	0,0294	0,0454
k_2	0	0,0007	0 0029	0,0067	0,0124	0 0215	0,0354	0,0558

Продолжение

θ	40	45	50	55	60	65	70
k_1	0,0668	0,0995	0,1483	0,226	0,360	0,616	1,201
k_2	0,0895	0.1436	0,267	0,411	0,758	1,53	3,50

Изгибающий момент на конце малой оси

$$M_b = \frac{pb^2}{8}\left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(3 + \frac{a}{b}\right). \tag{78}$$

Изгибающий момент на конце большой оси

$$M_a = -\frac{pa^2}{8}\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(3 + \frac{b}{a}\right) \tag{79}$$

Осевое усилие в сечении, определяемом углом φ,

$$\left.\begin{aligned} S_\varphi &= p\rho_\varphi \sin(\alpha + \varphi) \\ S_a &= pa;\ S_b = pb. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Перерезывающая сила в сечении, определяемом углом φ,

$$\left.\begin{aligned} T_\varphi &= p\rho_\varphi \cos(\alpha + \varphi) \\ T_a &= 0;\quad T_b = 0. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

2. Перемещения сечений кольца. Перемещения сечений, совпадающих с осями эллипса, определяются выражениями:

$$\Delta a = k_1 \frac{pb^4}{EJ},\quad \Delta b = k_2 \frac{pb^4}{EJ} \tag{82}$$

Численные значения коэффициентов k_1 и k_2 приведены в табл. 7 в зависимости от значений величины θ.

3. Устойчивость эллиптического кольца. Величина внешней равномерно распределенной нагрузки, отвечающая потере устойчивости эллиптического кольца, может быть вычислена по приближенному выражению

$$p_э = \frac{3EJ}{k_4^3 b^3} \tag{83}$$

Значения входящего в выражение (83) численного коэффициента k_4 приведены в табл. 8 для разных значений отношения полуосей эллипса γ.

Таблица 8

γ	k_4	γ	k_4
1,002	1,0010	1,200	1,1023
1,004	1,0020	1,300	1,1552
1,006	1,0030	1,400	1,2084
1,008	1,0040	1,500	1,2625
1,010	1,0050	1,600	1,3173
1,015	1,0075	1,700	1,3728
1,020	1,0100	1,800	1,4288
1,030	1,0151	1,900	1,4851
1,050	1,0252	2,000	1,5416
1,100	1,0506		

4. Влияние осевых усилий на изгиб кольца. Выражения, приведенные в пп. 1 и 2, а также на стр. 432, для усилий и перемещений эллиптического кольца, находящегося под действием равномерной нагрузки, не учитывают влияния на изгиб кольца изменения его формы, происходящего под действием внешней нагрузки. Между тем для эллиптического кольца, не очень сильно отличающегося от круговой формы, это влияние имеет преобладающее значение, сильно увеличиваясь по мере приближения величины действующей нагрузки к эйлеровой нагрузке кольца.

Для учета этого влияния необходимо усилия M_a и M_b и перемещения Δa и Δb, вычисленные по формулам, приведенным в пп. 1 и 2, помножить на коэффициент, определяемый выражением

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{p}{p_э}}, \tag{84}$$

где p — заданная величина действующей нагрузки;
$p_э$ — величина нагрузки, отвечающей потере устойчивости кольца, определяемая по выражению (83).

Примечание. Имея в виду, что в данном случае отсутствует пропорциональность между нагрузкой и вызываемыми ею усилиями и перемещениями, при производстве расчета прочности кольца следует коэффициент безопасности вводить в действующую нагрузку, т. е. за расчетную нагрузку принимать действующую нагрузку, увеличенную в соответствии с принятым коэффициентом безопасности.

Пример. Найти усилия, возникающие в сечениях эллиптического кольца, и перемещения его сечений при следующих заданиях.

Длина большой оси $2a = 400$ *см*, длина малой оси $2b = 350$ *см*; момент инерции сечения кольца $J = 8000$ *см*^{4}, $E = 2 \cdot 10^6$ *атм*, нагрузка $p = 800$ *кг/см*

$$\sin^2\theta = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 1 - 0{,}765 = 0{,}235; \quad \sin\theta = 0{,}485; \quad \theta = 29°.$$

Эйлерова нагрузка кольца по выражению (83) и табл. 9

$$p_э = \frac{3EJ}{k_4^3 b^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 8000}{1{,}07^3 \cdot 175^3} = 7300 \text{ кг/см}.$$

Коэффициент μ по выражению (84)

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{p}{p_э}} = \frac{1}{1 - \frac{800}{7300}} = 1{,}12.$$

Изгибающие моменты и перемещения на концах большой и малой осей без учета влияния изменения формы кольца определяют:

изгибающий момент на концах большой оси по выражению (77), полагая $\varphi = 90°$ и пользуясь табл. 9

$$M_a = k\frac{pb^2}{2} = -0{,}161\,\frac{800 \cdot 175^2}{2} = 19{,}7 \cdot 10^5 \text{ кг/см};$$

изгибающий момент на концах малой оси по тому же выражению, полагая $\varphi = 0°$,

$$M_b = k\frac{pb^2}{2} = 0{,}149\,\frac{800 \cdot 175^2}{2} = 18{,}3 \cdot 10^5 \text{ кг/см};$$

перемещения концов большой оси по выражению (82) и табл. 7

$$\Delta a = k_1\frac{pb^4}{EJ} = 0{,}0273\,\frac{800 \cdot 175^4}{2 \cdot 10^6 \cdot 8000} = 1{,}28 \text{ см};$$

перемещения концов малой оси по тому же выражению

$$\Delta b = k_2\frac{pb^4}{EJ} = 0{,}0326\,\frac{800 \cdot 175^4}{2 \cdot 10^6 \cdot 8000} = 1{,}56 \text{ см}.$$

Для учета влияния изменения формы кольца нужно полученные величины для изгибающих моментов и перемещений помножить на коэффициент $\mu = 1{,}12$.

5. Влияние местного усиления сечения эллиптического кольца на величину изгибающего момента в месте усиления (рис. 29). Изгибающие моменты в эллиптическом кольце получаются наибольшими на концах большой оси, поэтому иногда представляется целесооб-

Таблица 9

θ \ φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,0037	0,0037	0,0028	0,0018	0,0006	—0,0008	—0,0020	—0,0030	—0,0037	—0,0039
10	0,015	0,0141	0,0115	0,0075	0,0025	—0,0030	—0,0081	—0,0123	—0,0150	—0,0160
15	0,035	0,0330	0,0272	0,0180	0,0066	—0,0059	—0,0179	—0,0279	—0,0345	—0,0368
20	0,065	0,0615	0,0511	0,0349	0,0143	—0,0087	—0,0312	—0,0502	—0,0630	—0,0675
25	0,105	0,1001	0,0841	0,0589	0,0259	—0,0115	—0,0493	—0,0807	—0,1040	—0,1120
30	0,160	0,1520	0,1300	0,0922	0 0448	—0,0119	—0,0708	—0,1230	—0,1600	—0,1730
35	0,234	0,2240	0,1940	0,1420	0,0760	—0,0053	—0,0936	—0,1750	—0,2340	—0,2560
40	0,329	0,3160	0,2780	0,2140	0,1280	0,0089	—0,1200	—0,2450	—0,3390	—0,3750
45	0,460	0,4450	0,3980	0,3170	0,2000	0,0448	—0,1400	—0,3300	—0,4810	—0,5400
50	0,639	0,6210	0,5650	0,4670	0,3190	0,1140	—0,1470	—0,4360	—0,6810	—0,7810
55	0,895	0,8740	0,8100	0,6930	0,5110	0,2450	—0,1180	—0,5950	—0,9680	—1,1450
60	1,282	1,2590	1,1860	1,0520	0,8300	0,4960	—0,0037	—0,6790	—1,3800	—1,7180

разным эти сечения кольца соответственно усилить. При этом необходимо, однако, иметь в виду, что усиление этих сечений в свою очередь вызывает в них некоторое увеличение изгибающего момента по сравнению с вычисленным для случая призматического кольца. Указанное увеличение изгибающего момента может быть при-

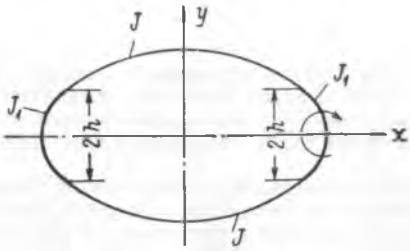


Рис. 29.

ближенно учтено помножением величины момента, полученного для призматического кольца по формулам, приведенным в п. 4, на коэффициент, больший единицы, определяемый согласно выражению

$$\mu_1 = \frac{(\varkappa - 1)\,A + A_1}{(\varkappa - 1)\,B + B_1}\,. \tag{85}$$

Здесь

$$A = \left(1 - \frac{e^2}{8}\right)(2\psi - \sin 2\psi) - \frac{e^2}{2}\cos\psi\sin^3\psi;$$

$$A_1 = \left(1 - \frac{e^2}{8}\right);$$

$$B = 2\psi - \frac{e^2}{4}(2\psi + \sin 2\psi);$$

$$B_1 = \pi\left(1 - \frac{e^2}{4}\right);$$

$$\varkappa = J \quad J_1,$$

где

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

$\psi = \arcsin\frac{h}{b}$ (h — полувысота усиленной части кольца);

J_1 — момент инерции усиленной части сечения.

Остальные обозначения прежние.

РАЗДЕЛ VIII

ИЗГИБ БАЛОК НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Если балка лежит на упругом основании и вязана с ним, изгиб ее будет сопровождаться появлением реакций основания, возникающих благодаря этому изгибу и препятствующих ему. При этом предполагается, что интенсивность сил реакций основания по длине балки пропорциональна прогибу балки в данном сечении.

Обычно на практике рассматривается изгиб балок, лежащих на множестве бесконечно часто поставленных независимых упругих опор, реакция каждой из которых пропорциональна смещению данной опоры. В этом смысле термин «сплошное упругое основание» следует понимать условно.

ГЛАВА I

ПРИЗМАТИЧЕСКИЕ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОСТОЯННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Дифференциальное уравнение изгиба балки имеет следующий вид

$$(EJv'')'' = q(z) - k(z)\,v.$$

Если жесткость сечения балки и жесткость упругого основания по длине балки постоянны, то уравнение ее изогнутой оси принимает более простой вид

$$EJv^{\mathrm{IV}} = q(z) - kv, \tag{1}$$

где $q(z)$ — внешняя нагрузка балки, отнесенная на единицу длины;

k — коэффициент, характеризующий жесткость упругого основания величина реакции основания, приходящейся на погонную единицу длины балки, при прогибе, равном единице);

v — прогиб балки в точке, абсцисса которой равна z. Абсциссы считаются от одного из сечений балки, например, от средины или одного из концов балки.

Величина v, кроме уравнения (1) должна удовлетворять граничным условиям, зависящим от рода закрепления концов балки.

Эти условия на концах балки выражаются следующим образом:

1) для заделанного конца $v = 0$ и $v' = 0$;

2) для свободно опертого конца $v = 0$ и $v'' = 0$;

3) для свободного конца $v'' = 0$ и $v''' = 0$.

Если нагрузка на балку $q(z)$ представляет собой полином не выше третьей степени, то частное решение может быть записано в виде

$$v_{\text{ч. р}} = \frac{q(z)}{k}. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$v = \frac{q(z)}{k} + C_1 e^{\alpha z}\cos\alpha z + C_2 e^{\alpha z}\sin\alpha z + C_3 e^{-\alpha z}\cos\alpha z + C_4 e^{-\alpha z}\sin\alpha z, \tag{3}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{k}{4EJ}}$, C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий.

Общее решение уравнения (1) в виде (3) удобно при решении задачи об изгибе балки неограниченной длины, загруженной силами на ограниченном участке. В случае, когда могут быть использованы условия симметрии или антисимметрии удобнее представить общее решение уравнения (1) в форме

$$v = \frac{q(z)}{k} + B_1\,\mathrm{ch}\,\alpha z\cos\alpha z + B_2\,\mathrm{sh}\,\alpha z\sin\alpha z + B_3\,\mathrm{ch}\,\alpha z\sin\alpha z + B_4\,\mathrm{sh}\,\alpha z\cos\alpha z. \tag{4}$$

Таблица 1

Вспомогательные функции Н. П. Пузыревского $V_0(u) = \operatorname{ch} u \cos u$; $\sqrt{2}V_1(u) = \operatorname{ch} u \sin u + \operatorname{sh} u \cos u$; $V_2(u) = \operatorname{ch} u \sin u$; $\sqrt{2}V_3(u) = \operatorname{ch} u \sin u - \operatorname{sh} u \cos u$ для расчета балок на упругом основании

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
0	1	0	0	0
0,01	1,0000	0,0200	0,0001	0,00000
0,02	1,0000	0,0400	0,0004	0,00000
0,03	1,0000	0,0600	0,0009	0,00002
0,04	1,0000	0,0800	0,0016	0,00004
0,05	1,0000	0,1000	0,0025	0,00010
0,06	1,0000	0,1200	0,0036	0,0002
0,07	1,0000	0,1400	0,0049	0,0003
0,08	1,0000	0,1600	0,0064	0,0004
0,09	1,0000	0,1800	0,0081	0,0005
0,10	1,0000	0,2000	0,0100	0,0006
0,11	1,0000	0,2200	0,0121	0,0008
0,12	1,0000	0,2400	0,0144	0,0012
0,13	0,9999	0,2600	0,0169	0,0014
0,14	0,9999	0,2800	0,0196	0,0018
0,15	0,9999	0,3000	0,0225	0,0022
0,16	0,9999	0,3200	0,0256	0,0028
0,17	0,9999	0,3400	0,0289	0,0032
0,18	0,9998	0,3600	0,0324	0,0039
0,19	0,9998	0,3800	0,0361	0,0046
0,20	0,9997	0,4000	0,0400	0,0054
0,21	0,9997	0,4200	0,0441	0,0062
0,22	0,9996	0,4400	0,0484	0,0071
0,23	0,9995	0,4600	0,0529	0,0081
0,24	0,9995	0,4800	0,0576	0,0092
0,25	0,9993	0,5000	0,0625	0,0104
0,26	0,9992	0,5199	0,0676	0,0117
0,27	0,9991	0,5399	0,0729	0,0131
0,28	0,9990	0,5599	0,0784	0,0147
0,29	0,9988	0,5799	0,0841	0,0163
0,30	0,9987	0,5998	0,0900	0,0180
0,31	0,9985	0,6198	0,0961	0,0198
0,32	0,9983	0,6398	0,1024	0,0218
0,33	0,9980	0,6597	0,1089	0,0239
0,34	0,9978	0,6797	0,1156	0,0263
0,35	0,9975	0,6996	0,1225	0,0286
0,36	0,9972	0,7196	0,1296	0,0310
0,37	0,9969	0,7396	0,1369	0,0338
0,38	0,9965	0,7594	0,1444	0,0366
0,39	0,9961	0,7794	0,1521	0,0396
0,40	0,9957	0,7993	0,1600	0,0427
0,41	0,9953	0,8192	0,1680	0,0460
0,42	0,9948	0,8392	0,1763	0,0494
0,43	0,9943	0,8590	0,1848	0,0530
0,44	0,9938	0,8789	0,1935	0,0567
0,45	0,9932	0,8988	0,2024	0,0608
0,46	0,9925	0,9187	0,2115	0,0649

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
0,47	0,9919	0,9384	0,2208	0,0692
0,48	0,9911	0,9582	0,2303	0,0736
0,49	0,9904	0,9781	0,2399	0,0785
0,50	0,9895	0,9979	0,2498	0,0833
0,51	0,9887	1,0177	0,2599	0,0885
0,52	0,9878	1,0375	0,2702	0,0937
0,53	0,9869	1,0572	0,2807	0,0992
0,54	0,9858	1,0769	0,2913	0,1049
0,55	0,9847	1,0967	0,3022	0,1109
0,56	0,9836	1,1164	0,3133	0,1170
0,57	0,9824	1,1360	0,3245	0,1234
0,58	0,9811	1,1556	0,3360	0,1300
0,59	0,9798	1,1752	0,3476	0,1368
0,60	0,9784	1,1949	0,3595	0,1439
0,61	0,9769	1,2144	0,3715	0,1512
0,62	0,9754	1,2339	0,3838	0,1587
0,63	0,9738	1,2534	0,3962	0,1666
0,64	0,9721	1,2728	0,4088	0,1746
0,65	0,9703	1,2923	0,4217	0,1829
0,66	0,9684	1,3117	0,4347	0,1915
0,67	0,9664	1,3310	0,4479	0,2004
0,68	0,9644	1,3503	0,4613	0,2095
0,69	0,9623	1,3696	0,4749	0,2188
0,70	0,9600	1,3888	0,4887	0,2284
0,71	0,9577	1,4079	0,5027	0,2383
0,72	0,9552	1,4271	0,5168	0,2485
0,73	0,9527	1,4462	0,5312	0,2590
0,74	0,9501	1,4652	0,5458	0,2698
0,75	0,9473	1,4842	0,5605	0,2808
0,76	0,9444	1,5031	0,5755	0,2921
0,77	0,9415	1,5220	0,5906	0,3038
0,78	0,9384	1,5408	0,6059	0,3158
0,79	0,9351	1,5595	0,6214	0,3281
0,80	0,9318	1,5782	0,6371	0,3406
0,81	0,9283	1,5968	0,6530	0,3536
0,82	0,9247	1,6154	0,6690	0,3668
0,83	0,9210	1,6337	0,6853	0,3803
0,84	0,9171	1,6522	0,7017	0,3942
0,85	0,9131	1,6704	0,7183	0,4084
0,86	0,9090	1,6887	0,7351	0,4229
0,87	0,9047	1,7068	0,7521	0,4378
0,88	0,9002	1,7248	0,7692	0,4530
0,89	0,8956	1,7428	0,7866	0,4686
0,90	0,8931	1,7607	0,8041	0,4845
0,91	0,8859	1,7785	0,8218	0,5007
0,92	0,8808	1,7961	0,8397	0,5173
0,93	0,8753	1,8137	0,8577	0,5843
0,94	0,8701	1,8311	0,8759	0,5517
0,95	0,8645	1,8484	0,8943	0,5694
0,96	0,8587	1,8657	0,9129	0,5875
0,97	0,8528	1,8829	0,9317	0,6059
0,98	0,8466	1,8998	0,9506	0,6248

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
0,99	0,8389	1,9071	0,9697	0,6343
1,00	0,8337	1,9335	0,9889	0,6635
1,01	0,8270	1,9500	1,0083	0,6834
1,02	0,8201	1,9665	1,0279	0,7039
1,03	0,8129	1,9828	1,0476	0,7246
1,04	0,8056	1,9990	1,0675	0,7458
1,05	0,7980	2,0151	1,0876	0,7673
1,06	0,7902	2,0309	1,1079	0,7893
1,07	0,7822	2,0466	1,1282	0,8116
1,08	0,7740	2,0622	1,1488	0,8344
1,09	0,7655	2,0776	1,1695	0,8576
1,10	0,7568	2,0929	1,1903	0,8811
1,11	0,7479	2,1079	1,2113	0,9051
1,12	0,7387	2,1226	1,2325	0,9294
1,13	0,7293	2,1374	1,2588	0,9544
1,14	0,7196	2,1519	1,2752	0,9797
1,15	0,7097	2,1662	1,2968	1,0054
1,16	0,6995	2,1803	1,3186	1,0317
1,17	0,6891	2,1942	1,3404	1,0582
1,18	0,6784	2,2079	1,3625	1,0853
1,19	0,6674	2,2213	1,3846	1,1127
1,20	0,6561	2,2346	1,4069	1,1406
1,21	0,6446	2,2476	1,4293	1,1690
1,22	0,6330	2,2612	1,4518	1,1986
1,23	0,6206	2,2729	1,4745	1,2271
1,24	0,6082	2,2852	1,4973	1,2568
1,25	0,5955	2,2971	1,5202	1,2870
1,26	0,5824	2,3090	1,5432	1,3176
1,27	0,5691	2,3204	1,5664	1,3488
1,28	0,5555	2,3318	1,5896	1,3802
1,29	0,5415	2,3427	1,6130	1,4123
1,30	0,5272	2,3534	1,6365	1,4448
1,31	0,5126	2,3638	1,6601	1,4778
1,32	0,4977	2,3740	1,6838	1,5112
1,33	0,4824	2,3837	1,7076	1,5451
1,34	0,4668	2,3932	1,7314	1,5794
1,35	0,4508	2,4024	1,7554	1,6144
1,36	0,4345	2,4113	1,7795	1,6497
1,37	0,4178	2,4197	1,8036	1,6855
1,38	0,4008	2,4279	1,8279	1,7219
1,39	0,3833	2,4358	1,8522	1,7586
1,40	0,3656	2,4433	1,8766	1,7959
1,41	0,3474	2,4504	1,9011	1,8338
1,42	0,3289	2,4572	1,9256	1,8720
1,43	0,3100	2,4635	1,9502	1,9107
1,44	0,2907	2,4667	1,9529	1,9529
1,45	0,2710	2,4751	1,9996	1,9897
1,46	0,2509	2,4804	2,0244	2,0300
1,47	0,2304	2,4852	2,0492	2,0706
1,48	0,2095	2,4896	2,0741	2,1120
1,49	0,1882	2,4935	2,0990	2,1536
1,50	0,1664	2,4971	2,1239	2,1959

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
1,51	0,1442	2,5002	2,1489	2,2386
1,52	0,1216	2,5029	2,1740	2,2819
1,53	0,0986	2,5052	2,1990	2,3256
1,54	0,0746	2,5068	2,2241	2,3698
1,55	0,0512	2,5081	2,2491	2,4145
1,56	0,0268	2,5089	2,2742	2,4597
1,57	0,0020	2,5092	2,2993	2,5056
1,58	—0,0233	2,5090	2,3244	2,5518
1,59	—0,0490	2,5083	2,3495	2,5985
1,60	—0,0753	2,5070	2,3745	2,6458
1,61	—0,1019	2,5052	2,3996	2,6934
1,62	—0,1291	2,5029	2,4247	2,7417
1,63	—0,1568	2,5001	2,4497	2,7905
1,64	—0,1849	2,4967	2,4747	2,8397
1,65	—0,2136	2,4927	2,4996	2,8895
1,66	—0,2427	2,4881	2,5245	2,9397
1,67	—0,2724	2,4830	2,5494	2,9904
1,68	—0,3026	2,4772	2,5742	3,0416
1,69	—0,3332	2,4708	2,5989	3,0934
1,70	—0,3644	2,4643	2,6236	3,1451
1,71	—0,3961	2,4563	2,6482	3,1983
1,72	—0,4284	2,4480	2,6727	3,2516
1,73	—0,4612	2,4391	2,6971	3,3053
1,74	—0,4945	2,4296	2,7215	3,3594
1,75	—0,5284	2,4193	2,7457	3,4141
1,76	—0,5628	2,4084	2,7699	3,4692
1,77	—0,5977	2,3968	2,7939	3,5248
1,78	—0,6333	2,3846	2,8178	3,5810
1,79	—0,6694	2,3714	2,8416	3,6376
1,80	—0,7060	2,3577	2,8652	3,6947
1,81	—0,7433	2,3432	2,8887	3,7522
1,82	—0,7811	2,3280	2,9121	3,8102
1,83	—0,8195	2,3120	2,9353	3,8686
1,84	—0,8584	2,2952	2,9583	3,9276
1,85	—0,8980	2,2777	2,9812	3,9871
1,86	—0,9382	2,2593	3,0039	4,0469
1,87	—0,9790	2,2401	3,0264	4,1071
1,88	—1,0203	2,2201	3,0487	4,1679
1,89	—1,0623	2,1993	3,0708	4,2291
1,90	—1,1049	2,1776	3,0927	4,2908
1,91	—1,1481	2,1551	3,1143	4,3529
1,92	—1,1920	2,1317	3,1358	4,4153
1,93	—1,2364	2,1075	3,1570	4,4783
1,94	—1,2815	2,0822	3,1779	4,5416
1,95	—1,3273	2,0562	3,1986	4,6054
1,96	—1,3736	2,0291	3,2190	4,6695
1,97	—1,4207	2,0013	3,2392	4,7341
1,98	—1,4683	1,9723	3,2591	4,7991
1,99	—1,5166	1,9425	3,2786	4,8645
2,00	—1,5656	1,9115	3,2979	4,9301
2,01	—1,6153	1,8798	3,3168	4,9964
2,02	—1,6656	1,8470	3,3355	5,0630

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
2,03	—1,7165	1,8132	3,3538	5,1298
2,04	—1,7682	1,7783	3,3718	5,1971
2,05	—1,8205	1,7425	3,3893	5,2647
2,06	—1,8734	1,7056	3,4066	5,3326
2,07	—1,9271	1,6675	3,4234	5,4009
2,08	—1,9815	1,6284	3,4399	5,4696
2,09	—2,0365	1,5878	3,4560	5,5380
2,10	—2,0923	1,5470	3,4717	5,6078
2,11	—2,1487	1,5046	3,4870	5,6774
2,12	—2,2058	1,4611	3,5018	5,7473
2,13	—2,2636	1,4163	3,5162	5,8175
2,14	—2,3221	1,3705	3,5301	5,8879
2,15	—2,3814	1,3235	3,5436	5,9587
2,16	—2,4413	1,2752	3,5566	6,0296
2,17	—2,5020	1,2258	3,5691	6,1010
2,18	—2,5633	1,1752	3,5811	6,1724
2,19	—2,6254	1,1232	3,5926	6,2442
2,20	—2,6882	1,0702	3,6036	6,3162
2,21	—2,7518	1,0157	3,6140	6,3883
2,22	—2,8160	0,9601	3,6239	6,4607
2,23	—2,8810	0,9031	3,6332	6,5333
2,24	—2,9466	0,8448	3,6419	6,6060
2,25	—3,0131	0,7852	3,6501	6,6790
2,26	—3,0802	0,7242	3,6576	6,7520
2,27	—3,1481	0,6620	3,6645	6,8252
2,28	—3,2167	0,5984	3,6709	6,8986
2,29	—3,2861	0,5333	3,6765	6,9721
2,30	—3,3562	0,4669	3,6815	7,0457
2,31	—3,4270	0,3991	3,6859	7,1193
2,32	—3,4986	0,3297	3,6895	7,1931
2,33	—3,5708	0,2591	3,6924	7,2669
2,34	—3,6439	0,1870	3,6946	7,3408
2,35	—3,7177	0,1134	3,6962	7,4146
2,36	—3,7922	0,0382	3,6969	7,4886
2,37	—3,8675	—0,0383	3,6970	7,5625
2,38	—3,9435	—0,1165	3,6961	7,6365
2,39	—4,0202	—0,1961	3,6946	7,7103
2,40	—4,0976	—0,2772	3,6922	7,7842
2,41	—4,1759	—0,3599	3,6891	7,8581
2,42	—4,2548	—0,4442	3,6850	7,9318
2,43	—4,3345	—0,5302	3,6802	8,0054
2,44	—4,4150	—0,6177	3,6745	8,0791
2,45	—4,4961	—0,7068	3,6678	8,1524
2,46	—4,5780	—0,7975	3,6603	8,2257
2,47	—4,6606	—0,8899	3,6518	8,2989
2,48	—4,7439	—0,9840	3,6425	8,3718
2,49	—4,8280	—1,0797	3,6321	8,4445
2,50	—4,9128	—1,1770	3,6209	8,5170
2,51	—4.9984	—1,2762	3,6086	8,5894
2,52	—5,0846	—1,3770	3,5953	8,6614
2,53	—5,1716	—1,4796	3,5811	8,7332
2,54	—5,2593	—1,5839	3,5658	8,8047

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
2,55	—5,3477	—1,6900	3,5494	8,8758
2,56	—5,4368	—1,7978	3,5320	8,9466
2,57	—5,5266	—1,9075	3,5134	9,0171
2,58	—5,6172	—2,0189	3,4938	9,0871
2,59	—5,7084	—2,1322	3,4730	9,1568
2,60	—5,8003	—2,2472	3,4511	9,2260
2,61	—5,8929	—2,3641	3,4281	9,2949
2,62	—5,9862	—2,4830	3,4038	9,3632
2,63	—6,0802	—2,6036	3,3784	9,4310
2,64	—6,1748	—2,7261	3,3518	9,4983
2,65	—6,2701	—2,8506	3,3239	9,5650
2,66	—6,3661	—2,9769	3,2947	9,6311
2,67	—6,4628	—3,1053	3,2644	9,6969
2,68	—6,5600	—3,2354	3,2326	9,7618
2,69	—6,6580	—3,3676	3,2654	9,8262
2,70	—6,7565	—3,5018	3,1653	9,8898
2,71	—6,8558	—3,6379	3,1296	9,9527
2,72	—6,9556	—3,7761	3,0925	10,015
2,73	—7,0560	—3,9161	3,0541	10,076
2,74	—7,1571	—4,0583	3,0142	10,137
2,75	—7,2588	—4,2024	2,9729	10,197
2,76	—7,3611	—4,3486	2,9301	10,256
2,77	—7,4639	—4,4968	2,8859	10,314
2,78	—7,5673	—4,6472	2,8402	10,371
2,79	—7,5714	—4,7996	2,7929	10,428
2,80	—7,7759	—4,9540	2,7442	10,483
2,81	—7,8810	—5,1106	2,6939	10,538
2,82	—7,9866	—5,2693	2,6420	10,591
2,83	—8,0929	—5,4301	2,5885	10,643
2,84	—8,1995	—5,5930	2,5334	10,694
2,85	—8,3067	—5,7580	2,4766	10,745
2,86	—8,4144	—5,9253	2,4182	10,793
2,87	—8,5225	—6,0946	2,3581	10,841
2,88	—8,6312	—6,2662	2,2963	10,888
2,89	—8,7404	—6,4399	2,2328	10,933
2,90	—8,8471	—6,6158	2,1675	10,977
2,91	—8,9598	—6,7938	2,1005	11,020
2,92	—9,0703	—6,9743	2,0316	11,061
2,93	—9,1811	—7,1567	1,9609	11,101
2,94	—9,2923	—7,3414	1,8885	11,140
2,95	—9,4039	—7,5284	1,8841	11,177
2,96	—9,5158	—7,7176	1,7379	11,212
2,97	—9,6281	—7,9090	1,6597	11,246
2,98	—9,7407	—8,1027	1,5797	11,279
2,99	—9,8536	—8,2986	1,4977	11,309
3,00	—9,9669	—8,4969	1,4137	11,338
3,01	—10,080	—8,6973	1,3277	11,366
3,02	—10,194	—8,9001	1,2397	11,391
3,03	—10,308	—9,1051	1,1497	11,415
3,04	—10,422	—9,3124	1,0577	11,437
3,05	—10,532	—9,5221	0,9634	11,458

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
3,06	—10,652	—9,7339	0,8672	11,476
3,07	—10,766	—9,9481	0,7688	11,492
3,08	—10,881	—10,165	0,6682	11,507
3,09	—10,997	—10,383	0,5655	11,519
3,10	—11,112	—10,604	0,4606	11,529
3,11	—11,227	—10,828	0,3534	11,537
3,12	—11,343	—11,054	0,2440	11,543
3,13	—11,458	—11,281	0,1323	11,547
3,14	—11,574	—11,512	0,0183	11,549
3,15	—11,689	—11,744	—0,0979	11,548
3,16	—11,804	—11,979	—0,2166	11,545
3,17	—11,920	—12,217	—0,3375	11,539
3,18	—12,035	—12,456	—0,4609	11,531
3,19	—12,151	—12,698	—0,5867	11,521
3,20	—12,266	—12,942	—0,7448	11,508
3,21	—12,381	—13,189	—0,8454	11,492
3,22	—12,496	—13,437	—0,9787	11,474
3,23	—12,610	—13,688	—1,1142	11,453
3,24	—12,737	—13,742	—1,2524	11,429
3,25	—12,839	—14,198	—1,3932	11,403
3,26	—12,953	—14,455	—1,5363	11,374
3,27	—13,066	—14,716	—1,6822	11,342
3,28	—13,179	—14,978	—1,8307	11,306
3,29	—13,292	—15,243	—1,9817	11,268
3,30	—13,405	—15,510	—2,1356	11,227
3,31	—13,517	—15,779	—2,2919	11,183
3,32	—13,628	—16,050	—2,4511	11,135
3,33	—13,739	—16,324	—2,6129	11,085
3,34	—13,850	—16,600	—2,7776	11,031
3,35	—13,960	—16,878	—2,9450	10,974
3,36	—14,069	—17,158	—3,1153	10,913
3,37	—14,178	—17,441	—3,2882	10,842
3,38	—14,287	—17,725	—3,4641	10,781
3,39	—14,394	—18,012	—3,6427	10,710
3,40	—14,501	—18,301	—3,8242	10,636
3,41	—14,607	—18,592	—4,0088	10,557
3,42	—14,712	—18,855	—4,1960	10,475
3,43	—14,816	—19,181	—4,3865	10,389
3,44	—14,920	—19,478	—4,5798	10,300
3,45	—15,022	—19,778	—4,7760	10,206
3,46	—15,124	—20,079	—4,9752	10,109
3,47	—15,224	—20,383	—5,1777	10,007
3,48	—15,324	—20,688	—5,3830	9,901
3,49	—15,422	—20,995	—5,5914	9,792
3,50	—15,520	—21,305	—5,8028	9,678
3,51	—15,616	—21,616	—6,0175	9,560
3,52	—15,711	—21,929	—6,2352	9,437
3,53	—15,855	—22,245	—6,4560	9,210
3,54	—15,897	—22,562	—6,6801	9,179
3,55	—15,988	—22,881	—6,9074	9,043
3,56	—16,078	—23,201	—7,1378	8,903
3,57	—16,166	—23,524	—7,3713	8,758

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
3,58	—16,253	—23,848	—7,6082	8,608
3,59	—16,338	—24,174	—7,8483	8,453
3,60	—16,422	—24,501	—8,0917	8,294
3,61	—16,504	—24,731	—8,3384	8,130
3,62	—16,585	—25,162	—8,5884	7,960
3,63	—16,663	—25,494	—8,8416	7,786
3,64	—16,740	—25,828	—9,0982	7,607
3,65	—16,815	—26,164	—9,3582	7,422
3,66	—16,889	—26,501	—9,6215	7,232
3,67	—16,960	—26,839	—9,8882	7,037
3,68	—17,030	—27,179	—10,158	6,837
3,69	—17,097	—27,349	—10,432	6,802
3,70	—17,162	—27,863	—10,709	6,419
3,71	—17,225	—28,207	—10,989	6,202
3,72	—17,286	—28,552	—11,273	5,980
3,73	—17,345	—28,798	—11,560	5,752
3,74	—17,402	—29,246	—11,851	5,517
3,75	—17,455	—29,594	—12,145	5,277
3,76	—17,507	—29,944	—12,443	5,032
3,77	—17,556	—30,294	—12,744	4,779
3,78	—17,602	—30,646	—13,049	4,522
3,79	—17,646	—30,999	—13,357	4,258
3,80	—17,687	—31,352	—13,669	3,987
3,81	—17,726	—31,706	—13,984	3,711
3,82	—17,762	—32,061	—14,303	3,428
3,83	—17,794	—32,417	—14,625	3,139
3,84	—17,824	—32,733	—14,951	2,843
3,85	—17,851	—33,130	—15,281	2,541
3,86	—17,875	—33,487	—15,614	2,232
3,87	—17,896	—33,845	—15,950	1,916
3,88	—17,913	—34,203	—16,290	1,594
3,89	—17,928	—34,561	—16,634	1,264
3,90	—17,939	—34,920	—16,982	0,928
3,91	—17,946	—35,279	—17,333	0,585
3,92	—17,950	—35,637	—17,687	0,235
3,93	—17,951	—35,997	—18,045	—0,112
3,94	—17,948	—36,356	—18,407	—0,487
3,95	—17,941	—36,714	—18,773	—0,859
3,96	—17,931	—37,073	—19,141	—1,238
3,97	—17,916	—37,432	—19,514	—1,624
3,98	—17,898	—37,790	—19,890	—2,018
3,99	—17,876	—38,148	—20,270	—2,420
4,00	—17,850	—38,505	—20,653	—2,829
4,01	—17,817	—38,861	—21,040	—3,246
4,02	—17,785	—39,217	—21,430	—3,670
4,03	—17,746	—39,573	—21,824	—4,103
4,04	—17,703	—39,927	—22,222	—4,544
4,05	—17,665	—40,281	—22,623	—4,992
4,06	—17,603	—40,634	—23,027	—5,449
4,07	—17,546	—40,985	—23,436	—5,913
4,08	—17,485	—41,335	—23,847	—6,386
4,09	—17,418	—41,684	—24,262	—6,867

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
4,10	—17,347	—42,032	—24,681	—7,357
4,11	—17,271	—42,378	—25,103	—7,854
4,12	—17,190	—42,723	—25,528	—8,361
4,13	—17,104	—43,066	—25,956	—8,876
4,14	—17,013	—43,407	—26,390	—9,399
4,15	—16,916	—43,746	—26,825	—9,931
4,16	—16,814	—44,083	—27,264	—10,472
4,17	—16,706	—44,419	—27,707	—11,022
4,18	—16,593	—44,752	—28,153	—11,581
4,19	—16,475	—45,082	—28,602	—12,148
4,20	—16,350	—45,411	—29,055	—12,725
4,21	—16,220	—45,736	—29,510	—13,310
4,22	—16,084	—46,060	—29,969	—13,905
4,23	—15,962	—46,380	—30,431	—14,509
4,24	—15,794	—46,697	—30,897	—15,122
4,25	—15,640	—47,012	—31,365	—15,745
4,26	—15,479	—47,323	—31,837	—16,377
4,27	—15,312	—47,631	—32,312	—17,018
4,28	—15,139	—47,935	—32,790	—17,669
4,29	—14,959	—48,236	—33,270	—18,330
4,30	—14,772	—48,534	—33,755	—19,000
4,31	—14,579	—48,827	—34,241	—19,680
4,32	—14,379	—49,117	—34,731	—20,370
4,33	—14,171	—49,402	—35,224	—21,062
4,34	—13,957	—49,683	—35,719	—21,779
4,35	—13,736	—49,960	—36,217	—22,498
4,36	—13,507	—50,233	—36,718	—23,227
4,37	—13,271	—50,500	—37,222	—23,966
4,38	—13,028	—50,764	—37,728	—24,717
4,39	—12,777	—51,021	—38,237	—25,476
4,40	—12,518	—51,274	—38,748	—26,246
4,41	—12,252	—51,522	—39,263	—27,026
4,42	—11,978	—51,765	—39,775	—27,816
4,43	—11,662	—52,001	—40,298	—28,617
4,44	—11,405	—52,232	—40,819	—29,428
4,45	—11,107	—52,415	—41,342	—30,207
4,46	—10,800	—52,677	—41,868	—31,082
4,47	—10,485	—52,889	—42,396	—31,925
4,48	—10,161	—53,096	—42,925	—32,778
4,49	—9,829	—53,296	—43,458	—33,642
4,50	—9,489	—53,489	—43,992	—34,516
4,51	—9,139	—53,675	—44,528	—35,401
4,52	—8,781	—53,854	—45,065	—36,398
4,53	—8,413	—54,026	—45,604	—37,204
4,54	—8,037	—54,191	—46,146	—38,121
4,55	—7,651	—54,348	—46,688	—39,049
4,56	—7,256	—54,497	—47,233	—39,989
4,57	—6,851	—54,638	—47,778	—40,939
4,58	—6,437	—54,771	—48,325	—41,900
4,59	—6,013	—54,895	—48,874	—42,872
4,60	—5,579	—55,011	—49,423	—43,855
4,61	—5,136	—55,118	—49,974	—44,849

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
4,62	—4,824	—55,217	—50,526	—45,854
4,63	—4,219	—55,306	—51,078	—46,870
4,64	—3,745	—55,386	—51,632	—47,897
4,65	—3,261	—55,455	—52,186	—48,935
4,66	—2,760	—55,516	—52,741	—49,987
4,67	—2,261	—55,566	—53,296	—51,045
4,68	—1,745	—55,606	—53,852	—52,117
4,69	—1,219	—55,636	—54,408	—53,199
4,70	—0,681	—55,660	—54,965	—54,298
4,71	—0,133	—55,663	—55,522	—55,398
4,72	0,427	—55,660	—56,078	—56,514
4,73	0,998	—55,646	—56,634	—57,641
4,74	1,580	—55,620	—57,191	—58,779
4,75	2,173	—55,583	—57,747	—59,928
4,76	2,778	—55,533	—58,303	—61,089
4,77	3,395	—55,471	—58,857	—62,261
4,78	4,024	—55,397	—59,412	—63,444
4,79	4,664	—55,311	—59,965	—64,637
4,80	5,316	—55,210	—60,518	—65,842
4,81	5,981	—55,097	—61,070	—67,058
4,82	6,657	—54,972	—61,620	—68,285
4,83	7,347	—54,831	—62,169	—69,522
4,84	8,048	—54,678	—62,717	—70,771
4,85	8,762	—54,509	—63,263	—72,032
4,86	9,489	—54,327	—63,807	—73,303
4,87	10,228	—54,130	—64,349	—74,584
4,88	10,981	—53,918	—64,889	—75,876
4,89	11,746	—53,690	—65,427	—77,179
4,90	12,524	—53,448	—65,963	—78,493
4,91	13,316	—53,189	—66,496	—79,818
4,92	14,120	—52,915	—67,027	—81,153
4,93	14,939	—52,624	—67,555	—82,499
4,94	15,770	—52,317	—68,079	—83,855
4,95	16,616	—51,993	—68,600	—85,221
4,96	17,475	—51,652	—69,119	—86,599
4,97	18,348	—51,294	—69,634	—87,986
4,98	19,235	—50,919	—70,145	—89,385
4,99	20,136	—50,525	—70,652	—90,792
5,00	21,050	—50,113	—71,155	—92,210
5,05	25,841	—47,772	—73,604	—99,449
5,10	31,000	—44,932	—75,924	—106,93
5,15	36,538	—41,559	—78,089	—114,63
5,20	42,466	—37,611	—80,070	—122,54
5,25	48,795	—33,052	—81,839	—130,64
5,30	55,532	—27,840	—83,365	—138,90
5,35	62,687	—21,932	—84,612	—147,30
5,40	70,264	—15,288	—85,545	—155,81
5,45	78,269	—7,866	—86,128	—164,40
5,50	86,704	0,380	—86,318	—173,02
5,55	95,572	9,491	—86,075	—181,65
5,60	104,87	19,509	—85,355	—190,22
5,65	114,59	30,478	—84,109	—198,70

Продолжение

u	$V_0(u)$	$\sqrt{2}V_1(u)$	$V_2(u)$	$\sqrt{2}V_3(u)$
5,70	124,74	42,440	—82,291	—207,02
5,75	135,29	55,438	—79,848	—215,14
5,80	146,24	69,513	—76,728	—222,97
5,85	157,60	84,701	—72,877	—230,46
5,90	169,28	101,04	—68,240	—237,52
5,95	181,33	118,57	—62,753	—244,08
6,00	193,68	137,32	—56,423	—250,04
6,05	206,32	157,31	—49,002	—255,32
6,10	219,20	178,59	—40,608	—259,81
6,15	232,28	201,11	—31,120	—263,35
6,20	245,52	225,05	—20,471	—265,99
6,25	258,86	250,27	—8,594	—267,46
6,30	272,25	276,82	4,577	—267,67
6,40	298,89	333,94	35,072	—263,79
6,50	324,79	396,33	71,542	—253,24
6,60	349,26	463,76	114,51	—234,75
6,70	371,42	535,87	164,45	—206,97
6,80	390,29	612,11	221,82	—168,48
6,90	404,71	694,70	286,99	—120,73
7,00	413,38	773,61	360,24	—53,14
7,10	414,83	856,57	441,74	—26,92
7,20	407,42	938,95	531,53	124,11
7,30	389,38	1018,8	629,45	240,08
7,40	358,73	1093,9	735,14	376,41
7,50	313,37	1161,3	847,97	534,60
7,60	251,03	1218,1	967,05	716,01
7,70	169,35	1260,5	1091,1	921,76
7,80	65,85	1284,4	1218,5	1152,7
7,90	—62,04	1285,2	1347,2	1409,2
8,00	—216,86	1257,8	1474,6	1691,5
8,10	—401,17	1196,5	1597,6	1998,8
8,20	—617,41	1095,2	1712,6	2330,0
8,30	—867,91	947,2	1815,1	2683,0
8,40	—1154,7	745,6	1900,2	3054,9
8,50	—1479,4	482,8	1962,2	3441,6
8,60	—1843,3	151,2	1994,5	3837,8
8,70	—2247,0	—257,2	1989,9	4236,9
8,80	—2690,5	—750,2	1940,3	4630,7
8,90	—3172,7	—1336,0	1836,7	5009,4
9,00	—3691,5	—2021,8	1669,7	5361,2
9,10	—4243,6	—2814,7	1428,8	5672,4
9,20	—4824,1	—3721,1	1103,0	5927,0
9,30	—5426,5	—4745,9	680,6	6107,1
9,40	—6042,3	—5892,5	149,8	6192,1
9,50	—6661,0	—7163,0	—502,0	6159,0
9,60	—7269,4	—8556,3	—1287,0	5982,4
9,70	—7851,7	—10068,9	—2217,2	5684,5
9,80	—8389,6	—11694,1	—3304,5	5085,1
9,90	—8860,9	—13420,4	—4559,5	4301,5
10,00	—9240,9	—15232,3	—5991,4	3249,5

При решении задачи об изгибе балки на сплошном упругом основании и нагруженной рядом сосредоточенных сил и изгибающих моментов удобно пользоваться общим решением уравнения (1) с использованием функций Н. П Пузыревского.

Общий интеграл уравнения (1) представляется в данном случае равенством

$$v = \frac{q(z)}{k} + D_0 V_0(\alpha z) + D_1 V_1(\alpha z) + D_2 V_2(\alpha z) + D_3 V_3(\alpha z), \tag{5}$$

где D_i — четыре постоянных интегрирования, а $V_0(\alpha z)$, $V_1(\alpha z)$, $V_2(\alpha z)$ и $V_3(\alpha z)$ — четыре частных интеграла уравнения (1), без правой части,

$$\left.\begin{aligned} V_0(\alpha z) &= \operatorname{ch} \alpha z \cos \alpha z \\ V_1(\alpha z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z + \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z] \\ V_2(\alpha z) &= \operatorname{sh} \alpha z \sin \alpha z \\ V_3(\alpha z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Функции (6) обладают свойством

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz} V_3(\alpha z) &= \sqrt{2} \cdot \alpha V_2(\alpha z) \\ \frac{d}{dz} V_2(\alpha z) &= \sqrt{2} \cdot \alpha V_1(\alpha z) \\ \frac{d}{dz} V_1(\alpha z) &= \sqrt{2} \cdot \alpha V_0(\alpha z) \\ \frac{d}{dz} V_0(\alpha z) &= -\sqrt{2} \cdot \alpha V_3(\alpha z) \\ \left.\begin{aligned} V_0'(\alpha z) &= V_0''(\alpha z) = V_0'''(\alpha z) = 0 \\ V_1(\alpha z) &= V_1''(\alpha z) = V_3'''(\alpha z) = 0 \\ V_2(\alpha z) &= V_2'(\alpha z) = V_2'''(\alpha z) = 0 \\ V_3(\alpha z) &= V_3'(\alpha z) = V_3''(\alpha z) = 0 \\ V_0(\alpha z) &= 1; \quad \frac{d^2 V_2(\alpha z)}{dz^2} = 2\alpha^2 \\ \frac{dV_1(\alpha z)}{dz} &= \sqrt{2}\,\alpha; \quad \frac{d^2 V_3(\alpha z)}{dz^2} = 2\sqrt{2}\,\alpha \end{aligned}\right\} & \text{при } z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ниже приводятся решения для наиболее часто встречающихся на практике случаев изгиба балок на упругом основании.

§ 1. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенной силой (рис. 1)

Уравнение упругой кривой:

$$v = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha z} (\cos \alpha z + \sin \alpha z). \tag{8}$$

В этом уравнении и последующих через z обозначена абсолютная величина отстояния точки приложения силы P до рассматриваемого сечения. Эпюры про-

гибов и изгибающих моментов будут симметричны относительно сечения $z = 0$, а эпюра перерезывающих сил — антисимметрична.

Уравнение изгибающих моментов

$$M = \frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha z} (-\cos \alpha z + \sin \alpha z). \tag{9}$$

Уравнение срезывающих сил

$$N = \pm \frac{P}{2} e^{-\alpha z} \cos \alpha z. \tag{10}$$

Рис. 1.

Стрелка прогиба под силой

$$v_{\max} = \frac{P\alpha}{2k}. \tag{11}$$

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{-P}{4\alpha}. \tag{12}$$

§ 2. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенным моментом (рис. 2)

Уравнение упругой кривой

$$v = \mp \frac{\mathfrak{M}\alpha^2}{k} e^{-\alpha z} \sin \alpha z. \tag{13}$$

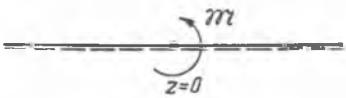


Рис. 2.

Уравнение изгибающих моментов

$$M = \pm \frac{\mathfrak{M}}{2} e^{-\alpha z} \cos \alpha z \tag{14}$$

Уравнение срезывающих сил

$$N = \mp \frac{\mathfrak{M}\alpha}{2} e^{-\alpha z} (\cos \alpha z + \sin \alpha z). \tag{15}$$

В каждое из выражений подставляется абсолютная величина z, а перед уравнением верхний знак берется для $z > 0$ и нижний знак — для $z < 0$.

При действии на балку неограниченной длины ряда сил и моментов элементы изгиба ее можно получить, пользуясь принципом наложения, на основании уравнений (8) — (15).

§ 3. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенной силой, приложенной на ее конце (рис. 3)

Уравнение упругой кривой

$$v = \frac{2P\alpha}{k} e^{-\alpha z} \cos \alpha z. \tag{16}$$

Уравнение изгибающих моментов

$$M = \frac{P}{\alpha} e^{-\alpha z} \sin \alpha z \tag{17}$$

Уравнение срезывающих сил

$$N = Pe^{-\alpha z} (\cos \alpha z - \sin \alpha z). \tag{18}$$

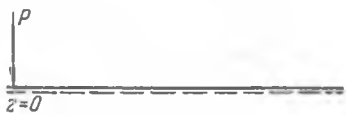


Рис. 3.

§ 4. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенным моментом, приложенным на ее конце (рис. 4)

Уравнение упругой кривой

$$v = \frac{2\mathfrak{M}\alpha^2 e^{-\alpha z}}{k} (\cos \alpha z - \sin \alpha z). \tag{19}$$

Уравнение изгибающих моментов

$$M = \mathfrak{M} e^{-\alpha z} (\cos \alpha z + \sin \alpha z). \tag{20}$$

Рис. 4.

Уравнение срезывающих сил

$$N = -2\mathfrak{M} \alpha e^{-\alpha z} \sin \alpha z. \tag{21}$$

§ 5. Балка со свободно опертыми концами на упругих опорах под действием равномерной нагрузки (рис. 5)

Уравнение упругой кривой

$$v = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{V_0(u) V_0(\alpha z) + V_2(u) V_2(\alpha z)}{V_0^2(u) + V_2^2(u)} \frac{1}{1+R} \right]. \tag{22}$$

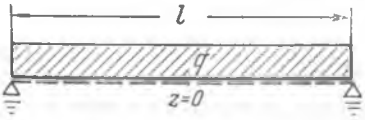


Рис. 5.

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_0 = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{\varphi_0(u)}{1+R} \right]. \tag{23}$$

Стрелка прогиба на опорах:

$$v_1 = \frac{q}{k} \cdot \frac{R}{1+R}. \tag{24}$$

Угол поворота упругой кривой на опорах

$$v' = \pm \frac{ql^3}{24EJ} \cdot \frac{\psi_2(u)}{1+R}. \tag{25}$$

Наибольший изгибающий момент

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8} \frac{\chi_0(u)}{1+R}. \tag{26}$$

Наибольшая перерезывающая сила

$$N = \frac{ql}{2} \cdot \frac{\mu_0(u)}{1+R}. \tag{27}$$

Входящая в эти выражения величина R, зависящая от податливости опор балки, вычисляется по формуле

$$R = A \frac{kl}{2} \mu_0(u), \tag{28}$$

где A — коэффициент податливости опор, определяемый равенством

$$AEJv''' = v. \tag{29}$$

При абсолютно жестких опорах, т. е. при $A = 0$, величина $R = 0$.
Величина

$$u = \alpha \cdot \frac{l}{2} = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}.$$

Значения функций $\varphi_0(u)$, $\psi_2(u)$, $\chi_0(u)$ и $\mu_0(u)$ протабулированы и приведены в табл. 2 для ряда значений аргумента u.

§ 6. Балка с жестко заделанными концами на упругих опорах под действием равномерной нагрузки (рис. 6)

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_0 = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{\varphi_1(u)}{1+R_1} \right] \tag{30}$$

Таблица 2

Вспомогательные функции, входящие

а) в решение для равномерно загруженной однопролетной балки и свободно опертой балки, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной в середине пролета, лежащих на сплошном упругом основании;

б) в расчетные зависимости для загруженной опорными моментами однопролетной балки, лежащей на сплошном упругом основании

u	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi_0(u)$	$\chi_1(u)$	$\chi_2(u)$	$\psi_0(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\mu_0(u)$	$\mu_1(u)$	$\vartheta_0(u)$	$\vartheta_1(u)$
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,003	1,000
0,2	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	1,005	0,998
0,3	0,993	0,999	0,995	0,999	0,999	0,997	0,994	0,995	0,996	1,000	1,011	0,990
0,4	0,979	0,996	0,983	0,996	0,997	0,990	0,980	0,983	0,987	0,999	1,036	0,968
0,5	0,950	0,990	0,959	0,991	0,993	0,976	0,953	0,961	0,968	0,995	1,085	0,926
0,6	0,901	0,979	0,919	0,982	0,985	0,951	0,906	0,923	0,936	0,988	1,171	0,852
0,7	0,827	0,961	0,895	0,967	0,973	0,916	0,838	0,866	0,882	0,978	1,289	0,744
0,8	0,731	0,935	0,781	0,946	0,956	0,868	0,747	0,791	0,828	0,967	1,468	0,604
0,9	0,619	0,899	0,689	0,917	0,931	0,812	0,641	0,702	0,755	0,948	1,672	0,442
1,0	0,448	0,852	0,591	0,878	0,899	0,752	0,529	0,609	0,678	0,920	1,898	0,274
1,1	0,380	0,795	0,494	0,830	0,859	0,692	0,420	0,517	0,602	0,889	2,132	0,114
1,2	0,272	0,728	0,405	0,774	0,813	0,636	0,321	0,431	0,531	0,856	2,364	—0,022
1,3	0,178	0,653	0,327	0,712	0,761	0,586	0,237	0,357	0,470	0,814	2,588	—0,130
1,4	0,100	0,573	0,262	0,645	0,705	0,542	0,167	0,294	0,417	0,769	2,803	—0,206
1,5	0,037	0,492	0,208	0,576	0,648	0,503	0,114	0,242	0,373	0,723	3,010	—0,254

Продолжение

u	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi_0(u)$	$\chi_1(u)$	$\chi_2(u)$	$\psi_0(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\mu_0(u)$	$\mu_1(u)$	$\vartheta_0(u)$	$\vartheta_1(u)$
1,6	—0,013	0,411	0,164	0,509	0,591	0,470	0,073	0,200	0,337	0,681	3,212	—0,276
1,7	—0,052	0,335	0,129	0,444	0,537	0,442	0,042	0,166	0,308	0,639	3,410	—0,278
1,8	—0,081	0,264	0,101	0,384	0,483	0,417	0,021	0,138	0,285	0,598	3,608	—0,264
1,9	—0,102	0,201	0,075	0,328	0,439	0,394	0,006	0,116	0,265	0,561	3,805	—0,238
2,0	—0,117	0,141	0,062	0,279	0,397	0,375	—0,003	0,099	0,249	0,527	4,002	—0,206
2,2	—0,133	0,054	0,037	0,197	0,325	0,341	—0,007	0,072	0,224	0,469	4,400	—0,136
2,4	—0,135	—0,009	0,021	0,136	0,269	0,313	—0,011	0,055	0,204	0,424	4,800	—0,072
2,6	—0,127	—0,051	0,011	0,092	0,226	0,289	—0,009	0,043	0,189	0,387	5,200	—0,024
2,8	—0,114	—0,074	0,005	0,060	0,193	0,268	—0,006	0,034	0,177	0,356	5,600	0,006
3,0	—0,098	—0,085	0,002	0,038	0,167	0,250	—0,003	0,028	0,166	0,333	6,000	0,020
3,2	—0,081	—0,087	0,000	0,023	0,146	0,234	—0,001	0,023	0,156	0,311	6,400	0,024
3,4	—0,064	—0,082	0,000	0,012	0,129	0,221	0,000	0,019	0,147	0,293	6,800	0,021
3,6	—0,049	—0,073	—0,002	0,006	0,115	0,208	0,000	0,016	0,139	0,278	7,200	0,015
3,8	—0,035	—0,063	—0,002	0,002	0,104	0,197	0,000	0,014	0,132	0,263	7,600	0,009
4,0	—0,024	—0,052	—0,002	—0,001	0,094	0,188	0,000	0,012	0,125	0,250	8,000	0,005
4,2	—0,015	—0,041	—0,002	—0,002	0,085	0,179	0,000	0,010	0,119	0,238	8,400	0,001
4,4	—0,008	—0,031	—0,001	—0,003	0,078	0,171	0,000	0,009	0,114	0,227	8,800	0,001
4,6	—0,002	—0,022	—0,001	—0,003	0,071	0,163	0,000	0,008	0,109	0,217	9,200	—0,001
4,8	0,001	—0,015	—0,001	—0,002	0,065	0,156	0,000	0,007	0,104	0,208	9,600	—0,001
5,0	0,004	—0,009	—0,001	—0,002	0,060	0,150	0,000	0,006	0,100	0,200	10,000	—0,001

Стрелка прогиба на опорах

$$v_1 = \frac{q}{k} \cdot \frac{R_1}{1 + R_1}. \tag{31}$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_0 = -\frac{ql^2}{24} \cdot \frac{\chi_1(u)}{1 + R_1}. \tag{32}$$

Изгибающий момент на опорах

$$M_1 = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{\chi_2(u)}{1 + R_1}. \tag{33}$$

Наибольшая перерезывающая сила

$$N_1 = \frac{ql}{2} \cdot \frac{\mu_1(u)}{1 + R_1}. \tag{34}$$

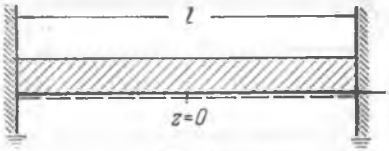


Рис. 6.

Входящая в эти выражения величина R_1, зависящая от коэффициента податливости опор балки, вычисляется по формуле

$$R_1 = \frac{Akl}{2} \mu_1(u), \tag{35}$$

где A — коэффициент податливости каждой из опор.

Значения функций $\varphi_1(u)$, $\chi_1(u)$, $\chi_2(u)$ и $\mu_1(u)$ приведены в табл. 2.

§ 7. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, нагруженная сосредоточенной силой, приложенной в середине ее пролета (рис. 7)

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_0 = \frac{Pl^3}{48EJ} \psi_2(u). \tag{36}$$

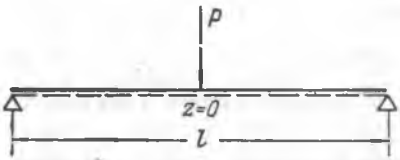


Рис. 7.

Угол поворота упругой кривой на опорах

$$v_1 = \mp \frac{Pl^2}{16EJ} \chi_0(u). \tag{37}$$

Изгибающий момент в середине пролета

$$M = \frac{Pl}{4} \mu_0(u). \tag{38}$$

Перерезывающая сила в опорных сечениях

$$N = \pm \frac{P}{2} \varphi_0(u). \tag{39}$$

§ 8. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, загруженная по закону треугольника (рис. 8)

Уравнение упругой кривой

$$v = \frac{q_0}{k} \left[\frac{z}{l} - \frac{V_1(2u) V_1(\alpha z) + V_2(2u) V_2(\alpha z)}{V_1^2(2u) + V_3^2(2u)} \right]. \tag{40}$$

Угол поворота упругой кривой у левой опоры

$$|v'|_{z=0} = \frac{7}{180} \cdot \frac{Ql^2}{EJ} \pi_0(u). \tag{41}$$

Угол поворота упругой кривой у правой опоры

$$|v'|_{z=l} = -\frac{8}{180}\cdot\frac{Ql^2}{EJ}\left[\frac{15}{8}\psi_2(u) - \frac{7}{8}\pi_0(u)\right]. \qquad (42)$$

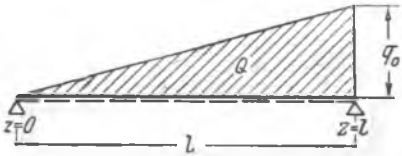


Рис. 8.

Перерезывающая сила на левой опоре

$$|N|_{z=0} = -\frac{Q}{3}\sigma_0(u). \qquad (43)$$

Перерезывающая сила на правой опоре

$$|N|_{z=l} = \frac{2}{3}Q\tau_0(u). \qquad (44)$$

Значения функций $\pi_0(u)$, $\sigma_0(u)$, $\tau_0(u)$ приведены в табл. 3 для ряда значений аргумента u.

§ 9. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, загруженная двумя равными силами, приложенными на расстоянии одной трети пролета от концов балки (рис. 9)

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_{z=0} = \frac{23}{648}\cdot\frac{Pl^3}{EJ}\zeta_0(u). \qquad (45)$$

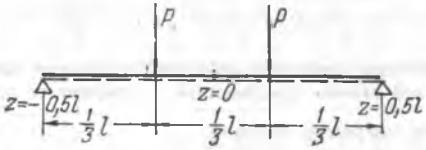


Рис. 9.

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_{z=0} = -\frac{Pl}{3}\varepsilon_0(u). \qquad (46)$$

Таблица частных значений $\zeta_0(u)$ и $\varepsilon_0(u)$ приводится в табл. 4 для ряда значений u.

§ 10. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, нагруженная изгибающими моментами на опорах (рис. 10)

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_0 = -\frac{l^2}{16EJ}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\chi_0(u). \qquad (47)$$

Угол поворота на левой опоре

$$v_1' = -\frac{\mathfrak{M}_1 l}{3EJ}\psi_0(u) - \frac{\mathfrak{M}_2 l}{6EJ}\psi_1(u). \qquad (48)$$

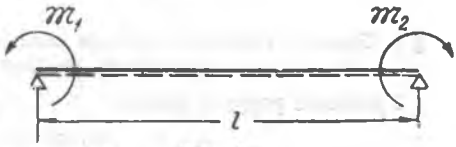


Рис. 10.

Угол поворота на правой опоре

$$v_2' = \frac{\mathfrak{M}_1 l}{6EJ}\psi_1(u) + \frac{\mathfrak{M}_2 l}{3EJ}\psi_0(u). \qquad (49)$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\varphi_0(u) \qquad (50)$$

Таблица 3

Вспомогательные функции для расчета балок, загруженных по закону треугольника и лежащих на упругом основании

u	$\pi_0(u)$	$\sigma_0(u)$	$\sigma_1(u)$	$\tau_0(u)$	$\tau_1(u)$	$\omega_0(u)$	$\omega_1(u)$
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000
0,3	0,994	0,994	1,000	0,997	0,999	0,999	0,999
0,4	0,982	0,980	0,999	0,991	0,997	0,997	0,997
0,5	0,957	0,953	0,998	0,976	0,994	0,993	0,993
0,6	0,918	0,906	0,995	0,951	0,989	0,985	0,988
0,7	0,855	0,838	0,986	0,915	0,978	0,965	0,978
0,8	0,774	0,747	0,951	0,868	0,967	0,941	0,966
0,9	0,680	0,641	0,911	0,812	0,954	0,911	0,944
1,0	0,583	0,529	0,874	0,753	0,939	0,876	0,914
1,1	0,485	0,420	0,824	0,693	0,918	0,827	0,880
1,2	0,396	0,321	0,766	0,636	0,896	0,769	0,841
1,3	0,317	0,237	0,706	0,587	0,862	0,709	0,796
1,4	0,252	0,167	0,634	0,542	0,828	0,640	0,748
1,5	0,198	0,114	0,571	0,503	0,790	0,577	0,695
1,6	0,157	0,073	0,501	0,469	0,759	0,510	0,646
1,7	0,123	0,042	0,438	0,441	0,727	0,445	0,599
1,8	0,097	0,021	0,383	0,417	0,694	0,378	0,557
1,9	0,076	0,006	0,330	0,395	0,662	0,328	0,509
2,0	0,060	—0,003	0,284	0,375	0,634	0,284	0,470
2,2	0,039	—0,007	0,211	0,340	0,581	0,209	0,402
2,4	0,026	—0,011	0,162	0,312	0,534	0,151	0,348
2,6	0,018	—0,009	0,130	0,288	0,497	0,116	0,300
2,8	0,013	—0,006	0,107	0,268	0,465	0,089	0,262
3,0	0,010	—0,003	0,092	0,250	0,437	0,070	0,231
3,2	0,008	—0,001	0,081	0,235	0,411	0,057	0,205
3,4	0,006	0,000	0,072	0,221	0,389	0,048	0,183
3,6	0,005	0,000	0,064	0,208	0,370	0,040	0,165
3,8	0,004	0,000	0,057	0,198	0,352	0,034	0,151
4,0	0,003	0,000	0,051	0,187	0,336	0,030	0,137
4,2	0,003	0,000	0,046	0,178	0,320	0,026	0,125
4,4	0,002	0,000	0,042	0,171	0,306	0,022	0,115
4,6	0,002	0,000	0,039	0,163	0,293	0,019	0,106
4,8	0,002	0,000	0,037	0,156	0,281	0,017	0,090
5,0	0,001	0,000	0,036	0,150	0,271	0,015	0,090

Таблица 4

Вспомогательные функции для расчета балок, загруженных сосредоточенными силами и лежащих на упругом основании

u	$\lambda_1(u)$	$\eta_1(u)$	$\varepsilon_0(u)$	$\zeta_0(u)$	$\varepsilon_1(u)$	$\zeta_1(u)$
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,998
0,3	0,999	0,999	0,996	0,994	0,996	0,996
0,4	0,995	0,997	0,980	0,980	0,993	0,993
0,5	0,992	0,991	0,955	0,956	0,988	0,988
0,6	0,980	0,983	0,912	0,918	0,979	0,978
0,7	0,966	0,969	0,855	0,864	0,965	0,967
0,8	0,945	0,949	0,776	0,787	0,941	0,944
0,9	0,911	0,921	0,683	0,699	0,910	0,915
1,0	0,874	0,889	0,587	0,603	0,870	0,879
1,1	0,822	0,849	0,483	0,510	0,818	0,836
1,2	0,763	0,800	0,393	0,421	0,751	0,785
1,3	0,699	0,742	0,316	0,349	0,675	0,725
1,4	0,630	0,680	0,250	0,280	0,600	0,664
1,5	0,557	0,618	0,190	0,224	0,525	0,600
1,6	0,482	0,554	0,144	0,180	0,450	0,540
1,7	0,420	0,500	0,109	0,150	0,380	0,478
1,8	0,355	0,445	0,080	0,125	0,311	0,417
1,9	0,299	0,395	0,058	0,104	0,248	0,364
2,0	0,248	0,348	0,039	0,085	0,192	0,317
2,2	0,165	0,272	0,012	0,059	0,104	0,239
2,4	0,103	0,214	—0,004	0,043	0,036	0,173
2,6	0,059	0,170	—0,016	0,033	—0,010	0,135
2,8	0,029	0,137	—0,025	0,024	—0,044	0,100
3,0	0,009	0,111	—0,030	0,017	—0,069	0,076
3,2	—0,003	0,092	—0,034	0,012	—0,088	0,058
3,4	—0,010	0,077	—0,036	0,009	—0,100	0,044
3,6	—0,012	0,064	—0,037	0,007	—0,106	0,033
3,8	—0,013	0,055	—0,037	0,005	—0,110	0,025
4,0	—0,013	0,048	—0,037	0,004	—0,110	0,020
4,2	—0,012	0,041	—0,036	0,003	—0,108	0,016
4,4	—0,011	0,035	—0,035	0,002	—0,105	0,013
4,6	—0,009	0,031	—0,034	0,002	—0,101	0,010
4,8	—0,007	0,027	—0,032	0,001	—0,097	0,009
5,0	—0,005	0,024	—0,030	0,001	—0,092	0,008

Перерезывающая сила на левой опоре

$$N_1 = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l}\vartheta_0(u) + \frac{\mathfrak{M}_2}{l}\vartheta_1(u). \tag{51}$$

Перерезывающая сила на правой опоре

$$N_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l}\vartheta_1(u) + \frac{\mathfrak{M}_2}{l}\vartheta_0(u). \tag{52}$$

Значения функций $\psi_1(u)$, $\psi_0(u)$, $\vartheta_1(u)$ и $\vartheta_0(u)$ приведены в табл. 2 для ряда значений аргумента u.

§ 11. Балка с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженная сосредоточенной силой, приложенной в середине ее пролета (рис. 11)

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_0 = \frac{Pl^3}{192EJ}\eta_1(u). \tag{53}$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_0 = -\frac{Pl}{8}\mu_1(u). \tag{54}$$

Изгибающий момент в опорных сечениях

$$M_1 = \frac{Pl}{8}\lambda_1(u). \tag{55}$$

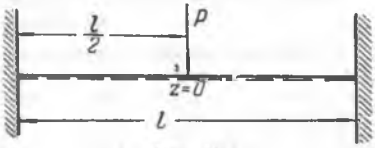


Рис. 11

Перерезывающая сила в опорных сечениях

$$N = \pm\frac{P}{2}\varphi_1(u). \tag{56}$$

Значения функций $\lambda_1(u)$ и $\eta_1(u)$ приведены в табл. 4 для ряда значений аргумента u.

§ 12. Балка с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженная по закону треугольника (рис. 12)

Уравнение упругой кривой

$$v = \frac{q_0}{k}\left[\frac{z}{l} - \frac{\sqrt{2}\cdot V_1(\alpha z)}{4u} + A_2V_2(\alpha z) + A_3V_3(\alpha z)\right], \tag{57}$$

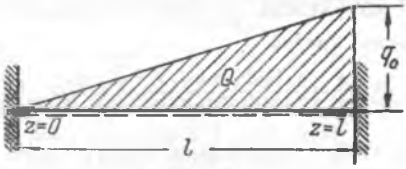


Рис. 12.

где

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}\cdot V_3(2u) - 4uV_2(2u) + \sqrt{2}V_1(2u)V_2(2u) - V_0(2u)\sqrt{2}V_3(2u)}{4u\left[V_2^2(2u) - V_1(2u)V_3(2u)\right]}; \tag{58}$$

$$A_3 = -\frac{V_2(2u) - 2u\sqrt{2}V_1(2u) - V_0(2u)V_2(2u) + V_1^2(2u)}{4u\left[V_2^2(2u) - V_1(2u)V_3(2u)\right]} \tag{59}$$

Изгибающий момент в левом опорном сечении

$$M_1 = \frac{QL}{15}\,\omega_0(u). \tag{60}$$

Изгибающий момент в правом опорном сечении

$$M_2 = \frac{QL}{10}\,\omega_1(u). \tag{61}$$

Перерезывающая сила на левой опоре

$$N_1 = -\frac{3}{10}\,Q\sigma_1(u). \tag{62}$$

Перерезывающая сила на правой опоре

$$N_2 = \frac{7}{10}\,Q\tau_1(u). \tag{63}$$

Значения функций $\omega_0(u)$, $\omega_1(u)$, $\sigma_1(u)$ и $\tau_1(u)$ приведены в табл. 3 для ряда значений аргумента u.

§ 13. Балка с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженная двумя равными силами, приложенными на расстоянии одной трети пролета от концов балки (рис. 13)

Стрелка прогиба посредине пролета:

$$v_{z=0} = \frac{5}{648}\cdot\frac{Pl}{EJ}\,\varepsilon_1(u). \tag{64}$$

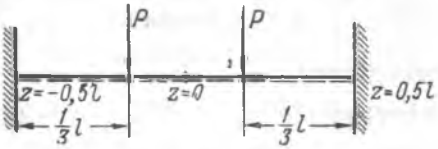


Рис. 13.

Изгибающий момент в середине пролета:

$$M_0 = -\frac{1}{9}\,Pl\varepsilon_1(u). \tag{65}$$

Изгибающий момент в опорных сечениях

$$M_1 = \frac{2}{9}\,Pl\varepsilon_2(u), \tag{66}$$

где

$$\varepsilon_2(u) = \frac{1}{72}\left[20u^2\zeta_1(u)\,V_0(u) - 9\varepsilon_1(u)\,V_2(u) + \frac{81}{u}\sqrt{2}\,V_3(0{,}667u)\right] \tag{67}$$

Частные значения $\zeta_1(u)$ и $\varepsilon_1(u)$ приводятся в табл. 4.

§ 14. Балка с одним жестко заделанным концом и другим свободно опертым, нагруженная по закону треугольника (рис. 14)

Уравнение упругой кривой

$$v = \frac{q_0}{k}\left[\frac{z}{l} + \frac{\left[4uV_2(2u) - \sqrt{2}\,V_3(2u)\right]V_1(\alpha z)}{4u\left[V_0(2u)\,V_3(2u) - V_1(2u)\,V_2(2u)\right]} - \right.$$
$$\left. - \frac{\left[4uV_0(2u) - \sqrt{2}\,V_1(2u)\right]V_3(\alpha z)}{4u\left[V_0(2u)\,V_3(2u) - V_1(2u)\,V_2(2u)\right]}\right]. \tag{68}$$

Угол поворота упругой кривой у левой опоры

$$v_{z=0} = \frac{Ql^2}{60EJ}\,\pi(u). \tag{69}$$

Изгибающий момент в правом опорном сечении

$$M_{z=l} = \frac{Ql}{7{,}5}\,\omega(u). \tag{70}$$

Перерезывающая сила на левой опоре

$$N_1 = -\frac{1}{5} Q\sigma_2(u). \qquad (71)$$

Перерезывающая сила на правой опоре

$$N_2 = \frac{4}{5} Q\tau_2(u). \qquad (72)$$

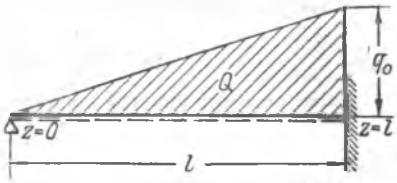


Рис. 14.

Значения функций $\pi(u)$, $\omega(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\tau_2(u)$ приведены в табличной форме для ряда значений аргумента u (табл. 5).

Таблица 5

Вспомогательные функции для расчета балок, загруженных по закону треугольника

u	$\omega(u)$	$\tau_2(u)$	$\sigma_2(u)$	$\pi(u)$	u	$\omega(u)$	$\tau_2(u)$	$\sigma_2(u)$	$\pi(u)$
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,8	0,417	0,598	0,108	0,214
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,9	0,384	0,572	0,071	0,175
0,2	1,000	1,000	1,000	0,999	2,0	0,355	0,549	0,054	0,142
0,3	0,998	0,999	0,999	0,998	2,2	0,296	0,500	0,015	0,094
0,4	0,993	0,997	0,994	0,992	2,4	0,259	0,467	—0,006	0,066
0,5	0,986	0,992	0,989	0,978	2,6	0,225	0,435	—0,012	0,045
0,6	0,974	0,982	0,957	0,965	2,8	0,194	0,412	—0,011	0,032
0,7	0,955	0,969	0,923	0,929	3,0	0,176	0,384	—0,008	0,023
0,8	0,927	0,950	0,872	0,883	3,2	0,158	0,364	—0,004	0,019
0,9	0,888	0,924	0,808	0,827	3,4	0,136	0,337	—0,002	0,014
1,0	0,841	0,892	0,729	0,767	3,6	0,125	0,323	—0,001	0,012
1,1	0,787	0,837	0,640	0,725	3,8	0,117	0,310	—0,001	0,009
1,2	0,725	0,815	0,546	0,615	4,0	0,106	0,297	0,000	0,008
1,3	0,668	0,778	0,452	0,528	4,2	0,095	0,281	0,000	0,007
1,4	0,610	0,737	0,362	0,462	4,4	0,088	0,271	0,000	0,006
1,5	0,558	0,698	0,284	0,376	4,6	0,080	0,259	0,000	0,005
1,6	0,504	0,661	0,214	0,317	4,8	0,077	0,253	0,000	0,004
1,7	0,478	0,628	0,155	0,265	5,0	0,067	0,237	0,000	0,002

§ 15. Балки с одинаково упруго заделанными концами под действием равномерной нагрузки[1]

Стрелка прогиба на опорах

$$v = \frac{q}{k}\left[\frac{(1-\varkappa)R}{1+R} + \frac{\varkappa R_1}{1+R_1}\right]. \qquad (73)$$

[1] Так как элементы изгиба балок линейно зависят от коэффициента заделки, момент и стрелка прогиба посредине пролета упруго заделанной балки при любой симметричной нагрузке определяются по формулам:

$$M_x = M_0(1-\varkappa) + M_1\varkappa;$$

$$v_x = v_0(1-\varkappa) + v_1\varkappa,$$

где M_x и v_x — момент и стрелка прогиба посредине пролета упруго заделанной балки,
M_0 — момент в середине пролета свободно опертой балки;
v_0 — стрелка прогиба в середине пролета свободно опертой балки;
M_1 — момент в середине пролета жестко заделанной балки для симметричной части нагрузки;
v_1 — стрелка прогиба в середине пролета жестко заделанной балки.

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_0 = \frac{q}{k}\left[1 - \frac{(1-\varkappa)\,\varphi_0(u)}{1+R} - \frac{\varkappa\varphi_1(u)}{1+R_1}\right]. \tag{74}$$

Угол поворота упругой кривой на опорах

$$v_1' = \mp(1-\varkappa)\frac{ql^3}{24EJ}\cdot\frac{\psi_2(u)}{1+R}. \tag{75}$$

Изгибающий момент посредине пролета:

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8}\left[\frac{(1-\varkappa)\,\chi_0(u)}{1+R} + \frac{\varkappa\chi_1(u)}{3(1+R_1)}\right]. \tag{76}$$

Изгибающий момент на опорах

$$M_1 = \frac{\varkappa ql^2}{12}\cdot\frac{\chi_2(u)}{1+R_1}. \tag{77}$$

Наибольшая перерезывающая сила

$$N_1 = \frac{ql}{2}\left[\frac{(1-\varkappa)\,\mu_0(u)}{1+R} + \frac{\varkappa\mu_1(u)}{1+R_1}\right]. \tag{78}$$

Входящий в эти выражения коэффициент заделки опорных концов балки может быть вычислен по формуле [1]

$$\varkappa = \frac{1}{1+\dfrac{2\mathfrak{A}EJ}{l}\cdot\dfrac{\chi_2(u)}{\psi_2(u)}\cdot\dfrac{1+R}{1+R_1}}, \tag{79}$$

где через $\mathfrak{A}$ обозначен коэффициент податливости заделки, т. е. коэффициен пропорциональности между величиной угла поворота и опорным моментом, его вызывающим,

$$\mathfrak{A}(M)_{z=l/2} = -v'_{z=l/2}. \tag{80}$$

Общий порядок расчета балки, лежащей на упругом основании и упруго заделанной на упругих симметричных опорах, следующий. По формуле $u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ находят аргумент u, а затем по таблице числовых значений вспомогательных функций находят соответствующие найденному значению u значения величин $\mu_0(u)$ и $\mu_1(u)$. После этого по выражениям (28) и (35) вычисляют величины R и R_1. Из таблиц находят значения функций $\chi_2(u)$ и $\psi_2(u)$. Подстановкой найденных величин в выражение (79) определяют коэффициент заделки $\varkappa$, а затем, пользуясь таблицей вспомогательных функций по выражениям (73)—(78), определяют все прочие величины, характеризующие изгиб балки.

§ 16. Балка с одинаково упруго заделанными концами, нагруженная сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 15)

Стрелка прогиба в середине пролета:

$$v_{z=0} = \frac{Pl^3}{48EJ}\left[(1-\varkappa)\,\psi_2(u) + \frac{1}{4}\varkappa\eta_1(u)\right]. \tag{81}$$

Угол поворота упругой кривой на опорах

$$v'_{z=\pm l/2} = \mp(1-\varkappa)\frac{Pl^2}{16EJ}\,\chi_0(u). \tag{82}$$

---

[1] Коэффициент заделки при симметричном изгибе не зависит от характера и величины распределения нагрузки и для всех случаев симметричной нагрузки может быть определен по формуле

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa = \frac{1}{1+\dfrac{2\mathfrak{A}EJ}{l}\,\dfrac{3}{\psi_1(u)+2\psi_0(u)}\,\dfrac{1+R}{1+R_1}}$$

Изгибающий момент в середине пролета:

$$M_{z=0} = -\frac{Pl}{4}\left[(1-\varkappa)\,\mu_0(u) + \frac{1}{2}\,\varkappa\mu_1(u)\right]. \tag{83}$$

Изгибающий момент в опорных сечениях

$$M_{z=0,5l} = \frac{Pl}{8}\,\varkappa\lambda_1(u), \tag{84}$$

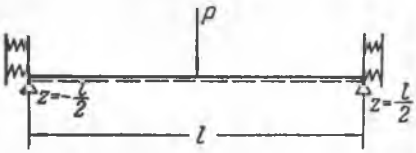


Рис. 15.

где $\varkappa$ — коэффициент опорной пары, связанный с коэффициентом податливости $\mathfrak{A}$ равенством

$$\varkappa = \frac{1}{1 + \dfrac{2\,\mathfrak{A}\,EJ\lambda_1(u)}{l\chi_0(u)}}. \tag{85}$$

§ 17. Общий случай изгиба балки со свободно опертыми концами на жестких опорах, нагруженной сосредоточенной силой в пролете (рис. 16)

Стрелка прогиба в середине пролета

$$v_{z=0} = \frac{Pl^3}{EJ}\,\overline{\psi}_0(u, \zeta). \tag{86}$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_{z=0} = Pl\overline{\psi}_1(u, \zeta). \tag{87}$$

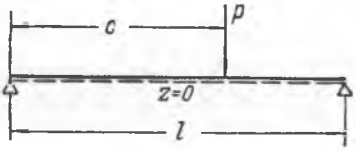


Рис. 16.

Срезывающая сила на левой опоре

$$N_{z=-0,5l} = P\overline{\psi}_2(u, \zeta). \tag{88}$$

Интенсивность реакции упругого основания на середине пролета

$$r_{z=0} = \frac{P}{l}\,\overline{\psi}_3(u, \zeta). \tag{89}$$

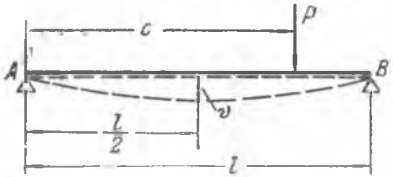
Угол поворота на опоре

$$v'_{(z=0,5l)} = \frac{Pl^2}{EJ}\,\overline{\psi}_4(u\ \zeta). \tag{90}$$

Значения функций $\overline{\psi}_0(u, \zeta)$, $\overline{\psi}_1(u, \zeta)$, $\overline{\psi}_2(u, \zeta)$, $\overline{\psi}_3(u, \zeta)$ и $\overline{\psi}_4(u, \zeta)$ даны в табл. 6—10.

Таблица 6

Значения коэффициентов $\bar{\psi}_0(u, \zeta)$ для вычисления стрелки прогиба посредине пролета



$$v_{z=0} = \frac{Pl^3}{EJ}\bar{\psi}_0(u, \zeta).$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;

$\zeta = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры),

$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

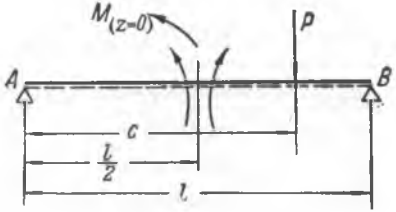
Значения $\bar{\psi}_0(u, \zeta)$

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,00656	0,01249	0,01660	0,0200	0,0234	0,0200	0,01660	0,01249	0,00656
0,2	0,00614	0,01172	0,01640	0,01940	0,0207	0,01982	0,01640	0,01172	0,00614
0,3	0,00606	0,01170	0,01630	0,01960	0,0206	0,01962	0,01630	0,01170	0,00606
0,4	0,00603	0,01161	0,01620	0,01940	0,0205	0,01940	0,01620	0,01161	0,00603
0,5	0,00590	0,01133	0,01580	0,01900	0,0201	0,01900	0,01580	0,01133	0,00590
0,6	0,00570	0,01097	0,01540	0,01830	0,01930	0,01830	0,01540	0,01097	0,00570
0,7	0,00526	0,01018	0,01476	0,01710	0,01800	0,01710	0,01476	0,01018	0,00526
0,8	0,00482	0,00950	0,01300	0,01550	0,01660	0,01550	0,01300	0,00950	0,00482
0,9	0,00427	0,00824	0,01153	0,01377	0,01470	0,01377	0,01153	0,00824	0,00427
1,0	0,00365	0,00705	0,00991	0,01190	0,01269	0,01190	0,00991	0,00705	0,00365
1,1	0,00305	0,00591	0,00835	0,01007	0,01080	0,01007	0,00835	0,00591	0,00305
1,2	0,00251	0,00489	0,00693	0,00830	0,00899	0,00830	0,00693	0,00489	0,00251
1,3	0,00203	0,00396	0,00568	0,00693	0,00744	0,00693	0,00568	0,00396	0,00203
1,4	0,001651	0,00319	0,00460	0,00545	0,00611	0,00545	0,00460	0,00319	0,001651

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,5	0,001296	0,00256	0,00374	0,00466	0,00505	0,00466	0,00374	0,00256	0,001296
1,6	0,001018	0,00206	0,00303	0,00393	0,00420	0,00393	0,00303	0,00206	0,001018
1,7	0,000821	0,001636	0,00245	0,00314	0,00344	0,000314	0,00245	0,001636	0,000821
1,8	0,000639	0,001312	0,00200	0,00260	0,00288	0,00260	0,00200	0,001312	0,000639
1,9	0,000507	0,001046	0,001630	0,00216	0,00242	0,00216	0,001630	0,001046	0,000507
2,0	0,000392	0,000820	0,001311	0,001787	0,00206	0,001787	0,001311	0,000820	0,000392
2,2	0,000243	0,000541	0,000919	0,001312	0,001517	0,001312	0,000919	0,000541	0,000243
2,4	0,0001429	0,000346	0,000636	0,000966	0,001149	0,000966	0,000636	0,000346	0,0001429
2,6	0,0000807	0,000220	0,000444	0,000730	0,000900	0,000730	0,000444	0,000220	0,0000807
2,8	0,0000417	0,0001368	0,000319	0,000564	0,000711	0,000564	0,000319	0,0001368	0,0000417
3,0	0,00001800	0,0000830	0,000229	0,000441	0,000581	0,000441	0,000229	0,0000830	0,00001800
3,2	0,00000290	0,0000457	0,0001620	0,000346	0,000470	0,000346	0,0001620	0,0000457	0,00000290
3,4	—0,00000379	0,0000260	0,0001204	0,000282	0,000397	0,000282	0,0001204	0,0000260	—0,00000379
3,6	—0,00000743	0,00001200	0,0000940	0,000229	0,000334	0,000229	0,0000940	0,00001200	—0,00000743
3,8	—0,00000875	0,00000350	0,0000650	0,0001878	0,000285	0,0001878	0,0000650	0,0000350	—0,00000875
4,0	—0,00000874	0,000001520	0,0000474	0,0001550	0,000243	0,0001550	0,0000474	—0,000001520	—0,00000874
4,2	—0,00000788	—0,00000419	0,0000344	0,0001283	0,000211	0,0001283	0,0000344	—0,00000419	—0,00000788
4,4	—0,00000677	—0,00000526	0,0000250	0,0001112	0,0001842	0,0001112	0,0000250	—0,00000526	—0,00000677
4,6	—0,00000555	—0,00000618	0,00001700	0,0000884	0,0001612	0,0000884	0,00001700	—0,00000618	—0,00000555
4,8	—0,00000442	—0,00000567	0,00001230	0,00000749	0,0001406	0,0000749	0,00001230	—0,00000567	—0,00000442
5,0	—0,00000345	—0,00000544	0,00000830	0,0000637	0,0001251	0,0000637	0,00000830	—0,00000544	—0,00000345

Таблица 7



$$M_{z=0} = Pl\,\overline{\psi}_1(u, \zeta),$$

Значения коэффициентов $\overline{\psi}_1(u, \overline{\zeta})$ для вычисления изгибающих моментов посредине пролета

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;

$\zeta = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры);

$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

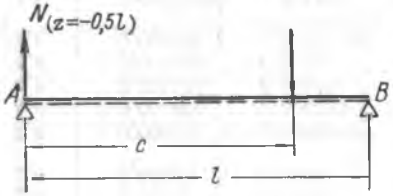
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	—0,0500	—0,1000	—0,1500	—0,200	—0,250	—0,200	—0,1500	—0,1000	—0,0500
0,2	—0,0500	—0,1000	—0,1500	—0,200	—0,250	—0,200	—0,1500	—0,1000	—0,0500
0,3	—0,0493	—0,0986	—0,1485	—0,1980	—0,248	—0,1980	—0,1485	—0,0986	—0,0493
0,4	—0,0486	—0,0977	—0,1470	—0,1960	—0,246	—0,1960	—0,1470	—0,0977	—0,0486
0,5	—0,0472	—0,0954	—0,1432	—0,1920	—0,242	—0,1920	—0,1432	—0,0954	—0,0472
0,6	—0,0447	—0,0904	—0,1368	—0,1835	—0,234	—0,1835	—0,1368	—0,0904	—0,0447
0,7	—0,0411	—0,0831	—0,1274	—0,1735	—0,222	—0,1735	—0,1274	—0,0831	—0,0411
0,8	—0,0369	—0,0752	—0,1152	—0,1590	—0,207	—0,1590	—0,1152	—0,0752	—0,0369
0,9	—0,0312	—0,0643	—0,1010	—0,1420	—0,1891	—0,1420	—0,1010	—0,0643	—0,0312
1,0	—0,0253	—0,0533	—0,0855	—0,1232	—0,1695	—0,1232	—0,0855	—0,0533	—0,0253
1,1	—0,01946	—0,0418	—0,0696	—0,1052	—0,1505	—0,1052	—0,0696	—0,0418	—0,01946
1,2	—0,01420	—0,0317	—0,0563	—0,0879	—0,1328	—0,0879	—0,0563	—0,0317	—0,01420
1,3	—0,00957	—0,0228	—0,0433	—0,0741	—0,1173	—0,0741	—0,0433	—0,0228	—0,00957

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	—0,00504	—0,01537	—0,0327	—0,0590	—0,1040	—0,0590	—0,0327	—0,01537	—0,00504
1,5	—0,00228	—0,00914	—0,0243	—0,0516	—0,0933	—0,0516	—0,0243	—0,00914	—0,00228
1,6	—0,000246	—0,00450	—0,01745	—0,0410	—0,0840	—0,0410	—0,01745	—0,00450	—0,000246
1,7	0,00207	—0,000621	—0,01186	—0,0374	—0,0767	—0,0374	—0,01186	—0,000621	0,00207
1,8	0,00332	0,00234	—0,00739	—0,0331	—0,0710	—0,0331	—0,00739	0,00234	0,00332
1,9	0,00442	0,00488	—0,00384	—0,0262	—0,0662	—0,0262	—0,00384	0,00488	0,00442
2,0	0,00499	0,00605	—0,001615	—0,0230	—0,0624	—0,0230	—0,001615	0,00605	0,00499
2,2	0,00586	0,00847	0,00267	—0,01692	—0,0560	—0,01692	0,00267	0,00847	0,00586
2,4	0,00613	0,00952	0,00499	—0,01308	—0,0512	—0,01308	0,00499	0,00952	0,00613
2,6	0,00605	0,00952	0,00654	—0,00998	—0,0474	—0,00998	0,00654	0,00952	0,00605
2,8	0,00549	0,00855	0,00708	—0,00765	—0,0443	—0,00765	0,00708	0,00855	0,00549
3,0	0,00483	0,00843	0,00756	—0,00561	—0,0416	—0,00561	0,00756	0,00843	0,00483
3,2	0,00403	0,00760	0,00770	—0,00344	—0,0390	—0,00344	0,00770	0,00760	0,00403
3,4	0,00334	0,00676	0,00756	—0,00271	—0,0368	—0,00271	0,00756	0,00676	0,00334
3,6	0,00263	0,00585	0,00723	—0,00255	—0,0348	—0,00255	0,00723	0,00585	0,00263
3,8	0,002205	0,00498	0,00692	—0,000543	—0,03295	—0,000543	0,00692	0,00498	0,002205
4,0	0,001480	0,004165	0,00655	0,000278	—0,0312	0,000278	0,00655	0,004165	0,001480
4,2	0,001033	0,00346	0,00616	0,000958	—0,0298	0,000958	0,00616	0,00346	0,001033
4,4	0,000670	0,00281	0,00575	0,001588	—0,0285	0,001588	0,00575	0,00281	0,000670
4,6	0,000396	0,00225	0,00551	0,001777	—0,0271	0,001777	0,00551	0,00225	0,000396
4,8	0,0001788	0,001815	0,00485	0,00240	—0,0258	0,00240	0,00485	0,001815	0,0001788
5,0	0,0000294	0,001410	0,00448	0,00278	—0,0250	0,00278	0,00448	0,001410	0,0000294

Таблица 8

Значения коэффициентов $\overline{\varphi}_2(u, \zeta)$ для вычисления перерезывающих сил на опоре



$$N_{(z=-0,5l)} = P\overline{\varphi}_2(u, \zeta)$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;
$\zeta = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры);
$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

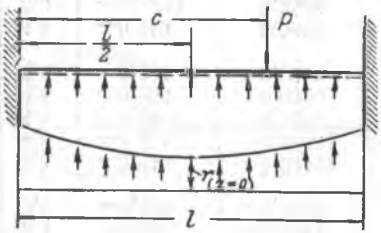
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	—0,900	—0,800	—0,700	—0,600	—0,500	—0,400	—0,300	—0,200	—0,1000
0,2	—0,900	—0,800	—0,700	—0,600	—0,500	—0,400	—0,300	—0,200	—0,1000
0,3	—0,898	—0,795	—0,695	—0,595	—0,495	—0,396	—0,297	—0,1980	—0,0988
0,4	—0,893	—0,792	—0,690	—0,589	—0,489	—0,389	—0,291	—0,1935	—0,0965
0,5	—0,892	—0,784	—0,676	—0,576	—0,476	—0,376	—0,280	—0,1860	—0,0924
0,6	—0,877	—0,764	—0,652	—0,548	—0,4505	—0,351	—0,260	—0,1710	—0,0846
0,7	—0,872	—0,745	—0,627	—0,516	—0,414	—0,329	—0,231	—0,1510	—0,0747
0,8	—0,855	—0,715	—0,586	—0,470	—0,366	—0,275	—0,1955	—0,1258	—0,0611
0,9	—0,835	—0,679	—0,536	—0,414	—0,309	—0,223	—0,1527	—0,0945	—0,0450
1,0	—0,812	—0,636	—0,483	—0,355	—0,249	—0,1680	—0,1070	—0,0621	—0,0277
1,1	—0,788	—0,597	—0,430	—0,294	—0,1900	—0,1148	—0,0636	—0,0316	—0,01260
1,2	—0,768	—0,557	—0,379	—0,239	—0,1360	—0,0615	—0,0254	—0,00506	0,001006
1,3	—0,748	—0,519	—0,332	—0,1891	—0,0890	—0,0267	0,00622	0,01617	0,01175

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	—0,725	—0,485	—0,289	—0,1460	—0,0500	0,00587	0,0302	0,0320	0,0210
1,5	—0,706	—0,451	—0,252	—0,1034	—0,01850	0,0298	0,0471	0,0425	0,0244
1,6	—0,690	—0,420	—0,217	—0,0777	0,00833	0,0529	0,0580	0,0482	0,0263
1,7	—0,668	—0,390	—0,1852	—0,0506	0,0260	0,0580	0,0634	0,0500	0,0275
1,8	—0,645	—0,366	—0,1591	—0,0280	0,0405	0,0660	0,0651	0,0492	0,0259
1,9	—0,635	—0,338	—0,1318	—0,00885	0,0514	0,0694	0,0635	0,0469	0,0237
2,0	—0,602	—0,305	—0,1053	0,00943	0,0589	0,0681	0,0584	0,0404	0,0202
2,2	—0,585	—0,265	—0,0662	0,0330	0,0662	0,0650	0,0488	0,0303	0,01410
2,4	—0,551	—0,220	—0,0308	0,0501	0,0675	0,0554	0,0359	0,01923	0,00782
2,6	—0,516	—0,1788	—0,00226	0,0610	0,0636	0,0446	0,0238	0,01015	0,00307
2,8	—0,495	—0,1398	0,0203	0,0660	0,0572	0,0340	0,01453	0,00370	0,000001095
3,0	—0,459	—0,1093	0,0373	0,0667	0,0494	0,0244	0,00732	—0,000258	—0,001570
3,2	—0,410	—0,0737	0,0500	0,0644	0,0400	0,01585	0,00228	—0,00236	—0,002105
3,4	—0,382	—0,0547	0,0585	0,0601	0,0322	0,00993	—0,000593	—0,00298	—0,001965
3,6	—0,378	—0,0309	0,0639	0,0543	0,02455	0,00505	—0,00217	—0,00287	—0,001530
3,8	—0,340	—0,01102	0,0670	0,0480	0,01768	0,001570	—0,00285	—0,00235	—0,001023
4,0	—0,314	0,00561	0,0668	0,0407	0,01200	—0,000717	—0,00289	—0,001723	—0,000573
4,2	—0,288	0,0200	0,0665	0,0340	0,00735	—0,002075	—0,00258	—0,001130	—0,000249
4,4	—0,265	0,0320	0,0626	0,0274	0,00378	—0,00286	—0,00210	—0,000648	—0,0000366
4,6	—0,234	0,0404	0,0570	0,0210	0,0001098	—0,00250	—0,001524	—0,000292	0,0000715
4,8	—0,219	0,0497	0,0540	0,01640	—0,000725	—0,00271	—0,001084	—0,0000821	0,0001137
5,0	—0,1990	0,0563	0,0493	0,01196	—0,001913	—0,00248	—0,000686	0,0000539	0,0001130

Таблица 9

Значения коэффициентов $\bar{\psi}_3(u, \zeta)$ для вычисления интенсивности реакции упругого основания посредине пролета



$$r_{z=0} = \frac{P}{l} \cdot \bar{\psi}_3(u, \zeta),$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;

$\zeta = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры);

$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

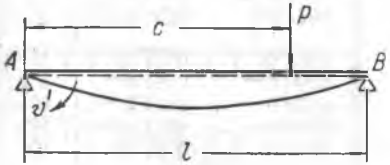
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,0000420	0,0000799	0,0001062	0,0001280	0,0001330	0,0001280	0,0001062	0,0000799	0,0000420
0,2	0,000629	0,001220	0,001683	0,001990	0,00212	0,001990	0,001683	0,001220	0,000629
0,3	0,00319	0,00608	0,00839	0,01012	0,01068	0,01012	0,00839	0,00608	0,00319
0,4	0,00987	0,01900	0,0265	0,0318	0,0336	0,0318	0,0265	0,01900	0,00987
0,5	0,0236	0,0453	0,0632	0,0760	0,0804	0,0760	0,0632	0,0453	0,0236
0,6	0,0472	0,0908	0,1275	0,1515	0,1598	0,1515	0,1275	0,0908	0,0472
0,7	0,0809	0,1620	0,224	0,262	0,276	0,262	0,244	0,1620	0,0809
0,8	0,1264	0,249	0,341	0,406	0,435	0,406	0,341	0,249	0,1264
0,9	0,1793	0,346	0,485	0,577	0,616	0,577	0,485	0,346	0,1793
1,0	0,234	0,451	0,634	0,762	0,811	0,762	0,634	0,451	0,234
1,1	0,286	0,554	0,782	0,945	1,011	0,945	0,782	0,554	0,286
1,2	0,334	0,648	0,920	1,117	1,193	1,117	0,920	0,648	0,334

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,3	0,371	0,724	1,039	1,268	1,360	1,268	1,039	0,724	0,371
1,4	0,407	0,785	1,131	1,340	1,503	1,340	1,131	0,785	0,407
1,5	0,420	0,830	1,218	1,512	1,638	1,512	1,218	0,830	0,420
1,6	0,427	0,865	1,273	1,652	1,764	1,652	1,273	0,865	0,427
1,7	0,440	0,875	1,312	1,680	1,841	1,680	1,312	0,875	0,440
1,8	0,429	0,882	1,343	1,746	1,933	1,746	1,343	0,882	0,429
1,9	0,424	0,874	1,361	1,805	2,02	1,805	1,361	0,874	0,424
2,0	0,417	0,873	1,397	1,902	2,20	1,902	1,397	0,873	0,417
2,2	0,364	0,812	1,379	1,970	2,28	1,970	1,379	0,812	0,364
2,4	0,304	0,735	1,353	2,05	2,44	2,05	1,353	0,735	0,304
2,6	0,246	0,643	1,298	2,14	2,63	2,14	1,298	0,643	0,246
2,8	0,1640	0,537	1,214	2,235	2,80	2,235	1,214	0,537	0,1640
3,0	0,0932	0,430	1,186	2,285	3,01	2,285	1,186	0,430	0,0932
3,2	0,01950	0,308	1,090	2,32	3,16	2,32	1,090	0,308	0,01950
3,4	—0,0324	0,322	1,029	2,41	3,39	2,41	1,029	0,222	—0,0324
3,6	—0,0800	0,1292	1,013	2,47	3,59	2,47	1,013	0,1292	—0,0800
3,8	—0,1168	0,04665	0,867	2,52	3,80	2,52	0,867	0,04665	—0,1168
4,0	—0,1433	—0,0249	0,776	2,54	3,98	2,54	0,776	—0,0249	—0,1433
4,2	—0,1570	—0,0833	0,685	2,57	4,20	2,57	0,685	—0,0833	—0,1570
4,4	—0,1620	—0,1260	0,599	2,57	4,40	2,57	0,599	—0,1260	—0,1620
4,6	—0,1588	—0,1768	0,485	2,56	4,605	2,56	0,486	—0,1768	—0,1588
4,8	—0,1503	—0,1929	0,418	2,54	4,78	2,54	0,418	—0,1929	—0,1503
5,0	—0,1380	—0,217	0,332	2,52	5,00	2,52	0,332	—0,217	—0,1380

Таблица 10

Значения коэффициентов $\bar{\psi}_4(u, \zeta)$ для вычисления угла поворота на опоре



$$v'_{z=-0,5l} = \frac{Pl^2}{EJ} \cdot \bar{\psi}_4(u, \zeta),$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
$\zeta = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры);
EJ — жесткость балки;
$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,0292	0,0485	0,0594	0,0636	0,0623	0,0550	0,0444	0,0325	0,01690
0,2	0,0292	0,0485	0,0594	0,0636	0,0623	0,0556	0,0454	0,0319	0,01650
0,3	0,0292	0,0485	0,0591	0,0633	0,0620	0,0555	0,0450	0,0317	0,01625
0,4	0,0288	0,0478	0,0587	0,0630	0,0615	0,0551	0,0446	0,0314	0,01614
0,5	0,0280	0,0473	0,0582	0,0614	0,6000	0,0536	0,0434	0,0305	0,01570
0,6	0,0272	0,0454	0,0560	0,0595	0,0576	0,0514	0,0416	0,0292	0,01496
0,7	0,0258	0,0428	0,0525	0,0559	0,0538	0,0479	0,0386	0,0266	0,01388
0,8	0,0242	0,0398	0,0483	0,0511	0,0489	0,0431	0,0346	0,0241	0,01235
0,9	0,0223	0,0364	0,0436	0,0454	0,0432	0,0376	0,0300	0,02085	0,01062
1,0	0,0203	0,0326	0,0384	0,0394	0,0369	0,0318	0,0251	0,01725	0,00878
1,1	0,01850	0,0290	0,0335	0,0336	0,0309	0,0262	0,0204	0,01381	0,00696
1,2	0,01670	0,0246	0,0288	0,0283	0,0253	0,0208	0,01600	0,01070	0,00535
1,3	0,01500	0,0224	0,0247	0,0236	0,0205	0,01655	0,01227	0,00803	0,00396

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	0,01355	0,01977	0,02105	0,01950	0,01635	0,01270	0,00912	0,00581	0,00281
1,5	0,01230	0,01740	0,01800	0,01608	0,01302	0,00972	0,00667	0,00408	0,001926
1,6	0,01120	0,01500	0,01500	0,01331	0,01027	0,00727	0,00473	0,00275	0,001241
1,7	0,01015	0,01374	0,01218	0,01097	0,00806	0,00546	0,00325	0,001755	0,000743
1,8	0,00957	0,01246	0,01160	0,00913	0,00633	0,00395	0,00216	0,001033	0,000388
1,9	0,00880	0,01118	0,01025	0,00769	0,00500	0,00283	0,001362	0,000525	0,0001451
2,0	0,00816	0,01008	0,00869	0,00631	0,00388	0,001992	0,000790	0,0001825	—0,00001280
2,2	0,00710	0,00826	0,00669	0,00434	0,002305	0,000893	0,0001176	—0,0001722	—0,0001496
2,4	0,00624	0,00681	0,00510	0,00296	0,001317	0,000306	—0,0001605	—0,0002685	—0,0001732
2,6	0,00548	0,00565	0,00389	0,00203	0,000702	0,00000732	—0,000243	—0,000244	—0,0001400
2,8	0,00484	0,00516	0,00296	0,001333	0,000322	—0,0001267	—0,000230	—0,0001840	—0,0000936
3,0	0,00428	0,00390	0,00224	0,000849	0,0000967	—0,0001710	—0,0001870	—0,0001220	—0,0000545
3,2	0,00389	0,00322	0,001755	0,000496	—0,0000320	—0,0001706	—0,0001358	—0,0000708	—0,0000256
3,4	0,00348	0,00268	0,001258	0,000291	—0,0000920	—0,0001474	—0,0000932	—0,0000381	—0,00000954
3,6	0,00311	0,00227	0,000923	0,0001400	—0,0001162	—0,0001013	—0,0000594	—0,00001642	—0,000000612
3,8	0,00280	0,001892	0,000676	0,0000418	—0,0001185	—0,0000894	—0,0000347	—0,00000429	—0,00000312
4,0	0,00252	0,001575	0,000478	—0,00001883	—0,0001083	—0,0000640	—0,00001800	0,000001620	0,00000397
4,2	0,00227	0,001315	0,000333	—0,0000532	—0,0000926	—0,0000435	—0,00000764	0,00000380	0,00000341
4,4	0,00207	0,001094	0,000222	—0,0000706	—0,0000756	—0,0000291	—0,0000001640	0,00000405	0,00000245
4,6	0,001870	0,000905	0,0001408	—0,0000763	—0,0000591	—0,00001638	0,000001496	0,00000341	0,000001515
4,8	0,001688	0,000842	0,0000790	—0,0000746	—0,0000441	—0,00000850	0,00000276	0,00000250	0,000000800
5,0	0,001550	0,000638	0,0000352	—0,0000694	—0,0000323	—0,00000347	0,00000299	0,000001674	0,000000338

§ 18. Общий случай изгиба балки с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженной сосредоточенной силой в пролете (рис. 17)

Стрелка прогиба в середине пролета

$$v_{z=0} = \frac{Pl^3}{EJ}\,\bar{\varphi}_0(u, \zeta_1). \tag{91}$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_{z=0} = Pl\,\bar{\mu}_0(u, \zeta_1) \tag{92}$$

Изгибающий момент на левой опоре

$$M_{z=-0.5l} = Pl\bar{\mu}_A(u, \zeta_1). \tag{93}$$

Изгибающий момент на правой опоре

$$M_{z=0,5l} = Pl\bar{\mu}_A(u, \zeta_2). \tag{94}$$

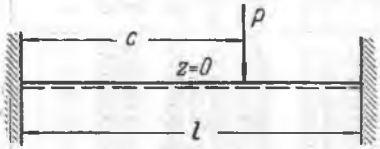


Рис. 17.

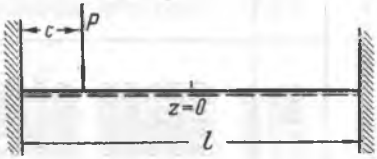


Рис. 18.

Срезывающая сила на левой опоре

$$N_{z=-0,5l} = P\bar{\nu}_A(u, \zeta_1). \tag{95}$$

Срезывающая сила на правой опоре

$$N_{z=0,5l} = -P\bar{\nu}_A(u, \zeta_2). \tag{96}$$

Интенсивность реакций в середине пролета

$$r_{(z=0)} = \frac{P}{l}\,\bar{\rho}_0(u, \zeta_1). \tag{97}$$

Численные значения функции[1]

$$\bar{\varphi}_0(u\zeta_i);\quad \bar{\mu}_0(u\zeta_i);\quad \bar{\mu}_A(u\zeta_i);\quad \bar{\nu}_A(u\zeta_i) \text{ и } \bar{\rho}_0(u, \zeta)$$

протабулированы Н. Я. Эрманом и приведены ниже в табл. 11—15.

Численный пример использования функций при решении задачи данного параграфа.

Балка, жестко заделанная на опорах, находится под действием сосредоточенной силы (рис. 18):

1) длина балки $l = 15$ *м*;
2) коэффициент жесткости упругого основания $k = 4$ *т/м²*;
3) момент инерции сечения балки $J = 2 \cdot 10^5$ *см⁴*;
4) сила $P = 30$ *т*;
5) отстояние точки приложения силы от левой опоры $c = 3$ *м*.

Требуется найти:

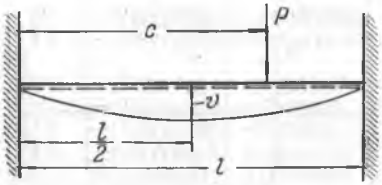
1) стрелку прогиба;
2) опорные изгибающие моменты;
3) изгибающий момент посредине пролета;
4) срезывающую силу на опорах.

---

[1] Вычисление всех элементов изгиба балки влево от точки приложения силы производится для значений $\zeta_1 = \frac{c}{l}$ и для всех сечений вправо от точки приложения силы — для значений $\zeta_2 = \frac{l-c}{l}$.

Таблица 11

Значения коэффициентов $\bar{\varphi}_0(u, \zeta_1)$ для вычисления стрелки прогиба балки посредине пролета



$$v_{(z=0)} = \frac{Pl^3}{EJ}\bar{\varphi}_0(u, \zeta_1),$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;
$\zeta_1 = \frac{c}{l}$ — отстояние силы от левой опоры;
$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

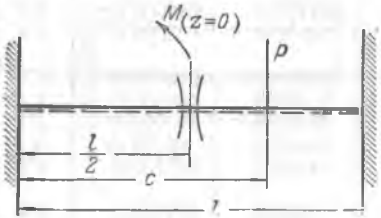
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,000540	0,00186	0,00340	0,00480	0,00521	0,00480	0,00340	0,00186	0,000540
0,2	0,000536	0,00184	0,00340	0,00474	0,00521	0,00474	0,00340	0,00184	0,000536
0,3	0,000529	0,00182	0,00338	0,00470	0,00520	0,00470	0,00338	0,00182	0,000529
0,4	0,000527	0,00180	0,00337	0,00468	0,00519	0,00468	0,00337	0,00180	0,000527
0,5	0,000526	0,00180	0,00335	0,00466	0,00516	0,00466	0,00335	0,00180	0,000526
0,6	0,000525	0,00180	0,00333	0,00463	0,00512	0,00463	0,00333	0,00180	0,000525
0,7	0,000521	0,00177	0,00325	0,00463	0,00510	0,00463	0,00325	0,00177	0,000521
0,8	0,000510	0,00173	0,00319	0,00458	0,00491	0,00458	0,00319	0,00173	0,000510
0,9	0,000500	0,00170	0,00312	0,00433	0,00481	0,00433	0,00312	0,00170	0,000500
1,0	0,000472	0,00160	0,00298	0,00414	0,00463	0,00414	0,00298	0,00160	0,000472
1,1	0,000453	0,00145	0,00284	0,00395	0,00447	0,00395	0,00284	0,00145	0,000453
1,2	0,000417	0,00142	0,00264	0,00382	0,00410	0,00382	0,00264	0,00142	0,000417
1,3	0,000383	0,00131	0,00245	0,00345	0,00383	0,00345	0,00245	0,00131	0,000383

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	0,000345	0,00119	0,00223	0,00318	0,00352	0,00318	0,00223	0,00119	0,000345
1,5	0,000307	0,00107	0,00200	0,00286	0,00322	0,00286	0,00200	0,00107	0,000307
1,6	0,000271	0,000950	0,001790	0,00255	0,00286	0,00255	0,001790	0,000950	0,000271
1,7	0,000234	0,000825	0,00158	0,00224	0,00261	0,00224	0,00158	0,000825	0,000234
1,8	0,000201	0,000709	0,00139	0,00199	0,00232	0,00199	0,00139	0,000709	0,000201
1,9	0,0001707	0,000616	0,001207	0,00178	0,00205	0,00178	0,001207	0,000616	0,0001707
2,0	0,0001428	0,000524	0,001054	0,001562	0,00181	0,001562	0,001054	0,000524	0,0001428
2,2	0,0000990	0,000441	0,000779	0,001192	0,001420	0,001192	0,000779	0,000441	0,0000990
2,4	0,0000653	0,000262	0,000572	0,000921	0,001113	0,000921	0,000572	0,000262	0,0000653
2,6	0,0000413	0,000179	0,000422	0,000704	0,000884	0,000704	0,000422	0,000179	0,0000413
2,8	0,0000243	0,000123	0,000311	0,000560	0,000710	0,000560	0,000311	0,000123	0,0000243
3,0	0,0000129	0,0000800	0,000228	0,000441	0,000577	0,000441	0,000228	0,0000800	0,0000129
3,2	0,00000531	0,0000495	0,0001676	0,000352	0,000475	0,000352	0,0001676	0,0000495	0,00000531
3,4	0,000000530	0,0000292	0,000123	0,000282	0,000397	0,000282	0,000123	0,0000292	0,00000530
3,6	—0,000000229	0,0000158	0,0000895	0,000228	0,000332	0,000228	0,0000895	0,0000158	—0,00000229
3,8	—0,00000375	0,00000692	0,0000661	0,000188	0,000285	0,000188	0,0000661	0,00000692	—0,00000375
4,0	—0,00000422	0,00000150	0,0000482	0,000155	0,000243	0,000155	0,0000482	0,00000150	—0,00000422
4,2	—0,00000433	—0,00000217	0,0000350	0,000128	0,000210	0,000128	0,0000350	—0,00000217	—0,00000433
4,4	—0,00000403	—0,00000412	0,0000252	0,000107	0,000183	0,000107	0,0000252	—0,00000412	—0,00000403
4,6	—0,00000355	—0,00000494	0,0000175	0,0000913	0,000161	0,0000913	0,0000175	—0,00000494	—0,00000355
4,8	—0,00000298	—0,00000543	0,0000123	0,0000741	0,000141	0,0000741	0,0000123	—0,0000143	—0,00000298
5,0	—0,00000243	—0,00000505	0,00000830	0,0000631	0,000125	0,0000631	0,00000830	—0,00000505	—0,00000243

Таблица 12

Значения коэффициентов $\bar{\mu}_0(u, \zeta_1)$ для вычисления изгибающих моментов посредине пролета



$M_{z=0} = Pl\,\bar{\mu}_0(u, \zeta_1)$, где P — сила, изгибающая балку;

l — длина балки;

EJ — жесткость балки;

$\zeta_1 = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от левой опоры);

$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k—коэффициент жесткости упругого основания)

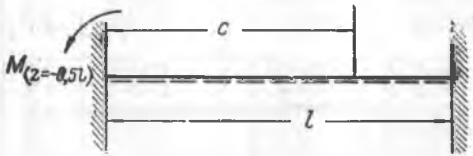
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	—0,00500	—0,0200	—0,0450	—0,0800	—0,1250	—0,0800	—0,0450	—0,0200	—0,00500
0,2	—0,00500	—0,0200	—0,0450	—0,0800	—0,1250	—0,0800	—0,0450	—0,0200	—0,00500
0,3	—0,00500	—0,0200	—0,0449	—0,0798	—0,1250	—0,0798	—0,0449	—0,0200	—0,00500
0,4	—0,0500	—0,0200	—0,0448	—0,0796	—0,1249	—0,0796	—0,0448	—0,0200	—0,00500
0,5	—0,00492	—0,0197	—0,0447	—0,0794	—0,1240	—0,0794	—0,0447	—0,0197	—0,00492
0,6	—0,00488	—0,0195	—0,0440	—0,0783	—0,1238	—0,0783	—0,0440	—0,0195	—0,00488
0,7	—0,00474	—0,0189	—0,0433	—0,0753	—0,1218	—0,0753	—0,0433	—0,0189	—0,00474
0,8	—0,00452	—0,0184	—0,0422	—0,0725	—0,1214	—0,0725	—0,0422	—0,0184	—0,00452
0,9	—0,00419	—0,0172	—0,0404	—0,0705	—0,1183	—0,0705	—0,0404	—0,0172	—0,00419
1,0	—0,00389	—0,0163	—0,0382	—0,0683	—0,1150	—0,0683	—0,0382	—0,0163	—0,00389
1,1	—0,00331	—0,0145	—0,0354	—0,0670	—0,1107	—0,0670	—0,0354	—0,0145	—0,00331
1,2	—0,00290	—0,0131	—0,0325	—0,0626	—0,1069	—0,0626	—0,0325	—0,0131	—0,00290
1,3	—0,00234	—0,0112	—0,0292	—0,0584	—0,1020	—0,0584	—0,0292	—0,0112	—0,00234

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	—0,00176	—0,00927	—0,0255	—0,0536	—0,0963	—0,0536	—0,0255	—0,00927	—0,00176
1,5	—0,00113	—0,00716	—0,0220	—0,0486	—0,0908	—0,0486	—0,0220	—0,00716	—0,00113
1,6	—0,000541	—0,00485	—0,0181	—0,0436	—0,0852	—0,0436	—0,0181	—0,00485	—0,000541
1,7	0,0000130	—0,00323	—0,01465	—0,0404	—0,0796	—0,0404	—0,01465	—0,00323	0,0000130
1,8	0,000538	—0,00147	—0,01142	—0,0347	—0,0746	—0,0347	—0,01142	—0,00147	0,000538
1,9	0,000980	0,000150	—0,00840	—0,0303	—0,0702	—0,0303	—0,00840	0,000150	0,000980
2,0	0,001369	0,001480	—0,00592	—0,0266	—0,0663	—0,0266	—0,00592	0,001480	0,001369
2,2	0,001954	0,00170	—0,00140	—0,0202	—0,0590	—0,0202	—0,00140	0,00170	0,001954
2,4	0,00229	0,00502	0,00174	—0,01513	—0,0543	—0,01513	0,00174	0,00502	0,00229
2,6	0,00242	0,00593	0,00385	—0,01136	—0,0484	—0,01136	0,00385	0,00593	0,00242
2,8	0,00242	0,00628	0,00534	—0,00842	—0,0447	—0,00842	0,00534	0,00628	0,00242
3,0	0,00228	0,00620	0,00630	—0,00610	—0,0416	—0,00610	0,00630	0,00620	0,00228
3,2	0,00209	0,00601	0,00690	—0,00420	—0,0389	—0,00420	0,00690	0,00601	0,00209
3,4	0,001826	0,00558	0,00690	—0,00270	—0,0367	—0,00270	0,00690	0,00558	0,001826
3,6	0,001544	0,00501	0,00685	—0,00160	—0,0346	—0,00160	0,00685	0,00501	0,001544
3,8	0,001270	0,00446	0,00670	—0,000700	—0,0330	—0,000700	0,00670	0,00446	0,001270
4,0	0,00100	0,00428	0,00640	0,000350	—0,0311	0,000350	0,00640	0,00428	0,00100
4,2	0,000745	0,00328	0,00608	0,000950	—0,0297	0,000950	0,00680	0,00328	0,000745
4,4	0,000522	0,00270	0,00565	0,001590	—0,0279	0,001590	0,00565	0,00270	0,000522
4,6	0,000353	0,00223	0,00525	0,00202	—0,0272	0,00202	0,00525	0,00223	0,000353
4,8	0,000204	0,00181	0,00488	0,00244	—0,0259	0,00244	0,00488	0,00181	0,000204
5,0	0,0000890	0,001435	0,00447	0,00275	—0,0250	0,00275	0,00447	0,001435	0,0000890

Таблица 13

Значения коэффициентов $\bar{\mu}_A$ (u, ζ_i) для вычисления изгибающих моментов на опоре



$M_{z=\pm 0,5l} = Pl\bar{\mu}_A(u, \zeta_i)$, где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;
$\zeta_i = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры, для которой вычисляется изгибающий момент);
$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

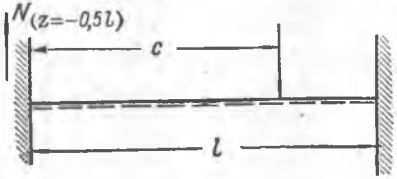
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,0830	0,1305	0,1480	0,1450	0,1250	0,0960	0,0630	0,0320	0,00920
0,2	0,0828	0,1305	0,1480	0,1450	0,1250	0,0960	0,0630	0,0320	0,00915
0,3	0,0824	0,1302	0,1480	0,1450	0,1250	0,0960	0,0628	0,0320	0,00910
0,4	0,0818	0,1297	0,1480	0,1444	0,1247	0,0955	0,0626	0,0319	0,00905
0,5	0,0811	0,1289	0,1479	0,1434	0,1234	0,0952	0,0622	0,0316	0,00900
0,6	0,0804	0,1278	0,1473	0,1419	0,1230	0,0940	0,0616	0,0311	0,00880
0,7	0,0798	0,1263	0,1466	0,1399	0,1212	0,0922	0,0602	0,0304	0,00855
0,8	0,0792	0,1247	0,1429	0,1374	0,1180	0,0895	0,0584	0,0294	0,00820
0,9	0,0786	0,1228	0,1394	0,1337	0,1140	0,0860	0,0561	0,0281	0,00785
1,0	0,0779	0,1206	0,1350	0,1291	0,1090	0,0814	0,0530	0,0262	0,00725
1,1	0,0772	0,1182	0,1300	0,1230	0,1030	0,0764	0,0488	0,0242	0,00665
1,2	0,0767	0,1152	0,1257	0,1165	0,0951	0,0711	0,0440	0,0216	0,00588
1,3	0,0752	0,1115	0,1191	0,1075	0,0872	0,0628	0,0388	0,01863	0,00505

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	0,0743	0,1066	0,1120	0,0990	0,0787	0,0556	0,0334	0,0157	0,00412
1,5	0,0728	0,1025	0,1034	0,0908	0,0697	0,0477	0,0280	0,0129	0,00330
1,6	0,0713	0,0977	0,0970	0,0817	0,0605	0,0401	0,0227	0,01005	0,00250
1,7	0,0697	0,0932	0,0901	0,0732	0,0525	0,0335	0,0179	0,00751	0,00175
1,8	0,0684	0,0892	0,0829	0,0651	0,0445	0,0267	0,01354	0,00523	0,00110
1,9	0,0667	0,0849	0,0763	0,0576	0,0375	0,0211	0,00977	0,00335	0,000562
2,0	0,0652	0,0806	0,0704	0,0506	0,0312	0,01616	0,00659	0,001763	0,0001445
2,2	0,0645	0,0726	0,0589	0,0385	0,0207	0,00847	0,00197	0,000360	—0,000396
2,4	0,0598	0,0652	0,0494	0,0287	0,01292	0,00343	—0,000677	—0,0001376	—0,000605
2,6	0,0569	0,0585	0,0405	0,0210	0,00741	0,000396	—0,001895	—0,001674	—0,000600
2,8	0,0541	0,0522	0,0331	0,01487	0,00366	—0,001247	—0,00223	—0,001518	—0,000484
3,0	0,0518	0,0468	0,02785	0,01020	0,001169	—0,001988	—0,00206	—0,001174	—0,000334
3,2	0,0492	0,0416	0,0214	0,00664	—0,000371	—0,00215	—0,001700	—0,000807	—0,000197
3,4	0,0469	0,0369	0,01708	0,00397	—0,001252	—0,00200	—0,001259	—0,000486	—0,0000907
3,6	0,0445	0,0326	0,0134	0,00203	—0,001674	—0,001703	—0,000854	—0,000246	—0,0000211
3,8	0,0426	0,0288	0,01034	0,000645	—0,00180	—0,001360	—0,000533	—0,0000860	0,00001710
4,0	0,0401	0,0252	0,00765	—0,000299	—0,001730	—0,001020	—0,000294	0,00000610	0,0000322
4,2	0,0381	0,0221	0,00559	—0,000903	—0,001560	—0,000729	—0,0001330	0,0000502	0,0000336
4,4	0,0364	0,01920	0,00389	—0,001246	—0,001330	—0,000486	—0,0000304	0,0000631	0,00001960
4,6	0,0344	0,01660	0,00257	—0,001403	—0,001083	—0,000308	—0,0000269	0,0000585	0,00001960
4,8	0,0325	0,01433	0,001524	—0,001433	—0,000850	—0,0001640	0,0000529	0,0000466	0,00001183
5,0	0,0310	0,01230	0,000700	—0,001384	—0,000626	—0,0000692	0,0000596	0,0000332	0,00000592

Таблица 14

Значения коэффициентов $\overline{\nu}_A(u, \zeta_i)$ для вычисления срезывающих сил на опоре



$$N_{z=\pm 0,5l} = P\overline{\nu}_A(u, \zeta_1),$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;
EJ — жесткость балки;

$\zeta_i = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры, для которой вычисляется срезывающая сила);

$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

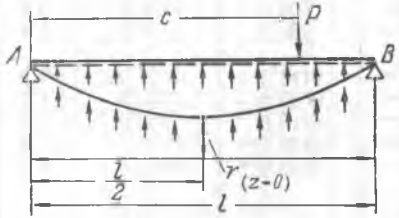
u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	—0,980	—0,900	—0,786	—0,650	—0,500	—0,350	—0,216	—0,1040	—0,0284
0,2	—0,980	—0,900	—0,786	—0,650	—0,500	—0,350	—0,216	—0,1035	—0,0282
0,3	—0,976	—0,900	—0,786	—0,648	—0,500	—0,350	—0,216	—0,1030	—0,0278
0,4	—0,974	—0,897	—0,784	—0,647	—0,500	—0,350	—0,214	—0,1026	—0,0276
0,5	—0,972	—0,892	—0,782	—0,644	—0,496	—0,348	—0,212	—0,1016	—0,0274
0,6	—0,968	—0,886	—0,777	—0,636	—0,490	—0,342	—0,210	—0,1004	—0,0269
0,7	—0,966	—0,878	—0,772	—0,630	—0,481	—0,331	—0,204	—0,0973	—0,0261
0,8	—0,964	—0,872	—0,760	—0,614	—0,468	—0,316	—0,1960	—0,0930	—0,0248
0,9	—0,962	—0,866	—0,750	—0,595	—0,449	—0,309	—0,1850	—0,0866	—0,0229
1,0	—0,960	—0,860	—0,727	—0,576	—0,427	—0,288	—0,1695	—0,0790	—0,0206
1,1	—0,959	—0,844	—0,703	—0,549	—0,398	—0,264	—0,1527	—0,0695	—0,01762
1,2	—0,951	—0,830	—0,675	—0,514	—0,365	—0,235	—0,1324	—0,0586	—0,01457
1,3	—0,942	—0,808	—0,643	—0,475	—0,327	—0,202	—0,1097	—0,0465	—0,01421

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	—0,935	—0,788	—0,609	—0,436	—0,287	—0,170	—0,0864	—0,0342	—0,00752
1,5	—0,930	—0,762	—0,572	—0,374	—0,246	—0,136	—0,0640	—0,0224	—0,00406
1,6	—0,917	—0,738	—0,529	—0,349	—0,206	—0,104	—0,0418	—0,0105	—0,000902
1,7	—0,908	—0,710	—0,498	—0,310	—0,1672	—0,0782	—0,0225	—0,00136	+0,001794
1,8	—0,900	—0,687	—0,451	—0,271	—0,1318	—0,0481	—0,00569	0,000681	0,00401
1,9	—0,889	—0,663	—0,427	—0,234	—0,1005	—0,0245	0,00836	0,001320	0,00562
2,0	—0,878	—0,635	—0,391	—0,1974	—0,0726	—0,00538	0,01892	0,01777	0,00667
2,2	—0,864	—0,602	—0,326	—0,1375	—0,0272	0,0218	0,0392	0,0220	0,00734
2,4	—0,836	—0,531	—0,266	—0,0872	0,00456	0,0367	0,356	0,0211	0,00647
2.6	—0,810	—0,483	—0,212	—0,0480	0,0250	0,0420	0,0321	0,01745	0,00484
2.8	—0,788	—0,431	—0,1651	—0,1707	0,0368	0,0410	0,0272	0,01250	0,00305
3,0	—0,764	—0,391	—0,1230	0,00561	0,0422	0,0365	0,0205	0,00776	0,001482
3,2	—0,741	—0,346	—0,0880	0,0220	0,0430	0,0303	0,01391	0,00387	0,000327
3,4	—0,714	—0,304	—0,0574	0,0331	0,0407	0,0236	0,00836	0,001086	—0,000380
3.6	—0,690	—0,265	—0,0320	0,0395	0,0365	0,01734	0,00419	—0,000587	—0,000706
3,8	—0,664	—0,230	—0,0120	0,0425	0,0314	0,01193	0,001310	—0,001306	—0,000761
4,0	—0,636	—0,1960	0,00569	0,0432	0,0257	0,00745	—0,000469	—0,001780	—0,000653
4,2	—0,611	—0,1610	0,01854	0,0415	0,0204	0,00405	—0,001450	—0,001520	—0,000469
4,4	—0,576	—0,1375	0,0246	0,0386	0,0155	0,00156	—0,00183	—0,001215	—0,000262
4.6	—0,560	—0,1112	0,0351	0,0347	0,0111	—0,000994	—0,00181	—0,000854	—0,000155
4.8	—0,531	—0,0875	0,0395	0,0303	0,00744	—0,001150	—0,00160	—0,000543	—0,0000490
5,0	—0,508	—0,0663	0,0422	0,0258	0,00454	—0,00168	—0,00128	—0,000293	0,000001452

Таблица 15

Значения коэффициентов $\bar{\rho}_0(u, \zeta_1)$ для вычисления интенсивности реакции упругого основания посредине пролета



$$r_{(z=0)} = \frac{P}{l}\bar{\rho}_0(u, \zeta_1),$$

где P — сила, изгибающая балку;
l — длина балки;

$\zeta_1 = \frac{c}{l}$ (c — отстояние силы от опоры);

EJ — жесткость балки;

$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}}$ (k — коэффициент жесткости упругого основания)

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	—0,00000346	—0,0000119	—0,0000218	—0,0000307	—0,0000334	—0,0000307	—0,0000218	—0,0000119	—0,00000346
0,2	—0,0000549	—0,000188	—0,000348	—0,000485	—0,000534	—0,000485	—0,000348	—0,000188	—0,0000549
0,3	—0,000274	—0,000942	—0,00175	—0,00244	—0,00270	—0,00244	—0,00175	—0,000942	—0,000274
0,4	—0,000865	—0,00295	—0,00551	—0,00766	—0,00850	—0,00766	—0,00551	—0,00295	—0,000865
0,5	—0,00210	—0,00720	—0,01332	—0,01852	—0,0205	—0,01852	—0,01332	—0,00720	—0,00210
0,6	—0,00425	—0,01500	—0,0274	—0,0384	—0,0424	—0,0384	—0,0274	—0,01500	—0,00425
0,7	—0,00801	—0,0272	—0,0500	—0,0712	—0,0783	—0,0712	—0,0500	—0,0272	—0,00801
0,8	—0,01336	—0,0453	—0,0835	—0,1200	—0,1286	—0,1200	—0,0835	—0,0453	—0,01336
0,9	—0,0210	—0,0713	—0,1310	—0,1820	—0,202	—0,1820	—0,1310	—0,0713	—0,0210
1,0	—0,0302	—0,1024	—0,1910	—0,265	—0,296	0,265	—0,1910	—0,0024	—0,0302
1,1	—0,0425	—0,1440	—0,266	—0,370	—0,419	—0,370	—0,266	—0,1440	—0,0425
1,2	—0,0553	—0,1880	—0,350	—0,507	—0,544	—0,507	—0,350	—0,188	—0,0553
1,3	—0,0701	—0,240	—0,448	—0,631	—0,701	—0,631	—0,448	—0,240	—0,0701

Продолжение

u \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,4	—0,0849	—0,293	—0,549	—0,782	—0,865	—0,782	—0,549	—0,293	—0,0849
1,5	—0,0994	—0,346	—0,648	—0,925	—1,043	—0,925	—0,648	—0,346	—0,0994
1,6	—0,1135	—0,398	—0,749	—1,068	—1,198	—1,068	—0,749	—0,398	—0,1135
1,7	—0,1251	—0,441	—0,844	—1,198	—1,395	—1,198	—0,844	—0,441	—0,1251
1,8	—0,1351	—0,476	—0,932	—1,342	—1,558	—1,342	—0,932	—0,476	—0,1351
1,9	—0,1423	—0,514	—1,005	—1,475	—1,711	—1,475	—1,005	—0,514	—0,1423
2,0	—0,1461	—0,536	—1,080	—1,600	—1,854	—1,600	—1,080	—0,536	—0,1461
2,2	—0,1484	—0,661	—1,170	—1,790	—2,130	—1,790	—1,170	—0,661	—0,1484
2,4	—0,1390	—0,557	—1,213	—1,960	—2,360	—1,960	—1,213	—0,557	—0,1390
2,6	—0,1210	—0,524	—1,235	—2,06	—2,580	—2,06	—1,235	—0,524	—0,121
2,8	—0,0956	—0,484	—1,223	—2,200	—2,790	—2,200	—1,223	—0,484	—0,0956
3,0	—0,0667	—0,415	—1,180	—2,290	—2,990	—2,290	—1,180	—0,415	—0,0667
3,2	—0,0358	—0,332	—1,126	—2,36	—3,19	—2,36	—1,126	—0,332	—0,0358
3,4	—0,00461	—0,250	—1,05	—2,41	—3,39	—2,41	—1,05	—0,250	—0,00461
3,6	0,0247	—0,170	—0,964	—2,46	—3,58	—2,46	—0,964	—0,170	0,0247
3,8	0,0500	—0,0922	—0,882	—2,51	—3,81	—2,51	—0,882	—0,0922	0,0500
4,0	0,0690	—0,0246	—0,790	—2,54	—3,98	—2,54	—0,790	0,0246	0,0690
4,2	0,0861	0,0432	—0,696	—2,55	—4,18	—2,55	—0,696	0,0432	0,0861
4,4	0,0967	0,0990	—0,580	—2,57	—4,39	—2,57	—0,580	0,0990	0,0967
4,6	0,1018	0,1415	—0,501	—2,62	—4,61	—2,62	—0,501	0,1415	0,1018
4,8	0,1013	0,485	—0,418	—2,52	—4,79	—2,52	—0,418	0,485	0,1013
5,0	0,0972	0,202	—0,332	—2,52	—5,00	—2,52	—0,332	0,202	0,0972

Находим

$$u = \sqrt[4]{\frac{kl^4}{64EJ}} = \sqrt[4]{\frac{4\cdot 15^4}{64\cdot 2\cdot 10^7\cdot 2\cdot 10^{-3}}} = 0{,}53;$$

$$\zeta_1 = \frac{3}{15} = 0{,}2;\ \zeta_2 = \frac{12}{15} = 0{,}8.$$

Для найденных значений ζ_i и вычисленного значения u, используя табл. 11—15 и производя линейное интерполирование между значениями функций для ближайших аргументов $0{,}5 \leqslant 0{,}53 \leqslant 0{,}60$, будем иметь для $u = 0{,}53$:

$$\bar{\varphi}_0(u, \zeta_1) = \bar{\varphi}_0(0{,}53{,}02) = 0{,}00180;$$
$$\bar{\mu}_0(u, \zeta_1) = \bar{\mu}_0(0{,}53{,}02) = -0{,}0197;$$
$$\bar{\nu}_A(u, \zeta_1) = \bar{\nu}_A(0{,}53\ 02) = -0{,}890;$$
$$\bar{\mu}_A(u, \zeta_1) = \bar{\mu}_A(0{,}53{,}02) = 0{,}1286;$$
$$\bar{\nu}_A(u, \zeta_2) = \bar{\nu}_A(0{,}53{,}08) = -0{,}1012;$$
$$\bar{\mu}_A(u, \zeta_2) = \bar{\mu}_A(0{,}53{,}08) = 0{,}0314.$$

Отсюда получим:

Стрелка прогиба посредине пролета

$$v_{z=0} = \frac{Pl^3}{EJ}\bar{\varphi}_0(u, \zeta_1) = \frac{30\cdot 15^3\cdot 10^2}{2\cdot 10^7\cdot 2\cdot 10^3}\,0{,}00180 = 0{,}46\ см.$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_0 = Pl\bar{\mu}_0(u, \zeta_1) = 30\cdot 15\,(-0{,}0197) = -8{,}9\ тм.$$

Изгибающий момент на левой опоре

$$M_1 = Pl\bar{\mu}_A(u, \zeta_1) = 30\cdot 15\cdot 0{,}1286 = 57{,}9\ тм.$$

Изгибающий момент на правой опоре

$$M_2 = Pl\bar{\mu}_A(u, \zeta_2) = 30\cdot 15\cdot 0{,}0314 = 14{,}1\ тм.$$

Срезывающая сила на левой опоре

$$N_1 = P\bar{\nu}_A(u, \zeta_1) = 30\,(-0{,}890) = -26{,}7\ т.$$

Срезывающая сила на правой опоре

$$N_2 = P\bar{\nu}_A(u, \zeta_2) = 30\,(-0{,}1012) = -3{,}04\ т.$$

Проверка:

$$-26{,}7 - 3{,}04 \approx -30 = P.$$

§ 19. Применение метода начальных параметров к изгибу балок на сплошном упругом основании

Пользуясь общим интегралом упругой линии балок на сплошном упругом основании, даваемым равенством (5), можно применить метод начальных параметров (метод Клебша).

Следуя этому методу, к общему выражению для упругой линии, выписанному для левой части балки, нужно прибавлять, начиная с того сечения, где к ней приложены какая-либо сила P, момент $\mathfrak{M}$ или нагрузка q, дополнительный член, учитывающий разрыв аналитической непрерывности общего выражения прогиба v и его производных, имеющий место в данной точке.

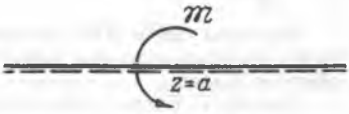


Рис. 19.

Случай первый. В сечении $z = a$ балка загружена моментом $\mathfrak{M}$ (рис. 19).

К выражению для прогиба левой части балки прибавляется член

$$v = \frac{\mathfrak{M}}{2\alpha^2 EJ} V_2[\alpha(z-a)]. \tag{98}$$

Случай второй. В сечении $z = b$ балка загружена силой P (рис 20). К выражению для прогиба левой части балки прибавляется член

$$v = \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EJ} V_3 [\alpha (z - b)]. \tag{99}$$

Случай третий. Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой на участке от $z = c$ до $z = d$ (рис. 21).

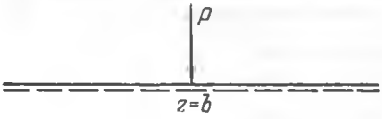


Рис. 20.

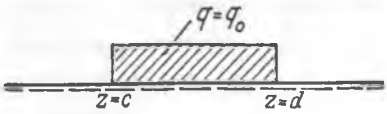


Рис. 21.

К выражению для прогиба левой части балки прибавляется член

$$v = \frac{q_0}{4EJ\alpha^4} \{1 - V_0 [\alpha (z - c)]\} - \Big\|_{z=d} \frac{q_0}{4EJ\alpha^4} \{1 - V_0 [\alpha (z - d)]\}. \tag{100}$$

Случай четвертый. Балка загружена нагрузкой, распределенной по закону треугольника на участке от $z = e$ до $z = f$, $q = m(z - e)$ соответственно рис. 22.

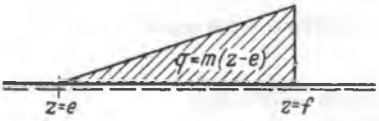


Рис. 22.

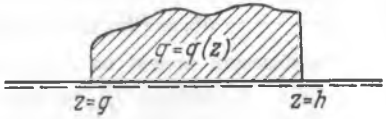


Рис. 23.

К выражению для прогиба левой части балки прибавляются члены

$$v = \frac{m}{4\alpha^4 EJ} \left\{z - e - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1 [\alpha (z - e)]\right\} - \Big\|_{z=f} \frac{m(f-e)}{4\alpha^4 EJ} \{1 - V_0 [\alpha (z - f)]\} -$$
$$- \Big\|_{z=f} \frac{m}{4\alpha^4 EJ} \left\{z - f - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1 [\alpha (z - f)]\right\}. \tag{101}$$

Случай пятый. Балка загружается нагрузкой, распределенной по любому закону на участке от $z = g$ до $z = h$ (рис. 23).

К выражению для прогиба левой части балки прибавляются члены

$$v = \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^3 EJ} \int_{c=g}^{c=z} q(c) V_3 [\alpha (z - c)]\, dc - \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^3 EJ} \int_{c=h}^{c=z} q(c) V_3 [\alpha (z - c)]\, dc \tag{102}$$

Формулы (98) и (102) позволяют применять метод начальных параметров к изгибу балок на сплошном упругом основании совершенно так же, как и к изгибу обычных балок.

Пример 1. Балка, свободно опертая на две жесткие опоры, лежит на упругом основании, жесткость которого есть k; в точке $z = c$ она загружена сосредоточенной силой (рис. 24). Найти упругую линию балки.

Имеем граничные условия
при $z = 0$ и $z = l$

$$v = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Упругая линия v на участке $z < c$ выражается равенством

$$v = D_0 V_0 (\alpha z) + D_1 V_1 (\alpha z) + D_2 V_2 (\alpha z) + D_3 V_3 (\alpha z). \tag{103}$$

В силу граничных условий при $z = 0$, имея в виду свойства функций V_i [см. выражения (7)], $D_0 = D_2 = 0$ и, следовательно,

$$v = D_1 V_1(\alpha z) + D_3 V_3(\alpha z). \tag{104}$$

На правом участке балки к выражению (104) должен быть, согласно формуле (99), прибавлен член

$$\frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EJ} V_3[\alpha(z-c)]. \tag{105}$$

Отсюда общее выражение для упругой линии балки может быть представлено равенством

$$v = D_1 V_1(\alpha z) + D_3 V_3(\alpha z) + \Big\|_c \frac{P V_3[\alpha(z-c)]}{2\sqrt{2} EJ\alpha^3}. \tag{106}$$

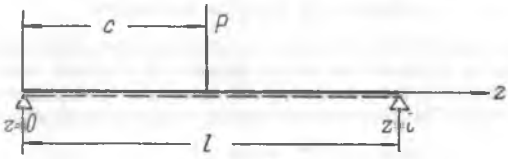


Рис. 24.

Используя граничные условия при $z = l$ и введя обозначения $c_1 = l - c$, $\alpha l = 2u$, получим

$$D_1 V_1(2u) D_3 V_3(2u) + \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EJ} V_3(\alpha c_1) = 0; \tag{107}$$

$$-2\alpha^2 D_1 V_3(2u) + D_3 2\alpha^2 V_1(2u) + \frac{P}{\sqrt{2}\alpha EJ} V_1(\alpha c_1) = 0.$$

Используя таблицу вспомогательных функций (табл. 1), найдя из уравнений (107) численные значения постоянных интегрирования D_1 и D_3 и подставляя их в выражение для v, определяют прогиб балки в любой точке по ее длине.

Пример 2. Балка с одним концом свободно опертым, а другим жестко заделанным лежит на упругом основании, жесткость которого есть k, и загружена нагрузкой, распределенной по закону треугольника (рис. 25). Найти упругую линию балки.

Имеем граничные условия

при $z = 0$

$$v = 0; \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0;$$

при $z = l$

$$v = 0; \quad \frac{dv}{dz} = 0.$$

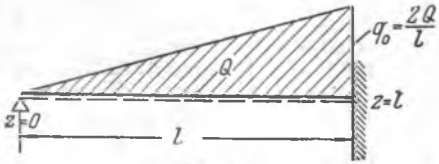


Рис. 25.

Так как $q = mz$, а $q_0 = ml$, то $m = \frac{2Q}{l^2}$; отсюда $q = mz = \frac{2Q}{l^2} z$.

Упругая линия балки имеет вид

$$v = \frac{2Q}{4\alpha^4 EJ l^2}\left[z - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1(\alpha z)\right] + D_0 V_0(\alpha z) + D_1 V_1(\alpha z) +$$
$$+ D_2 V_2(\alpha z) + D_3 V_3(\alpha z). \tag{108}$$

В силу граничных условий на левом конце балки $D_0 = D_2$ и тогда

$$v = \frac{2Q}{4\alpha^4 EJ l^2}\left[z - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1(\alpha z)\right] + D_1 V_1(\alpha z) + D_3 V_3(\alpha z). \tag{109}$$

Используем граничные условия на правом конце балки, при $z = l$; постоянные интегрирования могут быть получены из выражений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2Q}{l^2 4\alpha^4 EJ}\left[l - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} V_1(2u)\right] + D_1 V_1(2u) + D_3 V_3(2u) = 0 \\ &\frac{2Q}{l^2 4\alpha^4 EJ}\left[1 - V_0(2u)\right] + D_1 \sqrt{2}\alpha V_0(2u) + D_3 \sqrt{2}\alpha V_2(2u) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

Найдя из этих уравнений численные значения постоянных D_1 и D_2 и подставив их в выражение для v, раскрываем статическую неопределимость задачи. При помощи табл. 1 можно вычислить для любой балки как само перемещение, так и любую его производную по z.

§ 20. Применение функций Г. В. Клишевича к расчету балок, лежащих на упругом основании

При больших значениях аргумента u использование функций Н. П. Пузыревского приводит к вычислению малых разностей близких величин, что влечет за собой потерю точности вычислений. Г. В. Клишевичем предложены в этом случае для расчета балок на упругом основании следующие функции:

$$\left.\begin{aligned} W_0(\alpha z) &= e^{-\alpha z}\cos\alpha z \\ W_1(\alpha z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha z}(\sin\alpha z - \cos\alpha z) \\ W_2(\alpha z) &= -e^{-\alpha z}\sin\alpha z \\ W_3(\alpha z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha z}(\cos\alpha z + \sin\alpha z) \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

где $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$.

При $\alpha z = 0$

$$W_0(0) = 1;\quad W_1(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}};\quad W_2(0) = 0;\quad W_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Функции Клишевича подчиняются следующему правилу дифференцирования по аргументу:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW_3(\alpha z)}{dz} &= \alpha\sqrt{2}W_2(\alpha z) \\ \frac{dW_2(\alpha z)}{dz} &= \alpha\sqrt{2}W_1(\alpha z) \\ \frac{dW_1(\alpha z)}{dz} &= \alpha\sqrt{2}W_0(\alpha z) \\ \frac{dW_0(\alpha z)}{dz} &= -\alpha\sqrt{2}W_3(\alpha z) \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

При помощи функций Клишевича общий интеграл уравнения (1) может быть записан следующим образом:

$$v = \frac{q(z)}{k} + AW_i(\alpha z) + BW_j(\alpha z) + CW_g[\alpha(l - z)] + DW_h[\alpha(l - z)]. \quad (113)$$

где $i \neq j$; $g \neq h$;

A, B, C, D — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий закрепления опорных сечений балки.

Пример. Определить упругую линию балки, лежащей на упругом основании, жесткость которого k, и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q при $u = \alpha l = 4{,}00$ (рис. 26).

Таблица 16

Значения функций

$$W_0(u) = e^{-u}\cos u; \quad \sqrt{2}\,W_1(u) = e^{-u}(\sin u - \cos u);$$
$$W_2(u) = -e^{-u}\sin u; \quad \sqrt{2}\,W_3(u) = e^{-u}(\cos u + \sin u),$$

входящих в решение Циммермана—Клишевича для балок на упругом основании

u	$W_0(u)$	$\sqrt{2}\,W_1(u)$	$W_2(u)$	$\sqrt{2}\,W_3(u)$
3,00	—0,049	0,056	—0,007	—0,042
3,10	—0,045	0,047	—0,002	—0,043
3,20	—0,041	0,038	0,002	—0,043
3,30	—0,036	0,031	0,006	—0,042
3,40	—0,032	0,024	0,009	—0,041
3,50	—0,028	0,018	0,011	—0,039
3,60	—0,025	0,012	0,012	—0,037
3,70	—0,021	0,008	0,013	—0,034
3,80	—0,018	0,004	0,013	—0,031
3,90	—0,015	0,001	0,014	—0,029
4,00	—0,012	—0,002	0,014	—0,026
4,10	—0,010	—0,004	0,014	—0,023
4,20	—0,007	—0,006	0,013	—0,020
4,30	—0,005	—0,007	0,012	—0,018
4,40	—0,004	—0,008	0,012	—0,016
4,50	—0,002	—0,009	0,011	—0,013
4,60	—0,001	—0,009	0,010	—0,011
4,70	—0,000	—0,009	0,009	—0,009
4,80	0,001	—0,009	0,008	—0,008
4,90	0,001	—0,009	0,007	—0,006
5,00	0,002	—0,008	0,007	—0,005
5,10	0,002	—0,008	0,006	—0,003
5,20	0,003	—0,008	0,005	—0,002
5,30	0,003	—0,007	0,004	—0,001
5,40	0,003	—0,006	0,004	—0,001
5,50	0,003	—0,006	0,003	0,000
5,60	0,003	—0,005	0,002	0,001
5,70	0,003	—0,005	0,002	0,001
5,80	0,003	—0,004	0,001	0,001
5,90	0,003	—0,004	0,001	0,002
6,00	0,002	—0,003	0,001	0,002
6,50	0,002	—0,001	0,000	0,002
7,00	0,001	0,000	—0,001	0,001
7,50	0,000	0,000	—0,001	0,001
8,00	0,000	0,000	0,000	0,000

Запишем общее выражение упругой линии, например в виде [см. формулу (113)]

$$v = \frac{q}{k} + AW_2(\alpha z) + BW_0(\alpha z) + CW_2[\alpha(l-z)] + D\sqrt{2}W_3[\alpha(l-z)]. \quad (114)$$

Определяя постоянные интегрирования из граничных условий $v(0) = v''(0) = 0$; $v(l) = v'(l) = 0$, получим следующую систему уравнений:

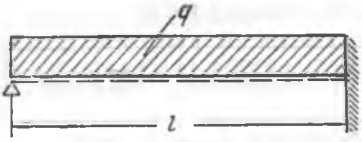


Рис. 26.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q}{k} + B + CW_2(u) + D\sqrt{2}W_3(u) = 0 \\ &A + CW_0(u) + D\sqrt{2}W_1(u) = 0 \\ &\frac{q}{k} + AW_2(u) + BW_0(u) + D = 0 \\ &A\sqrt{2}W_1(u) - B\sqrt{2}W_3(u) + C = 0 \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

При $u = 4{,}0$ функции Клишевича (табл. 16) принимают следующие значения:

$$W_0(4) = -0{,}012;\ \sqrt{2}W_1(4) = -0{,}002;\ W_2(4) = 0{,}014;$$
$$\sqrt{2}W_3(4) = -0{,}026. \quad (116)$$

Используя значения (116), перепишем систему (115) в виде

$$\left.\begin{aligned} &D = -\frac{q}{k} - A0{,}014 + B0{,}012 \\ &B = -\frac{q}{k} - C0{,}014 + D0{,}026 \\ &A = C0{,}012 + D0{,}002 \\ &C = A0{,}002 - B0{,}026 \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

Решив систему уравнений методом последовательных приближений, найдем

$$D = -1{,}012\frac{q}{k};\ B = -1{,}026\frac{q}{k};\ A = -0{,}002\frac{q}{k};\ C = 0{,}026\frac{q}{k}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в решение (114), запишем

$$v = \frac{q}{k}\{1 - 0{,}002W_2(\alpha z) - 1{,}026W_0(\alpha z) + 0{,}026W_2[\alpha(l-z)] - \\ -1{,}012W_3[\alpha(l-z)]\}. \quad (118)$$

§ 21. Применение рядов к исследованию изгиба призматических балок на упругом основании

Вследствие громоздкости математических выкладок и формул, связанных с точным исследованием изгиба балок, лежащих на упругом основании и нагруженных произвольной нагрузкой, может быть использован метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изгиба балок на упругом основании при помощи рядов. Этот метод в общем виде разработан академиком Крыловым, который показал также, как можно в отдельных случаях улучшить сходимость этих рядов. Ниже излагаем метод этого исследования, основанный на применении тригонометрических рядов для решения дифференциального уравнения изгиба балки. За исходный случай нагрузки балки рассмотрим сначала свободно опертую балку, нагруженную одной сосредоточенной силой, приложенной на расстоянии c от левой опоры (рис. 16).

Уравнение упругой кривой балки можно представить в виде тригонометрического ряда

$$v = \sum_{n=1,2,\ldots} A_n \sin \frac{n\pi z}{l}. \tag{119}$$

Для нахождения параметров A_n подставляем выражение (119) в уравнение (1), после чего помножим это уравнение на $\sin \frac{n\pi z}{l}$ и интегрируем его в пределах от 0 до l; замечая, что $q = 0$ при $z \neq c$ и $q \neq P$ при $z = c$, получим

$$A_n = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} P \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^4 + \alpha_1}, \tag{120}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{kl^4}{\pi^4 EJ} \approx 0{,}66u^4. \tag{121}$$

Подставляя выражение (120) в выражение (119) получим уравнение упругой кривой для балки, нагруженной одной сосредоточенной силой P, приложенной на расстоянии c от левой опоры, в следующем виде:

$$v = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} P \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l}}{n^4 + \alpha_1}. \tag{122}$$

Выражения для прочих элементов балки могут быть получены из уравнения (122), дифференцированием его по переменной z.

Угол поворота балки на левой опоре

$$v'_{z=0} = \frac{2l^2}{EJ\pi^3} P \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{n}{n^4 + \alpha_1} \sin \frac{n\pi c}{l}. \tag{123}$$

Угол поворота балки на правой опоре

$$v'_{z=l} = \frac{2l^2}{EJ\pi^3} P \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{n(-1)^n}{n^4 + \alpha_1} \sin \frac{n\pi c}{l}. \tag{124}$$

Изгибающий момент посредине

$$M_{z=0} = EJv'' = \frac{-2l}{\pi^2} P \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{n^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^4 + \alpha_1} \sin \frac{n\pi c}{l}. \tag{125}$$

Реакция на правой опоре:

$$R_{z=l} = -\frac{Pc}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l kv \cdot z\,dz = -\frac{Pc}{l} - \frac{2\alpha_1}{\pi} \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{(-1)^n}{n(n^4 + \alpha_1)} \sin \frac{n\pi c}{l}. \tag{126}$$

Исходя из выражений для элементов изгиба балки, нагруженной одной сосредоточенной силой, можно, пользуясь методом наложения, легко получить элементы изгиба балки, нагруженной произвольной нагрузкой.

Пример. Свободно опертая балка нагружена по закону треугольника и лежит на упругом основании, жесткость которого есть k (рис. 27).

Очевидно, $q_c = \frac{2Qc}{l^2}$.

Уравнение упругой кривой для балки, нагруженной по треугольнику, как показано на рис. 27, можно получить, исходя из выражения (122), положив в нем $P = qdc = \frac{2Q}{l^2} cdc$ и интегрируя по переменной c в пределах от 0 до l

$$v = -\frac{4Ql^2}{EJ\pi^5} \sum_{n=1,2\ldots} \frac{(-1)^n}{n(n^4+\alpha_1)} \sin\frac{n\pi z}{l}. \tag{127}$$

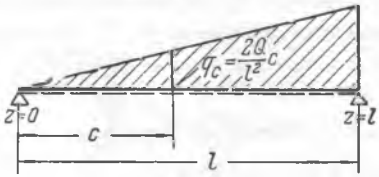


Рис. 27.

Углы поворота на левой и правой опорах для балки, нагруженной по треугольнику, могут быть получены подобным же образом из выражений (123) и (124) или же непосредственно по выражению (127)

$$v'_{z=0} = -\frac{4Ql^2}{EJ\pi^4} \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{(-1)^n}{n^4+\alpha_1}; \quad v'_{z=l} = -\frac{4Ql^2}{EJ\pi^4} \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n^4+\alpha_1}. \tag{128}$$

§ 22. Статически неопределимые случаи изгиба балок, лежащих на упругом основании

Статически неопределимые случаи изгиба балок, лежащих на упругом основании, в том числе и неразрезные балки, могут быть решены, пользуясь методом наложения, совершенно так же, как это было показано применительно к обыкновенным балкам

Пример. Балка с одним свободно опертым и другим закрепленным концом лежит на упругом основании, жесткость которого есть k, и находится под действием нагрузки по треугольнику (рис. 28).

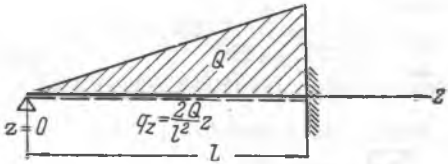


Рис. 28.

Принимаем за лишнюю неизвестную опорный момент на правой опоре $\mathfrak{M}_2$. Величина угла поворота балки на правой опоре от нагрузки по треугольнику по выражению (128) равна

$$v'_2 = -\frac{4Ql^2}{EJ\pi^4} \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n^4+\alpha_1}.$$

Угол поворота на правой опоре от момента $\mathfrak{M}_2$ по выражению (49)

$$v'_2 = \frac{\mathfrak{M}_2 l}{3EJ} \psi_0(u).$$

Приравнивая углы поворота, получим

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{12Ql}{\pi^4\psi_0(u)} \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n^4+\alpha_1}. \tag{129}$$

Этим методом можно также решать задачу о сложном изгибе балок на сплошном упругом основании, решение ее обычным методом является задачей весьма сложной. [1]

[1] Более точное решение сложного изгиба балок на упругом основании см. Справочник по прочности судов внутреннего плавания, И. Н. Сиверцев, В. В. Давыдов, Н. В. Маттес, изд. МРФ СССР, 1950.

Пример. Балка свободно оперта на две жесткие опоры, лежит на упругом основании, жесткость которого есть k, подвержена действию сжимающих усилий S и равномерно распределенной нагрузки q (рис. 29). Общий вид дифференциального уравнения изгиба балки

$$EJv^{\mathrm{IV}} + kv = q - Sv'' \tag{130}$$

так как при $z = 0$ и $z = l$ $v = 0$ и $v'' = 0$.

Уравнение упругой кривой принимаем в виде ряда

$$v = \sum_{n=1,\,2,\,\ldots} A_n \sin\frac{n\pi z}{l}. \tag{131}$$

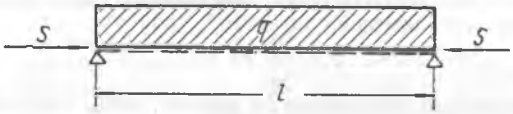


Рис. 29.

Подставляя выражение (131) в (130), получим:

$$\frac{EJ\pi^4}{l^4}\sum_{n=1,\,2,\,\ldots} A_n n^4 \sin\frac{n\pi z}{l} = q - k\sum_{n=1,\,2,\,\ldots} A_n \sin\frac{n\pi z}{l} + \\ + \frac{S\pi^2}{l^2}\sum_{n=1,\,2,\,\ldots} A_n n^2 \sin\frac{n\pi z}{l}. \tag{132}$$

Для определения параметра A_n умножаем обе части уравнения на $\sin\frac{n\pi z}{l}$ и интегрируем в пределах от 0 до l. Поскольку все интегралы в рядах, содержащие произведения синусов, за исключением одного, в который входит квадрат синуса, равны нулю, получим, что при n четном $A_n = 0$, а при n нечетном

$$A_n = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5}\,\frac{1}{n^3\left(n^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4 n^2} - \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}\right)}. \tag{133}$$

Таким образом, уравнение упругой кривой балки имеет вид

$$v = \frac{4ql^5}{EJ\pi^5}\sum_{n=1,\,3}\frac{\sin\frac{n\pi z}{l}}{n^3\left(n^2 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4 n^2} - \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}\right)}. \tag{134}$$

Все остальные элементы изгиба балки определяются соответственным дифференцированием уравнения (134).

ГЛАВА 2

ИЗГИБ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим общий случай, когда балка имеет переменный момент инерции поперечного сечения и лежит на упругом основании переменной жесткости

Дифференциальное уравнение изгиба такой балки имеет вид:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2v}{dz^2}\right] = q(z) - kv. \tag{135}$$

Уравнение (135) решается точно в весьма ограниченных случаях, не имеющих практического значения, поэтому для решения этого уравнения следует применять приближенные методы. Наиболее распространенными из них являются: 1) метод последовательных приближений; 2) метод потенциальной энергии.

§ 23. Метод последовательных приближений

Этот метод в общем виде разработан А. Н. Крыловым для случая изгиба балок переменного сечения, лежащих на упругом основании, коэффициент жесткости которого по всей длине является постоянным, и обобщен П. Ф. Папковичем на случай, когда жесткость упругого основания является любой функцией.

Если балка по условиям закрепления на концах может перемещаться как твердое целое, то для того, чтобы иметь возможность воспользоваться методом последовательных приближений, положим

$$v = \alpha + \beta z + w, \tag{136}$$

где α и β — постоянные подбираемые из условия, чтобы нагрузка рассчитываемой балки $q(z)$ была уравновешена реакциями упругого основания.

Обозначим

$$v_0 = \alpha + \beta z, \tag{137}$$

где α и β определяются из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^l [q(z) - k(z)(\alpha + \beta z)]\, dz = 0 \\ &\int_0^l \int_0^z [q(z) - k(z)(\alpha + \beta z)]\, dz^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Обозначив $q_1(z) = q(z) - k(z)(\alpha + \beta z)$, имеем

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ(z)\frac{d^2w}{dz^2}\right) = q_1(z) - k(z)\,w. \tag{139}$$

Положим

$$w = w_0 + w_1 + \ldots + w_n, \tag{140}$$

где функции w_i определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{dz}\left(EJ(z)\frac{d^2w_0}{dz^2}\right) = q_1(z) \\ &\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ(z)\frac{d^2w_1}{dz^2}\right) = -k(z)\,w_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ(z)\frac{d^2w_n}{dz^2}\right) = -k(z)\,w_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

из которых все являются уравнениями упругого равновесия «свободной» балки (не лежащей на упругом основании) переменного сечения под действием известной нагрузки.

Указанное решение является простым, если ряд (141) является рядом сходящимся.

П. Ф. Папкович показал,[1] в каком случае это будет иметь место и что нужно сделать, чтобы улучшить сходимость этого ряда.

---

[1] П. Ф. Папкович, Строительная механика корабля, ч. I, т. II, „Морской транспорт", 1947.

Метод последовательных приближений требует, как правило, трудоемких вычислений, особенно когда жесткость упругого основания относительно велика. Поэтому более целесообразно использовать при решении задачи об изгибе непризматических балок на упругом основании метод потенциальной энергии.

§ 24. Метод потенциальной энергии

Метод потенциальной энергии позволяет находить упругую линию любой балки и в том числе переменной жесткости, лежащей на упругом основании, без интегрирования дифференциальных уравнений.

Для иллюстрации этого метода рассмотрим следующий случай.

Балка переменной жесткости $J(z)$ лежит на упругом основании, жесткость которого неодинакова по всей длине и равна $k(z)$, нагружена произвольной нагрузкой, а также силами и моментами, приложенными к ее концам (рис. 30).

Если бы балка имела при $z=0$ и $z=l$ недеформируемые опоры, то ее упругая линия могла бы быть принята в виде

$$v=\sum_{n=1,2,\ldots} A_n \sin\frac{n\pi z}{l}. \qquad (142)$$

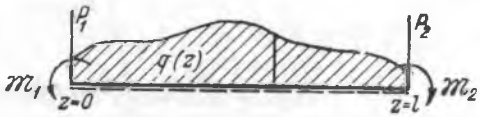


Рис. 30.

Чтобы дать возможность перемещаться также и сечениям $z=0$ и $z=l$, достаточно прибавить к правой части равенства линейную функцию вида $\alpha+\beta z$, тогда

$$v=\alpha+\beta z+\sum_{n=1,2,\ldots} A_n \sin\frac{n\pi z}{l}. \qquad (143)$$

Потенциальная энергия деформации такой балки сложится из потенциальной энергии ее изгиба

$$V_1=\frac{1}{2}\int_0^l EJ(z)(v'')^2\,dz \qquad (144)$$

и потенциальной энергии деформации упругого основания

$$V_2=\frac{1}{2}\int_0^l k(z)\,v^2\,dz. \qquad (145)$$

Работа же внешних сил сложится: из работы нагрузки, распределенной по длине балки по определенному закону,

$$U_1=\int_0^l q(z)\,v\,dz. \qquad (146)$$

из работы сил P_1 и P_2, приложенных к сечениям $z=0$ и $z=l$,

$$U_2=P_1 v(0)+P_2 v(l) \qquad (147)$$

и из работы моментов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$

$$U_3=-\mathfrak{M}_1 v'(0)+\mathfrak{M}_2 v'(l). \qquad (148)$$

приложенных в сечениях $z=0$ и $z=l$.

Таким образом, суммарная величина потенциальной энергии и силовой функции изгиба балки будет иметь вид:

$$V-U=\frac{1}{2}\int_0^l EJ(z)(v'')^2\,dz+\frac{1}{2}\int_0^l k(z)\,v^2 dz-$$

$$-\int_0^l q(z)\,v\,dz-P_1 v(0)-P_2 v(l)+\mathfrak{M}_1 v'(0)-\mathfrak{M}_2 v'(l). \qquad (149)$$

Разворачивая уравнения

$$\frac{d(V-U)}{dA_n}=0 \tag{150}$$

при $n=1, 2, \ldots$ после подстановки в них значений функции $V-U$ и ее производных можно получить систему уравнений, из которых и определяются значения всех A_n, соответствующих равновесному состоянию системы под действием заданной совокупности внешних сил.

Значения α и β могут быть определены либо из выражений $\frac{\partial(V-U)}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial(V-U)}{\partial\beta}$, либо непосредственно из условий равновесия (138).

Производя все указанные выше действия и вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^l k(z)\,dz = \mathrm{I}\\
&\int_0^l k(z)\,z\,dz = \mathrm{II}\\
&\int_0^l k(z)\,z^2\,dz = \mathrm{III}\\
&\int_0^l k(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz = \mathrm{IV}\\
&\int_0^l k(z)\,z\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz = \mathrm{V}\\
&\int_0^l q(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz + \frac{\pi n}{l}\left(\mathfrak{M}_2(-1)^n - \mathfrak{M}_1\right) = \mathrm{VI}\\
&\frac{E\pi^4 n^4}{l^4}\left|\int_0^l J(z)\sin^2\frac{n\pi z}{l}\,dz + \int_0^l k(z)\sin^2\frac{n\pi z}{l}\,dz\right| = \mathrm{VII}\\
&\int_0^l q(z)\,dz + P_1 + P_2 = P_0\\
&\int_0^l q(z)\,z\,dz + P_2 l + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1 = M_0
\end{aligned}\right| \tag{151}$$

получим

$$A_n = \frac{1}{\mathrm{VII}}\left(\mathrm{VI} - \mathrm{IV}\alpha - \mathrm{V}\beta\right) \tag{152}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\mathrm{I} - \sum\frac{\mathrm{IV}^2}{\mathrm{VII}}\right)\alpha + \left(\mathrm{II} - \sum\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{IV}}{\mathrm{VII}}\right)\beta = P_0 - \sum\frac{\mathrm{VI}\cdot\mathrm{IV}}{\mathrm{VII}}\\
&\left(\mathrm{II} - \sum\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{IV}}{\mathrm{VII}}\right)\alpha + \left(\mathrm{III} - \sum\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{VII}}\right)\beta = M_0 - \sum\frac{\mathrm{VI}\cdot\mathrm{V}}{\mathrm{VII}}
\end{aligned}\right\} \tag{153}$$

Определяя из этих уравнений значения величин α и β, можно вычислить по выражению (152) значения коэффициентов A_n, определяющих форму кривой изгиба балки на упругом основании и по выражению (143) определить упругую

линию балки, а следовательно, и реакции упругого основания. Правильность и точность произведенных вычислений проверяются обращением в тождество условий статического равновесия.

Определение элементов изгиба балки путем дифференцирования выражения упругой линии связано с потерей точности вычисления, так как при дифференцировании сходимость функциональных рядов ухудшается. Поэтому для определения изгибающих моментов и перерезывающих сил можно воспользоваться другим приемом.

Полагая $q_1 = q(z) - k(z)\,v(z)$, можно при помощи интегрирования определить перерезывающую силу и изгибающий момент

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_0^z q_1 dz + a = \int_0^z q(z)\,dz^2 - \int_0^z k(z)\,v(z)\,dz + a \\ M &= \int_0^z\int_0^z q_1 dz^2 + az + b = \int_0^z\int_0^z q(z) dz^2 - \int_0^z\int_0^z k(z)\,v(z)\,dz^2 + az + b \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

где a и b — постоянные, определяемые из граничных условий.

Если рассматриваемая балка с точки зрения устройства опор является статически неопределимой, то двукратным интегрированием второго выражения следует найти упругую линию

$$v = \int_0^z\int_0^z \frac{1}{EJ(z)}\left[\int_0^0\int_0^z q(z)\,dz^2 - \int_0^z\int_0^z k(z)\,v(z)\,dz^2\right] dz^2 + a\int_0^z\int_0^z \frac{z}{EJ(z)}\,dz^2 +$$

$$+ b\int_0^z\int_0^z \frac{dz^2}{EJ(z)} + cz + d \quad (155)$$

и, подчиняя это выражение граничным условиям, найти постоянные интегрирования.

РАЗДЕЛ IX

ПЛОСКИЕ ПЕРЕКРЫТИЯ

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ПЕРЕКРЫТИЙ

Плоским перекрытием называется инженерное сооружение, состоящее из системы пересекающихся балок, скрепленных между собой в узловых точках, которое предназначено воспринимать нагрузки, действующие перпендикулярно плоскости, образованной этими балками, и передавать эти нагрузки на жесткий опорный контур, ограничивающий перекрытие.

В судовых конструкциях, как правило, имеются только плоские перекрытия, балки которых пересекаются под прямым углом, а опорный контур может быть принят за прямоугольник. В некоторых случаях в составе судового корпуса, кроме плоских перекрытий, могут встретиться перекрытия, обладающие килеватостью, например днищевые перекрытия, имеющие подъем к бортам. Однако все судовые перекрытия при расчете считаются плоскими, а наличие килеватости учитывается увеличением жесткости килевой балки.

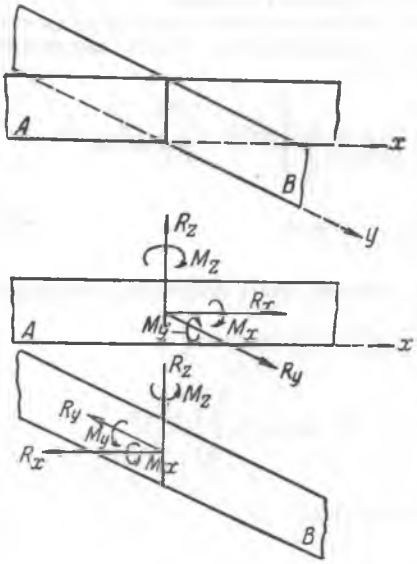


Рис. 1.

Направление, параллельно которому идет большее число балок, называется главным направлением, а соответствующие ему балки — балками главного направления Балки, идущие перпендикулярно балкам главного направления, называются перекрестными балками.

В клепаных конструкциях, кроме того, различают разрезные и неразрезные балки. Балки, которые в точках пересечения с балками другого направления (в узлах) остаются непрерывными, называются неразрезными; разрезными называются балки, которые в узлах перерезаются балками другого направления.

В соответствии с этим система перекрестных связей, в каждом узле которой разрезная балка пересекается с неразрезной балкой, называется статически определимой системой, в противоположность статически неопределимой системе, в которой все или некоторые узлы образованы пересечением неразрезных балок.

Принято считать, что внешняя нагрузка о давления воды воспринимается только пластинами обшивки судна и передается ими на балки перекрытия, которые, в свою очередь, передают эту нагрузку на опорный контур (например, для днищевых и палубных перекрытий опорным контуром являются борта и переборки). Кроме того, считают, что внешняя нагрузка со стороны трюма (грузы, механизмы и т. д.) всегда воспринимается балками главного направления и передается ими на перекрестные балки и опорный контур.

При изгибе статически неопределимого перекрытия взаимодействие балок одного направления с балками другого направления можно свести в каждом

узле их пересечения к трем составляющим вектора силы R_x, R_y и R_z и трем компонентам момента M_x, M_y и M_z (рис. 1). Однако, принимая во внимание, что нагрузка на перекрытие перпендикулярна его плоскости и что пластины, с которыми соединены балки перекрытия, препятствуют перемещениям этих балок в плоскости перекрытия, можно не учитывать силы R_x, R_y и момент M_z, так как они ничтожны. Кроме того, так как жесткость балок на скручивание обычно во много раз меньше, чем на изгиб (в 400—500 раз), то жесткостью кручения можно пренебрегать, считая, что балки одного направления скручиваются, строго следуя за поворотом тех балок, которые работают на изгиб. Поэтому моменты M_x и M_y обычно также не учитываются. Таким образом, задача расчета перекрытия при сделанных допущениях сводится к нахождению неизвестных вертикальных узловых реакций R_z и к определению по этим реакциям и внешней нагрузке элементов изгиба каждой балки. При этом балки главного направления оказываются нагруженными внешней нагрузкой и поддерживающими реакциями R_z в узлах, а перекрестные балки нагружены только этими узловыми реакциями.

Можно, не производя расчета, проверить, правильно ли сконструировано перекрытие, т. е. поддерживаются ли балки главного направления перекрестными балками. Для этого необходимо, чтобы при принятых размерах конструкции выполнялось неравенство

$$c\sqrt{\frac{L}{a}\cdot\frac{J}{i}\left(\frac{L}{l}\right)^3} \geqslant 1{,}5\,(1-\varkappa)+1{,}9\varkappa \qquad (1)$$

где L — длина перекрестных балок;
l — длина балок главного направления;
a — расстояние между балками главного направления;
J — момент инерции перекрестных балок;
i — момент инерции балок главного направления;
$\varkappa$ — коэффициент опорной пары концов перекрестных балок;
c — коэффициент, определяемый по табл. 1 в зависимости от заделки балок главного направления и числа перекрестных балок m.

Таблица 1

Значения коэффициентов c

Схема заделки балок главного направления	m = 1	2	3	4	5
	0,932	0,844	0,785	0,740	0,710
	1,310	1,260	1,176	1,105	1,065
	1,165	1,060	0,965	0,930	0,895

Следует иметь в виду, что если жесткость балок одного направления значительно меньше жесткости балок другого направления, то рассчитывать перекрытие как систему перекрестных связей не имеет смысла. В этом случае расчет следует производить, полагая балки с меньшей жесткостью лежащими на абсолютно жестких опорах, какими для них будут балки с большей жесткостью. Точно так же производится расчет статически определяемых перекрытий.

§ 1. Распределение внешней нагрузки по перекрестным связям

Внешняя нагрузка перекрытий, подкрепленных перекрестными связями, создается давлением воды на пластины. Пластинами перекрытия часть этой нагрузки передается балкам главного направления, часть же — перекрестным балкам. При расчете перекрытий с малым числом балок главного направления, особенно если эти балки относительно коротки, и при проверке сварных и заклепочных соединений, крепящих балки главного направления к перекрестным, необходимо знать, в какой пропорции происходит это распределение внешней

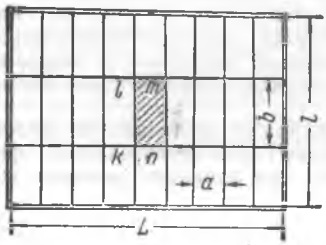


Рис. 2.

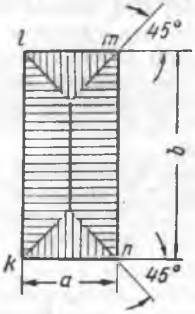


Рис. 3.

нагрузки. Выделим из перекрытия (рис. 2) прямоугольный участок *klmn* (рис. 3), заключенный между смежными балками разных направлений. Предполагая, что внешнее давление *p* на этом участке равномерно распределенное, а закрепление всех четырех кромок листа одинаковое, с достаточной для практики точ-

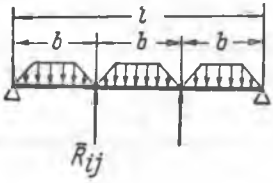


Рис. 4.

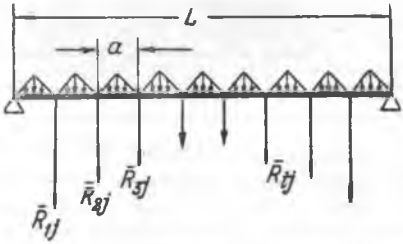


Рис. 5.

ностью можно считать, что из всего приходящегося на этот участок давления, равного *pab*, на каждую короткую сторону опорного контура приходится давление

$$r_a = \frac{pa^2}{4}, \tag{2}$$

а на каждую длинную

$$r_b = \frac{pab}{2} - \frac{pa^2}{4}, \tag{3}$$

т. е. можно считать, что все внешнее давление распределяется по ограничивающим участок *klmn* балкам, пропорционально заштрихованным на рис. 3 площадкам.

Кроме того, каждая балка одного направления воспринимает от пересекающейся с ней балки другого направления некоторую реакцию R_i, сосредоточенную в месте их пересечения. Таким образом, при принятых допущениях эпюру загрузки балок главного направления можно изобразить рис. 4, а перекрестной балки — рис. 5.

Как видно из рис. 4 и рис. 5, внешняя нагрузка на балки перекрытия будет состоять из ряда распределенных нагрузок, число которых для каждой балки одного направления равно числу балок другого направления плюс единица. Если число таких нагрузок на балку достаточно велико, т. е. велико число балок главного направления, то при расчете балки их можно заменить равной непрерывной нагрузкой, распределенной по закону прямой линии.

На основании изложенного распределение внешней нагрузки по перекрестным связям, применительно к нагрузке на перекрытие от давления воды, для ряда случаев может быть выражено следующим образом

Обозначения (в *кг* и *см* или *т* и *м*):

a — расстояние между балками главного направления;

b — расстояние между перекрестными балками, очевидно, что $b > a$;

L — длина перекрестных балок;

l — длина балок главного направления;

p — интенсивность нагрузки;

H_0 — углубление верхней кромки опорного контура перекрытия;

H — углубление нижней кромки опорного контура перекрытия;

ρ — вес единичного объема воды (при размерах в *кг* и *см* $\rho = 0{,}001$ — для пресной воды и $\rho = 0{,}001025$ — для морской; при размерах в *т* и *м* — $\rho = 1$ и $\rho = 1{,}025$ — соответственно).

Балки главного направления расположены вертикально (рис. 6).

Нагрузка на каждую балку главного направления: равномерно распределенная

$$P_1 = \rho a l H_0 \left(1 - \frac{a}{2b}\right); \tag{4}$$

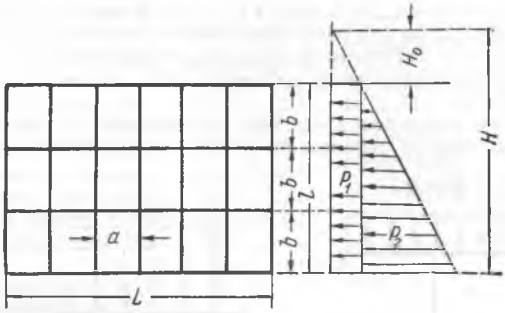


Рис. 6.

распределенная по треугольнику

$$P_2 = \rho \frac{al}{2} (H - H_0) \left(1 - \frac{a}{2b}\right); \tag{5}$$

суммарная нагрузка

$$P = P_1 + P_2 = \frac{\rho a l}{2} (H + H_0) \left(1 - \frac{a}{2b}\right). \tag{6}$$

Равномерно распределенная нагрузка на перекрестную балку

$$P_3 = \frac{\rho a L}{2} (H_0 + y_i), \tag{7}$$

где y_i — отстояние перекрестной балки от верхней кромки опорного контура перекрытия.

Перекрестные балки расположены вертикально (рис. 7).

Равномерно распределенная нагрузка на балку главного направления:

$$P = \rho a l (H_0 + z_i) \left(1 - \frac{a}{2b}\right), \qquad (8)$$

где z_i — вертикальное отстояние этой балки от верхней кромки опорного контура перекрытия.

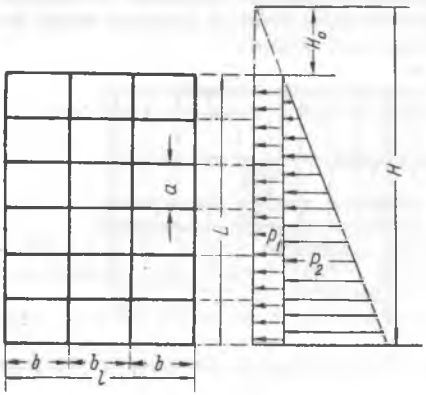


Рис. 7.

Нагрузка на перекрестную балку: равномерно распределенная

$$P_1 = \frac{\rho a L}{2} H_0, \qquad (9)$$

распределенная по треугольнику

$$P_2 = \frac{1}{4} \rho a L (H - H_0), \qquad (10)$$

суммарная нагрузка

$$P_3 = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} \rho a L (H + H_0). \qquad (11)$$

Перекрестные связи расположены горизонтально.

Если на перекрытие действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью p, то для определения нагрузки, приходящейся на каждую балку, можно пользоваться формулами (4) — (7) или (8) — (11), положив в них $H_0 = H$ и $\rho H = p$

При большом числе балок главного направления и малом отношении расстояния между ними к расстоянию между перекрестными связями внешняя

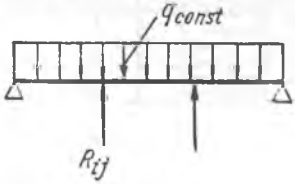


Рис. 8.

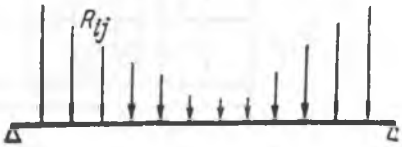


Рис. 9.

нагрузка, воспринимаемая непосредственно перекрестными балками, будет мала по сравнению с внешней нагрузкой, приходящейся на балку главного направления. Поэтому в этом случае можно допустить, что вся внешняя нагрузка воспринимается только балками главного направления (рис. 8), а перекрестные балки загружены только реакциями $\overline{R}_{ij}$ (рис. 9). Подобное распределение нагрузки имеет место также в случае, когда перекрестные балки непосредственно не связаны с настилом.

Принятое допущение значительно упрощает раскрытие статической неопределимости перекрытия, так как уже при числе балок главного направления большем 3 можно заменить действующие на перекрестную балку сосредоточенные реакции $\overline{R}_i$ некоторой распределенной нагрузкой. Получающаяся при этом погрешность в изгибающих моментах и стрелках прогиба будет порядка $\frac{1}{m^2}$, где m — число балок главного направления.

Из рассмотрения расчетной схемы рис. 4 и 5, а также схемы рис. 8 и 9 очевидно, что реакции R_i и $\overline{R_i}$ связаны следующим образом:

$$\overline{R_i} = R_i - \frac{1}{2} pa^2. \tag{12}$$

§ 2. Статически определимые системы перекрестных связей

Система перекрестных связей, в которой ни в одном из узлов не пересекаются неразрезные балки, называется статически определимой системой.

Расчет статически определимой системы не представляет трудности и сводится к расчету свободно опертых между перекрестными связями балок главного направления, определению нагрузки от опорных реакций этих балок на перекрестные связи и расчету последних как обычных балок. Однако при выборе системы перекрестных связей, имеющей наименьший вес, могут встретиться некоторые затруднения. Поэтому для приближенного определения системы, рациональной с точки зрения веса, можно пользоваться табл. 2, в которой даны сравнительные веса различных систем перекрестных связей, показанных на рис. 10, при различных отношениях сторон опорного контура.

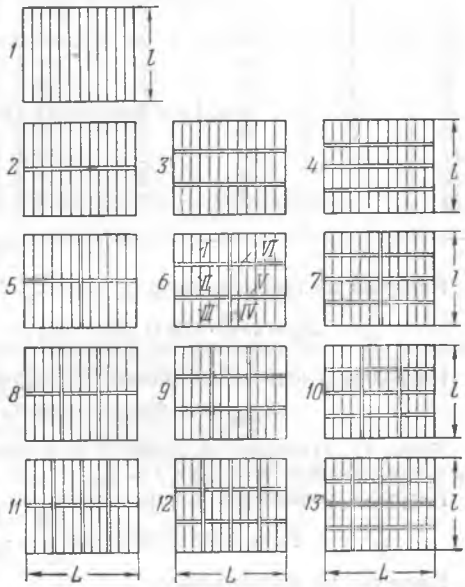


Рис. 10.

Пример. Определить вес перекрытия шириной 4,8 *м* и высотой 4 *м*, нагруженного давлением пресной воды, уровень которой находится на 10 *м* выше верхней опорной кромки; перекрестные связи свободно оперты на жесткий контур, вертикальные балки разрезаны на горизонтальных.

Принимаем короткую сторону опорного контура за главное направление, т. е. полагаем: $L = 4{,}8$ *м*; $l_1 = 4{,}0$ *м*; $H_0 = 10$ *м*; $H = 14$ *м*; $L : l = 1{,}20$.

Из табл. 2 находим, что при отношении сторон опорного контура, близком к 1,25, наиболее выгодными являются системы *6*, *7*, *9* и *10*. Из них наиболее простая система *6*, поэтому на ней и следует остановиться (рис. 10).

Выбрав систему перекрестных связей, примем расстояние между балками главного направления равным 0,6 *м*. При этом следует иметь в виду, что чем это расстояние больше, тем вес перекрестных связей меньше, но зато несколько увеличивается высота профиля балок, что влечет за собой уменьшение полезного объема трюмов и опасность потери устойчивости балок. Поэтому, если при первоначально выбранном расстоянии между балками главного направления они получаются слишком высокими, расчет надо повторить, уменьшив это расстояние.

Определим изгибающие моменты, действующие в каждой балке.

Балки 1. Нагрузки на балки I определяют по формулам (4) и (5), полагая в них: $a = 0{,}6$; $b = 1{,}33$; $l = 1{,}33$; $H_0 = 10$; $H = 11{,}33$; $\rho = 1$.

Нагрузка равномерно распределенная

$$P_1 = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}33 \cdot 10 \left(1 - \frac{0{,}6}{2 \cdot 1{,}33}\right) = 6{,}2 \ m.$$

Таблица 2

№ системы	Число балок главного направления		Число перекрестных балок	Полный вес системы при отношении сторон					
	неразрезных	разрезных		1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50
1	11	0	0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	0	11	1	0,70	0,81	0,94	1,08	1,22	1,54
3	0	11	2	0,69	0,82	1,05	1,24	1 50	2,02
4	0	11	3	0,72	0,94	1,18	1,45	1,75	2,41
5	1	10	1	0,78	0,82	0,88	0,94	1,01	1,17
6	1	10	2	0,67	0,75	0,84	0,94	1,04	1,26
7	1	10	3	0,67	0,77	0,88	1,00	1,13	1,42
8	2	9	1	0,84	0,87	0,91	0,95	0,99	1,07
9	2	9	2	0,72	0,76	0,82	0,88	0,95	1,08
10	2	9	3	0,71	0,77	0,84	0,92	1,00	1,17
11	3	8	1	0,89	0,91	0,94	0,97	1,00	1,05
12	3	8	2	0,76	0,80	0,84	0,88	0,93	1,02
13	3	8	3	0,76	0,81	0,86	0,91	0,97	1,09

Нагрузка по треугольнику

$$P_2 = 1 \cdot \frac{0,6}{2} \cdot 1,33\,(11,33 - 10)\left(1 - \frac{0,6}{2 \cdot 1,33}\right) = 0,41\ m.$$

Наибольший изгибающий момент определяют, используя табл. 8 раздела V,

$$M_{max} = 0,125 P_1 l + 0,128 P_2 l = 1,10\ тм.$$

Балки II. Нагрузку на балки II определяют по формулам (4) и (5), полагая в них: $a = 0,6$; $b = 1,33$; $l = 1,33$; $H_0 = 11,33$; $H = 12,66$; $\rho = 1$.

Нагрузка равномерно распределенная

$$P_1' = 1 \cdot 0\,6 \cdot 1,33 \cdot 11,33\left(1 - \frac{0,6}{2 \cdot 1,33}\right) = 7,0\ m.$$

Нагрузка по треугольнику

$$P_2' = P_2 = 0,41\ m.$$

Наибольший изгибающий момент определяют, используя табл. 8 раздела V,

$$M_{max} = 0\,125 \cdot P_1' l + 0,128 P_2 l = 1,23\ тм.$$

Балки III. Нагрузку определяют по формулам (4) и (5), полагая в них: $a = 0,6$; $b = 1,33$; $l = 1,33$; $H_0 = 12,66$; $H = 14,0$; $\rho = 1$.

Нагрузка равномерно распределенная

$$P_1'' = 1 \cdot 0,6 \cdot 1,33 \cdot 12,66\left(1 - \frac{0,6}{2 \cdot 1,33}\right) = 7,9\ m.$$

Нагрузка по треугольнику

$$P_2'' = P_2' = P_2 = 0,41\ m.$$

Наибольший изгибающий момент определяют, используя табл. 8 раздела V,

$$M_{max} = 0,125 P_1'' l + 0,128 P_2 l = 1\,38\ тм.$$

Балки IV. Нагрузка на эти балки слагается из нагрузки, передающейся непосредственно через листы настила, и из реактивных воздействий балок I

и II. Нагрузку от листов определяют по формуле (7), полагая в ней $a = 0{,}6$; $L = 2{,}4$; $H_0 = 10$; $y_i = 1{,}33$,

$$P_3 = 1 \cdot 0{,}3 \cdot 2{,}4\,(10 + 1{,}38) = 8{,}1\ m.$$

Нагрузка от реакций балок I и II

$$P = 3\left(\frac{1}{2}P_1 + \frac{2}{3}P_2\right) + 3\left(\frac{1}{2}P_1' + \frac{1}{3}P_2'\right) = 21{,}3\,m.$$

Заменяя эти сосредоточенные нагрузки эквивалентной равномерно распределенной нагрузкой, найдем наибольший изгибающий момент для балки VI

$$M_{\max} = \frac{(8{,}1 + 21{,}3)}{8}\,2{,}4 = 8{,}85\ тм.$$

Балки V. Подобно предыдущему, полагая $a = 0{,}6$; $L = 2{,}4$; $H_0 = 10$; $y_i = 2{,}66$, получим:

нагрузка от листов

$$P_3 = 1 \cdot 0{,}3 \cdot 2{,}4\,(10 + 2{,}66) = 9{,}1\ m;$$

нагрузка от реакций балок II и III

$$P = 3\left(\frac{1}{2}P_1' + \frac{2}{3}P_2'\right) + 3\left(\frac{1}{2}P_1'' + \frac{1}{3}P_2''\right) = 26{,}8\,m;$$

наибольший изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{9{,}1 + 26{,}8}{8}\,2{,}4 = 10{,}8\ тм.$$

Балки VI. Нагрузку от листов определяют по формулам (4) и (5), полагая в них: $a = 0{,}6$; $b = 1{,}33$; $l = 4{,}0$; $H_0 = 10$; $H = 14$; $\rho = 1$.

Нагрузка равномерно распределенная

$$P_1 = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 4{,}0 \cdot 10\left(1 - \frac{0{,}6}{2 \cdot 1{,}33}\right) = 18{,}6\ m$$

Нагрузка по треугольнику

$$P_2 = 1 \cdot \frac{0{,}6}{2} \cdot 4{,}0\,(14 - 10)\left(1 - \frac{0{,}6}{2 \cdot 1{,}33}\right) = 3{,}7\ m.$$

Нагрузка от реакций балок VI и V:

в верхнем узле

$$R_1 = 2\,\frac{8{,}1 + 21{,}3}{2} = 29{,}4\ m;$$

в нижнем узле

$$R_2 = 2\,\frac{9{,}1 + 26{,}8}{2} = 35{,}9\ m.$$

Изгибающий момент посредине балки:

от распределенной нагрузки

$$0{,}125P_1 l + 0{,}128P_2 l = 28\ тм;$$

от нагрузки в верхнем узле

$$\frac{29{,}4 \cdot 1{,}33}{4}\,2 = 19{,}5\ тм;$$

от нагрузки в нижнем узле

$$\frac{35{,}9 \cdot 1{,}33}{4}\,2 = 23{,}8\ тм.$$

Суммарный изгибающий момент

$$28 + 19{,}5 + 23{,}8 = 71{,}3\ тм.$$

По полученным изгибающим моментам подбираем профили перекрестных связей и подсчитываем их вес.

§ 3. Раскрытие статической неопределимости системы перекрестных связей, число узловых точек которой относительно невелико

При раскрытии статической неопределимости системы, состоящей из небольшого числа перекрестных связей, т. е. системы, число узловых точек которой относительно невелико (до четырех точек), за основные неизвестные можно принять реакции взаимодействия балок перекрытия. Эти реакции сводятся обычно в каждом узле к одной лишь силе, нормальной к плоскости перекрытия. Для определения этой силы необходимо приравнять стрелки прогиба балок главного направления соответствующим стрелкам прогиба перекрестных балок. Таким образом, очевидно, получится столько уравнений, сколько статически неопределимых реакций необходимо найти.

Когда все статически неопределимые реакции определены, вся нагрузка на балки главного направления и на перекрестные балки становится уже вполне известной. Дальнейший расчет сводится к построению для этих балок эпюр изгибающих моментов и перерезывающих сил и к нахождению по ним величины нормальных и касательных напряжений (раздел V).

Рассмотрим наиболее характерные случаи.

1. Система из двух пересекающихся балок (рис. 11)

Обозначения

l_1 — длина балки I;

l_2 — длина балки II;

c_1 и c_1' — координаты узлового сечения балки I, считая их от опор;

c_2 и c_2' — координаты узлового сечения балки II, считая их от опор;

$B_1 = \frac{l_1^3}{EJ_1}$ — коэффициент, характеризующий жесткость балки I;

$B_2 = \frac{l_2^3}{EJ_2}$ — коэффициент, характеризующий жесткость балки II;

Q_1 и Q_2 — внешняя нагрузка на балки I и II соответственно;

R — лишняя неизвестная — узловая реакция.

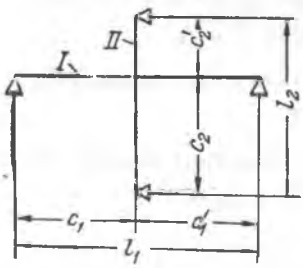


Рис. 11.

Полагаем, что балка I поддерживается балкой II, тогда стрелка прогиба балки I в узловом сечении от нагрузки Q_1 и реакции R будет

$$v_1 = B_1(\alpha_1 Q_1 - \beta_1 R),$$

где α_1 и β_1 — отвлеченные множители в выражениях для упругих кривых от нагрузок Q_1 и R_1 соответственно.

Эти множители можно получить по табл. 8 раздела V полагая в соответствующих выражениях для упругих кривых $z = c_1$.

Стрелка прогиба балки II в узловом сечении от нагрузки Q_2 и реакции R

$$v_2 = B_2(\alpha_2 Q_2 + \beta_2 R),$$

где α_2 и β_2 так же, как α_1 и β_1 определяют по табл. 8 раздела V, полагая $z = c_2$.

Стрелки прогиба обеих балок в узловом сечении должны быть равны, т. е. $v_1 = v_2$; решая это уравнение относительно лишней неизвестной R, получим

$$R = \frac{B_1\alpha_1 Q_1 - B_2\alpha_2 Q_2}{B_1\beta_1 + B_2\beta_2} \tag{13}$$

При этом, если R получится меньше нуля, то, следовательно, в действительности балка I поддерживает балку II.

После того как статическая неопределимость балок раскрыта, следует присоединить найденную реакцию R к внешним нагрузкам и произвести проверку прочности балок.

Пример. Нагрузки Q_1 и Q_2 равномерно распределенные, узловое сечение находится посредине длины балок.

По выражению для прогиба v табл. 8 раздела V, полагая в нем

$$z = c_1 = \frac{l_1}{2} \text{ и } l = l_1,$$

находим

$$\alpha_1 = \frac{5}{384}.$$

По выражению для прогиба v_a табл. 8 раздела V, полагая в нем

$$a = c_1 = \frac{l_1}{2}; \quad b = c_1' = \frac{l_1}{2} \text{ и } l = l_1,$$

находим

$$\beta_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{48}.$$

При данных условиях множители α_2 и β_2 имеют те же значения, что α_1 и β_1. Лишнюю неизвестную R находим по уравнению (13)

$$R = \frac{5}{8}\,\frac{B_1Q_1 - B_2Q_2}{B_1 + B_2}.$$

Очевидно, что если $B_1Q_1 > B_2Q_2$, то вторая балка поддерживает первую; если $B_1Q_1 < B_2Q_2$, то первая балка поддерживает вторую.

2. Система из трех пересекающихся балок (рис. 12)

Обозначения:

l_1, l_2 и l_3 — длина балок I, II, и III;
B_1, B_2 и B_3 — коэффициенты, характеризующие жесткость I, II и III балок соответственно;
Q_1, Q_2 и Q_3 — внешние нагрузки балок I, II и III;
R_1 и R_2 — узловые реакции в левом и правом узлах.

Полагаем, что балки I и II поддерживаются балкой III, тогда стрелка прогиба балки I в узловом сечении от нагрузки Q_1 и реакции R_1

$$v_1 = B_1(\alpha_1Q_1 - \beta_1R_1);$$

стрелка прогиба балки II в узловом сечении от нагрузки Q_2 и реакции R_2

$$v_2 = B_2(\alpha_2Q_2 - \beta_2R_2);$$

стрелка прогиба балки III в левом узловом сечении от нагрузки Q_3 и реакций R_1 и R_2

$$v_3 = B_3(\alpha_3Q_3 + \beta_3R_1 + \beta_4R_2);$$

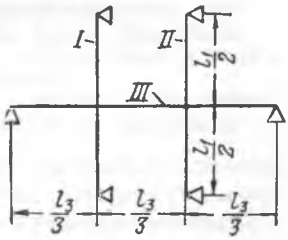


Рис. 12.

стрелка прогиба балки III в правом узловом сечении от нагрузки Q_3 и реакций R_1 и R_2

$$v_4 = B_3(\alpha_4Q_3 + \beta_5R_1 + \beta_6R_2).$$

Приравнивая стрелки прогибов балок в узловых сечениях $v_1 = v_3$ и $v_2 = v_4$, получим два уравнения, из которых можно найти неизвестные реакции R_1 и R_2,

$$B_1(\alpha_1Q_1 - \beta_1R_1) = B_3(\alpha_3Q_3 + \beta_3R_1 + \beta_4R_2);$$
$$B_2(\alpha_2Q_2 - \beta_2R_2) = B_3(\alpha_4Q_3 + \beta_5R_1 + \beta_6R_2).$$

Множители α_i и β_i легко находятся при помощи табл. 8 раздела V, если известны внешние нагрузки и взаимное расположение балок.

Пример. Раскроем статическую неопределимость системы, состоящей из трех перекрестных балок (рис. 12). Будем считать, что внешние нагрузки равно-

мерно распределенные, узловые сечения делят балки на равные части, длина и жесткость балки I равны длине и жесткости балки II. Таким образом, можно написать

$$l_1 = l_2; \quad B_1 = B_2 \text{ и } Q_1 = Q_2.$$

Так как расположение балок и нагрузки симметричны, то узловые реакции R_1 и R_2 равны; поэтому для определения их достаточно составить только одно уравнение.

Стрелка прогиба балки I в узловом сечении

$$v_1 = B_1\left(\frac{5}{384}Q_1 - \frac{1}{48}R\right)$$

(см. предыдущий пример).

Стрелка прогиба балки III в том же узле от нагрузки Q_3 и узловых реакций R

$$v_3 = B_3\left[\alpha_3 Q_3 + R(\beta_3 + \beta_4)\right],$$

где α_3 находим по табл. 8 раздела V, полагая в уравнении упругой кривой $z = \frac{l}{3}$,

$$\alpha_3 = \frac{1}{24}\left[\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right] = \frac{11}{972}.$$

$\beta_3 + \beta_4$ находим по табл. 8 раздела V, полагая в выражении для v_a, что $a = \frac{1}{3}l$ и $b = \frac{2}{3}l$,

$$\beta_3 + \beta_4 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(3\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{162}.$$

Приравнивая стрелки прогиба $v_1 = v_3$ и решая полученное уравнение относительно неизвестной реакции R, получим

$$R = \frac{B_1Q_1 - 0{,}87B_3Q_3}{1{,}6B_1 + 2{,}38B_3}.$$

Зная все нагрузки, действующие на каждую балку, находим:

изгибающий момент посредине балок I и II

$$M = \frac{1}{2}l_1\left(\frac{1}{4}Q_1 - R\right);$$

изгибающий момент посредине балки III

$$M = \frac{1}{3}l_2\left(\frac{3}{8}Q_2 + R\right),$$

изгибающий момент в узловом сечении балки III

$$M = \frac{1}{3}l_2\left(\frac{3}{9}Q_2 + R\right).$$

3. Система из четырех пересекающихся балок (рис. 13)

Нагрузка равномерно распределенная, расположение балок симметричное.

Обозначения:

Q_1 и B_1 — нагрузка и коэффициент, характеризующий жесткость вертикальных балок;

Q_2 и B_2 — нагрузка и коэффициент, характеризующий жесткость горизонтальных балок.

Так как расположение балок симметричное, а нагрузка равномерная, то все четыре узловых реакции равны и определяются выражением

$$R = 0{,}366\frac{B_1Q_1 - B_2Q_2}{B_1 + B_2} \quad (14$$

При этом, если $R > 0$, то это значит, что вертикальные балки поддерживаются горизонтальными, если $R < 0$, — наоборот.

Изгибающий момент посредине длины вертикальных балок

$$M = \frac{l_1}{3}\left(\frac{3}{8}Q_1 - R\right).$$

Изгибающий момент в узловых сечениях вертикальных балок

$$M = \frac{l_1}{3}\left(\frac{1}{3}Q_1 - R\right)$$

Изгибающий момент посредине длины горизонтальных балок

$$M = \frac{l_2}{3}\left(\frac{3}{8}Q_2 + R\right).$$

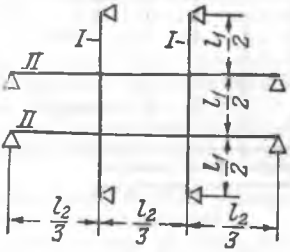


Рис. 13.

Изгибающий момент в узловых сечениях горизонтальных балок

$$M = \frac{l_2}{3}\left(\frac{1}{3}Q_2 + R\right).$$

4. Перекрытие с тремя одинаковыми балками главного направления и одной перекрестной (рис. 14)

Обозначения:

L и b — длины сторон опорного контура;
a — расстояние между балками главного направления;
B_1 и B_2 — коэффициенты, характеризующие жесткость балок главного направления и перекрестной балки;
p — интенсивность равномерно распределенной нагрузки;
$Q = pal$;
J_1 — момент инерции балок главного направления;
J_2 — момент инерции перекрестной балки;
$u = \sqrt[4]{\frac{15}{4}\cdot\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt[4]{\frac{15}{4}\left(\frac{L}{l}\right)^3\frac{J_1}{J_2}}$ — аргумент, характеризующий явление изгиба перекрестных связей;
R_1 — узловая реакция в крайних узлах;
R_2 — узловая реакция в среднем узле.

Предполагая, что давления на перекрестные связи распределяются согласно уравнениям (2) и (3), и уравнивая узловые стрелки прогиба, получим следующие выражения для узловых реакций:

$$R_1 = \frac{625 + 52u^4}{1000 + 533u^4 + 3{,}9u^8}Q - \frac{pa^2}{2}; \tag{15}$$

$$R_2 = \frac{625 - 62{,}5u^4}{1000 + 533u^4 + 3{,}9u^8}Q - \frac{pa^2}{2}. \tag{16}$$

При уменьшении аргумента u узловые реакции увеличиваются и при $u = 0$ достигают величины $R = 0{,}625\cdot Q - \frac{1}{2}pa^2$, соответствующей реакциям при бесконечно жесткой перекрестной балке.

При увеличении аргумента u узловые реакции убывают, приближаясь к нулю, и становятся отрицательными при $u > 1{,}78$. Отрицательное начение узловой

реакции означает, что перекрестная балка не только перестала поддерживать балку главного направления, но еще увеличивает ее нагрузку.

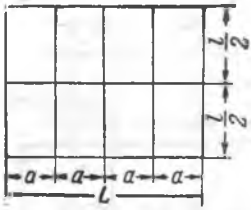


Рис. 14.

Наибольший расчетный изгибающий момент для балок главного направления будет или в узловом сечении крайней балки

$$M = \frac{Ql}{4}\left(\frac{625 + 52u^4}{1000 + 533u^4 + 3{,}9u^8} - \frac{1}{2}\right), \qquad (17)$$

или в пролете средней балки

$$M = \frac{Ql}{8}\left(1 - \frac{625 - 62{,}5u^4}{1000 + 533u^4 + 3{,}9u^8}\right)^2. \qquad (18)$$

Наибольший расчетный изгибающий момент для расчета перекрестной балки

$$M = \frac{QL}{4}\left(\frac{1250 - 10{,}5u^4}{1000 + 533u^4 + 3{,}9u^8}\right). \qquad (19)$$

5. Перекрытие с четырьмя одинаковыми балками главного направления и одной перекрестной (рис. 15)

Обозначения — по предыдущему.

Предположим, что нагрузка на перекрытие равномерно распределенная, а давления по перекрестным связям распределяются согласно уравнениям (2) и (3). Тогда, уравнивая узловые стрелки прогиба, получим:

$$R_1 = \frac{625 + 117u^4}{1000 + 666u^4 + 5{,}53u^8}\,Q - \frac{pa^2}{2}; \qquad (20)$$

$$R_2 = \frac{625 - 64u^4}{1000 + 666u^4 + 5{,}53u^8}\,Q - \frac{pa^2}{2}. \qquad (21)$$

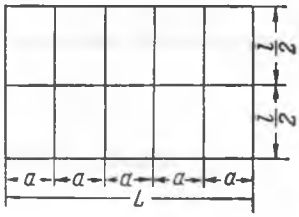


Рис. 15.

При уменьшении аргумента u узловые реакции увеличиваются и при $u = 0$ достигают величины $R = 0{,}625Q - 0{,}5pa^2$, соответствующей реакции при бесконечно жесткой перекрестной балке. Так же, как и в предыдущем случае, при увеличении u узловые реакции убывают, приближаясь к нулю, когда перекрестная балка перестает поддерживать балки главного направления; при этом реакции в средних узлах убывают быстрее, чем в крайних.

При значениях аргумента u больших 1,77 реакция R_2 становится отрицательной, что соответствует случаю, когда перекрестная балка не только не поддерживает средних балок главного направления, но еще увеличивает их нагрузку; при $u = 2{,}63$ увеличение наибольшего изгибающего момента средних балок вследствие указанной причины достигает наибольшей величины ($\sim 11\%$).

Наибольший расчетный изгибающий момент для балок главного направления определяется следующими выражениями:

при $u < 0{,}59$ в узловом сечении крайних балок

$$M = \frac{Ql}{4}\left(\frac{625 + 117u^4}{1000 + 666u^4 + 5{,}53u^8} - \frac{1}{2}\right); \qquad (22)$$

при $u > 0{,}59$ в пролете средних балок

$$M = \frac{Ql}{8}\left(1 - \frac{625 - 64u^4}{1000 + 666u^4 + 5{,}53u^8}\right)^2. \qquad (23)$$

Наибольший расчетный изгибающий момент для перекрестной балки определяется выражением

$$M = \frac{1}{5}\,QL\,\frac{1875 - 11u^4}{1000 + 666u^4 + 5{,}53u^8}. \qquad (24)$$

§ 4. Раскрытие статической неопределимости системы перекрестных связей, число узловых точек которой велико

При раскрытии статической неопределимости системы перекрестных связей, число узловых точек которой велико, применение метода уравнивания узловых деформаций приводит к системе, состоящей из большого числа уравнений с большим числом неизвестных реакций, и связано с вычислением малых разностей близких величин. Поэтому для упрощения расчета перекрытий с большим числом перекрестных связей необходимо сделать следующие допущения (см. § 1):

1) внешняя нагрузка, действующая на перекрытие, передается настилом целиком на балки главного направления, а перекрестные балки загружены только реакциями в узловых сечениях;

2) сосредоточенные реакции, действующие на перекрестные балки в узловых сечениях, можно заменить некоторой распределенной нагрузкой.

В результате принятия этих допущений погрешность расчета не будет превосходить $\frac{1}{m^2}100\%$ (m — число балок главного направления). Таким образом, уже в случае, когда число балок главного направления равно 5, ошибка не будет превышать $\frac{100}{25} = 4\%$, что вполне допустимо в практических расчетах.

ГЛАВА 2

ПЕРЕКРЫТИЯ, ИМЕЮЩИЕ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО БАЛОК ГЛАВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

§ 5. Расчет перекрытий с большим числом одинаковых балок главного направления и одной перекрестной связью (рис. 16)

Принятые выше допущения позволяют задачу об изгибе перекрытия, состоящего из одной перекрестной балки и большого числа одинаковых балок главного направления, свести к задаче об изгибе балки, лежащей на сплошном упругом основании, и таким образом избежать составления и решения системы алгебраических уравнений.

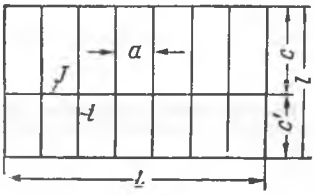


Рис. 16.

В результате этого расчет перекрытия сводится к расчету перекрестной балки, лежащей на упругом основании, определению неизвестных узловых реакций взаимодействия между перекрестными связями и к расчету балок главного направления как балок на двух опорах, нагруженных распределенной внешней нагрузкой и реакцией взаимодействия. Реакции взаимодействия находятся путем приравнивания прогибов перекрестной балки и балки главного направления в каждом узловом сечении.

Так как все балки главного направления обычно делаются одного и того же профиля, то нет необходимости рассчитывать каждую балку, а достаточно рассчитать только ту, эпюры которой наиболее неблагоприятны.

При выборе такой балки необходимо иметь в виду следующее:

1) при очень большой жесткости перекрестных балок, когда они служат почти недеформируемыми опорами балкам главного направления, момент достигает своего наибольшего по абсолютной величине значения обычно в крайних балках главного направления;

2) при малой относительной жесткости перекрестных связей изгибающий момент в средних балках главного направления может оказаться больше момента в крайних балках.

Так как трудно заранее определить, к какому случаю относится рассчитываемое перекрытие, то при одинаковой загрузке всех балок главного направления

надо строить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов как для самых крайних, так и для средних балок.

Если все балки главного направления имеют одинаковый профиль, одинаково загружены и число их более двух, то перекрестные балки уменьшают расчетный изгибающий момент балок главного направления только в тех случаях, когда жесткость перекрестных балок достаточно велика. В противном случае влияние перекрестных балок на балки главного направления может оказаться вредным, так как может увеличить в них расчетный момент.

Обозначения:

L — длина перекрестной балки;
l — длина балок главного направления;
J — момент инерции перекрестной балки;
i — момент инерции балки главного направления;
a — расстояние между балками главного направления;
c — расстояние от опорного контура перекрытия до перекрестной балки;
$Q(z_j)$ — внешняя нагрузка, воспринимаемая j-й балкой главного направления;
β — отвлеченный коэффициент в выражении для стрелки прогиба в узловом сечении балки главного направления от действия внешней распределенной каким-либо образом нагрузки (табл. 8, 11, 12, раздел V);
γ — отвлеченный коэффициент в выражении для стрелки прогиба в узловом сечении балки главного направления от действия сосредоточенной нагрузки, определяемый по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V;
$\varkappa$ — коэффициент опорной пары ($0 < \varkappa < 1$), характеризующий степень закрепления балки по концам;
n — число пролетов перекрестной балки;
$n-1$ — число балок главного направления;
p — интенсивность нагрузки;
A — коэффициент податливости опор;
$\mathfrak{N}$ — коэффициент податливости заделки опорных сечений балки.

$$q(z) = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q(z)}{a} \tag{25}$$

интенсивность нагрузки на перекрестную балку,

$$k = \frac{Ei}{\gamma a l^3} \tag{26}$$

коэффициент жесткости упругого основания, т. е. коэффициент пропорциональности между интенсивностью разгружающего действия упругого основания в какой-то точке и стрелкой прогиба балки в этой точке;

$$u = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{64EJ}} \tag{27}$$

1. Внешняя нагрузка равномерно распределена по перекрытию

В этом случае внешняя нагрузка, приходящаяся на каждую балку главного направления, определяется по формуле

$$Q = pal. \tag{28}$$

а) Концы перекрестной балки свободно оперты на упругие опоры, балки главного направления заделаны произвольно

Расчетные формулы:

узловая реакция в крайних узлах перекрестной балки

$$R_{max} = \frac{\beta}{\gamma} Q \frac{1}{1+B}; \tag{29}$$

узловая реакция в средних узлах перекрестной балки

$$R_{min} = \frac{\beta}{\gamma} Q \frac{\varphi_0(u)}{1+B}, \tag{30}$$

где

$$B = \frac{AkL}{2} \mu_0(u) \tag{31}$$

коэффициент влияния податливости опор (в случае жестких опор $B = 0$);

$$\beta = \frac{1}{24} \cdot \frac{c}{l} \left(1 - 2\frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3}\right);$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{(l-c)^2}{l^2},$$

если балки главного направления свободно оперты обоими концами;

$$\beta = \frac{5}{384}; \quad \gamma = \frac{1}{48},$$

если балки главного направления свободно оперты и делятся перекрестной балкой пополам;

$$\beta = \frac{1}{24} \cdot \frac{c^2}{l^2} \left(1 - 2\frac{c}{l} + \frac{c^2}{l^2}\right);$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{l}\right)^3 \frac{(l-c)^3}{l^3},$$

если балки главного направления обоими концами жестко заделаны;

$$\beta = \frac{1}{384}; \quad \gamma = \frac{1}{192},$$

если балки главного направления обоими концами жестко заделаны и делятся перекрестной балкой пополам;

$$\beta = \frac{5-4\varkappa}{384};$$

$$\gamma = \frac{4-3\varkappa}{192},$$

если балки главного направления обоими концами упруго заделаны с одинаковой степенью заделки $\varkappa$ и делятся перекрестной балкой пополам.

Дальнейший расчет балок главного направления сводится к определению наибольших изгибающих моментов, действующих в узловом сечении крайней балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой $Q = pal$ и сосредоточенной силой R_{max}, и изгибающих моментов в пролете средней балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой $Q = pal$ и сосредоточенной силой R_{min} (рис. 17). Эпюры изгибающих моментов строятся по соответствующим формулам табл. 8, 11, 12 раздела V.

Изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки

$$M_{max} = \frac{-qL^2}{8} \cdot \frac{\chi_0(u)}{1+B}. \tag{32}$$

Наибольшее значение перерезывающей силы

$$N_{max} = \frac{qL}{2} \cdot \frac{\mu_0(u)}{1+B}. \tag{33}$$

Угол поворота опорного сечения перекрестной балки

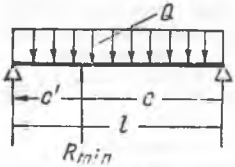


Рис. 17.

$$v_0' = -\frac{qL^3}{24EJ} \cdot \frac{\psi_2(u)}{1+B}. \tag{34}$$

Стрелка прогиба на опоре перекрестной балки

$$v_0 = \frac{q}{k} \cdot \frac{B}{1+B}. \tag{35}$$

Стрелка прогиба посредине пролета перекрестной балки

$$v_{max} = \frac{q}{k}\left(1 - \frac{\varphi_0(u)}{1+B}\right). \tag{36}$$

Численные значения функций $\varphi_0(u)$, $\mu_0(u)$, $\chi_0(u$ и $\psi_2(u)$ приведены в разделе VIII (табл. 2).

б) Концы перекрестной балки жестко заделаны на податливых опорах, балки главного направления заделаны произвольно

Расчетные формулы:

узловая реакция в крайних узлах перекрестной балки

$$R_{max} = \frac{\beta}{\gamma} Q \frac{1}{1+B_1}; \tag{37}$$

узловая реакция в средних узлах перекрестной балки

$$R_{min} = \frac{\beta}{\gamma} Q \frac{\varphi_1(u)}{1+B_1}, \tag{38}$$

где

$$B_1 = \frac{AkL}{2} \mu_1(u) \tag{39}$$

коэффициент влияния податливости опор перекрестной балки; в случае, если опоры жесткие, $B_1 = 0$.

Коэффициенты β и γ и наибольший изгибающий момент в балках главного направления определяются так же, как и в предыдущем случае.

Изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{qL^2}{24} \cdot \frac{\chi_1(u)}{1+B_1}. \tag{40}$$

Изгибающий момент на опоре перекрестной балки

$$M_0 = \frac{qL^2}{12} \cdot \frac{\chi_2(u)}{1+B_1}. \tag{41}$$

Максимальное значение перерезывающей силы

$$N_{max} = \frac{qL}{2} \cdot \frac{\mu_1(u)}{1+B_1}. \tag{42}$$

Стрелка прогиба на опоре перекрестной балки

$$v_0 = \frac{q}{k} \cdot \frac{B_1}{1 + B_1}. \tag{43}$$

Стрелка прогиба посредине пролета перекрестной балки

$$v_{\max} = \frac{q}{k} \left(1 - \frac{\varphi_1(u)}{1 + B_1}\right). \tag{44}$$

Численные значения функций $\varphi_1(u)$, $\mu_1(u)$, $\chi_1(u)$ и $\chi_2(u)$ приведены в разделе VIII (табл. 2).

в) Концы перекрестной балки упруго заделаны на податливых опорах, балки главного направления заделаны произвольно

Расчетные формулы:

узловая реакция в крайних узлах перекрестной балки

$$R_{\max} = \frac{\beta}{\gamma} Q \left(\frac{1 - \varkappa}{1 + B} + \frac{\varkappa}{1 + B_1}\right). \tag{45}$$

Узловая реакция в средних узлах перекрестной балки

$$R_{\min} = \frac{\beta}{\gamma} Q \left[\frac{(1 - \varkappa)\varphi_0(u)}{1 + B} + \frac{\varkappa\varphi_1(u)}{1 + B_1}\right]. \tag{46}$$

Наибольший изгибающий момент в балках главного направления определяется так же, как и в предыдущих случаях. Коэффициенты B и B_1 определяются по формулам (31) и (39).

Изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{qL^2}{8} \left[\frac{(1 - \varkappa)\chi_0(u)}{1 + B} + \frac{\varkappa\chi_1(u)}{3(1 + B_1)}\right]. \tag{47}$$

Изгибающий момент на опоре перекрестной балки

$$M_0 = \varkappa \frac{qL^2}{12} \cdot \frac{\chi_2(u)}{1 + B_1}. \tag{48}$$

Максимальное значение перерезывающей силы

$$N_{\max} = \frac{qL}{2} \left[\frac{(1 - \varkappa)\mu_0(u)}{1 + B} + \frac{\varkappa\mu_1(u)}{1 + B_1}\right]. \tag{49}$$

Угол поворота опорного сечения перекрестной балки

$$v_0' = -(1 - \varkappa) \frac{qL^3}{24EJ} \cdot \frac{\psi_2(u)}{1 + B}. \tag{50}$$

Стрелка прогиба на опоре перекрестной балки

$$v_0 = \frac{q}{k} \left[\frac{(1 - \varkappa)B}{1 + B} + \frac{\varkappa B_1}{1 + B_1}\right]. \tag{51}$$

Стрелка прогиба посредине пролета перекрестной балки

$$v_{\max} = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{(1 - \varkappa)\varphi_0(u)}{1 + B} - \frac{\varkappa\varphi_1(u)}{1 + B_1}\right]. \tag{52}$$

Порядок расчета:

1) по формуле (28) находится Q — внешняя нагрузка, приходящаяся на балку главного направления;

2) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V определяются численные значения коэффициентов β и γ;

3) по формуле (25) определяется q — интенсивность нагрузки на перекрестную балку;

4) по формуле (26) определяется k — коэффициент жесткости упругого основания;

5) по формуле (27) определяется величина аргумента u;

6) по табл. 2 раздела VIII для полученного значения аргумента u находятся численные значения коэффициентов $\mu_0(u)$, $\varphi_0(u)$, $\chi_0(u)$ и $\psi_0(u)$, если перекрестная балка свободно оперта, или $\mu_1(u)$, $\varphi_1(u)$, $\chi_1(u)$ и $\chi_2(u)$, если перекрестная балка жестко заделана; если перекрестная балка упруго заделана на упругих опорах, то необходимо найти значения всех этих коэффициентов;

7) по формулам (31), (29) и (30) определяются, соответственно, коэффициент влияния податливости опор B ($B = 0$, если опоры жесткие), узловая реакция в крайнем узле перекрестной балки R_{max} и узловая реакция в среднем узле перекрестной балки R_{min}, если она свободно оперта. Для жестко заделанной перекрестной балки указанные величины определяются по формулам (39), (37) и (38), а для упруго заделанной на податливых опорах — по формулам (31), (39), (45) и (46);

8) при помощи формул табл. 8, 11, 12 раздела V строятся эпюры изгибающих моментов для крайней балки главного направления, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой Q и сосредоточенной в узловом сечении силой R_{max}, и для средней балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой Q и сосредоточенной в узловом сечении силой R_{min}. По построенным эпюрам находится наибольший изгибающий момент, принимаемый за расчетный при проверке прочности балок главного направления;

9) по формуле (32) определяется наибольшее значение изгибающего момента M_{max} посредине пролета свободно опертой перекрестной балки. Если балка жестко заделана, то изгибающие моменты посредине пролета M_1 и на опоре M_0 определяются по формулам (40) и (41); если же балка упруго заделана на податливых опорах, то M_1 и M_0 определяются по формулам (47) и (48). Прочность перекрестной балки проверяется по наибольшему из полученных изгибающих моментов;

10) в случае необходимости по формулам (33), (34), (35) и (36), либо в зависимости от заделки опорных сечений, по формулам (42), (43) и (44) или (49), (50), (51) и (52) определяются максимальное значение перерезывающей силы N_{max}, угол поворота опорного сечения v_0', стрелка прогиба на упругой опоре v_0 и максимальная стрелка прогиба посредине пролета перекрестной связи v_{max}.

Пример. Определить расчетные значения изгибающих моментов для балок перекрытия при следующих исходных данных:

Длина перекрытия (длина перекрестной балки) . . . . . $L = 12$ *м*
Ширина перекрытия . . . . . $l = 6$ „
Расстояние между балками главного направления . . . . . $a = 0{,}6$ „
Расстояние между перекрестной балкой и опорным контуром перекрытия . . . . . $c = \frac{l}{2} = 3$ „
Момент инерции поперечного сечения перекрестных балок . $J = 5 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции поперечного сечения балок главного направления . . . . . $i = 10^3$ „
Интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки . . . . . $p = 0{,}6$ *кг/см*^{2}

Перекрытие состоит из большого числа балок главного направления и одной перекрестной. Концы балок главного направления жестко заделаны на жестком опорном контуре, концы перекрестной балки свободно оперты на жестком контуре.

Внешняя нагрузка, приходящаяся на балку главного направления,

$$Q = pal = 21{,}6 \ \ m.$$

Так как балки главного направления жестко заделаны на жестком опорном контуре, то

$$\beta = \frac{1}{384}; \quad \gamma = \frac{1}{192}.$$

Следовательно, интенсивность нагрузки на перекрестную балку:

$$q = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q}{a} = 18 \ т/м.$$

Коэффициент жесткости упругого основания

$$k = \frac{Ei}{\gamma a l^3} = 30{,}0 \ кг/см^2.$$

Величина аргумента u

$$u = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{64EJ}} = 1{,}76.$$

По табл. 2 раздела VIII находим коэффициенты, соответствующие значению аргумента u, равному 1,76

$$\varphi_0(u) = -0{,}07 \quad \chi_0(u) = 0{,}112.$$

Узловые реакции

$$R_{max} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q}{1+B} = 10{,}8 \ т;$$

$$R_{min} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q\varphi_0(u)}{1+B} = -0{,}756 \ т.$$

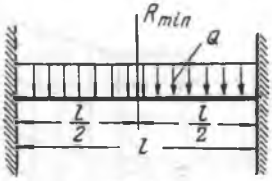


Рис. 18.

Здесь $B = 0$, так как перекрестная балка оперта на жесткие опоры.

Отрицательный знак при R_{min} показывает, что перекрестная балка не поддерживает, а нагружает среднюю балку главного направления (рис. 18). Следовательно, наибольший изгибающий момент будет в опорном сечении этой балки главного направления

$$M_{max} = \frac{Ql}{12} + \frac{R_{min}l}{8} \cong 11{,}4 \ тм.$$

Этот изгибающий момент принимаем за расчетный для всех балок главного направления.

Расчетное значение изгибающего момента для перекрестной балки

$$M_{max} = -\frac{qL^2}{8} \cdot \frac{\chi_0(u)}{1+B} = 36{,}3 \ тм$$

2. Внешняя нагрузка распределена вдоль балок главного направления по закону гидростатического давления (рис. 19)

Дополнительные обозначения:

H — глубина погружения нижнего конца балок главного направления;

d — отстояние верхнего конца балок главного направления от поверхности воды;

$p = \rho H$ — наибольшая интенсивность внешней нагрузки (у нижнего конца балок главного направления);

$$Q = \frac{paH}{2} \tag{53}$$

внешняя нагрузка на каждую балку главного направления.

Расчетные формулы в данном случае остаются те же, что и для случая равномерно распределенной по перекрытию нагрузки.

Пример. Определить расчетные значения изгибающих моментов для балок перекрытия при следующих исходных данных:

Длина перекрытия	$L = 9{,}6$ *м*
Ширина перекрытия	$l = 7{,}2$ „
Расстояние между балками главного направления	$a = 0{,}8$ „
Расстояние от нижней кромки перекрытия до перекрестной балки	$c = 2{,}4$ „
Момент инерции перекрестной балки	$J = 280 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции поперечного сечения балки главного направления	$i = 4 \cdot 10^4$ *см*^{4}

Перекрытие состоит из большого числа балок главного направления, расположенных вертикально, и одной перекрестной, расположенной горизонтально. Нагрузка на перекрытие осуществляется давлением воды высотой $H = 4{,}8$ *м* от нижней кромки перекрытия (рис. 19).

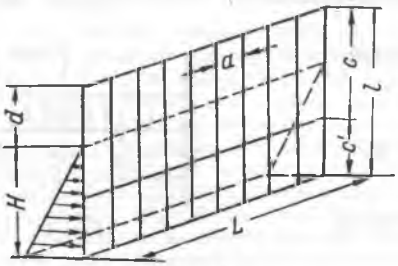


Рис. 19.

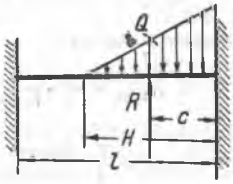


Рис. 20.

Перекрытие жестко заделано на жестком опорном контуре.

Внешняя нагрузка, приходящаяся на каждую балку главного направления,

$$Q = \frac{\rho a H^2}{2} = 9{,}22 \ m.$$

Балки главного направления жестко заделаны и загружены, как показано на рис. 20. Для этого случая по табл. 11 раздела V находим

$$\beta = \frac{1}{60}\left\{\frac{l-d}{l}\cdot\frac{c^2}{l^2}\left[2+\frac{d}{l}-3\frac{d^2}{l^2}+\frac{c}{l}\left(2\frac{d^2}{l^2}+\frac{d}{l}-3\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{(c-d)^5}{l^3(l-d)^2}\right\|_{\alpha}\right\} = 0{,}00199;$$

$$\gamma = \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{l^3}\cdot\frac{(l-c)^3}{l^3} = 0{,}00366$$

Интенсивность нагрузки на перекрестную балку

$$q = \frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{Q}{a} = 6{,}25 \ m/м.$$

Коэффициент жесткости упругого основания

$$k = \frac{Ei}{\gamma a l^3} = 734 \ кг/см^2.$$

Величина аргумента u

$$u = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{64EJ}} = 1{,}15.$$

По табл. 2 раздела VIII находим

$$\varphi_1(1{,}15) = 0{,}761; \quad \chi_2(1{,}15) = 0{,}836.$$

Узловые реакции:

$$R_{max} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q}{1 + B_1} = 5{,}02\ m;$$

$$R_{min} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q\varphi_1(u)}{1 + B_1} = 3{,}82\ m,$$

где $B_1 = 0$, так как перекрестная балка оперта на жесткие опоры.

Очевидно, что в наихудших условиях из всех балок главного направления находится средняя из них.

Расчетный изгибающий момент для нее будет в опорном сечении

$$M_{max} = \frac{Q(l-c)}{30}\left[10\frac{c}{l} + \frac{3(l-c)^2}{l}\right] - R_{min}\frac{c^2(l-c)}{l^2} = 2{,}37\ тм.$$

Расчетное значение изгибающего момента для перекрестной балки

$$M_{max} = \frac{qL^2}{12} \cdot \frac{\gamma_2(u)}{1 + B_1} = 40{,}2\ тм.$$

3. Внешняя нагрузка распределена вдоль перекрестной балки по закону гидростатического давления (рис. 21)

Дополнительные обозначения:

H_j — глубина погружения j-й (считая сверху) балки главного направления от поверхности воды;

$p_j = \rho H_j$ — интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки на j-ю балку главного направления;

j — номер балки главного направления, считая сверху,

$$Q_j = p_j a l \tag{54}$$

нагрузка на любую балку главного направления.

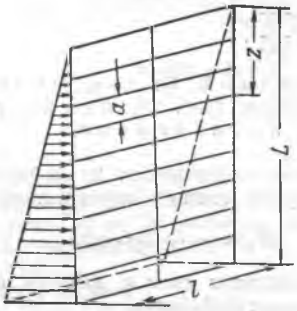


Рис. 21.

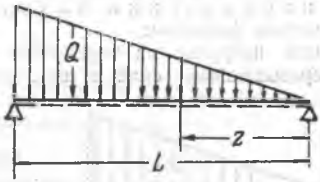


Рис. 22.

а) Концы перекрестной балки свободно оперты на жесткие опоры, балки главного направления заделаны произвольно (рис. 22).

Расчетные формулы:

полная нагрузка на перекрестную балку

$$Q = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\rho H^2 l}{2}; \tag{55}$$

узловая реакция в любом узле

$$R_j = \frac{\beta}{\gamma} Q_j; \tag{56}$$

перерезывающая сила в верхнем опорном сечении перекрестной балки

$$N_0 = -\frac{Q}{3}\sigma_0(u); \tag{57}$$

перерезывающая сила в нижнем опорном сечении перекрестной балки

$$N_{\text{п}} = \frac{2Q}{3}\tau_0(u); \tag{58}$$

угол поворота верхнего опорного сечения перекрестной балки

$$v_0' = \frac{7}{180}\cdot\frac{QL^2}{EJ}\pi_0(u); \tag{59}$$

угол поворота нижнего опорного сечения перекрестной балки

$$v_{\text{п}}' = -\frac{8}{180}\cdot\frac{QL^2}{EJ}\rho_0(u), \tag{60}$$

где

$$\sigma_0(u) = \psi_1(2u);$$

$$\tau_0(u) = \frac{\sigma_0(u) - 3\mu_0(u)}{2};$$

$$\pi_0(u) = \frac{45}{56u^4}\left(1 - 4u\,\frac{\operatorname{ch}2u\cdot\sin 2u + \operatorname{sh}2u\cdot\cos 2u}{\operatorname{ch}4u - \cos 4u}\right);$$

$$\rho_0(u) = \frac{1}{8}\left[15\psi_2(u) - 7\pi_0(u)\right].$$

Упругая линия перекрестной балки определяется выражением:

$$v(z) = \frac{2Q}{kL}\left[\frac{z}{L} - \frac{V_1(2u)\,V_1(\alpha z) + V_3(2u)\,V_3(\alpha z)}{V_1^2(2u) + V_3^2(2u)}\right], \tag{61}$$

где V_1 и V_3 — функции Н. П. Пузыревского, численные значения которых можно определить по табл. 1 раздела VIII

$$\alpha = \frac{2u}{L} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}. \tag{62}$$

б) Верхний конец перекрестной балки свободно оперт, нижний — жестко заделан (рис. 23), балки главного направления заделаны произвольно.

Расчетные формулы:

полная нагрузка на перекрестную балку определяется по формуле (55);

перерезывающая сила в верхнем опорном сечении перекрестной балки

$$N_0 = -\frac{1}{5}Q\sigma_2(u). \tag{63}$$

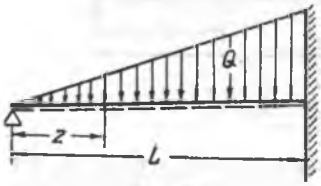


Рис. 23.

Перерезывающая сила в нижнем опорном сечении перекрестной балки

$$N_{\text{п}} = \frac{4}{5}Q\tau_2(u). \tag{64}$$

Угол поворота свободно опертого верхнего сечения перекрестной балки

$$v_0' = \frac{QL^2}{60EJ}\pi(u). \tag{65}$$

Изгибающий момент в жестко заделанном нижнем сечении перекрестной балки

$$M_{\text{п}} = \frac{QL}{7{,}5}\omega(u). \tag{66}$$

Упругая линия перекрестной балки

$$v = \frac{2Q}{kl}\left\{\frac{z}{L} + \frac{\left[4uV_1(2u) - \sqrt{2}\,V_3(2u)\right]V_1(\alpha z)}{4u\left[V_0(2u)\,V_3(2u) - V_1(2u)\,V_2(2u)\right]} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left[4uV_0(2u) - \sqrt{2}\,V_1(2u)\right]V_3(\alpha z)}{4u\left[V_0(2u)\,V_3(2u) - V_1(2u)\,V_2(2u)\right]}\right\}. \tag{67}$$

в) Концы перекрестной балки жестко заделаны на жестких опорах (рис. 24), балки главного направления заделаны произвольно

Расчетные формулы:

полная нагрузка на перекрестную связь определяется по формуле (55);

перерезывающая сила в верхнем опорном сечении перекрестной балки

$$N_0 = -\frac{3}{10} Q\sigma_1(u); \tag{68}$$

перерезывающая сила в нижнем опорном сечении перекрестной балки

$$N_{\text{н}} = \frac{7}{10} Q\tau_1(u); \tag{69}$$

изгибающий момент в верхнем опорном сечении перекрестной балки

$$M_0 = \frac{QL}{15}\omega_0(u); \tag{70}$$

изгибающий момент в нижнем опорном сечении перекрестной балки

$$M_{\text{н}} = \frac{QL}{10}\omega_1(u); \tag{71}$$

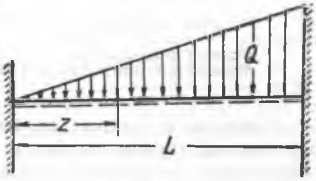


Рис. 24.

упругая линия перекрестной балки

$$v = \frac{2Q}{kl}\left[\frac{z}{L} - \frac{\sqrt{2}\,V_1(\alpha z)}{4u} + A_2V_2(\alpha z) + A_3V_3(\alpha z)\right], \tag{72}$$

где

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}\,V_3(2u) - 4uV_2(2u) + \sqrt{2}\,V_1(2u)\,V_2(2u) - V_0(2u)\sqrt{2}\,V_3(2u)}{4u\left[V_2^2(2u) - V_1(2u)\,V_3(2u)\right]};$$

$$A_3 = -\frac{V_2(2u) - 2u\sqrt{2}\,V_1(2u) - V_0(2u)\,V_2(2u) + V_1^2(2u)}{4u\left[V_2^2(2u) - V_1(2u)\,V_3(2u)\right]};$$

$$\alpha = \frac{2u}{l} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}. \tag{73}$$

Значения функций $\pi_0(u)$, $\sigma_0(u)$, $\sigma_1(u)$, $\tau_0(u)$, $\tau_1(u)$, $\omega_0(u)$ и $\omega_1(u)$ приведены в табл. 3 и 5; значения функций $\omega(u)$, $\tau_2(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\pi(u)$ — в табл. 2; значения функций Н. П. Пузыревского V_0, V_1, V_2 и V_3 — в табл. 1 раздела VIII.

Порядок расчета:

1) по формуле (54) определяется Q_j — внешняя нагрузка, приходящаяся на любую балку главного направления и в частности на нижнюю $Q_{\max}$;

2) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V определяются численные значения коэффициентов β и γ;

3) по формуле (55) определяется Q — полная нагрузка на перекрестную балку;

4) по формуле (26) находится k — коэффициент жесткости упругого основания;

5) по формуле (27) определяется величина аргумента u;

6) по табл. 3 раздела VIII для полученного значения u находятся численные значения функций $\sigma_0(u)$, $\tau_0(u)$ и $\pi_0(u)$, если перекрестная связь свободно оперта на жесткие опоры, или $\sigma_2(u)$, $\tau_2(u)$, $\omega_0(u)$ и $\omega_1(u)$, если она жестко заделана на жестких опорах, или $\sigma_2(u)$, $\tau_2(u)$, $\pi(u)$ и $\omega(u)$, если перекрестная балка одним концом свободно оперта, а другим жестко заделана;

7) по формулам (66), (70) или (71), в зависимости от способа заделки опор, определяется расчетное значение изгибающего момента для перекрестной балки;

8) по формуле (56) определяется величина узловой реакции для любого узла R_j и в частности для нижнего $R_{\max}$;

9) по известным нагрузкам Q_j и R_j по формулам табл. 8, 11, 12 раздела VIII определяется величина расчетного момента для любой j-й балки главного направления;

10) в случае необходимости, пользуясь соответствующими формулами, можно определить углы поворота и перерезывающие силы в опорных сечениях перекрестной балки и построить ее упругую линию.

Пример. Найти расчетные значения изгибающих моментов для балок перекрытия при следующих исходных данных:

Длина перекрытия	$L = 6{,}6$ *м*
Ширина перекрытия	$l = 4{,}4$ "
Расстояние между балками главного направления	$a = 0{,}6$ "
Расстояние от опорной кромки перекрытия до перекрестной балки	$c = \frac{l}{2} = 2{,}2$ *м*
Момент инерции перекрестной балки	$J^2 = 24 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции балки главного направления	$i = 3 \cdot 10^4$ *см*^{4}

Перекрытие состоит из большого числа балок главного направления, расположенных горизонтально, и одной перекрестной, расположенной вертикально. Перекрытие нагружено давлением воды высотой, равной длине перекрытия ($H = L$).

г) Балки главного направления свободно оперты на жесткий опорный контур, перекрестная балка заделана полностью (рис. 21 и 24)

Внешняя нагрузка, приходящаяся на любую балку главного направления,

$$Q_j = \rho a l z = 2{,}64z, \ m.$$

Внешняя нагрузка на нижнюю балку главного направления

$$Q_{\max} = Q_j (L - a) = 15{,}8 \ m.$$

Так как балки главного направления свободно оперты и загружены равномерно распределенной по всей длине нагрузкой, а в середине пролета еще и сосредоточенной силой, то по табл. 8 раздела V находим

$$\beta = \frac{5}{384}; \quad \gamma = \frac{1}{48}.$$

Полная нагрузка на перекрестную балку

$$Q = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\rho L^2 l}{2} = 60 \ m.$$

Коэффициент жесткости упругого основания

$$k = \frac{Ei}{\gamma a l^3} = 564 \ кг/см^2.$$

Численное значение аргумента u

$$u \sqrt[4]{\frac{kL^4}{64EJ}} = 1{,}37.$$

По табл. 3 раздела VIII находим $\omega_1 (1{,}37) = 0{,}762$.

Расчетное значение изгибающего момента для перекрестной балки (в нижнем опорном сечении)

$$M = \frac{QL}{10} \omega_1 (u) = 30{,}2 \ тм.$$

Узловая реакция в нижнем узле перекрестной балки

$$R_{\max} = \frac{\beta}{\gamma} Q_{\max} = 9{,}9 \ m.$$

Наибольший изгибающий момент для нижней балки главного направления

$$M_{max} = \frac{Q_{max} l}{8} - \frac{R_{max} l}{4} = 2{,}2 \ тм.$$

В тех случаях, когда выбрана система перекрестных связей, известна нагрузка на нее и надо подобрать профиль балок, может быть предложен следующий порядок расчета. По известным нагрузкам определяется наибольшая узловая реакция R_{max}, а затем наибольший изгибающий момент для крайних балок главного направления M_{max}. По полученному M_{max} выбирается нужный профиль балок главного направления и, следовательно, находится момент инерции поперечного сечения i.

Далее задается величина момента инерции перекрестной балки J так, чтобы $J > i$, и вычисляются аргумент u, наибольший изгибающий момент перекрестной балки M_{max}, узловая реакция R_{min} и наибольший изгибающий момент для средней балки главного направления. Если выявится несоответствие между полученным изгибающим моментом перекрестной балки и выбранным для нее моментом инерции J или если наибольший изгибающий момент средней балки окажется больше изгибающего момента крайней балки, то это значит, что величина J выбрана неудачно и расчет надо повторить, изменив соответствующим образом J. После того как приближенные значения i и J будут найдены, следует проверить выбранные профили балок, пользуясь более точным выражением для R_{max}, а также учитывая действующие в балках срезывающие силы.

4. Внешняя нагрузка в виде сосредоточенной силы P приложена посредине пролета перекрестной балки (рис. 25)

а) Перекрестная балка по концам свободно оперта на жесткие опоры, балки главного направления закреплены произвольно

Расчетные формулы:

изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки

$$M_{max} = \frac{PL}{4} \mu_0 (u); \qquad (74)$$

перерезывающая сила в опорных сечениях перекрестной балки

$$N = \pm \frac{P}{2} \varphi_0 (u); \qquad (75)$$

максимальная нагрузка на балку главного направления

$$R_{max} = \frac{P}{48} \cdot \frac{i}{J} \cdot \frac{L^3}{l^3} \psi_2 (u), \qquad (76)$$

угол поворота опорных сечений перекрестной балки

$$v_0' = \mp \frac{PL^2}{16EJ} \chi_0 (u); \qquad (77)$$

стрелка прогиба посредине пролета перекрестной балки

$$v = \frac{PL^3}{48EJ} \psi_2 (u). \qquad (78)$$

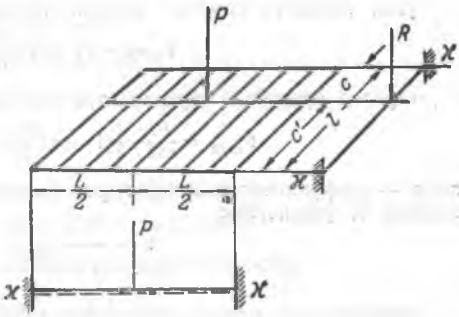


Рис. 25.

Численные значения коэффициентов $\mu_0 (u)$, $\varphi_0 (u)$, $\psi_2 (u)$ и $\chi_0 (u)$ определяются из табл. 2 раздела VIII.

Расчет балки главного направления производится по формулам табл. 2 раздела VIII, как для балки на двух опорах, загруженной сосредоточенной силой R_{max} в узловом сечении.

б) Перекрестная балка по концам жестко заделана на жестких опорах, балки главного направления закреплены произвольно

Расчетные формулы:

Изгибающий момент в середине пролета перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{PL}{8}\mu_1(u); \tag{79}$$

изгибающий момент в опорных сечениях перекрестной балки

$$M_0 = \frac{PL}{8}\lambda_1(u); \tag{80}$$

перерезывающая сила в опорных сечениях перекрестной балки

$$N = \frac{P}{2}\varphi_1(u); \tag{81}$$

наибольшая нагрузка на балки главного направления

$$R_{\max} = \frac{P}{192\gamma}\cdot\frac{i}{J}\cdot\frac{L^3}{l^3}\eta_1(u); \tag{82}$$

стрелка прогиба в середине пролета перекрестной балки

$$v_{\max} = \frac{PL^3}{192EJ}\eta_1(u). \tag{83}$$

Численные значения коэффициентов $\lambda_1(u)$, $\varphi_1(u)$, $\eta_1(u)$ и $\mu_1(u)$ определяются из табл. 2 и 4 раздела VIII.

Расчет балки главного направления производится так же, как и в предыдущем случае.

в) Перекрестная балка по концам упруго заделана на жестких опорах, балки главного направления заделаны произвольно

Расчетные формулы:

изгибающий момент в середине пролета перекрестной балки

$$M_1 = \frac{PL}{8}\varkappa\lambda_1(u); \tag{84}$$

изгибающий момент в опорных сечениях перекрестной балки

$$M_0 = -\frac{PL}{4}\left[(1-\varkappa)\mu_0(u) + \frac{1}{2}\varkappa\mu_1(u)\right]; \tag{85}$$

угол поворота опорных сечений перекрестной балки

$$v_0' = -(1-\varkappa)\frac{PL^2}{16EJ}\chi_0(u); \tag{86}$$

стрелка прогиба в середине пролета перекрестной балки

$$v_{\max} = \frac{PL^3}{48EJ}\left[(1-\varkappa)\psi_2(u) + \frac{1}{4}\varkappa\eta_1(u)\right], \tag{87}$$

где $\varkappa$ — коэффициент опорной пары, связанный с коэффициентом податливости заделки $\mathfrak{N}$ равенством

$$\varkappa = \frac{1}{1 + \frac{2\mathfrak{N}EJ}{L}\cdot\frac{\lambda_1(u)}{\chi_0(u)}}; \tag{88}$$

максимальная нагрузка на балку главного направления

$$R_{\max} = \frac{Ei_0}{\gamma l^3}v_{\max}. \tag{89}$$

Порядок расчета:

1) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V определяется численное значение коэффициента γ;

2) по формуле (26) определяется k — коэффициент жесткости упругого основания;

3) по формуле (27) определяется численное значение аргумента u;

4) по табл.2 раздела VIII для полученного значения u находятся численные значения функций $\mu_0(u)$, $\varphi_0(u)$, $\psi_2(u)$ и $\chi_0(u)$, если перекрестная балка свободно оперта на жесткие опоры, или $\mu_1(u)$, $\varphi_1(u)$, $\lambda_1(u)$ и $\eta_1(u)$, если она жестко заделана. Если перекрестная балка упруго заделана, то надо находить значения всех этих функций;

5) по формуле (74) определяется расчетное значение изгибающего момента для свободно опертой перекрестной балки, по формулам (79) и (80) — для жестко заделанной. Для упруго заделанной перекрестной балки расчетное значение изгибающего момента находится по формулам (84) и (85);

6) по формуле (76) определяется максимальная сосредоточенная в узловом сечении нагрузка R_{max} на балку главного направления, если перекрестная балка свободно оперта, по формуле (82), если она жестко заделана и по формуле (89), если она упруго заделана;

7) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V определяется расчетный момент для балки главного направления, нагруженной в узловом сечении сосредоточенной силой R_{max};

8) в случае необходимости, пользуясь соответствующими формулами, можно найти перерезывающие силы и углы поворота опорных сечений перекрестной балки и стрелку прогиба ее в середине пролета.

Пример. Определить расчетные значения изгибающих моментов для балок перекрытия при следующих исходных данных:

Длина перекрытия (перекрестной балки)	$L = 12$ *м*
Ширина перекрытия (длина балки главного направления)	$l = 6$ *м*
Расстояние между балками главного направления	$a = 0{,}75$ *м*
Момент инерции перекрестной балки	$J = 240 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции балки главного направления	$i = 2 \cdot 10^4$ *см*^{4}

Перекрытие состоит из 15 балок главного направления и одной перекрестной, которая делит балки главного направления пополам. Перекрытие загружено сосредоточенной силой $P = 16$ *т*, приложенной к перекрестной балке посредине ее длины.

Все балки перекрытия жестко заделаны на жестких опорах.

Так как балки главного направления по концам жестко заделаны на жестких опорах и делятся пополам перекрестной балкой, то

$$\gamma = \frac{1}{192}.$$

Коэффициент жесткости упругого основания

$$k = \frac{Ei}{\gamma a l^3} = 474 \text{ кг/см}^2.$$

Численное значение аргумента u

$$u = \sqrt[4]{\frac{KL^4}{64EJ}} = 1{,}34.$$

По табл. 2 и 4 раздела VIII при $u = 1{,}34$ получаем

$$\mu_1(1{,}34) = 0{,}796; \quad \lambda_1(1{,}34) = 0{,}671; \quad \eta_1(1{,}34) = 0{,}717.$$

Изгибающий момент в опорном сечении перекрестной балки

$$M_0 = \frac{pL}{8}\lambda_1(u) = 16{,}1 \text{ тм}.$$

Изгибающий момент в середине пролета перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{pL}{8}\mu_1(u) = -19{,}1 \text{ тм}.$$

Следовательно, расчетным моментом для перекрестной балки будет момент в середине пролета

$$M_{max} = 19{,}1 \text{ тм}.$$

Из балок главного направления в наихудших условиях находится средняя, которая в узловом сечении нагружена сосредоточенной силой реакции (рис. 26),

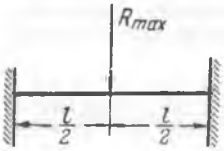


Рис. 26.

$$R_{\max} = \frac{P}{192\gamma} \cdot \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \eta_1(u) = 0{,}765\ m.$$

Расчетное значение изгибающего момента для балок главного направления

$$M_{\max} = \frac{R_{\max} l}{4} = 1{,}15\ тм.$$

5. Внешняя нагрузка в виде двух равных сосредоточенных сил P, приложенных к перекрестной балке на расстоянии одной трети пролета от ее опор (рис. 27)

а) Перекрестная балка по концам свободно оперта на жесткие опоры, балки главного направления закреплены произвольно

Расчетные формулы:

изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки:

$$M_1 = \frac{PL}{3} \varepsilon_0(u); \tag{90}$$

изгибающий момент в сечениях перекрестной балки, загруженных сосредоточенными силами

$$M_2 = \frac{1}{3} PL\varepsilon_3(u); \tag{91}$$

узловая реакция в середине пролета перекрестной балки

$$R = \frac{23}{648\gamma} P \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_0(u); \tag{92}$$

узловая реакция в загруженных сечениях перекрестной балки

$$R_1 = \frac{5}{162\gamma} \cdot \frac{i}{J} P \left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_0(u); \tag{93}$$

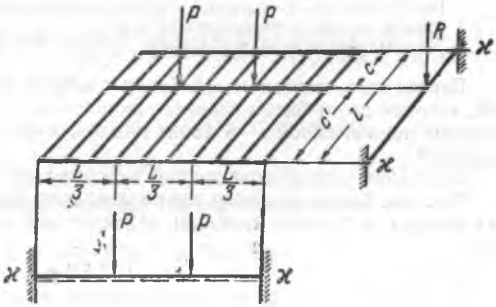


Рис. 27.

стрелка прогиба в середине пролета перекрестной балки

$$v = \frac{23}{648} \cdot \frac{PL^3}{EJ} \xi_0(u); \tag{94}$$

стрелка прогиба в загруженных сечениях перекрестной балки

$$v_1 = \frac{5}{162} \cdot \frac{PL^3}{EI} \xi_0(u). \tag{95}$$

Численные значения коэффициентов $\varepsilon_0(u)$ и $\xi_0(u)$ определяются из табл. 4 раздела VIII. Значения коэффициентов $\varepsilon_3(u)$ и $\xi_0(u)$ вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_3(u) = \frac{23}{20} u^2 \xi_0(u) V_2\left(\frac{u}{6}\right) + \varepsilon_0(u) V_0\left(\frac{u}{6}\right); \tag{96}$$

$$\xi_0(u) = \frac{23}{20} \left[\xi_0(u) V_0\left(\frac{u}{6}\right) - \frac{27}{23u^2} \varepsilon_0(u) V_2\left(\frac{u}{6}\right)\right], \tag{97}$$

где V_0 и V_2 — функции Пузыревского, определяемые по табл. 1 раздела VIII.

Расчет балки главного направления производится по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V, как для балки на двух опорах, загруженной сосредоточенной силой R_{max} в узловом сечении.

б) Перекрестная балка по концам жестко заделана на жестких опорах, балки главного направления закреплены произвольно

Расчетные формулы:

изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки

$$M_1 = \frac{-1}{9} PL\varepsilon_1(u); \tag{98}$$

изгибающий момент в сечениях перекрестной балки, загруженных сосредоточенными силами,

$$M_2 = \frac{-1}{9} PL \cdot \varepsilon_4(u); \tag{99}$$

изгибающий момент в опорных сечениях перекрестной балки

$$M_0 = \frac{2}{9} PL\varepsilon_2(u); \tag{100}$$

узловая реакция в середине пролета перекрестной балки

$$R = \frac{5}{648\gamma} P \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_1(u); \tag{101}$$

узловая реакция в загруженных сечениях перекрестной балки

$$R_1 = \frac{1}{162\gamma} P \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_1(u); \tag{102}$$

стрелка прогиба в середине пролета перекрестной балки

$$v = \frac{5}{643} \cdot \frac{PL^3}{EJ} \xi_1(u); \tag{103}$$

стрелка прогиба в загруженных сечениях перекрестной балки

$$v_1 = \frac{1}{162} \cdot \frac{PL^3}{EJ} \xi_1(u). \tag{104}$$

Численные значения коэффициентов $\varepsilon_1(u)$ и $\xi_1(u)$ определяются из табл. 4 раздела VIII. Значения коэффициентов $\varepsilon_2(u)$, $\varepsilon_4(u)$ и $\xi_1(u)$ вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_2(u) = \frac{1}{72}\left[20u^2\xi_1(u)V_0(u) - 9\varepsilon_1(u)V_2(u) + \frac{81}{u}\sqrt{2}V_3(0{,}667u)\right]; \tag{105}$$

$$\varepsilon_4(u) = \frac{5}{9}\xi_1(u)V_2\left(\frac{u}{6}\right) - \varepsilon_1(u)V_0\left(\frac{u}{6}\right); \tag{106}$$

$$\xi_1(u) = \frac{5}{3}\xi_1(u)V_0\left(\frac{u}{6}\right) - 3\frac{1}{u^2}\varepsilon_1(u)V_2\left(\frac{u}{6}\right), \tag{107}$$

где V_0, V_2 и V_3 — функции Пузыревского, определяемые по табл. 1 раздела VIII.

Расчет балок главного направления производится так же, как и в предыдущем случае.

в) Перекрестная балка по концам упруго заделана на жестких опорах, балки главного направления закреплены произвольно

Расчетные формулы:

коэффициент податливости заделки опор перекрестной балки $\mathfrak{N}$ связан с коэффициентом опорной пары $\varkappa$ зависимостью

$$\varkappa = \frac{\alpha(u)}{\alpha(u) + \frac{2\mathfrak{N}EJ}{L}\varepsilon_2(u)}; \tag{108}$$

изгибающий момент посредине пролета перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{PL}{3}\varepsilon_0(u)(1-\varkappa) - \frac{PL}{9}\varepsilon_1(u)\varkappa; \tag{109}$$

Изгибающий момент в опорных сечениях перекрестной балки

$$M_0 = \frac{2}{9} PL\varepsilon_2(u)\,\varkappa; \tag{110}$$

изгибающий момент в сечениях перекрестной балки, загруженных сосредоточенными силами,

$$M_2 = -\frac{1}{3} PL\varepsilon_3(u)(1-\varkappa) - \frac{1}{9} PL\varepsilon_4(u)\,\varkappa; \tag{111}$$

узловая реакция в середине пролета перекрестной балки

$$R = \frac{23}{648\gamma} P \frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_0(u)(1-\varkappa) + \frac{5}{648} P \frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_1(u)\,\varkappa; \tag{112}$$

узловая реакция в загруженных сечениях перекрестной балки

$$R_1 = \frac{5}{162\gamma} P \frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_0(u)(1-\varkappa) + \frac{1}{162} P \frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3 \xi_1(u)\,\varkappa, \tag{113}$$

стрелка прогиба в середине пролета перекрестной балки

$$v = \frac{23}{648}\cdot\frac{PL}{EJ}\xi_0(u)(1-\varkappa) + \frac{5}{648}\cdot\frac{PL}{EJ}\xi_1(u)\,\varkappa; \tag{114}$$

стрелка прогиба в загруженных сечениях перекрестной балки

$$v_1 = \frac{5}{162}\cdot\frac{PL}{EJ}\xi_0(u)(1-\varkappa) - \frac{1}{162}\cdot\frac{PL}{EJ}\xi_1(u)\,\varkappa. \tag{115}$$

Расчет балок главного направления производится так же, как и в предыдущих случаях.

Порядок расчета:

1) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V определяется численное значение коэффициента γ;

2) по формуле (26) определяется k — коэффициент жесткости упругого основания;

3) по формуле (27) находится численное значение аргумента u;

4) по табл. 4 раздела VIII для найденного значения u находятся численные значения коэффициентов $\varepsilon_0(u)$ и $\xi_0(u)$, либо $\varepsilon_1(u)$ и $\xi_1(u)$ или и тех и других в зависимости от способа заделки опорных сечений перекрестной балки. Кроме того, по формулам (96) и (97) вычисляются значения коэффициентов $\varepsilon_3(u)$ и $\xi_0(u)$, если перекрестная балка свободно оперта; если она жестко заделана, то по формулам (105), (106) и (107) определяются $\varepsilon_2(u)$, $\varepsilon_4(u)$ и $\xi_1(u)$. Если перекрестная балка упруго заделана, необходимо находить численные значения всех этих коэффициентов;

5) по формулам (90) и (91) определяется расчетное значение изгибающего момента для свободно опертой перекрестной балки; по формулам (98), (99) и (100) — для жестко заделанной и по формулам (109), (110) и (111) — для упруго заделанной;

6) по формулам (92) и (93) определяется максимальная, сосредоточенная в узловом сечении, нагрузка R_{max} на балку главного направления, если перекрестная балка свободно оперта; по формулам (101) и (102), — если перекрестная балка жестко заделана и, по формулам (112) и (113), — если она упруго заделана;

7) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V определяется расчетный момент для балки главного направления, нагруженной в узловом сечении сосредоточенной силой R_{max};

8) в случае необходимости по соответствующим формулам можно найти прогибы в загруженных сечениях и в середине пролета перекрестной балки

§ 6. Расчет перекрытий с одной перекрестной балкой и большим числом равноотстоящих балок главного направления, средняя из которых имеет усиленную жесткость. Внешняя нагрузка равномерно распределена вдоль перекрестной балки (рис. 28)

Наличие среди одинаковых балок главного направления одной усиленной приводит к уменьшению прогиба перекрестной балки. Это происходит за счет того, что усиленная балка воспринимает от перекрестной часть нагрузки в виде дополнительной узловой реакции R.

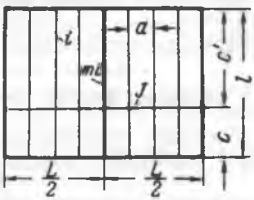


Рис. 28.

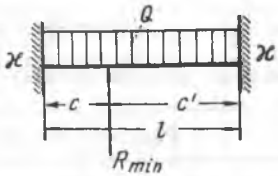


Рис. 29.

Дополнительные обозначения:

mi — момент инерции поперечного сечения средней балки главного направления (балки усиленной жесткости);

p — интенсивность внешней нагрузки, равномерно распределенной вдоль перекрестной балки;

Q — внешняя распределительная нагрузка, приходящаяся на одну балку главного направления;

R — дополнительная узловая реакция, появляющаяся в месте пересечения перекрестной балки с усиленной балкой главного направления;

n — число пролетов перекрестной балки;

c и c_1 — отстояния перекрестной балки от параллельных ей кромок опорного контура перекрытия.

а) Перекрестная балка свободно оперта на жесткие опоры

Расчетные формулы:

значение дополнительной узловой реакции R в узле пересечения перекрестной балки со средней балкой главного направления (балка усиленной жесткости)

$$R = \beta (m-1) \frac{1-\varphi_0(u)}{\gamma + \frac{m-1}{48} \cdot \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \psi_2(u)} Q; \tag{116}$$

расчетное значение изгибающего момента в середине пролета перекрестной балки

$$M = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{nQL}{8} \chi_0(u) - \frac{RL}{4} \omega_0(u); \tag{117}$$

минимальная узловая реакция (реакция в середине пролета перекрестной балки)

$$R_{\min} = \frac{\beta}{\gamma} Q\varphi_0(u) - \frac{1}{48\gamma} \cdot \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 R\psi_2(u). \tag{118}$$

Расчетные значения изгибающих моментов для балок главного направления легко получаются при помощи формул табл. 8, 11, 12 раздела V, если принять, что балка загружена внешней распределенной нагрузкой Q и сосредоточенной силой $R_{\min}$ рис. 29.

б) Перекрестная балка жестко заделана на жестких опорах

Расчетные формулы:

значение дополнительной узловой реакции R в узле пересечения перекрестной балки с усиленной балкой главного направления

$$R = \beta (m-1) \frac{1-\varphi_1(u)}{\gamma + \frac{m-1}{192} \cdot \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \eta_1(u)} Q. \tag{119}$$

расчетное значение изгибающего момента в опорном сечении перекрестной балки

$$M_0 = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{nQL}{12} \chi_2(u) - \frac{RL}{8} \lambda_1(u). \tag{120}$$

минимальная узловая реакция (реакция в середине пролета перекрестной балки)

$$R_{\min} = \frac{\beta}{\gamma} Q\varphi_1(u) - \frac{1}{192\gamma} \cdot \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3 R\eta_1(u). \tag{121}$$

Расчетное значение изгибающего момента для балок главного направления определяется так же, как и в предыдущем случае.

Порядок расчета:

1) по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V находятся значения коэффициентов β и γ;

2) определяется число пролетов перекрестной балки $n = \frac{L}{a}$;

3) вычисляется значение аргумента u

$$u = \sqrt[4]{\frac{u}{64\gamma} \cdot \frac{i}{J} \left(\frac{L}{l}\right)^3};$$

4) определяется величина m (отношение момента инерции поперечного сечения балки главного направления усиленной жесткости к моменту инерции прочих балок главного направления);

5) по табл. 2, 3, 4 раздела VIII определяются значения функций $\varphi_0(u)$, $\chi_0(u)$, $\omega_0(u)$ и $\psi_2(u)$ или $\varphi_1(u)$, $\chi_2(u)$, $\lambda_1(u)$ и $\eta_1(u)$ для найденного значения аргумента u;

6) находится величина внешней распределительной нагрузки Q, приходящейся на каждую балку главного направления;

7) в зависимости от заделки перекрестной балки по формуле (116) или (119) вычисляется величина дополнительной узловой реакции R;

8) по формуле (117) или (120) определяется величина расчетного изгибающего момента для перекрестной балки;

9) по формуле (118) или (121) находится минимальная узловая реакция $R_{\min}$ у середины пролета перекрестной балки;

10) по полученному значению узловой реакции $R_{\min}$ и величине внешней нагрузки Q при помощи формул табл. 8, 11, 12 раздела V определяется расчетное значение изгибающего момента для усиленной балки главного направления;

11) аналогично определяется расчетное значение изгибающего момента для остальных балок главного направления.

§ 7. Расчет перекрытий с несколькими перекрестными балками и большим числом одинаковых равноотстоящих балок главного направления (рис. 30)

Расчет перекрытий с несколькими перекрестными балками по методу «главных изгибов» связан со значительными вычислительными трудностями и, кроме того, при числе перекрестных балок больше трех приводит к вычислению малой разности близких величин. Поэтому такие перекрытия целесообразно рассчитывать методом разложения упругой линии перекрестных связей в ряды по формам свободных колебаний.

Применение этого метода для определения элементов изгиба балок каждого направления позволяет использовать вспомогательные функции λ_k, ρ_k и ν_k, введенные проф. П. Ф. Папковичем, и избежать вычислений малой разности близких величин. Кроме того, этот метод может быть применен для расчета перекрытий, балки главного направления которых могут находиться в равновесии только благодаря связи с перекрестными балками.

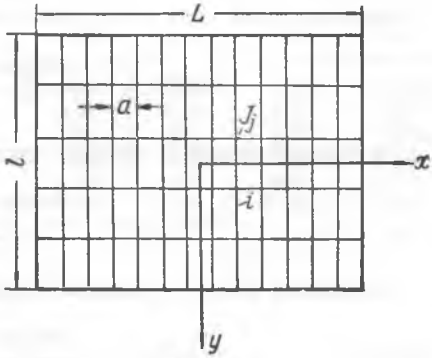


Рис. 30.

Основные допущения:

1) внешняя распределенная нагрузка передается пластинами обшивки целиком на балки главного направления; перекрестные балки загружены только реакциями в узловых сечениях;

2) сосредоточенные реакции, действующие на перекрестные балки в узловых сечениях, можно заменить некоторой распределенной нагрузкой;

3) балки главного направления могут иметь переменный по длине момент инерции поперечного сечения, но должны быть все одинаково заделаны на опорном контуре;

4) перекрестные балки могут быть разных, но постоянных по длине моментов инерции, и должны быть симметрично заделаны на опорном контуре;

5) нагрузка на перекрытие не меняется по длине перекрестных связей.

Обозначения:

L — длина перекрестных балок (длина перекрытия);

l — длина балок главного направления (ширина перекрытия);

b — расстояние между перекрестными балками;

a — расстояние между балками главного направления;

J_j — момент инерции поперечного сечения j-й перекрестной балки;

$\iota(x)$ — момент инерции поперечного сечения балок главного направления;

A — коэффициент податливости упругой заделки j-й перекрестной балки;

$\mathfrak{N}$ — коэффициент податливости упругой заделки балок главного направления;

$\varkappa_j$ — коэффициент одной пары j-й перекрестной балки;

$\varkappa$ — коэффициент опорной пары балок главного направления;

μ_k — характеристическое число;

$p(y)$ — поперечная нагрузка, приходящаяся на единицу площади перекрытия;

p_0 — некоторое среднее значение интенсивности нагрузки, действующей на перекрытие;

f_k — упругая линия балки главного направления, загруженной нагрузкой интенсивностью $\frac{p_n(y)}{p_0}$ и опертой в местах пересечения с перекрестными связями на упругие опоры с коэффициентами жесткости K_{jk};

K_{jk} — коэффициент жесткости упругой опоры;

$X_k(x)$ — формы главных свободных колебаний призматической перекрестной связи;

λ_k, ν_k, ρ_k — коэффициенты, определяемые по табл. 5, 6 и 7 в зависимости от $\varkappa$;

Расчетные формулы:
стрелка прогиба посредине пролета j-й перекрестной балки

$$v(0, y_j) = aq_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f_k(y_j); \tag{122}$$

перерезывающая сила в опорном сечении j-й перекрестной балки

$$N(0{,}5L, y_j) = \frac{8EJ_j aq_0}{L^3} \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k \mu_k^4 f_k(y_j); \tag{123}$$

изгибающий момент в середине пролета j-й перекрестной балки

$$M(0, y_j) = -\frac{4EJ_j aq_0}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \mu_k^4 f_k(y_j); \tag{124}$$

изгибающий момент в опорном сечении j-й перекрестной балки

$$M(0{,}5L, y_j) = \frac{8EJ_j aq_0}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \mu_k^4 f_k(y_j); \tag{125}$$

изгибающий момент в средней балке главного направления

$$M(0, y) = aq_0 \sum_{k=1}^{\infty} M_k(y) \lambda_k \tag{126}$$

или

$$M(0, y) = aq_0 \left\{ M_N(y) + \sum_{k=1}^{N} [M_k(y) - M_N(y)] \lambda_k \right\}, \tag{127}$$

где

$$M_k(y) = Ei(y) f_k''(y) \tag{128}$$

изгибающий момент в балке главного направления, загруженной нагрузкой $\frac{p(y)}{p_0}$ и опертой на упругие опоры жесткостью

$$K_{jk} = \frac{16aEJ_j}{L^4} \mu_k^4 \tag{129}$$

В этих формулах:

$k = N$ — номер члена ряда, при котором функция $M_k(y)$ практически достигает своего предела;

μ_k, λ_k, ρ_k, ν_k и ϑ_k — функции, численные значения которых в зависимости от $\varkappa$ и k приведены в табл. 3, 5, 6, 7 и 8;

$f_k(y_j)$ — упругая линия j-й балки главного направления, загруженной нагрузкой $\frac{p(y)}{p_0}$ и опертой на промежуточные опоры жесткостью K_{jk}.

Крайние балки главного направления рассчитываются как неразрезные балки, загруженные нагрузкой $\frac{p(y)}{p_0}$ и опертые на промежуточные жесткие опоры.

Порядок расчета:

1) по табл. 3 и 4 для заданного значения коэффициента опорной пары перекрестных балок находим характеристические числа μ_k и $\frac{1}{\mu_k^4}$, соответствующие $k = 1, 2, 3, \ldots$

Таблица 3

Значения μ_k

k	$\varkappa$					
	0,00	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00
1	1,57	1,66	1,78	1,99	2,21	2,36
2	4,71	4,74	4,81	4,94	5,25	5,50
3	7,85	7,87	7,91	8,01	8,32	8,64
4	11,00	11,01	11,04	11,12	11,38	11,79
5	14,14	14,14	14,17	14,24	14,50	14,91
6	17,28	17,28	17,31	17,36	17,62	18,07

Таблица 4

Значения $\frac{1}{\mu_k^4}$

k	$\varkappa$					
	0,00	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00
1	0,16490	0,13180	0,09950	0,06370	0,04530	0,03220
2	0,00203	0,00198	0,00187	0,00168	0,00135	0,00109
3	0,00026	0,00026	0,00026	0,00024	0,00021	0,00018
4	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00005
5	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001

Таблица 5

Значения λ_k

k	$\varkappa$					
	0,00	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00
1	1,273	1,275	1,289	1,295	1,315	1,334
2	—0,424	—0,425	—0,445	—0,458	—0,496	—0,540
3	0,255	0,258	0,266	0,280	+0,302	0,238
4	—0,182	—0,184	—0,189	—0,198	—0,216	—0,240
5	0,141	0,143	0,146	0,152	0,168	0,190
6	—0,116	—0,117	—0,119	—0,124	—0,138	—0,156

Таблица 6

Значения ρ_k

k	$\varkappa$				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
1	0,516	0,432	0,350	0,266	0,180
2	—0,019	—0,019	—0,019	—0,019	—0,017
3	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
4	—0,002	—0 002	—0,002	—0,002	—0,002
5	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
6	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001

Таблица 7

Значения ν_k

k	$\varkappa$				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
1	0	0,0408	0,0813	0,119	0,149
2	0	0,0006	0,0018	0,004	0,012
3	0	0,0001	0,0003	0,001	0,003
4	0	0	0,0001	0,001	0,001
5	0	0	0	0	0,001

Таблица 8

Значения ϑ_k

k	$\varkappa$					
	0,00	0,25	0,50	0,75	0,90	1 00
1	0,811	0,802	0,790	0,766	0,734	0,704
2	0,088	0,090	0,093	0,112	0,127	0,140
3	0,032	0,033	0,035	0,040	0 048	0,054
4	0,017	0,017	0,018	0,020	0,024	0,029
5	0,010	0,010	0 011	0,012	0,014	0,018
6	0 007	0,007	0,007	0,008	0 010	0 012

2) по формуле (129) определяется жесткость упругих опор K_{jk}, которыми заменяется действие перекрестных балок на балки главного направления;

3) из рассмотрения балки главного направления как балки, загруженной нагрузкой $\frac{p(y)}{p_0}$ и опертой в местах пересечения с перекрестными балками ($y = y_j$) на упругие опоры жесткостью K_{jk}, при помощи теоремы пяти моментов (см. раздел V) определяются функции $f_k(y)$ и $f'_k(y)$ при $y = y_j$;

4) по табл. 5, 6, 7 и 8 определяются численные значения функций λ_i, ρ_k, ν_k и ϑ_k, соответствующие заданным коэффициентам опорных пар перекрестных балок $\varkappa$;

5) по формуле (122) определяется стрелка прогиба посредине пролета j-й перекрестной балки;

6) по формуле (123) определяется перерезывающая сила в опорном сечении j-й перекрестной балки;

7) по формуле (124) определяется изгибающий момент в середине пролета j-й перекрестной балки;

8) по формуле (125) определяется изгибающий момент в опорном сечении j-й перекрестной балки;

9) по формуле (126) или (127) определяются изгибающие моменты в средней балке главного направления;

10) элементы изгиба крайней балки главного направления определяются путем расчета ее как неразрезной балки, нагруженной нагрузкой интенсивностью $\frac{p(y)}{p_0}$ и опертой на упругие промежуточные опоры (см. раздел V).

Пример. Определить расчетные значения изгибающих моментов для балок перекрытия при следующих исходных данных:

Длина перекрытия (перекрестной балки)	$L = 15$ *м*
Ширина перекрытия (длина балки главного направления)	$l = 12$ *м*
Расстояние между балками перекрестными	$b = \frac{l}{6} = 2{,}00$ *м*
Расстояние между балками главного направления . .	$a = \frac{L}{10} = 1{,}5$ *м*
Момент инерции средней перекрестной балки	$J_1 = 150 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции остальных перекрестных балок . . .	$J_2 = J_3 = 100 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции балок главного направления	$i = 50 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Интенсивность равномерно распределенной нагрузки	$p = 0{,}5$ *кг/см*^{2}
Коэффициент опорной пары перекрестных балок . . .	$\varkappa_1 = 1{,}00$
Коэффициент опорной пары балок главного направления	$\varkappa = 0{,}00$

Перекрытие состоит из трех одинаковых балок главного направления и из пяти перекрестных балок, средняя из которых усилена.

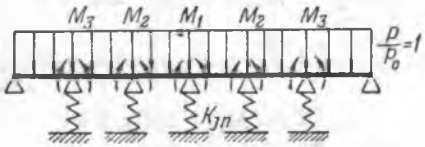


Рис. 31.

Для удобства вычислений запишем исходные данные в следующем виде:

$$\frac{L}{l} = 1{,}25; \quad b = \frac{l}{6}; \quad a = \frac{L}{10}; \quad i = \frac{J_0}{2}; \quad \frac{J_1}{J_0} = 1{,}5; \quad J_0 = J_2 = J_3, \quad \frac{p}{p_0} = 1.$$

По табл. 3 и 4 для $\varkappa = 1{,}00$ находим:

$$\mu_1 = 2{,}36; \quad \mu_2 = 5{,}50; \quad \mu_3 = 8{,}64;$$

$$\frac{1}{\mu_1^4} = 0.0322; \quad \frac{1}{\mu_2^4} = 0.00109 \quad \frac{1}{\mu_3^4} = 0{,}00018.$$

Для определения функций $f_k(y_j)$ рассмотрим балку главного направления, загруженную нагрузкой интенсивностью $\frac{p}{p_0} = 1$ и опертую в местах пересечения с перекрестными балками на упругие опоры жесткостью K_{jk} (рис. 31).

Используя теорему пяти моментов, составим уравнения равенства углов поворота на опорах и уравнения равновесия упругих опор:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\frac{M_{1k}b}{3Ei} - \frac{M_{2k}b}{6Ei} + \frac{f_{2k}-f_{1k}}{b} + \frac{1}{24}\frac{b^3}{Ei}\\
\frac{M_{1k}b}{6Ei} + \frac{M_{2k}b}{3Ei} + \frac{f_{2k}-f_{1k}}{b} - \frac{1}{24}\frac{b^3}{Ei} &= -\frac{M_{2k}b}{3Ei} - \frac{M_3b}{6Ei} + \frac{f_{3k}-f_{2k}}{b} + \frac{1}{24}\frac{b}{Ei}\\
\frac{M_{2k}b}{6Ei} + \frac{M_{3k}b}{3Ei} + \frac{f_{3k}-f_{2k}}{b} - \frac{1}{24}\frac{b^3}{Ei} &= -\frac{M_{3k}b}{3Ei} - \frac{f_{3k}}{b} + \frac{1}{24}\frac{b^3}{Ei}\\
\frac{K_{1k}}{2} f_{1k} &= \frac{M_{1k}-M_{2k}}{b} + \frac{b}{2}\\
K_{2k}f_{2k} &= \frac{M_{2k}-M_{1k}}{b} + \frac{M_{2k}-M_{3k}}{b} + b\\
K_3 f_{3k} &= \frac{M_{3k}-M_{2k}}{b} + \frac{M_{3k}}{b} + b
\end{aligned}\right\} \quad (130)$$

Полученные уравнения умножим на $\frac{6El}{b}$ и введем обозначение $F_j = \frac{6El}{b^2} f_j$. Тогда, используя формулу (129), систему уравнений можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
2M_{1k} + M_{2k} + F_{1k} - F_{2k} &= \frac{1}{4} b^2\\
M_{1k} + 4M_{2k} + M_{3k} - F_{1k} + 2F_{2k} - F_{3k} &= \frac{1}{2} b^2\\
M_{2k} + 4M_{3k} - F_{2k} + 2F_{3k} &= \frac{1}{2} b^2\\
F_{1k} = \frac{3}{4}\frac{i}{J_1}\left(\frac{L}{b}\right)^3 \frac{L}{a}\left(M_{1k} - M_{2k} + \frac{b^2}{2}\right)\frac{1}{\mu_k^4} &= 1052\frac{1}{\mu_k^4}\left(M_{1k} - M_{2k} + \frac{b^2}{2}\right)\\
F_{2k} = \frac{3}{8}\frac{i}{J_2}\left(\frac{L}{b}\right)^3 \frac{L}{a}(-M_{1k} + 2M_{2k} - M_{3k} + b^2)\frac{1}{\mu_k^4} &=\\
= \frac{788}{\mu_k^4}(-M_{1k} + 2M_{2k} - M_{3k} + b^2)&\\
F_{3k} = \frac{3}{8}\frac{i}{J_3}\left(\frac{L}{b}\right)^3 \frac{L}{a}(-M_{2k} + 2M_{3k} + b^2)\frac{1}{\mu_k^4} &=\\
= \frac{788}{\mu_k^4}(-M_{2k} + 2M_{3k} + b^2)&
\end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Обозначим $M_{jk} = \frac{1}{4} n_{jk} b^2$ и исключим F_j из первых трех уравнений системы (131), в результате получим

$$\left.\begin{aligned}
n_{1k}\left(2 + \frac{1840}{\mu_k^4}\right) + n_{2k}\left(1 - \frac{2628}{\mu_k^4}\right) + n_{3k}\frac{788}{\mu_k^4} &= \left(1 + \frac{1048}{\mu_k^4}\right)\\
n_{1k}\left(1 - \frac{2628}{\mu_k^4}\right) + n_{2k}\left(4 + \frac{4992}{\mu_k^4}\right) + n_{3k}\left(1 - \frac{3152}{\mu_k^4}\right) &= \left(2 - \frac{1048}{\mu_k^4}\right)\\
n_{1k}\frac{788}{\mu_k^4} + n_{2k}\left(1 - \frac{3152}{\mu_k^4}\right) + n_{3k}\left(4 + \frac{3940}{\mu_k^4}\right) &= \left(2 - \frac{3152}{\mu_k^4}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (132)$$

Подставив численные значения коэффициентов μ_1, μ_2 и μ_3 в систему уравнений (132), получим три системы уравнений, которые для удобства запишем в таблице (табл. 9).

Полученные системы уравнений удобно решать по схеме Гаусса. Для примера в табл. 10 выполнено решение первой системы.

Таблица 9

k	№ уравнения	n_{1k}	n_{2k}	n_{3k}	1
1	1	61,2	— 83,6	25,4	34,7
	2	—83,6	164,6	—100,4	—31,7
	3	25,4	—100,4	130,8	—99,5
2	1	4,01	—1,87	0,86	2,14
	2	—1,87	9,45	—2,44	0,86
	3	0,86	—2,44	8,28	—1,44
3	1	2,33	0,53	0,14	1,19
	2	0,53	4,90	0,43	1,81
	3	0,14	0,43	4,71	1,43

Таблица 10

№ строки	Обозначение	n_{11}	n_{21}	n_{31}	1	Σ
I	(1)	61,2	—83,6	25,4	34,7	37,7
II	(I) : 61,2	1	— 1,367	0,415	0,567	0,615
III	(2)	—83,6	164,6	—100,4	—31,7	—51,1
IV	83,6·II	83,6	—114,3	34,7	47,5	51,5
V	III+IV	—	50,3	—65,7	15,8	— 0,4
VI	V : 50,3	—	1	—1,306	0,314	— 0,008
VII	(3)	25,4	—100,4	130,8	—99,4	—43,6
VIII	—25,4·II	—25,4	34,7	—10,8	—14,4	—15,7
IX	65,7·VI	—	65,7	—85,8	20,6	0,5
X	VII+VIII+IX	—	—	34,6	—93,2	—58,8
XI	X : 34,6	—	—	1	— 2,7	— 1,7
XII	2	—	1	—	— 3,21	
XIII	1	1	—	—	— 2,69	
XIV	Проверка	—164,5	268,0	— 68,5	35,0	
XV	"	225,0	—528,0	271,0	—32,0	
XVI	"	—684	322,0	—353,0	—99,4	

Произведения $\mu_k^4 f_k(y_j)$, входящие в выражения (123)—(125), согласно принятым выше обозначениям можно вычислять по формуле

$$\mu_k^4 f_k(y_j) = \mu_k^4 \frac{b^2}{6Ei} F_j = \frac{L}{64EJ_j} \frac{b}{a} r_{jk}, \tag{133}$$

где

$$r_{1k} = 2(n_{1k} - n_{2k} + 2)$$

$$r_{2k} = -n_{1k} + 2n_{2k} - n_{3k} + 4$$

$$r_{3k} = -n_{2k} + 2n_{3k} + 4$$

Таблица 11

k	n_{1k}	n_{2k}	n_{3k}	r_{1k}	r_{2k}	r_{3k}
1	—2,69	—3,21	—2,70	5,04	2,97	1,81
2	+0,69	0,26	—0,19	4,86	4,02	3,36
3	+0,43	0,30	0,26	4,26	3,91	4,22

Численные значения величин n_{jk} и r_{jk} приведены в табл. 11 для $k = 1, 2, 3$. На основании выражения (133) формулы (122)—(125) можно записать в виде:

$$v(0, y_j) = \frac{pL^4 b}{64EJ_j} \sum_{n}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k^4} r_{jk}; \tag{134}$$

Таблица 12

j	k	1	2	3	$\sum_{k=1}^{3}$
	$\frac{\lambda_k}{\mu_k^4}$	0,043	—0,0006	0,0001	—
	ϑ_k	0,704	+0,140	0,054	—
	ρ_k	0,180	—0,017	0,004	—
	ν_k	0,149	0,012	0,003	—
1	r_{1k}	5,04	4,86	4,26	—
	$\frac{\lambda_k}{\mu_k^4} r_{1k}$	0,217	—0,003	0,0004	0,214
	$\vartheta_k r_{1k}$	3,55	0,680	0,230	4,46
	$\rho_k r_{1k}$	0,91	—0,083	0,017	0,84
	$\nu_k r_{1k}$	0,75	0,058	0,013	0,82
2	r_{2k}	2,97	4,02	3,91	—
	$\frac{\lambda_k}{\mu_k^4} r_{2k}$	0,143	—0,0024	0,0004	0,141
	$\vartheta_k r_{2k}$	2,09	0,56	0,21	2,86
	$\rho_k r_{2k}$	0,54	—0,069	0,016	0,487
	$\nu_k r_{2k}$	0,44	0,048	0,012	0,500
3	r_{3k}	1,81	3,36	4,22	—
	$\frac{\lambda_k}{\mu_k^4} r_{3k}$	0,078	—0,0020	0,0004	0,076
	$\vartheta_k r_{3k}$	1,270	0,270	0,228	1,97
	$\rho_k r_{3k}$	0,326	0,057	0,017	0,40
	$\nu_k r_{3k}$	0,27	0,040	0,0127	0,323

$$N_j\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{qLb}{8}\sum_{n}^{\infty}\vartheta_k r_{jk}; \tag{135}$$

$$M_j(0)=-\frac{qL^2b}{16}\sum_{n}^{\infty}\rho_k r_{jk}; \tag{136}$$

$$M_j\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{qL^2b}{8}\sum_{n}^{\infty}\nu_k r_{jk}. \tag{137}$$

По табл. 5, 6, 7 и 8 по значению опорной пары перекрестных балок $\varkappa_1 = 1{,}00$ определяем λ_j, ϑ_k, ρ_k и ν_k для $k = 1, 2, 3$. Значения сумм, входящих в формулы (134)—(137), вычисляем по табл. 12.

Подставляя полученные суммы в формулы (134)—(137), можно найти интересующие нас прогибы, перерезывающие силы и изгибающие моменты для каждой перекрестной балки.

Как видно из этой таблицы, учет третьего члена ряда дает незначительную поправку к величинам прогибов и моментов. Однако учитывать его следует, иначе при определении прогибов и моментов в крайней перекрестной балке может быть допущена значительная погрешность, так как по мере приближения к опорному контуру сходимость рядов ухудшается.

§ 8. Расчет перекрытий с двумя перекрестными балками и большим числом балок главного направления, средняя из которых отличается усиленной жесткостью (рис. 32)

Предлагаемые ниже расчетные формулы можно использовать только для расчета перекрытий, удовлетворяющих следующим условиям:

1) перекрестные балки одинаковы и симметрично расположены;

2) балки главного направления, за исключением средней, одинаковы и расположены друг от друга на одинаковом расстоянии;

3) средняя балка главного направления усилена по сравнению с остальными балками этого направления и делит пролет перекрестной балки на две равные части;

4) внешняя нагрузка равномерно распределена вдоль перекрестных балок.

Обозначения:

L — длина перекрестных балок;

l — длина балок главного направления;

a — расстояние между балками главного направления;

i — момент инерции поперечного сечения балок главного направления;

$\varkappa$ — коэффициент опорной пары ($0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$), характеризующий степень заделки балок главного направления на опорах;

mi — момент инерции поперечного сечения средней балки главного направления усиленной жесткости;

J — момент инерции поперечного сечения перекрестной балки;

β — отвлеченный коэффициент в выражении для стрелки прогиба любой балки главного направления в узловом сечении от внешней распределенной нагрузки;

γ — отвлеченный коэффициент в выражении для стрелки прогиба любой балки главного направления в узловом сечении от действия сосредоточенной силы;

p — интенсивность внешней распределенной нагрузки;

Q — внешняя распределенная нагрузка, приходящаяся на каждую балку главного направления;

P — дополнительная узловая сила, появляющаяся в узле пересечения перекрестной балки с балкой главного направления усиленной жесткости;

c — отстояние перекрестных балок от ближайших параллельных им сторон опорного контура перекрытия (рис. 32);

c' — отстояние перекрестных балок от дальних параллельных им сторон опорного контура перекрытия (рис. 32);

n — число пролетов перекрестной балки;

$$u=\sqrt[4]{\frac{n}{64\gamma}\frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3} \tag{138}$$

аргумент (условное обозначение).

Расчетные формулы:

а) Перекрестные балки свободно оперты на жесткие опоры.

Дополнительная сила, появляющаяся в среднем узле в результате пересечения перекрестной балки с балкой главного направления усиленной жесткости

$$P=\beta(m-1)\frac{1-\varphi_0(u)}{\gamma+\frac{m-1}{48}\frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3\psi_2(u)}Q. \tag{139}$$

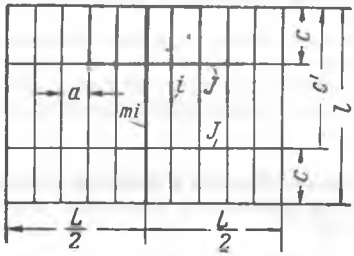


Рис. 32.

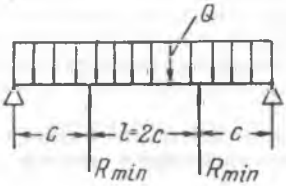


Рис. 33.

Расчетное значение изгибающего момента для перекрестной балки

$$M=\frac{\beta}{\gamma}\frac{nQL}{8}\chi_0(u)-\frac{PL}{4}\omega_0(u). \tag{140}$$

Минимальная узловая реакция (в середине пролета перекрестной балки)

$$R_{\min}=\frac{\beta}{\gamma}Q\varphi_0(u)-\frac{1}{48\gamma}\frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3P\psi_2(u). \tag{141}$$

Расчетные значения изгибающих моментов для балок главного направления получим, принимая их загруженными нагрузкой Q и двумя сосредоточенными силами $R_{\min}$ (рис. 33).

б) Перекрестная балка жестко заделана на жестких опорах.

Дополнительная сила, появляющаяся в среднем узле в результате пересечения перекрестной балки с балкой главного направления усиленной жесткости,

$$P=\beta(m-1)\frac{1-\varphi_1(u)}{\gamma+\frac{m-1}{192}\frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3\eta_1(u)}Q. \tag{142}$$

Расчетное значение изгибающего момента для перекрестной балки

$$M=\frac{\beta}{\gamma}\frac{nQL}{12}\chi_2(u)-\frac{PL}{8}\lambda_1(u). \tag{143}$$

Минимальная узловая реакция (в середине пролета перекрестной балки)

$$R_{\min}=\frac{\beta}{\gamma}Q\varphi_1(u)-\frac{1}{192\gamma}\frac{i}{J}\left(\frac{L}{l}\right)^3P\eta_1(u). \tag{144}$$

Расчетные значения изгибающих моментов для балок главного направления получим, принимая их загруженными внешней распределенной нагрузкой Q и двумя сосредоточенными силами $R_{\min}$ (рис. 33).

Порядок расчета:

1) по табл. 8, 11, 12 раздела V определяются численные значения коэффициентов β и γ;

2) по формуле (138) вычисляется значение аргумента u;

3) определяется величина m — отношение момента инерции поперечного сечения балки главного направления усиленной жесткости к моменту инерции прочих балок главного направления;

4) при помощи табл. 2, 3 и 4 раздела VIII по найденному значению аргумента u определяются значения $\varphi_0(u)$, $\omega_0(u)$ и $\psi_2(u)$ или $\varphi_1(u)$, $\eta_1(u)$ и $\lambda_1(u)$ в зависимости от заделки перекрестных балок;

5) находится величина внешней распределенной нагрузки Q, приходящейся на одну балку главного направления;

6) по формуле (139) или (142) вычисляется величина дополнительной узловой реакции P, появляющейся в месте пересечения перекрестной балки с усиленной балкой главного направления;

7) по формуле (140) или (143), в зависимости от заделки опорных сечений, определяется расчетное значение изгибающего момента для перекрестных балок;

8) по формуле (141) или (144), в зависимости от заделки опорных сечений перекрестных балок, находится значение минимальной узловой реакции R_{min};

9) расчетное значение изгибающего момента для балок главного направления определяется по формулам табл. 8, 11, 12 раздела V, считая балки загруженными внешней распределенной нагрузкой Q и двумя сосредоточенными силами R_{min}, приложенными в точках пересечения балки главного направления с перекрестными балками (рис. 33).

ГЛАВА 3

ПЕРЕКРЫТИЯ, ИМЕЮЩИЕ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО БАЛОК В КАЖДОМ НАПРАВЛЕНИИ

§ 9. Расчет перекрытий с большим числом одинаковых перекрестных балок и большим числом одинаковых балок главного направления (рис. 34)

Обозначения:

L — длина перекрестных балок (длина перекрытия);

l — длина балок главного направления (ширина перекрытия);

b — расстояние между перекрестными балками;

a — расстояние между балками главного направления;

J — момент инерции поперечного сечения перекрестных балок;

i — момент инерции поперечного сечения балок главного направления;

p — интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки (нагрузка на одну квадратную единицу поверхности перекрытия);

A — коэффициент податливости заделки перекрестных балок;

$\mathfrak{N}$ — коэффициент податливости заделки балок главного направления;

$\varkappa_n$ — коэффициент опорной пары, соответствующий n-у главному изгибу перекрестной балки;

$\varkappa$ — коэффициент опорной пары балок главного направления;

u_n — аргумент, характеризующий упругость перекрытия при n-м главном изгибе;

μ_n — отвлеченные коэффициенты, входящие множителями в формулу для определения u_n;

λ_n — отвлеченные коэффициенты, входящие множителями в формулы для опорного и пролетного изгибающих моментов средней перекрестной балки;

ν_n — отвлеченные коэффициенты, входящие множителями в формулу для опорного изгибающего момента средней балки главного направления;

ρ_n — отвлеченные коэффициенты, входящие множителями в формулу для пролетного изгибающего момента средней балки главного направления;

$$\varkappa = \frac{1}{1 + 2\frac{\mathfrak{N}Ei}{l}} \tag{145}$$

зависимость между $\varkappa$ и $\mathfrak{N}$.

При большом числе перекрестных балок и балок главного направления отношение сторон опорного контура пластин обшивки $\left(\frac{b}{a}\right)$ обычно близко к единице. Поэтому в этом случае нельзя считать, что вся внешняя нагрузка передается пластинами только балкам главного направления. Однако, так как при этом $L \gg b$ и $l \gg a$, то можно принимать, что к каждому узлу перекрытия приложено усилие, равное внешнему давлению, приходящемуся на прямоугольник ab. Это усилие воспринимается отчасти балкой главного направления, отчасти же перекрестной балкой. Как уже отмечалось выше, при большом числе балок главного направления (не менее пяти) без большой ошибки можно сосредоточенные в узлах перекрестной балки усилия заменить распределенной нагрузкой. Совершенно аналогично при большом числе перекрестных балок (не менее пяти) можно усилия, сосредоточенные в узлах балки главного направления, заменить распределенной нагрузкой.

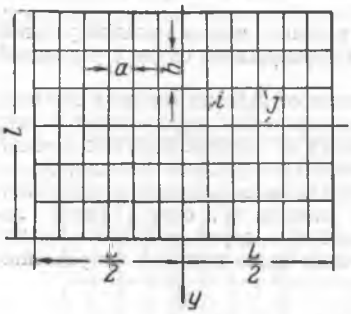


Рис. 34.

Расчетные формулы:

аргумент u_n

$$u_n = \sqrt[4]{\frac{k_n L^4}{64EJ}} = \mu_n \frac{L}{l} \sqrt{\frac{1}{4} \frac{l}{L} \frac{b}{a}}; \quad (146)$$

коэффициент опорной пары $\varkappa_n$

$$\varkappa_n = \frac{1}{1 + \frac{2AEJ}{L} \frac{\chi_2(u_n)}{\psi_2(u_n)}}; \quad (147)$$

изгибающий момент в опорных сечениях средней балки главного направления

$$M_0 = \frac{pal^2}{2} \sum_n \nu_n [1 - (1 - \varkappa_n) \varphi_0(u_n) - \varkappa_n \varphi_1(u_n)]; \quad (148)$$

изгибающий момент в среднем сечении средней балки главного направления

$$M_1 = -\frac{pal^2}{4} \sum_n \rho_n [1 - (1 - \varkappa_n) \varphi_0(u_n) - \varkappa_n \varphi_1(u_n)]; \quad (149)$$

изгибающий момент в опорных сечениях средней перекрестной балки

$$M_0 = \frac{pbL^2}{12} \sum_n \lambda_n \varkappa_n \chi_2(u_n); \quad (150)$$

изгибающий момент в среднем сечении средней перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{pbL^2}{8} \sum_n \lambda_n \left[(1 - \varkappa_n) \chi_0(u_n) + \frac{\varkappa_n}{3} \chi_1(u_n)\right]. \quad (151)$$

Численные значения коэффициентов μ_n, ν_n, ρ_n и λ_n приведены в табл. 3, 5, 6 и 7 в зависимости от коэффициента опорной пары балок главного направления $\varkappa$ и порядкового номера n вычисляемого коэффициента.

Численные значения функции $\chi_2(u_n)$, $\psi_2(u_n)$, $\varphi_0(u_n)$, $\varphi_1(u_n)$, $\chi_0(u_n)$ и $\chi_1(u_n)$ определяются по табл. 2 раздела VIII.

Порядок расчета:

1) из табл. 3 для данного значения коэффициента опорной пары балок главного направления $\varkappa$ находятся численные значения коэффициентов μ_n для $n = 1, 2, 3$ и т. д.;

2) по формуле (146) вычисляются величины u_n, соответствующие найденным значениям коэффициентов μ_n;

3) для полученных u_n по табл. 2 раздела VIII находятся численные значения функций $\chi_2(u_n)$ и $\psi_2(u_n)$;

4) по формуле (147) находятся значения $\varkappa_n$;

5) по табл. 5, 6 и 7 определяются численные значения коэффициентов λ_n, ν_n и ρ_n в зависимости от $\varkappa$ и n;

6) по табл. 2 раздела VIII находятся численные значения функций $\varphi_0(u_n)$, $\varphi_1(u_n)$, $\chi_0(u_n)$ и $\chi_1(u_n)$, соответствующие ранее найденным значениям величин u_n;

7) по формуле (148) определяется изгибающий момент в опорных сечениях средней балки главного направления;

8) по формуле (149) определяется изгибающий момент в среднем сечении средней балки главного направления;

9) по формуле (150) вычисляется изгибающий момент в опорных сечениях средней перекрестной балки;

10) по формуле (151) вычисляется изгибающий момент в среднем сечении средней перекрестной балки.

Примечание. При выполнении практических расчетов следует иметь в виду, что сходимость рядов, входящих в приведенные выше выражения для расчетных моментов, улучшается с увеличением аргумента u_1. Поэтому за балки главного направления следует принимать те, которые являются относительно более жесткими, т. е. для которых выполняется неравенство

$$\frac{L}{l}\sqrt[4]{\frac{lb}{Ja}} > 1. \tag{152}$$

При выполнении этого неравенства всегда будем иметь

$$u > 1{,}57 \cdot 0{,}71 \cong 1{,}10,$$

тогда уже при $n = 4$ u_n будет не меньше 12. Отсюда следует, что в суммах, входящих в выражения для изгибающих моментов, в этом случае можно удерживать с достаточной для практики степенью точности лишь два или максимум три члена ряда.

В предельном случае, когда $u_1 = 0$, т. е. когда перекрестные балки бесконечно жестки, решение получается такое же, как и в случае отсутствия балок главного направления. Когда $u_1 = \infty$, т. е. когда жесткость перекрестных балок бесконечно мала, получаем решение, соответствующее случаю полного отсутствия перекрестных балок.

Пример. Найти расчетные значения изгибающих моментов для балок перекрытия при следующих исходных данных:

Длина перекрытия (длина перекрестных балок)	$L = 7{,}8$ *м*
Ширина перекрытия (длина балок главного направления) . .	$l = 8{,}0$ „
Расстояние между перекрестными балками	$b = 0{,}8$ „
Расстояние между балками главного направления	$a = 0{,}6$ „
Момент инерции поперечного сечения перекрестных балок . .	$J = 10^4$ *см*^{4}
Момент инерции поперечного сечения балок главного направления	$i = 2 \cdot 10^4$ *см*^{4}
Коэффициент опорной пары заделки балок главного направления	$\varkappa = 0{,}50$
Интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки	$p = 0{,}5$ *кг/см*^{2}
Перекрестные балки жестко заделаны по концам	$A = 0$

Число балок главного направления $\frac{7{,}8}{0{,}6} - 1 = 12$.

Число перекрестных балок $\frac{8{,}0}{0{,}8} - 1 = 9$.

За балки главного направления приняты балки с меньшим моментом инерции, так как при этом выполняется неравенство (152)

$$\frac{L}{l}\sqrt[4]{\frac{lb}{Ja}} = \frac{7{,}8}{8{,}0}\sqrt[4]{\frac{0{,}8}{0{,}6}\cdot\frac{2\cdot 10^4}{10^4}} = 1{,}25 > 1.$$

По табл. 3 для $\varkappa = 0{,}50$ находим

$$n = 1; \quad 2; \quad 3;$$

$$\mu_n = 1{,}78; \quad 4{,}81; \quad 7{,}91.$$

Значение аргумента u_n

$$u_n = \mu_n \frac{L}{l} \sqrt[4]{\frac{ib}{4Ja}} = 0{,}882\mu_n.$$

Таким образом,

$$n = 1; \quad 2; \quad 3;$$
$$u_n = 1{,}57; \quad 4{,}25; \quad 7{,}00.$$

Перекрестные балки жестко заделаны по концам ($A = 0$), поэтому

$$\varkappa_n = \frac{1}{1 + \frac{2AEJ}{L} \cdot \frac{\chi_2(u_n)}{\varphi_2(u_n)}} = 1.$$

По табл. 5, 6 и 7 находим численные значения коэффициентов λ_n, ν_n и ρ_n, соответствующие $\varkappa = 0{,}50$:

$$n = 1; \quad 2; \quad 3;$$
$$\lambda_n = 1{,}289; \quad -0{,}445; \quad 0{,}266;$$
$$\nu_n = 0{,}0813; \quad 0{,}0018; \quad 0{,}0003;$$
$$\rho_n = 0{,}350; \quad -0{,}019; \quad 0{,}004.$$

По табл. 2 раздела VIII определяем численные значения функций $\varphi_1(u_n)$, $\chi_1(u_n)$ и $\chi_2(u_n)$, соответствующие найденным значениям аргумента u_n:

$$n = 1; \quad 2; \quad 3;$$
$$\varphi_1(u_n) = 0{,}435; \quad -0{,}0385; \quad 0{,}0026;$$
$$\chi_1(u_n) = 0{,}529; \quad -0{,}0028; \quad 0;$$
$$\chi_2(u_n) = 0{,}608; \quad 0{,}0832; \quad 0{,}0306.$$

Опорный изгибающий момент средней балки главного направления

$$M_0 = \frac{pal^2}{2} \sum_n \nu_n [1 - (1 - \varkappa_n)\varphi_0(u_n) - \varkappa_n \varphi_1(u_n)] =$$
$$= \frac{0{,}5 \cdot 60 \cdot 800^2}{2} [0{,}0813(1 - 0{,}435) + 0{,}0018(1 + 0{,}0385) + 0{,}0003(1 - 0{,}0026)] =$$
$$= 96 \cdot 10^5 (0{,}0460 + 0{,}00187 + 0{,}0003) = 4{,}61 \cdot 10^5 \text{ кгсм}.$$

Изгибающий момент в среднем сечении средней балки главного направления

$$M_1 = -\frac{pal^2}{4} \sum_n \rho_n [1 - (1 - \varkappa_n)\varphi_0(u_n) - \varkappa_n \varphi_1(u_n)] =$$
$$= -\frac{0{,}5 \cdot 60 \cdot 800^2}{4} [0{,}350(1 - 0{,}435) - 0{,}019(1 + 0{,}0385) + 0{,}004(1 - 0{,}0026)] =$$
$$= -48 \cdot 10^5 (0{,}198 - 0{,}0198 + 0{,}004) = -8{,}72 \cdot 10^5 \text{ кгсм}.$$

Опорный изгибающий момент средней перекрестной балки

$$M_0 = \frac{pbL^2}{12} \sum_n \lambda_n \varkappa_n \chi_2(u_n) = \frac{0{,}5 \cdot 70 \cdot 780^2}{12} (1{,}289 \cdot 0{,}608 - 0{,}445 \cdot 0{,}0832 +$$
$$+ 0{,}266 \cdot 0{,}0306) = 20{,}3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}756 = 15{,}3 \cdot 10^5 \text{ кгсм}.$$

Изгибающий момент в среднем сечении средней перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{pbL^2}{8} \sum_n \lambda_n \left[(1 - \varkappa_n)\chi_0(u_n) + \frac{\varkappa_n}{3}\chi_1(u_n)\right] =$$
$$= -30{,}5 \cdot 10^5 \left(1{,}289 \frac{0{,}529}{3} - 0{,}445 \frac{0{,}0028}{3}\right) = -10{,}17 \cdot 10^5 (0{,}683 - 0{,}00125) =$$
$$= -6{,}92 \cdot 10^5 \text{ кгсм}.$$

Таким образом, за расчетное значение изгибающего момента для балок главного направления принимаем значение момента в середине пролета $M_1 = -8{,}72 \cdot 10^5$ *кгсм*, а для перекрестных балок — значение опорного изгибающего момента $M_0 = 15{,}3 \cdot 10^5$ *кгсм*.

§ 10. Расчет перекрытий для случая, когда средняя балка главного направления усилена по сравнению с прочими балками этого направления (рис. 35)

По приводимым ниже формулам можно рассчитывать днищевые перекрытия, подкрепленные не только большим числом одинаковых флор и стрингеров, но и вертикальным килем, жесткость которого увеличена по сравнению с жесткостью стрингеров. По этим формулам можно также рассчитывать днищевые перекрытия, имеющие килеватость, учет которой сводится к увеличению жесткости вертикального киля.

Дополнительные обозначения:

$\frac{m}{1}\mathfrak{n}$ — коэффициент податливости заделки вертикального киля;

mi — момент инерции поперечного сечения вертикального киля.

Расчетные формулы:

аргумент u_n:

$$u_n = \mu_n \frac{L}{l} \sqrt[4]{\frac{1}{4} \cdot \frac{i}{J} \cdot \frac{b}{a}}; \qquad (146)$$

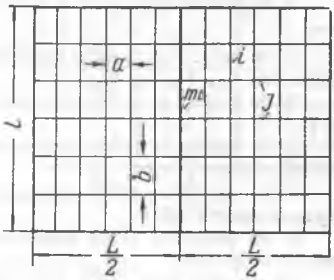


Рис. 35.

коэффициент опорной пары $\varkappa_n$ для случая, когда все балки главного направления одинаковы

$$\varkappa_n = \frac{1}{1 + \frac{2AEJ}{L} \frac{\chi_2(u_n)}{\psi_2(u_n)}}$$

коэффициент опорной пары $\varkappa_n'$ для случая, когда средняя балка главного направления усилена

$$\varkappa_n' = \frac{1}{1 + \frac{2AEJ}{L} \frac{\lambda_1(u_n)}{\chi_0(u_n)}} \qquad (154)$$

изгибающий момент в середине пролета вертикального киля

$$M_1 = -m \frac{pal^2}{4} \sum_n \rho_n \Phi_n(0), \qquad (155)$$

изгибающий момент в опорных сечениях вертикального киля

$$M_0 = m \frac{pal^2}{2} \sum_n \nu_n \Phi_n(0) \qquad (156)$$

изгибающий момент в середине пролета среднего флора

$$M_1 = -\frac{pbL^2}{8} \sum_n \lambda_n \Big\{(1 - \varkappa_n)\chi_0(u_n) + \varkappa_n \chi_1(u_n) -$$

$$- 2(m-1)\frac{a}{L}\left[(1 - \varkappa')\mu_0(u_n) + \frac{\varkappa_n'}{2}\mu_1(u_n)\right]\Phi_n(0)\Big\} \qquad (157)$$

изгибающий момент в опорных сечениях среднего флора

$$M_0 = \frac{pbL^2}{12} \sum_n \lambda_n \left\{\varkappa_n \chi_2(u_n) - \frac{3}{2}(m-1)\frac{a}{L}\varkappa_n' \lambda_1(u_n)\Phi_n(0)\right\}, \qquad (158)$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_n(0) = \frac{3}{4}\frac{L}{a}\frac{1}{m-1}\;\frac{1-(1-\varkappa_n)\varphi_0(u_n)-\varkappa_n\varphi_1(u_n)}{u_n^4\left[\left(1-\varkappa_n'\right)\psi_2(u_n)+\frac{1}{4}\varkappa_n'\eta_1(u_n)\right]+\frac{3}{4}\frac{L}{a}\frac{1}{m-1}}\\ \chi_0(u_n),\ \chi_1(u_n),\ \chi_2(u_n),\ \psi_2(u_n),\ \varphi_0(u_n),\ \varphi_1(u_n),\ \mu_0(u_n)\ \text{и}\ \mu_1(u_n)\end{array}\right\} \quad (159)$$

— функции, численные значения которых приведены в табл. 2 раздела VIII в зависимости от аргумента u_n;

$\lambda_1(u_n)$ и $\eta_1(u_n)$ — функции, определяемые по табл. 4 раздела VIII;

ν_n, ρ_n, λ_n и μ_n — функции, определяемые по табл. 7, 6, 5 и 3, соответственно.

Порядок расчета:

1) по табл. 3 по заданному значению коэффициента $\varkappa$ находятся численные значения коэффициентов μ_n для $n = 1, 2, 3$ и т. д.;

2) после этого по формуле (146) вычисляются аргументы u_n;

3) для полученных значений аргументов u_n по табл. 2, 4 раздела VIII находятся численные значения функций

$$\chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \psi_2,\ \varphi_0,\ \mu_0,\ \mu_1,\ \lambda_1\ \text{и}\ \eta_1;$$

4) по формулам (153) и (154) определяются коэффициенты опорных пар $\varkappa_n$ и $\varkappa_n'$;

5) по табл. 7, 6, 5 и 3 в зависимости от $\varkappa$ для $n = 1, 2, 3$ и т. д. находятся коэффициенты ν_n, ρ_n, λ_n и μ_n;

6) по формуле (159) определяется значение коэффициентов $\Phi_n(0)$ для $n = 1, 2, 3$ и т. д.;

7) по формуле (156) определяется изгибающий момент в опорных сечениях вертикального киля;

8) по формуле (155) определяется изгибающий момент в середине пролета вертикального киля;

9) по формуле (158) вычисляется изгибающий момент в опорных сечениях среднего флора;

10) по формуле (157) вычисляется изгибающий момент в середине пролета среднего флора.

Примечания:

1. При практических расчетах по этой схеме при значениях u_n больших, чем $u_n = 5{,}00$, можно пользоваться следующими асимптотическими выражениями для функций $\psi_2(u_n)$, $\chi_2(u_n)$, $\eta_1(u_n)$, $\mu_0(u_n)$ и $\mu_1(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_2(u_n) = \frac{3}{4}\frac{1}{u_n^3}\\ \chi_2(u_n) = \frac{2}{3}\frac{1}{u_n^2}\\ \eta_1(u_n) = \frac{3}{u_n^3}\\ \mu_0(u_n) = \frac{1}{2u_n}\\ \mu_1(u_n) = \frac{1}{u_n}\end{array}\right\} \quad (160)$$

2. Изгибающие моменты в ближайших к килю стрингерах можно считать примерно в m раз меньшими, чем в вертикальном киле.

§ 11. Расчет перекрытий для случаев, когда две балки главного направления усилены по сравнению с прочими балками этого направления и делят пролет перекрестных связей на три равные части (рис. 36)

К перекрытиям этого типа можно отнести, например, перекрытие, подкрепленное, в дополнение к большому числу одинаковых равноудаленных флор и стрингеров, еще двумя усиленными рамными шпангоутами, делящими пролет стрингеров между переборками на три равные части.

Расчетные формулы:
аргумент u_n:

$$u_n = \mu_n \frac{L}{l} \sqrt[4]{\frac{1}{4} \frac{i}{J} \frac{b}{a}}; \tag{161}$$

коэффициенты опорной пары $\varkappa_n$ для случая, когда все балки главного направления одинаковы,

$$\varkappa_n = \frac{1}{1 + \frac{2AEJ}{L} \frac{\chi_2(u_n)}{\psi_2(u_n)}}; \tag{162}$$

коэффициенты опорной пары $\varkappa_n''$ для случая, когда две балки главного направления усилены,

$$\varkappa_n'' = \frac{1}{1 + \frac{2AEJ}{L} \frac{\varepsilon_2(u_n)}{\alpha(u_n)}}; \tag{163}$$

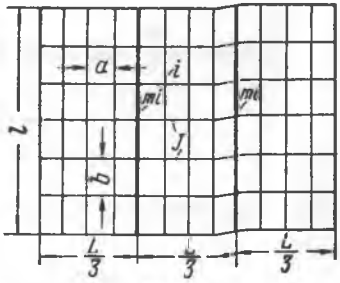


Рис. 36.

изгибающий момент посредине пролета усиленных флор

$$M_1 = -m \frac{pal^2}{4} \sum_n \rho_n \Phi_n (0{,}167L); \tag{164}$$

изгибающий момент в опорных сечениях усиленных флор

$$M_0 = m \frac{pal^2}{2} \sum_n \nu_n \Phi_n (0{,}167L); \tag{165}$$

изгибающий момент посредине пролета среднего флора

$$M_1 = -\frac{pal^2}{4} \sum_n \rho_n \Phi_n (0); \tag{166}$$

изгибающий момент в опорных сечениях среднего флора

$$M_0 = \frac{pal^2}{2} \sum_n \nu_n \Phi_n (0); \tag{167}$$

изгибающий момент посредине пролета средней перекрестной балки

$$M_1 = -\frac{pbL^2}{8} \sum_n \lambda_n B_n; \tag{168}$$

изгибающий момент в опорных сечениях средней перекрестной балки

$$M_0 = \frac{pbL^2}{12} \sum_n \lambda_n C_n, \tag{169}$$

где

$$B_n = (1 - \varkappa_n) \chi_0 (u_n) + \frac{1}{3} \varkappa_n \chi_1 (u_n) - \frac{8}{9} (m - 1) \frac{a}{L} \times$$
$$\times \left[3 \left(1 - \varkappa_n''\right) \varepsilon_0 (u_n) + \varkappa_n'' \varepsilon_1 (u_n)\right] \Phi_n (0{,}167L); \tag{170}$$

$$C_n = \varkappa_n \chi_2 (u_n) - \frac{24}{9} (m - 1) \frac{a}{L} \varkappa_n'' \varepsilon_2 (u_n) \Phi_n (0{,}167L); \tag{171}$$

$$\Phi_n (0) = 1 - (1 - \varkappa_n) \varphi_0 \ u_n) - \varkappa_n \varphi_1 (u_n) - \frac{8}{81} \frac{a}{L} (m - 1) \times$$
$$\times \left[23 \left(1 - \varkappa_n''\right) \xi_0 (u_n) + 5\varkappa_n'' \xi_1 (u_n)\right] \Phi_n (0{,}167L); \tag{172}$$

$$\Phi_n(0{,}167L) = \frac{\Phi_n^{(1)}(0{,}167L)\,\frac{81}{32}\,\frac{L}{a}\,\frac{1}{m-1}}{u_n^4\left[5(1-\varkappa)\,\xi_0(u_n) + \varkappa_n''\,\xi_1(u_n)\right] + \frac{81}{32}\,\frac{L}{a}\,\frac{1}{m-1}}; \tag{173}$$

$$\Phi_n^{(1)}(0{,}167L) = 1 - (1-\varkappa_n)\,\frac{V_0(u_n)\,V_0\left(\frac{u_n}{3}\right) + V_2(u_n)\,V_2\left(\frac{u_n}{3}\right)}{V_3^2(u_n) + V_2^2(u_n)} -$$

$$-\,\varkappa_n\,\frac{V_1(u_n)\,V_0\left(\frac{u_n}{3}\right) + V_3(u_n)\,V_2\left(\frac{u_n}{3}\right)}{V_0(u_n)\,V_1(u_n) + V_2(u_n)\,V_3(u_n)}; \tag{174}$$

$$\alpha(u_n) = \frac{23}{31}\,u_n\xi_0(u_n)\sqrt{2}\,V_3(u_n) + \frac{3}{4}\,\frac{1}{u_n}\,\varepsilon_0(u_n)\sqrt{2}\,V_1(u_n) -$$

$$-\,\frac{9}{8}\,\frac{1}{u_n^2}\,V_2\left(\frac{2}{3}\,u_n\right), \tag{175}$$

$$\varepsilon_2(u_n) = \frac{1}{72}\left[20u_n^2\xi_1(u_n)\,V_0(u_n) - 9\varepsilon_1(u_n)\,V_2(u_n) + \frac{81}{u_n}\sqrt{2}\,V_3\left(\frac{2}{3}\,u_n\right)\right]; \tag{176}$$

$$\xi_0(u_n) = \frac{23}{20}\left[\xi_0(u_n)\,V_0\left(\frac{u_n}{6}\right) - \frac{27}{23}\,\frac{1}{u_n^2}\,\varepsilon_0(u_n)\,V_2\left(\frac{u_n}{6}\right)\right]; \tag{177}$$

$$\xi_1(u_n) = \frac{5}{3}\,\xi_1(u_n)\,V_0\left(\frac{u_n}{6}\right) - 3\,\frac{1}{u_n^2}\,\varepsilon_1(u_n)\,V_2\left(\frac{u_n}{6}\right); \tag{178}$$

$\chi_0(u_n)$, $\chi_1(u_a)$, $\chi_2(u_n)$, $\varphi_0(u_n)$ и $\varphi_1(u_n)$ — функции, определяемые по табл. 2 раздела VIII;

$\varepsilon_0(u_n)$, $\varepsilon_1(u_n)$, $\xi_0(u_n)$ и $\xi_1(u_n)$ — функции, определяемые по табл. 4 раздела VIII;

ρ_n, ν_n и λ_n — коэффициенты, численные значения которых в зависимости от $\varkappa$ приведены в табл. 5, 6 и 7 раздела VIII;

V_0, V_1, V_2 и V_3 — функции Пузыревского, численные значения которых даны в табл. 1 раздела VIII;

m — коэффициент, характеризующий степень увеличения момента инерции усиленных балок по сравнению с остальными балками главного направления.

Порядок расчета:

1) по табл. 3 по заданному значению $\varkappa$ находятся численные значения коэффициентов μ_n для $n = 1, 2, 3$ и т. д.;

2) по формуле (161) определяется аргумент u_n для $n = 1, 2, 3$ и т. д.;

3) по табл. 2 и 4 раздела VIII находятся численные значения функций χ_0, χ_1, χ_2, φ_0, φ_1, ε_0, ε_1, ξ_0 и ξ_1, соответствующие найденным значениям аргумента u_n;

4) по формулам (175), (176), (177) и (178) определяются численные значения функций α, ε_2, ξ_0 и ξ_1;

5) по формулам (162) и (163) определяются коэффициенты $\varkappa'$ и $\varkappa''_n$;

6) по табл. 5, 6 и 7 в зависимости от $\varkappa$ находятся коэффициенты ν_n, ρ_n и λ_n для $n = 1, 2, 3$ и т. д.;

7) по формулам (170), (171), (172), (173) и (174) вычисляются значения функций B_n, C_n, $\Phi_n(0)$, $\Phi_n(0{,}167L)$ и $\Phi_n^{(')}(0{,}167L)$, соответствующие $n=1, 2, 3$ и т. д.;

8) по формулам (164) и (165) определяются изгибающие моменты посредине пролета и в опорных сечениях усиленных флор;

9) по формулам (166) и (167) определяются изгибающие моменты посредине пролета и в опорных сечениях среднего флора;

10) по формулам (168) и (169) определяются изгибающие моменты посредине пролета и в опорных сечениях средней перекрестной балки.

РАЗДЕЛ X

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Плоской рамой называется конструкция, состоящая из стержней, лежащих в одной плоскости и жестко связанных между собой в узлах. Предполагается при этом, что нагрузка, действующая на раму, лежит в ее плоскости, что в этой же плоскости лежит одна из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения стержня, входящего в состав рамы, и деформация рамы не сопровождается закручиванием стержней.

При жестком соединении стержней рамы друг с другом подразумевается неизменность угла между ними при действии на раму внешней нагрузки. Благодаря наличию жестких узлов рамы изгиб одного из ее стержней неизбежно вызывает некоторый изгиб и всех остальных ее стержней.

Рамы, входящие в состав судового корпуса, разделяются по типу образующих их стержней:

1) на прямолинейные, состоящие из прямых стержней или настолько близких к прямым, что их можно считать прямыми; так, в частности, при расчетах шпангоутных рам судна пренебрегают погибью бимсов, считая их прямыми;

2) на криволинейные, имеющие в своем составе часть кривых стержней.

Те и другие рамы в свою очередь разделяются на следующие классы:

1) простые рамы, в каждом узле которых сходится не более двух стержней;

2) сложные рамы, в отдельных узлах которых сходится более двух стержней.

Кроме того, все рамы в зависимости от условия закрепления их узлов разделяются на рамы с *неподвижными* узлами и рамы с *подвижными* узлами.

Наиболее распространенными в составе судового корпуса являются прямолинейные простые и сложные рамы с неподвижными узлами. Неподвижность узлов таких рам обеспечивается благодаря наличию наружной обшивки и настила палуб, связанных между собой несколькими поперечными переборками и обладающих благодаря этому весьма большой жесткостью по отношению к усилиям, действующим в их плоскости и предотвращающих тем самым любые поступательные перемещения узлов рам.

К рамам, имеющим подвижные узлы, относятся шпангоутные рамы всевозможных ростр, не скрепленных поперечными переборками, безраскосные фермы и бракетные флоры. Безраскосными принято называть такие фермы, у которых связь между поясками осуществлена посредством жестких стоек, жестко связанных с поясками.

К криволинейным рамам, встречающимся в составе судового корпуса, относятся рамы подводных лодок, шпангоутные рамы судов острых очертаний, стойки туннелей гребного вала и т. п.

Для каждого перечисленного класса рам существует наиболее приемлемый для него способ расчета. Все существующие способы расчета рам основаны на применении различных методов раскрытия статической неопределимости систем.

Простые прямолинейные рамы с неподвижными узлами и стержнями постоянного сечения удобнее всего рассчитывать по методу трех моментов.

Расчет сложных рам, составленных из прямых стержней постоянного сечения, наиболее просто осуществляется методом угловых деформаций или методом последовательного уравновешивания узлов.

При расчете простых и сложных прямолинейных рам с подвижными узлами для отыскания дополнительных неизвестных, определяющих смещение отдельных узлов, метод моментов и метод деформаций приходится дополнять уравнениями начала возможных перемещений.

Для расчета криволинейных рам и рам с прямыми стержнями переменного сечения применяют метод потенциальной энергии.

Упомянутые методы расчета судовых рам не являются единственными. Следует отметить, в частности, что для расчета рам в строительных сооружениях широко распространены способы, основанные на применении канонических уравнений. Каноническая система уравнений, т. е. такая система уравнений, коэффициенты которой симметричны относительно главной диагонали, может быть составлена, если воспользоваться условиями равновесия, вытекающими из принципа возможных перемещений. Способы расчета, основанные на составлении канонической системы уравнений, не получили распространения в строительной механике корабля ввиду относительной простоты судовых рам, позволяющих ограничиться применением более простых с теоретической точки зрения методов расчета.

Статическая неопределимость рам, составленных из прямых стержней, раскрывается в следующих предположениях:

1) длина всех стержней при нагрузке рамы не изменяется;

2) длина отдельных стержней рамы настолько велика по сравнению с их высотой, что перемещениями от сдвигов у этих стержней по сравнению с перемещениями от изгиба можно пренебречь;

3) жесткость всех стержней рамы настолько велика, что осевые усилия, действующие в этих стержнях, не оказывают никакого влияния на элементы их изгиба;

4) стержни рамы на всем их протяжении считаются призматическими (если сечение стержня меняется непрерывно, то обычно расчет ведут по среднему сечению);

5) незначительной кривизной стержней пренебрегают.

При расчете судовых рам, имеющих симметричную конструкцию и нагруженных несимметричной нагрузкой, в большинстве случаев, независимо от применяемого метода расчета, оказывается целесообразным разложить нагрузку на симметричную и асимметричную части и производить расчет рамы для каждой нагрузки в отдельности, складывая затем полученные решения.

Количество неизвестных в каждой полученной при этом системе уравнений оказывается почти в два раза меньшим, чем в системе уравнений, составленных без учета симметрии конструкции.

При действии асимметричной нагрузки в симметричных сечениях конструкции имеют место следующие соотношения, которые должны быть использованы для сокращения числа неизвестных:

1) изгибающие моменты равны по величине и по знаку (для правила знаков, принимаемого в методе сил) и изгибающие моменты обратны по знаку (для правила знаков, принимаемого в методе деформаций);

2) углы поворота равны по величине, но обратны по знаку.

Ввиду этого на оси симметрии угол поворота поперечного сечения стержня равен нулю и, если стержень не имеет опоры, равна нулю перерезывающая сила.

При действии асимметричной нагрузки в симметричных сечениях имеют место следующие соотношения:

1) изгибающие моменты равны по величине и обратны по знаку;

2) углы поворота равны по величине и по знаку.

Поэтому на оси симметрии стрелка прогиба равна нулю и, если нет упругого закрепления, равен нулю изгибающий момент.

Указанное использование принципа симметрии целесообразно в том случае, когда в системе уравнений, составленной без учета симметрии конструкции, оказывается более четырех неизвестных. При меньшей степени статической неопределимости конструкций использование принципа симметрии нецелесообразно.

Решение составленной системы уравнений, раскрывающее статическую неопределимость рамы, рекомендуется облекать в табличную форму.

Уравнения помещаются при этом в отдельных строках таблицы, а ее столбцы отводятся определенным коэффициентам при неизвестных. Последний столбец таблицы отводится свободным членам и отделяется от остальных столбцов жирной чертой. Наименование неизвестной, к которой относится данный столбец таблицы, выписывается над этим столбцом. Общий множитель, в долях которого выражаются свободные члены, выписывается над последним столбцом таблицы.

Рекомендуется этот последний множитель выбирать так, чтобы его размерность была та же, что и размерность основных неизвестных. Это дает возможность коэффициенты у основных неизвестных и у свободного члена делать отвлеченными величинами.

Уравнения рекомендуется вписывать в таблицу в том же порядке, в каком в таблицу вписаны неизвестные, т. е. отводить первую строку тому уравнению, которое соответствует первой неизвестной, вторую — уравнению, соответствующему второй неизвестной и т. д. Составленная таким образом таблица по началу взаимности должна быть симметрична относительно своей основной диагонали, т. е. диагонали, идущей от левого верхнего угла таблицы к правому нижнему.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ РАМ

§ 1. Расчет простых рам

Метод трех моментов

а) Расчет простых рам, не имеющих подвижных узлов. Расчет этих рам принципиально ничем не отличается от расчета неразрезных балок. Приняв за основные неизвестные моменты взаимодействия стержней в узловых точках, определяют для каждого стержня углы поворота его опорных сечений в функции от пролетной нагрузки стержня и его опорных моментов. Эти углы поворота у стержней, сходящихся в каждом узле, приравниваются друг другу. Это дает столько уравнений, сколько их необходимо иметь для разыскания всех опорных моментов.

Пример 1. Раскрыть статическую неопределимость рамки с неподвижными узлами, изображенной на рис. 1. Принимаем за основные неизвестные моменты

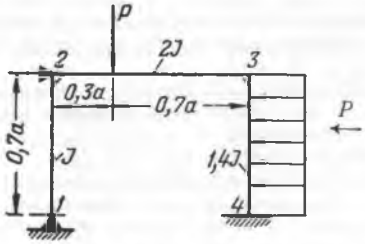


Рис. 1.

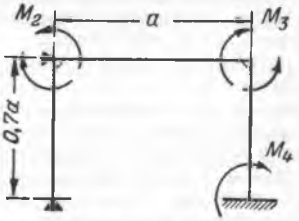


Рис. 2.

в узлах *2*, *3* и *4* и считаем их положительными, если их направления совпадают с указанными на рис. 2. Из рассмотрения углов поворота в точках *2*, *3* и *4* получаем:

$$\frac{M_2\cdot 0{,}7a}{3EJ} = -\frac{M_2 a}{3E\cdot 2J} - \frac{M_3 a}{6E\cdot 2J} + \frac{Pa}{6}\,0{,}21\cdot 1{,}7\,\frac{a}{E\cdot 2J};$$

$$\frac{M_2 a}{6E\cdot 2J} + \frac{M_3 a}{6E\cdot 2J} - \frac{Pa^2}{6E\cdot 2J}\,0{,}21\cdot 1{,}3 = -\frac{M_3\,0{,}7a}{3E\cdot 1{,}4J} - \frac{M_4\,0{,}7a}{6E\cdot 1{,}4J} + \frac{P\cdot 0{,}7a}{24}\cdot\frac{0{,}7a}{E\cdot 1{,}4J};$$

$$\frac{M_3\cdot 0{,}7a}{6E\cdot 1{,}4J} + \frac{M_4\cdot 0{,}7a}{3E\cdot 1{,}4J} - \frac{P\cdot 0{,}7a}{24}\cdot\frac{0{,}7a}{E\cdot 1{,}4J} = 0.$$

Эта система после деления на $\frac{a}{12EJ}$ может быть представлена в табличной форме (табл. 1).

Для того чтобы решить эту систему уравнений, достаточно поделить последнюю строку табл. 1 на два и вычесть результат этого деления из 2-й строки; результат этого вычитания поделить на 3,5 и вычесть из первой строки, а затем последовательно найти M_2; 0,286 M_2; M_3; 0,5 M_3 и M_4.

Таблица 1

№ строки	M_2	M_3	M_4	Pa
1	4,8	1	—	0,357
2	1	4	1	0,448
3	—	1	2	0,175

Таблица 2

№ строки	M_2	M_3	M_4	Pa
1	—	0,5	1	0,088
2	1	3,5	—	0,360
3	0,286	1	—	0,103
4	4,514	—	—	0,254
5	1	—	—	0,056
6	0,286	—	—	0,016
7	—	1	—	0,087
8	—	0,5	—	0,044
9	—	—	1	0,044

Все это вычисление укладывается в табл. 2, в которой строка 7-я получена вычитанием строки 6-й из строки 3-й, а строка 9-я — вычитанием 8-й строки из 1-й.

Как видно из 5-й, 7-й и 9-й строк этой таблицы, $M_2 = 0{,}056\ Pa$; $M_3 = 0{,}087\ Pa$; $M_4 = 0{,}044\ Pa$.

При построении эпюр моментов удобнее всего откладывать абсолютную величину пролетных моментов перпендикулярно оси стержня в сторону сжатого волокна, абсолютную же величину опорных моментов — в сторону растянутых волокон и затем отсчитывать ординаты эпюр моментов, как показано на рис. 3. Зная опорные моменты всех стержней, нетрудно разыскать для них всех величины осевых усилий, а также построить эпюры перерезывающих сил.

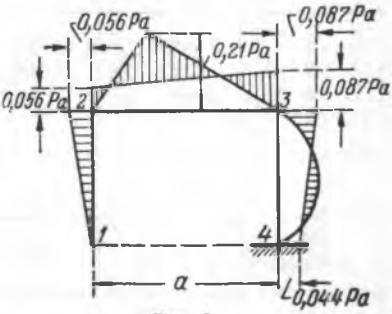


Рис. 3.

б) Расчет простой рамки замкнутого типа. Сколько бы стержней ни входило в состав простой разомкнутой рамки, уравнения, раскрывающие ее статическую неопределимость, имеют структуру нормальную для системы уравнений трех моментов. Уравнения, раскрывающие статическую неопределимость замкнутых простых рамок, имеют ту особенность, что составляют замкнутую же систему уравнений трех моментов. Решаются такие системы почти так же просто при помощи того же метода последовательного исключения неизвестных.

Пример 2. Рассчитать рамку с неподвижными узлами, изображенную на рис. 4. Сократив уравнение трех моментов на $\frac{a}{12EJ}$, можно получить для раскрытия неопределимости рассматриваемой рамки систему уравнений, даваемую табл. 3.

Простейший путь решения этой системы состоит в последовательном попарном исключении неизвестных методом неопределенных множителей.

Примечание. Чтобы предотвратить при вычислении потерю точности, связанную с необходимостью разыскания малых разностей близких величин, рекомендуется всегда при последовательном исключении переменных находить переменные из тех уравнений, которые этим именно переменным соответствуют.

В рассматриваемом случае переменные M_1 и M_2 следует находить не из уравнений (3) и (4), что, казалось бы, проще, а из уравнений (1) и (2).

При помощи метода неопределенных множителей M_1 и M_2 разыскиваются так: первое уравнение умножается на m, второе — на n, результаты складываются. Коэффициенты, с которыми в полученное уравнение входят M_1 и M_2, приравниваются: один — нулю, другой — единице. Полученные уравнения

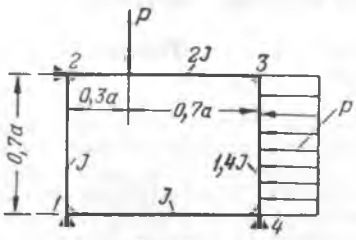


Рис. 4.

$$6{,}8m_1 + 1{,}4n_1 = 1; \qquad 6{,}8m_2 + 1{,}4n_2 = 0;$$

$$1{,}4m_1 + 4{,}8n_1 = 0; \qquad 1{,}4m_2 + 4{,}8n_2 = 1$$

решаются относительно m и n. Это дает $m_1 = 0{,}1565$; $n_1 = -0{,}0456$; и $m_2 = -0{,}0456$; $n_2 = 0{,}2212$. Помножив 1-ю строку таблицы на m_1, 2-ю на n_1 и сложив результаты этих умножений, можно прийти к уравнению, составляющему 1-ю строку табл. 4.

Помножим 1-е уравнение табл. 3 на m_2, 2-е на n_2 и, сложив результаты, получим 2-ю строку табл. 4, 3-я и 4-я строки табл. 4 получаются исключением M_1 и M_2 из последних двух строк табл. 3.

Таблица 3

№ уравнения	M_1	M_2	M_3	M_4	Pa
1	6,8	1 4	—	2	0
2	1,4	4,8	1	—	0,357
3	—	1	4	1	0,448
4	2	—	1,0	6,0	0,175

Таблица 4

№ уравнения	M_1	M_2	M_3	M_4	Pa
1	1,000	—	—0,0456	0,3130	—0,016
2	—	1,000	0,2212	—0,0912	0,078
3	—	—	3,7788	1,0912	0,370
4	—	—	1,0912	5.376	0,207
5	—	—	—	1,000	+0,020
6	—	—	1,000	—	+0,092
7	—	1,000	—	—	+0,060
8	1,000	—	—	—	—0,018

5-я строка табл. 4 получена из 3-й и 4-й при помощи множителей $m_3 = -0{,}0571$; $n_3 = 0{,}1975$, найденных из уравнений

$$3{,}779m_3 + 1{,}091n_1 = 0;$$

$$1{,}091m_3 + 5{,}376n_1 = 1.$$

6-я строка получена умножением 3-й на $m_4 = 0{,}281$, 4-й же на $n_4 = -0{,}0571$, найденных из уравнений

$$3{,}779m_4 + 1{,}091n_4 = 1;$$

$$1{,}091m_4 + 5{,}376n_4 = 0.$$

Строки 7-я и 8-я получены после этого исключением M_4 и M_3, соответственно, из 2-й и 1-й строк табл. 4.

Найденный результат: $M_1 = -0{,}018$ *Pa*; $M_2 = 0{,}060$ *Pa*; $M_3 = 0{,}092$ *Pa*; $M_4 = 0{,}020$ *Pa*.

Примененным в этом примере для попарного исключения неизвестных приемом можно вообще пользоваться для выполнения аналогичных операций. Для большей наглядности рекомендуется табл. 3 и 4 соединять в одну общую таблицу, выписывая последовательные строки табл. 4 непосредственно под соответствующими строками основной таблицы, отделенными от последующих строк горизонтальной чертой. Форма такой таблицы дана в табл. 5, где крестиками обозначены те элементы, которые заполняются подсчетом.

Четыре первые строки табл. 5 представляют основную систему уравнений, четыре последних — результат ее решения.

Таблица 5

№ строки	M_1	M_2	M_3	M_4	*Pa*
1	×	×		×	×
2	×	×	×	—	×
3	—	×	×	×	×
4	×	—	×	×	×
5	1,000	—	×	×	×
6	—	1,000	×	×	×
7	—	—	×	×	×
8	—	—	×	×	×
9	—	—	—	1,000	×
10	—	—	1,000		×
11	—	1,000	—	—	×
12	1,000	—	—	—	×

Если рамка имеет отдельные подвижные узлы, относительные перемещения последних лучше всего характеризовать величиной получающихся при этих перемещениях углов поворота прямых, соединяющих концы отдельных стержней. Эти углы поворота, принимаемые обычно за положительные при вращении по часовой стрелке, следует вводить в число основных неизвестных рассматриваемой системы. Для определения их приходится составлять так называемые дополнительные уравнения, получаемые путем приравнивания нулю суммы всех усилий, которые могут производить работу при изменении конфигурации шарнирного

полигона, соответствующего[1] рассматриваемой раме, определяемом изменениями этих углов. Углу поворота прямой, соединяющей i-й узел рамы с ее j-м узлом, в дальнейшем присвоено всюду обозначение φ_{i-j}.

Пример 3. Раскрыть статическую неопределимость рамки, отличающейся от изображенной на рис. 4 отсутствием горизонтальной опоры в точке *2*. Так как из условий кинематики соответствующего раме шарнирного полигона в рассматриваемом случае $\varphi_{2-3}=0$, $\varphi_{1-2}=\varphi_{3-4}$, то система основных уравнений имеет в нашем случае следующий вид:

$$\frac{M_4\cdot 2C_0}{6}+\frac{M_1\cdot 2C_0}{3}=-\frac{M_1 1{,}4C_0}{3}-\frac{M_2\cdot 1{,}4C_0}{6}+\varphi_{1-2};$$

$$\frac{M_1\cdot 1{,}4C_0}{6}+\frac{M_2\cdot 1{,}4C_0}{3}+\varphi_{1-2}=-\frac{M_2C_0}{3}-\frac{M_3C_0}{6}+\frac{PaC_0}{6}\cdot 0{,}357;$$

$$\frac{M_2C_0}{6}+\frac{M_3C_0}{3}-\frac{PaC_0}{6}0{,}273=-\frac{M_3C_0}{3}-\frac{M_4C_0}{6}+\frac{PaC_0}{6}\cdot 0{,}175+\varphi_{1-2};$$

$$\frac{M_3C_0}{6}+\frac{M_4C_0}{3}-\frac{PaC_0}{6}0{,}175+\varphi_{1-2}=-\frac{M_4\cdot 2C_0}{3}-\frac{M_1\cdot 2C_0}{6},$$

где $C_0=\frac{a}{2EJ}$.

Для составления дополнительного уравнения можно воспользоваться тем, что сумма перерезывающих сил в верхних концах стержней *1—2* и *3—4* должна быть равна нулю, ибо никаких горизонтальных усилий к стержню *2—3* не приложено. Это дает

$$\frac{M_1-M_2}{0{,}7a}+\frac{M_3-M_4}{0{,}7a}+\frac{P}{2}=0.$$

Сократив все основные уравнения на $\frac{C_0}{6}$ и умножив дополнительное на 0,7 a, можно переписать их все в форме табл. 6.

Таблица 6

№ уравнения	M_1	M_2	M_3	M_4	$\frac{6\varphi_{1-2}}{C_0}$	Pa
1	6,8	1,4	—	2	—1	0
2	1,4	4,8	1	—	+1	0,357
3	—	1	4	1	—1	0,448
4	2	—	1	6	+1	0,175
5	—1	+1	—1	+1	—	+0,375

Чтобы решить эту систему, нужно сначала выразить все M_i через φ_{i-j} и Pa из первых четырех уравнений, для чего можно воспользоваться изложенным в предыдущем примере приемом последовательного попарного исключения неизвестных методом неопределенных коэффициентов, и затем из последнего уравнения найти φ_{1-2}. Подстановкой φ_{1-2} в найденные общие выражения для всех M_i можно затем найти и сами искомые моменты. Все вычисления следует вести в форме таблиц, аналогичных приведенным в примере 2, но с лишним столбцом для коэффициентов при φ_{1-2}.

[1] Под шарнирным полигоном, соответствующим рассматриваемой раме, принято подразумевать полигон, получаемый из рамы заменой всех ее книц шарнирами.

§ 2. Расчет сложных рам

Метод угловых деформаций

Расчет сложных рам, т. е. таких рам, в отдельных узлах которых сходится более чем по два стержня, производится весьма просто по методу угловых деформаций.

При пользовании этим методом за основные неизвестные, относительно которых составляют уравнения, раскрывающие статическую неопределимость, принимают углы:

α_i — поворота узлов рамы (опорных сечений стержней, сходящихся в i-м узле рамы);

φ_{ij} — поворота стержней рамы как твердого тела [1] (поворота прямой, соединяющей концы стержня в узлах i и j рамы).

Углы α_i и φ_{i-j} считаются положительными при вращении по часовой стрелке.

Опорные моменты стержней (моменты воздействия узла на стержень), обозначаемые M_{i-j}, выражаются через углы α_i, φ_{i-j} и пролетную нагрузку равенствами:

$$\left.\begin{aligned} M_{i-j} &= \boxed{M_{i-j}} - 2K_0 k_{i-j}(2\alpha_i + \alpha_j - 3\varphi_{i-j}) \\ M_{j-i} &= \boxed{M_{j-i}} - 2K_0 k_{i-j}(2\alpha_j + \alpha_i - 3\varphi_{i-j}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $\boxed{M_{i-j}}$ и $\boxed{M_{j-i}}$ — опорные моменты стержней от действия нагрузки, приложенной к пролету данного стержня, вычисленные в предположении, что оба конца стержня жестко заделаны на несмещающихся опорах;

$K_0 = \frac{EJ_0}{l_0}$, причем l_0 и J_0 — некоторые произвольные значения длины и момента инерции поперечного сечения, соизмеримые с соответствующими величинами какого-либо из стержней рассматриваемой рамы;

k_{i-j} — относительная жесткость стержня, соединяющего i-й узел рамки с j-м, определяемая по формуле

$$k_{i-j} = \frac{J_{i-j}}{J_0} \cdot \frac{l_0}{l_{i-j}}. \quad (2)$$

Здесь l_{i-j} и J_{i-j} — пролет и момент инерции поперечного сечения рассматриваемого стержня, выраженные в тех же единицах, что и l_0 и J_0.

Опорные моменты M_{i-j} и опорные моменты стержней от действия пролетной нагрузки $\boxed{M_{i-j}}$ в методе угловых деформаций считаются положительными при направлении их против часовой стрелки. Совокупность обоих индексов у опорного момента M_{i-j} показывает, что стержень, нагруженный этим моментом, соединяет i-й и j-й узлы рамки, причем первый индекс показывает номер узла, к которому данный момент приложен.

Для определения всех неизвестных углов α_i и φ_{i-j} необходимо составить уравнения равновесия всех узлов и уравнения общей уравновешенности рамы в отношении углов перекоса.

Для расчета сложных рам с неподвижными узлами все углы φ_{ij} должны быть приняты равными нулю; основную систему уравнений при этом составляет уравнение равновесия узлов.

При расчете сложных рам с подвижными узлами основную систему уравнений равновесия узлов приходится дополнять уравнениями общей уравновешен-

[1] Углы φ_{i-j} называют также углами перекоса.

ности рамы в отношении углов перекоса, составляемых на основании принципа возможных перемещений.

Уравнение равновесия i-го узла рамы имеет вид

$$\sum M_{i-j} = \mathfrak{M}_i, \tag{3}$$

где суммирование в левой части распространяется на опорные моменты всех стержней, сходящихся в данном узле, а знаком $\mathfrak{M}_i$ в правой части обозначен внешний момент, приложенный непосредственно к i-му узлу рамки и считаемый положительным при действии его на узел против часовой стрелки.

Составив уравнения типа (3) для всех узлов рамки, углы поворота которых α_i неизвестны, следует заменить в них все неизвестные опорные моменты M_{i-j} их выражениями через углы поворота α_i, углы перекоса φ_{i-j} и пролетную нагрузку, даваемыми равенствами (1).

После указанной замены уравнение равновесия для i-го узла принимает вид

$$2\alpha_i \sum_j k_{ij} + \sum_j k_{i-j}\alpha_j - 3\sum k_{ij}\varphi_{i-j} = \frac{1}{2K_0}\sum_j \left|\overline{M_{i-j}}\right| - \frac{\mathfrak{M}_i}{2K_0}, \tag{4}$$

где каждая из сумм распространяется на стержни, сходящиеся в i-м узле.

Порядок выполнения расчета

Порядок выполнения расчета рам по методу угловых деформаций рассматривается в дальнейшем последовательно: сначала для рам с неподвижными узлами, а затем и для рам с подвижными узлами.

а) Рамы с неподвижными узлами. 1. Устанавливаются расчетные нагрузки всех стержней рамы и сосредоточенные моменты в ее узлах.

2. Вычисляются все опорные моменты $\left|\overline{M_{i-j}}\right|$, соответствующие полной заделке обоих концов стержня. Величины этих моментов берутся из таблиц статически неопределимых балок.

Знаки этих моментов устанавливаются непосредственно из схемы нагрузки стержня с учетом принятого правила знаков для опорных моментов.

Удобно выражать все моменты $\left|\overline{M_{i-j}}\right|$ в долях от $\frac{q_0 l_0^2}{12}$ (q_0 и l_0—произвольно выбранные интенсивности нагрузки и длины), т. е. приводить все эти моменты к виду

$$\left|\overline{M_{i-j}}\right| = m_{i-j} \cdot \frac{q_0 l_0^2}{12}. \tag{5}$$

Все внешние моменты $\mathfrak{M}_i$, приложенные к узлам рамы, выражаются аналогично

$$\mathfrak{M}_i = \mu_i \frac{q_0 l^2}{12},$$

где m_{i-j} и μ_i — отвлеченные числа.

3. Вычисляются относительные жесткости всех стержней рамы по выражению (2). Величины относительных жесткостей надписываются на эскизе рамы возле каждого ее стержня.

4. Развертываются все основные уравнения (3) при помощи равенств (1), т. е. составляются уравнения (4); при этом учитывается, что у рамы с неподвижными узлами все $\varphi_{i-j} = 0$.

Уравнение равновесия для i-го узла (4) принимает вид

$$2\alpha_i \sum_j k_{i-j} + \sum_j k_{i-j}\cdot\alpha_j = \frac{q_0 l_0^2}{24K_0}\left[\sum_j m_{i-j} - \mu_i\right], \tag{6}$$

где суммирование распространяется на все стержни, сходящиеся в i-м узле рамы.

Если в состав рамы входят стержни, одним концом свободно опертые на жесткие опоры, то для исключения из уравнений (6) неизвестных углов поворота α_j этих стержней на свободных опорах следует воспользоваться условием

$$\left|\overline{M_{j-i}}\right| - 2K_0(2\alpha_j + \alpha_i) = 0. \qquad (7)$$

5. После составления всех основных уравнений задачи начинают решение полученной системы уравнений, которое наиболее удобно выполнять в таблице. После решения системы уравнений в той же таблице осуществляется проверка полученного решения подстановкой найденных значений α_i в исходную систему уравнений. Погрешность вычислений определяется как отношение полученной неувязки к сумме абсолютных величин результатов подстановки.

6 Решив полученную систему уравнений относительно всех α_i, находят все опорные моменты M_{i-j} при помощи равенств (1).

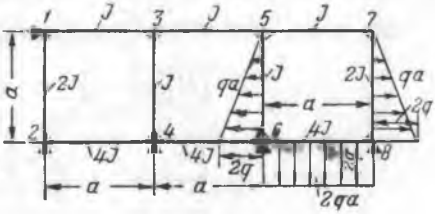


Рис. 5.

Для проверки правильности вычислений моментов M_{i-j} следует проверить выполнение условий (3). Если эти уравнения удовлетворены, то решение задачи можно считать законченным и можно приступить к построению эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил.

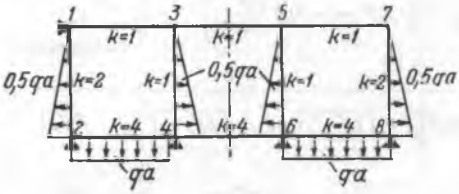


Рис. 6.

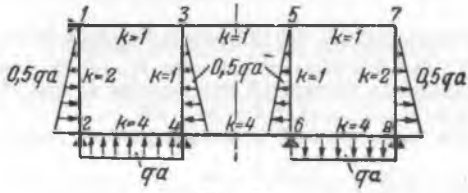


Рис. 7.

Пример 1. Рассчитать шпангоутную рамку наливного судна, изображенную на рис. 5, когда его правый танк заполнен водой по палубу.

Поскольку рассматриваемая рама имеет симметричную конструкцию и нагружена несимметричной нагрузкой, целесообразно эту нагрузку рамы разделить на симметричную и асимметричную, рассчитав соответственно две рамы, расчетные схемы которых показаны на рис. 6 и 7.

Будем в дальнейшем углы поворота α_i и опорные моменты M_{i-j} и $\left|\overline{M_{i-j}}\right|$, относящиеся к раме, нагруженной симметричной нагрузкой, отмечать одним штрихом сверху, а относящиеся к раме, нагруженной асимметричной нагрузкой, — двумя.

У рамы, нагруженной симметричной нагрузкой, углы поворота α_i симметричных узлов и опорные моменты M_{i-j} симметричных стержней будут равны по величине и обратны по знаку

$$\alpha_7' = -\alpha_1'; \quad \alpha_5' = -\alpha_3'; \quad \alpha_6' = -\alpha_4'; \quad \alpha_8' = -\alpha_2';$$

$$M_{7-5}' = -M_{1-3}'; \quad M_{5-7}' = -M_{3-1}'; \quad M_{5-3}' = -M_{3-5}'; \quad M_{7-8}' = -M_{1-2}'$$

и т. д.

У рамы, нагруженной асимметричной нагрузкой, углы поворота симметричных узлов и опорные моменты симметричных стержней будут равны и по величине и по знаку

$$\alpha''_7 = \alpha''_1; \quad \alpha''_5 = \alpha''_3; \quad \alpha''_8 = \alpha''_2; \quad \alpha''_6 = \alpha''_4;$$

$$M''_{7-5} = M''_{1-3}; \quad M''_{5-7} = M''_{3-1}; \quad M''_{5-3} = M''_{3-5}; \quad M''_{7-8} = M''_{1-2} \text{ и т. д.}$$

Определяем опорные моменты всех стержней, считая их жестко заделанными по концам. Из моментов $\boxed{M_{i-j}}$ отличны от нуля следующие:

для рамы, нагруженной симметричной нагрузкой,

$$\boxed{M'_{1-2}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot qa^2 = 0{,}4\,\frac{qa^2}{12};$$

$$\boxed{M'_{2-1}} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot qa^2 = -0{,}6\,\frac{qa^2}{12};$$

$$\boxed{M'_{2-4}} = -\boxed{M'_{4-2}} = \frac{qa^2}{12};$$

$$\boxed{M'_{4-3}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot qa^2 = 0{,}6\,\frac{qa^2}{12};$$

$$\boxed{M'_{3-4}} = -\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2}\,qa^2 = -0{,}4\,\frac{qa^2}{12};$$

для асимметричной нагрузки

$$\boxed{M''_{1-2}} = -0{,}4\,\frac{qa^2}{12}; \quad \boxed{M''_{2-1}} = 0{,}6\,\frac{qa^2}{12}; \quad \boxed{M''_{2-4}} = -\boxed{M''_{4-2}} = -\frac{qa^2}{12};$$

$$\boxed{M''_{4-3}} = -0{,}6\,\frac{qa^2}{12}; \quad \boxed{M''_{3-4}} = 0{,}4\,\frac{qa^2}{12}.$$

Приняв за K_0 величину $\frac{EJ}{a}$, нетрудно видеть, что для бимсов палубы и стоек продольных переборок все $k_{i-j} = 1$; для бортовых шпангоутов $k_{i-j} = 2$; для флор $k_{i-j} = 4$; эти величины относительных жесткостей проставлены на рис. 6 и 7.

Система основных уравнений для симметричной и асимметричной нагрузок рамы такова:

$$\begin{aligned} M_{1-2} + M_{1-3} &= 0; \\ M_{2-1} + M_{2-4} &= 0; \\ M_{3-1} + M_{3-4} + M_{3-5} &= 0; \\ M_{4-2} + M_{4-3} + M_{4-6} &= 0. \end{aligned}$$

Опорные моменты стержней симметрично нагруженной рамы определяются равенствами:

$$M'_{1-2} = -2K_0k_{1-2}\left(2\alpha'_1 + \alpha'_2\right) + 0{,}4\,\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{1-3} = -2K_0k_{1-3}\left(2\alpha'_1 + \alpha'_3\right);$$

$$M'_{2-1} = -2K_0k_{1-2}\left(2\alpha'_2 + \alpha'_1\right) - 0{,}6\,\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{2-4} = -2K_0k_{2-4}\left(2\alpha'_2 + \alpha'_4\right) + \frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{3-1} = -2K_0k_{1-3}\left(2\alpha'_3 + \alpha'_1\right);$$

$$M'_{3-4} = -2K_0k_{3-4}\left(2\alpha'_3 + \alpha'_4\right) - 0{,}4\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{3-5} = -2K_0k_{3-5}\left(2\alpha'_3 + \alpha'_5\right) = -K_0k_{3-5}\alpha'_3;$$

$$M'_{4-2} = -2K_0k_{2-4}\left(2\alpha'_4 + \alpha'_2\right) - \frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{4-3} = -2K_0k_{3-4}\left(2\alpha'_4 + \alpha'_3\right) + 0{,}6\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{4-6} = -2K_0k_{4-6}\left(2\alpha'_4 + \alpha'_6\right) = -2K_0k_{4-6}\alpha'_4.$$

Система основных уравнений задачи для рамы, загруженной симметричной нагрузкой, может быть представлена в табличной форме (табл. 7).

Таблица 7

№ уравнения	α'_1	α'_2	α'_3	α'_4	$\frac{qa^2}{24K_0}$
1	6	2	1	—	0,4
2	2	12	—	4	0,4
3	1	—	5	1	—0,4
4	—	4	1	14	—0,4

Опорные моменты рамы, нагруженной асимметрично, определяются равенствами:

$$M''_{1-2} = -2K_0k_{1-2}\left(2\alpha''_1 + \alpha''_2\right) - 0{,}4\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{1-3} = -2K_0k_{1-3}\left(2\alpha''_1 + \alpha''_3\right);$$

$$M''_{2-1} = -2K_0k_{1-2}\left(2\alpha''_2 + \alpha''_1\right) + 0{,}6\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{2-4} = -2K_0k_{2-4}\left(2\alpha''_2 + \alpha''_4\right) - \frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{3-1} = -2K_0k_{1-3}\left(2\alpha''_3 + \alpha''_1\right);$$

$$M''_{3-4} = -2K_0k_{3-4}\left(2\alpha''_3 + \alpha''_4\right) + 0{,}4\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{3-5} = -2K_0k_{3-5}\left(2\alpha''_3 + \alpha''_5\right) = -6K_0k_{3-5}\alpha''_3;$$

$$M''_{4-2} = -2K_0k_{2-4}\left(2\alpha''_4 + \alpha''_2\right) + \frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{4-3} = -2K_0k_{3-4}\left(2\alpha''_4 + \alpha''_3\right) - 0{,}6\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{4-6} = -2K_0k_{4-6}\left(2\alpha''_4 + \alpha''_6\right) = -6K_0k_{4-6}\alpha''_4.$$

Система основных уравнений задачи для рамы, нагруженной асимметрично, приведена в табл. 8.

Таблица 8

№ уравнения	α''_1	α''_2	α''_3	α''_4	$\frac{qa^2}{24K_0}$
1	6	2	1	—	—0,4
2	2	12	—	4	—0,4
3	1	—	7	1	0,4
4	—	4	1	22	0,4

Решение полученных систем уравнений дает:

$$\alpha'_1 = 0{,}071\frac{qa^2}{24K_0};\quad \alpha'_2 = 0{,}032\frac{qa^2}{24K_0};\quad \alpha'_3 = -0{,}088\frac{qa^2}{24K_0};$$

$$\alpha'_4 = -0{,}0315\frac{qa^2}{24K_0};\quad \alpha''_1 = -0{,}068\frac{qa^2}{24K_0};\quad \alpha''_2 = -0{,}029\frac{qa^2}{24K_0};$$

$$\alpha''_3 = 0{,}064\frac{qa^2}{24K_0};\quad \alpha''_4 = 0{,}0206\frac{qa^2}{24K_0}.$$

Величины опорных моментов стержней рамы, нагруженной симметричной и асимметричной нагрузкой, вычисленные по приведенным выше формулам, будут:

$$M'_{1-2} = 0{,}052\frac{qa^2}{12};\quad M'_{1-3} = -0{,}054\frac{qa^2}{12};\quad M'_{2-1} = -0{,}87\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{2-4} = 0{,}872\frac{qa^2}{12};\quad M'_{3-1} = 0{,}105\frac{qa^2}{12};\quad M'_{3-4} = -0{,}192\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{3-5} = 0{,}088\frac{qa^2}{12};\quad M'_{4-2} = -0{,}872\frac{qa^2}{12};\quad M'_{4-3} = 0{,}752\frac{qa^2}{12};$$

$$M'_{4-6} = 0{,}128\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{1-2} = -0{,}07\frac{qa^2}{12},\quad M''_{1-3} = 0{,}072\frac{qa^2}{12};\quad M''_{2-1} = 0{,}852\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{2-4} = -0{,}85\frac{qa^2}{12};\quad M''_{3-1} = -0{,}06\frac{qa^2}{12};\quad M''_{3-4} = 0{,}251\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{3-5} = -0{,}192\frac{qa^2}{12};\quad M''_{4-2} = 0{,}943\frac{qa^2}{12};\quad M''_{4-3} = -0{,}705\frac{qa^2}{12};$$

$$M''_{4-6} = -0{,}247\frac{qa^2}{12};$$

Расчетные величины опорных моментов стержней рассматриваемой рамы (рис. 5) определяются методом наложения с учетом упомянутых выше свойств симметричных конструкций:

$$M_{1-2} = M'_{1-2} + M''_{1-2} = (0{,}052 - 0{,}07)\frac{qa^2}{12} = -0{,}018\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{1-3} = M'_{1-3} + M''_{1-3} = (-0{,}054 + 0{,}072)\frac{qa^2}{12} = 0{,}018\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{2-1} = M'_{2-1} + M''_{2-1} = (-0{,}87 + 0{,}852)\frac{qa^2}{12} = -0{,}018\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{2-4} = M'_{2-4} + M''_{2-4} = (0{,}872 - 0{,}85)\frac{qa^2}{12} = 0{,}022\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{3-1} = M'_{3-1} + M''_{3-1} = (0{,}105 - 0{,}06)\frac{qa^2}{12} = 0{,}045\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{3-4} = M'_{3-4} + M''_{3-4} = (-0{,}192 + 0{,}251)\frac{qa^2}{12} = 0{,}059\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{3-5} = M'_{3-5} + M''_{3-5} = (0{,}088 - 0{,}192)\frac{qa^2}{12} = -0{,}104\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{4-2} = M'_{4-2} + M''_{4-2} = (-0{,}872 + 0{,}943)\frac{qa^2}{12} = 0{,}071\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{4-3} = M'_{4-3} + M''_{4-3} = (0{,}752 - 0{,}705)\frac{qa^2}{12} = 0{,}047\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{4-6} = M'_{4-6} + M''_{4-6} = (0{,}128 - 0{,}247)\frac{qa^2}{12} = -0{,}119\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{5-3} = -M'_{3-5} + M''_{3-5} = (-0{,}088 - 0{,}192)\frac{qa^2}{12} = -0{,}28\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{5-6} = -M'_{3-4} + M''_{3-4} = (0{,}192 + 0{,}251)\frac{qa^2}{12} = 0{,}442\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{5-7} = -M'_{3-1} + M''_{3-1} = (-0{,}105 - 0{,}06)\frac{qa^2}{12} = -0{,}165\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{6-4} = -M'_{4-6} + M''_{4-6} = (-0{,}128 - 0{,}247)\frac{qa^2}{12} = -0{,}375\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{6-5} = -M'_{4-3} + M''_{4-3} = (-0{,}752 - 0{,}705)\frac{qa^2}{12} = -1{,}457\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{6-8} = -M'_{4-2} + M''_{4-2} = (0{,}872 + 0{,}943)\frac{qa^2}{12} = 1{,}815\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{7-5} = -M'_{1-3} + M''_{1-3} = (0{,}054 + 0{,}072)\frac{qa^2}{12} = 0{,}126\frac{qa^2}{12};$$

$$M_{7-8} = -M'_{1-2} + M''_{1-2} = (-0{,}052 - 0{,}07)\frac{qa^2}{12} = -0{,}122\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{8-6} = -M'_{2-4} + M''_{2-4} = (-0{,}872 - 0{,}85)\frac{qa^2}{12} = -1{,}722\frac{qa^2}{12},$$

$$M_{8-7} = -M'_{2-1} + M''_{2-1} = (0{,}87 + 0{,}852)\frac{qa^2}{12} = 1{,}722\frac{qa^2}{12}.$$

Рассмотрение полученных результатов показывает, что погрешность в выполнении основных уравнений равновесия узлов рамы весьма мала в районе нагруженной части рамы и значительно больше в районе ненагруженной части рамы. Так, например, в районе нагруженной части рамы для узла *6* погрешность равна

$$\Delta = \left|\frac{-1{,}457 - 0{,}375 + 1{,}815}{1{,}457 + 0{,}375 + 1{,}815}\right| \cdot 100 = 0{,}47\%.$$

В районе ненагруженной части рамы для узла *2* погрешность равна

$$\Delta = \left| \frac{0{,}022 - 0{,}018}{0{,}022 + 0{,}018} \right| \cdot 100 = 10\%.$$

Большая погрешность определения опорных моментов для узла *2* получилась в результате вычисления малой разности близких величин, которая всегда сопутствует методу угловых деформаций. Получение большей точности в определении моментов требует значительно большего труда, чем при производстве всех вычислений на логарифмической линейке, как это было сделано в нашем примере, и не оправдывается практическими потребностями. Опорные моменты стержней, сходящихся в узле *2*, по абсолютной величине почти в 100 раз меньше, чем моменты стержней, сходящихся в узле *6*, а поэтому полученная погрешность в вычислении моментов для этого узла может быть признана допустимой.

После проверки правильности решения и оценки допустимости полученной погрешности вычислений строятся эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил.

б) Рамы с подвижными узлами. При расчете рам с подвижными узлами необходимо прежде всего установить, какие из углов φ_{i-j} у этой рамы не равны нулю и какими кинематическими условиями связаны эти углы между собой.

Выразив все φ_{i-j}, отличные от нуля, через те несколько произвольно выбранных φ_{i-j}, совокупностью которых можно по устройству рамы охарактеризовать всякое перемещение всех ее узлов, следует включить эти последние φ_{i-j} в число основных неизвестных задачи.

После этого расчет рамы ведется в той же последовательности, что и для рамы с неподвижными узлами, при этом в уравнения равновесия узлов должны быть включены все φ_{i-j}, отличные от нуля, после чего эти уравнения примут вид (4).

Заменив в полученных уравнениях все φ_{i-j} их выражениями через те φ_{i-j}, которые приняты за основные неизвестные, получим основную систему уравнений. Число этих уравнений будет равно числу неизвестных углов поворота α_i; число же неизвестных, входящих в эту систему уравнений, будет больше числа уравнений на число углов φ_{i-j}, принятых за независимые переменные.

Дополнительные уравнения, необходимые для раскрытия статической неопределимости рамы, должны быть составлены при помощи принципа возможных перемещений.

Для составления этих уравнений вводят по концам стержней рамы шарниры и, давая каждому из неизвестных φ_{i-j}, принятому за независимую переменную, бесконечно малые приращения, приравнивают нулю сумму работ, совершаемых на этом перемещении всеми внешними силами, приложенными к тем стержням, которые получают перемещения при изменении только одного угла φ_{i-j}. В числе усилий, совершающих работу на приращении данного φ_{i-j}, должны быть учтены опорные моменты стержней в узлах и реакции опор.

В полученных таким образом уравнениях все неизвестные опорные моменты M_{i-j} при помощи выражений (1) должны быть заменены неизвестными α_i и φ_{i-j}.

Совокупность уравнений равновесия узлов и полученных дополнительных уравнений образует ту систему уравнений, решением которой определяются все α_i и φ_{i-j}

Определив α_i и φ_{i-j}, находят все опорные моменты при помощи выражений (1) и проверяют, удовлетворяют ли эти моменты всем основным и дополнительным уравнениям задачи. После произведенной проверки и оценки допустимости полученной погрешности результата приступают к построению эпюр изгибающих моментов и перерезывающих сил и заканчивают на этом расчет.

Пример 2. Рассчитать раму, изображенную на рис. 8, нагруженную, как и в примере 1, давлением воды в одном танке.

Как видно из расчетной схемы, рама не имеет горизонтальной опоры в точке *1*, а также и вертикальной опоры в точке *4*.

В силу того, что стержни *1—3*, *3—5*, *2—4* и *4—6* все друг другу параллельны, так же как и стержни *1—2*, *3—4* и *5—6* у рассматриваемой рамы, имеем:

$$\varphi_{1-2} = \varphi_{3-4} = \varphi_{5-6}; \quad \varphi_{1-3} = \varphi_{2-4}; \quad \varphi_{3-5} = \varphi_{4-6}.$$

Между углами φ_{1-3} и φ_{3-5} существует дополнительная кинематическая зависимость

$$\varphi_{1-3}l + \varphi_{3-5}l = 0,$$

вытекающая из условий неподвижности точек *2* и *6* при деформации рамы.

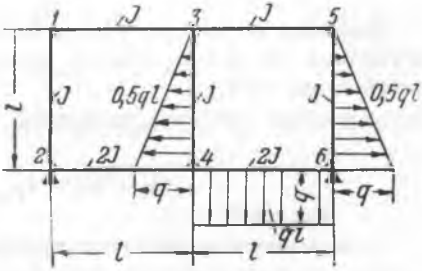


Рис. 8.

Таким образом, раскрытие статической неопределимости заданной рамы требует определения шести неизвестных углов поворота α_i и двух углов перекоса φ_{1-2} и φ_{1-3}, т. е. имеется всего восемь неизвестных и требуется составление восьми уравнений. Шесть уравнений могут быть получены как уравнения равновесия узлов, а два уравнения необходимо будет составить на основании принципа возможных перемещений.

Учитывая, однако, что конструкция рассматриваемой рамы симметрична, целесообразно, так же как и в примере 1, разделить нагрузку на симметричную и асимметричную, рассчитав соответственно две рамы, расчетные схемы которых показаны на рис. 9 и 10.

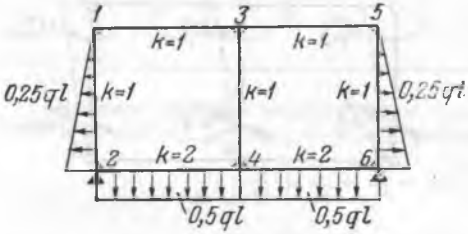


Рис. 9.

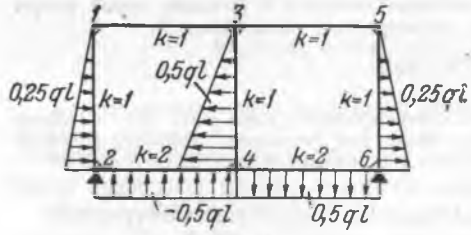


Рис. 10.

Для симметричной рамы (рис. 9) углы поворота на оси симметрии должны быть равны нулю $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, и боковой перекос рамы невозможен, т. е. $\varphi_{1-2} = 0$. Для раскрытия ее статической неопределимости необходимо определить только два угла поворота $\alpha_1' = -\alpha_5'$ и $\alpha_2' = -\alpha_6'$ и угол перекоса φ_{1-3} — всего три неизвестных.

Для рамы, загруженной асимметричной нагрузкой (рис. 10), должна быть асимметрична и ее деформация, т. е. не должно быть вертикальных перемещений узла *3*, а углы поворота симметричных узлов должны быть равны $\alpha_1'' = \alpha_5''$ и $\alpha_2'' = \alpha_6''$. Таким образом, у асимметричной рамы требуется определить четыре угла поворота α_1, α_2, α_3 и α_4 и угол перекоса φ_{1-2} — всего пять неизвестных.

Как видно, симметрия конструкции дает возможность заменить решение системы из восьми уравнений с восемью неизвестными двумя решениями систем уравнений, из которых одна состоит из трех уравнений, а другая — из пяти.

Будем, как и в примере 1, углы поворота α_i и опорные моменты стержней M_{i-j}, относящиеся к симметричной нагрузке рамы, отмечать одним штрихом сверху, а соответствующие величины для асимметричной нагрузки — двумя штрихами.

Решение начнем с составления системы основных уравнений задачи. Эта система для симметричной рамы (рис. 9) будет состоять из двух уравнений:

$$M'_{1-2} + M'_{1-3} = 0;$$

$$M'_{2-1} + M'_{2-4} = 0.$$

Выражая все моменты этих уравнений через α_i и φ_{i-j} по формулам (1) и учитывая, что $\alpha'_3 = \alpha'_4 = 0$ и $\varphi'_{1-2} = 0$, преобразуем систему основных уравнений к виду (4):

$$4\alpha_1 + \alpha_2 - 8\varphi'_{1-3} = 0{,}2\frac{ql^2}{24K_0};$$

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 - 4\varphi'_{1-3} = 0{,}2\frac{ql^2}{24K_0}.$$

Для составления дополнительного уравнения, соответствующего углу φ'_{1-3}, введем в стержни *1—3* и *2—4* по концам шарниры, заменив действие на эти стержни со стороны узлов сосредоточенными моментами, приложенными к стерж-

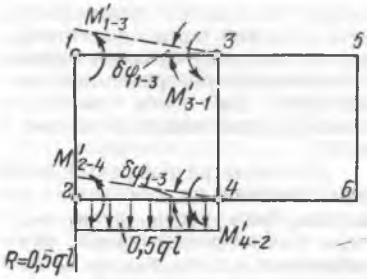


Рис. 11.

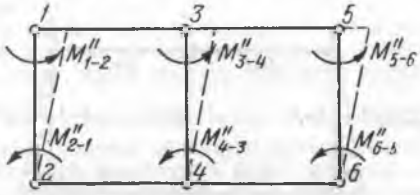


Рис. 12.

ням в шарнирах. Сообщая полученной шарнирной системе бесконечно малое перемещение $\delta\varphi_{1-3}$ (рис. 11), подсчитаем работу всех внешних сил, приложенных к стержням *1—3* и *2—4*, включая опорные моменты и реакцию левой опоры рамы, равную, как видно из схемы симметричной рамы (рис. 9),

$$R = 0{,}5ql.$$

На основании принципа возможных перемещений сумма работ всех внешних сил на возможном перемещении равна нулю, что, очевидно, приведет к дополнительному уравнению вида

$$(-M_{1-3} - M_{3-1} - M_{2-4} - M_{4-2})\,\delta\varphi_{1-3} - 0{,}5ql\,\frac{l}{2}\,\delta\varphi_{1-3} + Rl\delta\varphi_{1-3} = 0.$$

Подставляя вместо моментов их выражения через углы поворота α_i и φ_{i-j} и значение реакции после сокращения на $\delta\varphi_{1-3}$, получим дополнительное уравнение такого вида:

$$3\alpha'_1 + 6\alpha'_2 - 18\varphi'_{1-3} = -6\frac{ql^2}{24K_0}.$$

Система уравнений задачи, решением которой раскрывается статическая неопределимость рамы, загруженной симметричной нагрузкой (рис. 9), может быть представлена в виде табл. 9.

Система основных уравнений задачи для асимметрично нагруженной рамы (рис. 10) будет состоять из четырех уравнений:

$$M''_{1-2} + M''_{1-3} = 0;$$

$$M''_{2-1} + M''_{2-4} = 0;$$

$$M''_{3-1} + M''_{3-4} + M''_{3-5} = 0;$$

$$M''_{4-2} + M''_{4-3} + M''_{4-6} = 0.$$

Эта система уравнений существенно упрощается свойством асимметричной деформации, согласно которому

$$M''_{3-1} = M''_{3-5}, \quad M''_{4-2} = M''_{4-6}.$$

Таблица 9

№ уравнения	α'_1	α'_2	φ'_{1-3}	$\frac{ql^2}{24K_0}$
1	4	1	—3	0,2
2	1	6	—6	0,2
3	—3	—6	+18	6

Выражая опорные моменты через углы и пролетные нагрузки, учитывая при этом, что $\varphi_{1-2} = \varphi_{3-4} = \varphi_{5-6}$, преобразуем систему основных уравнений:

$$4\alpha''_1 + \alpha''_2 + \alpha''_3 - 3\varphi''_{1-2} = -0{,}2\frac{ql^2}{24K_0};$$

$$\alpha''_1 + 6\alpha''_2 + 2\alpha''_4 - 3\varphi''_{1-2} = -0{,}2\frac{ql^2}{24K_0};$$

$$2\alpha''_1 + 6\alpha''_3 + \alpha''_4 - 3\varphi''_{1-2} = 0{,}4\frac{ql^2}{24K_0};$$

$$4\alpha''_2 + \alpha''_3 + 10\alpha''_4 - 3\varphi''_{1-2} = 0{,}4\frac{ql^2}{24K_0}.$$

Для составления дополнительного уравнения, соответствующего углу φ''_{1-2}, введем в стержни *1—2*, *3—4* и *5—6* по концам шарниры, прикладывая, как и раньше, сосредоточенные моменты к стержням в шарнирах, и сообщим полученной шарнирной системе бесконечно малое перемещение $\delta\varphi''_{1-2}$ (рис. 12).

Подсчитаем работу всех внешних сил, приложенных к вертикальным стержням. Как видно из схемы нагрузки асимметричной рамы (рис. 10), главный вектор всех внешних нагрузок, приложенных к этим стержням, равен нулю и, следовательно, работы не производит.

Дополнительное уравнение при этом запишется так

$$\left(-M''_{1-2} - M''_{2-1} - M''_{3-4} - M''_{4-3} - M''_{5-6} - M''_{6-5}\right)\delta\varphi_{1-2} = 0.$$

Учитывая, что $M''_{5-6} = M''_{1-2}$ и $M''_{6-5} = M''_{2-1}$, и выражая моменты через углы α_i и φ_{i-j} и пролетную нагрузку, после сокращения на $\delta\varphi_{1-2}$ получим дополнительное уравнение

$$6\alpha''_1 + 6\alpha''_2 + 3\alpha''_3 + 3\alpha''_4 - 18\varphi''_{1-2} = 0.$$

Систему уравнений задачи для асимметричной рамы можно дать в табличной форме (табл. 10).

Симметричность коэффициентов уравнений в табл. 10 может быть получена умножением первых двух уравнений на два.

Определив все α_i и φ_{i-j} для симметричной и асимметричной рам, следует обратиться к уравнениям (1) и вычислить значения всех опорных моментов для симметричной и асимметричной нагрузок.

Таблица 10

№ уравнения	α_1''	α_2''	α_3''	α_4''	φ_{1-2}''	$\frac{ql^2}{24K_0}$
1	4	1	1	—	—3	—0,2
2	1	6	—	2	—3	—0,2
3	2	—	6	1	—3	0,4
4	—	4	1	10	—3	0,4
5	—6	—6	—3	—3	+18	—

Расчетные значения опорных моментов заданной рамы (рис. 8) после этого определяются методом наложения, как это было сделано в примере 1.

Убедившись, что полученные значения опорных моментов удовлетворяют не только основным (уравнениям равновесия узлов), но и двум дополнительным уравнениям, которые останутся в данном случае для основной задачи такими же, как и для симметричной и асимметричной нагрузок в отдельности, можно приступить к построению эпюр изгибающих моментов и перерезывающих сил, на чем и заканчивается расчет.

Метод последовательного уравновешивания узлов

Расчет сложных рам, имеющих большое число узлов, весьма удобно выполнять методом последовательного уравновешивания узлов.

В то время как расчет таких рам методом угловых деформаций требует решения системы уравнений с большим числом неизвестных, метод последовательного уравновешивания узлов благодаря своеобразной записи всего расчета дает возможность обойтись без решения каких-либо систем уравнений.

При использовании этого метода за основные неизвестные принимаются опорные моменты, которые определяются в результате последовательного уравновешивания узлов.

Метод последовательного уравновешивания узлов заключается в том, что на исследуемую раму мысленно накладываются некоторые дополнительные связи, закрепляющие все ее узловые сечения так, чтобы поворот и поступательные перемещения отдельных узлов рамы были устранены, затем, последовательно освобождая узлы от указанных фиктивных связей, находят расчетные значения опорных моментов для всех стержней рамы.

а) Применение метода последовательного уравновешивания узлов для рам с неподвижными узлами. Если у рамы нет подвижных узлов, должны быть предотвращены только вращательные перемещения отдельных узлов, для чего достаточно приложить к узлам такой рамы некоторые сосредоточенные моменты.

Величины каждого из моментов равны алгебраической сумме всех моментов для стержней, сходящихся в данном узле, вычисленных в предположении, что все эти стержни жестко заделаны по обоим концам и нагружены их заданной пролетной нагрузкой. Для тех стержней рассматриваемого узла, которые на своем

втором конце имеют упругие заделки, эти узловые опорные моменты должны быть определены с учетом податливости упругой заделки второго конца стержня.

Упомянутые выше фиктивные моменты, устраняющие поворот узлов, называют неуравновешенными моментами. Освобождение узла рамы от фиктивного закрепления, устраняющего поворот узла, эквивалентно нагружению данного узла моментом, равным по величине неуравновешенному моменту, но обратным ему по знаку. Этот момент называют уравновешивающим моментом.

Закрепления в каждом из узлов устраняются при условии неподвижности всех смежных с ним узлов. Уравновешивающие моменты, устраняющие фиктивное закрепление узлов, распределяются между стержнями данных узлов пропорционально жесткости стержней и сообщают соответствующим узлам поворот на угол α_i.

Моменты, воспринимаемые отдельными стержнями m_{ij} данного узла i от действия на него сосредоточенного момента $\mathfrak{M}$, будут определяться равенством

$$m_{ij} = \mathfrak{M}\,\lambda_{ij}, \tag{8}$$

в котором через λ_{ij} обозначен коэффициент распределения момента, равный

$$\lambda_{ij} = \frac{k_{ij}\delta_{ij}}{\sum\limits_{j} k_{ij}\delta_{ij}} \tag{9}$$

где k_{ij} — относительная жесткость стержня, связывающего узлы i и j рамы, определяемая по выражению (2); δ_{ij} — коэффициент, учитывающий условия закрепления стержня в узле j; для стержней, соединяющих несимметричные узлы рамы, $\delta_{ij} = 1$, для стержней, соединяющих симметричные узлы, $\delta_{ij} = \frac{1}{2}$, а для стержней, связывающих рассматриваемый узел с одиночными опорами, создающими упругую заделку для конца стержня, δ_{ij} определяется из выражения

$$\delta_{ij} = \frac{1 + \dfrac{3\,\mathfrak{A}_j EJ_{ij}}{l_{ij}}}{1 + \dfrac{4\,\mathfrak{A}_j EJ_{ij}}{l_{ij}}} \tag{10}$$

($\mathfrak{A}_j$ — коэффициент податливости упругой заделки стержня на опоре j).

Очевидно, что сумма коэффициентов распределения определяемых равенством (9) для каждого узла равна единице.

Поворот уравновешиваемого узла на угол α_i вызывает появление в смежных с ним неподвижных по условию узлах и одиночных упругих заделках реактивных моментов, называемых вторичными моментами и равных

$$m_{ji} = m_{ij} n_{ij}, \tag{11}$$

где величину n_{ij}, называемую коэффициентом перехода, для призматических балок можно определить из равенства

$$n_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\,\mathfrak{A}_j EJ_{ij}}{l_{ij}} + 1\right)^{-1}. \tag{12}$$

Для узлов неподвижных, закрепленных фиктивными связями, $\mathfrak{A}_j = 0$.

Расчет рамы по методу последовательного уравновешивания узлов выполняется в следующем порядке:

1) вычисляют опорные моменты по концам балок от действия приложенной к ним нагрузки, рассматривая эти балки жестко заделанными во всех узлах, подлежащих уравновешиванию;

2) определяют относительные жесткости балок и вычисляют коэффициенты распределения моментов в узлах;

3) определяют коэффициенты перехода для всех стержней;

4) уравновешивают узлы рамы;

5) строят эпюры моментов и перерезывающих сил.

Операцию уравновешивания узлов следует производить в табличной схеме, начиная с наиболее неуравновешенного узла.

Для рам, имеющих симметричную конструкцию, но загруженных несимметрично, целесообразно представить заданную нагрузку, как это было показано в примерах 1 и 2, в виде двух нагрузок, из которых одна симметрична, а другая асимметрична. Обе нагрузки потребуют уравновешивания узлов только одной половины рамы.

Правило знаков для опорных моментов в методе последовательного уравновешивания узлов принимается такое же, как и в методе угловых деформаций.

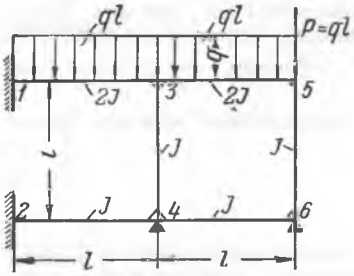


Рис. 13.

Пример 3. Рассчитать раму, показанную на рис. 13, имеющую жесткую заделку стержней на жестких опорах в узлах *1* и *2* и жесткие опоры в узлах *4* и *6*.

Опорные моменты стержней, если считать их жестко заделанными по концам,

$$M_{1-3} = -\boxed{M_{3-1}} = \boxed{M_{3-5}} = -$$

$$-\boxed{M_{5-3}} = \frac{ql^2}{12} = 0{,}083ql^2.$$

Приняв за K_0 величину $\frac{EJ}{l}$, нетрудно видеть, что относительные жесткости стержней

$$k_{1-3} = k_{3-5} = 2;\ k_{2-4} = k_{3-4} = k_{4-6} = k_{5-6} = 1.$$

Кроме того, для всех стержней $\delta_{ij} = 1$.

Коэффициенты распределения моментов в узлах:

для узла *3*

$$\lambda_{3-1} = \frac{k_{1-3}}{k_{1-3} + k_{3-5} + k_{3-4}} = \frac{2}{2+2+1} = 0{,}4;\ \lambda_{3-5} = 0{,}4;\ \lambda_{3-4} = 0{,}2;$$

для узла *5*

$$\lambda_{5-3} = \frac{k_{3-5}}{k_{3-5} + k_{5-6}} = \frac{2}{2+1} = 0{,}667;\ \lambda_{5-6} = 0{,}333$$

для узла *4*

$$\lambda_{4-2} = \frac{k_{2-4}}{k_{2-4} + k_{3-4} + k_{4-6}} = \frac{1}{1+1+1} = 0{,}333;\ \lambda_{4-3} = \lambda_{4-6} = 0{,}333;$$

для узла *6*

$$\lambda_{6-5} = \frac{k_{5-6}}{k_{5-6} + k_{4-6}} = \frac{1}{1+1} = 0{,}5;\ \lambda_{6-4} = 0{,}5.$$

Коэффициенты перехода для всех стержней равны $n = 0{,}5$.

Определение расчетных значений опорных моментов приведено в табл. 11.

В первых двух строках таблицы записываются номера узлов и обозначения стержней, входящих в узлы.

В 3-й строке записываются значения коэффициентов распределения момента в узлах.

Третья строка отделена от нижней части таблицы двойной чертой.

В остальных строках таблицы производится операция уравновешивания узлов. В каждой из колонок таблицы записываются величины моментов, появляющиеся в опорном сечении стержня в результате последовательного уравновешивания узлов.

В 4-й строке таблицы записываются коэффициенты при ql^2 в выражении опорных моментов $\boxed{M_{i-j}}$.

Таблица 11

№ строки		№ узла	1	2	3			4			5		6	
1														
2		Обозначение стержней	1—3	2—4	3—1	3—4	3—5	4—2	4—3	4—6	5—3	5—6	6—4	6—5
3		Коэффициенты распределения λ_{ij}	1	1	0,4	0,2	0,4	0,333	0,333	0,333	0,667	0,333	0,5	0,5
4		Коэффициенты первичных моментов $m_{ij} = \frac{\lvert M_{ij} \rvert}{ql^2}$	0,083	—	—0,083	—	0,083	—	—	—	—0,083	—	—	—
5	Моменты, уравновешивающие узел, и вторичные моменты Уравновешивается:	Узел 5	—	—	—	—	**0,028**	—	—	—	*0,056*	*0,027*	—	**0,013**
6		Узлы 3 и 6	—0,006	—	*—0,011*	*—0,006*	*—0,011*	—	—**0,003**	—**0,004**	—**0,006**	—**0,003**	*—0,007*	*—0,006*
7		Узлы 4 и 5	—	**0,002**	—	**0,001**	**0,003**	*0,003*	*0,002*	*0,002*	*0,006*	*0,003*	**0,001**	**0,001**
8		Узлы 3 и 6	—**0,001**	—	*—0,002*	—	*—0,002*	—	—	—	—**0,001**	—	*—0,001*	*—0,001*
9		Узел 5	—	—	—	—	—	—	—	—	*0,001*	—	—	—
10		Сумма сверху	0,076	0,002	—0,096	—0,005	0,101	0,003	—0,001	—0,002	—0,027	0,027	—0,007	0,007

В 5-й строке табл. 11 произведено уравновешивание узла *5*. В двух колонках этого узла записаны уравновешивающие моменты, равные произведению неуравновешенного момента, взятого с обратным знаком, на соответствующие коэффициенты распределения. В колонках, относящихся к стержням *3—5* и *6—5*, этой же строки записаны вторичные моменты, равные половине уравновешивающих моментов, записанных в колонках *5—3* и *5—6*, соответственно.

В 6-й строке аналогичным образом произведено уравновешивание узлов *3* и *6* одновременно, причем в колонках стержней *1—3*, *4—3*, *5—3*, *4—6* и *5—6* этой строки записаны вторичные моменты, появляющиеся в узлах *1*, *4* и *5* в результате уравновешивания узлов *3* и *6*.

В следующей строке выполнено уравновешивание узлов *4* и *5*. Неуравновешенными моментами в этих узлах являются суммы тех вторичных моментов, которые появляются в них при уравновешивании соседних узлов.

Далее снова уравновешиваются узлы *3* и *6* и т. д.

В каждой строке курсив означает уравновешивающие узел моменты, а жирный шрифт — вторичные моменты. Величины появляющихся повторно неуравновешенных в узлах моментов определяются суммой всех вторичных моментов, записанных жирным шрифтом ниже последней строчки уравновешивающих данный узел моментов.

Очередному уравновешиванию узлов подлежит тот узел, в котором величина неуравновешенного момента наибольшая по абсолютной величине. Может производиться уравновешивание нескольких несмежных друг с другом узлов.

Процесс уравновешивания узлов продолжают до тех пор, пока величина вторичных моментов от уравновешивания узлов не достигнет величины допустимой погрешности расчета.

Суммы всех моментов, записанных в каждой колонке, дают интересующую нас величину опорного момента стержня:

В рассмотренном примере эти моменты, полученные как суммы по столбцам

$$M_{1-3} = 0{,}076ql^2;\ M_{2-4} = 0{,}002ql^2;\ M_{3-1} = -0{,}096ql^2;\ M_{3-4} = -0{,}005ql^2;$$

$$M_{3-5} = 0{,}101ql^2;\ M_{4-2} = 0{,}003ql^2;\ M_{4-3} = -0{,}001ql^2;\ M_{4-6} = -0{,}002ql^2;$$

$$M_{5-3} = -0{,}027ql^2;\ M_{5-6} = 0{,}027ql^2;\ M_{6-4} = -0{,}007ql^2;\ M_{6-5} = 0{,}007ql^2.$$

б) Применение метода последовательного уравновешивания узлов для рам с подвижными узлами и прямоугольным полем. При расчете рам, имеющих подвижные узлы, по методу последовательного уравновешивания узлов следует производить сперва уравновешивание узлов рамы в предположении, что они не имеют поступательных перемещений, а затем уже производить уравновешивание рамы в отношении перекосов отдельных ее полей.

В том случае, когда конструкция опор рамы допускает поступательные перемещения ее узлов, опорные моменты стержней в узлах должны удовлетворять помимо условий равновесия узлов еще и уравнениям общей уравновешенности рассматриваемой рамы в отношении отдельных углов перекоса. Эти уравнения составляются при помощи начала возможных перемещений и являются для рассчитываемой рамы, как это легко видеть из примера 2, обычными уравнениями статики.

Эти дополнительные условия могут быть удовлетворены лишь в том случае, если в опорных сечениях стержней возникнут дополнительные моменты.

Появление этих моментов станет очевидным, если закрепить все узлы рамы так, чтобы они не могли поворачиваться и чтобы часть узлов рамы могла получить только такие поступательные перемещения, которые соответствуют какому-либо одному из углов перекоса. В опорных сечениях стержней рамы, составляющих ее перекосившееся поле, возникнут дополнительные неуравновешенные моменты, которые будут распределяться между опорными сечениями стержней, препятствующих рассматриваемому перекосу, пропорционально коэффициентам распределения в отношении углов перекоса.

Коэффициенты распределения неуравновешенных моментов между узлами рамы в отношении ее перекоса определяются как отношение жесткости стержня,

входящего в данный узел, к удвоенной сумме жесткостей всех стержней, препятствующих рассматриваемому перекосу. Обозначая коэффициенты распределения неуравновешенных моментов перекоса через $\overline{\lambda}_{ij}$, будем определять их по выражению

$$\overline{\lambda}_{ij} = \frac{k_{i-j}}{2\sum\limits_{n} k_{i-j}}, \tag{13}$$

где суммирование в знаменателе распространяется на все те n стержней, которые препятствуют перекосу φ.

Появление в узлах дополнительных неуравновешенных моментов означает необходимость нового уравновешивания узлов с соответствующим перераспределением моментов в узлах. Необходимо, очевидно, чтобы после уравновешивания всех узлов рамы полученные опорные моменты стержней удовлетворяли всем условиям равновесия и в том числе уравнениям уравновешенности рамы в отношении каждого из перекосов.

Так как при уравновешивании узлов моменты в узлах перераспределяются, целесообразен следующий порядок расчета.

Уравновешивание узлов рамы в отношении тех дополнительных моментов, которые появляются в опорных сечениях стержней при ее перекосах, следует производить последовательно для каждого из перекосов в отдельности.

Суммарный неуравновешенный момент по отношению к каждому из углов перекоса принимается неизвестным и равным $m_{\text{к}} ql^2$, причем $m_{\text{к}}$ — неопределенный множитель, отличаемый индексом к для каждого из углов перекоса.

После уравновешивания всех узлов в отношении любого из перекосов в опорных сечениях стержней появятся дополнительные моменты $(M_{i-j})_{\text{к}}$, выраженные через неизвестные моменты $m_{\text{к}} ql^2$.

Для определения величины неопределенных множителей $m_{\text{к}}$ достаточно составить только уравнения общей уравновешенности рамы в отношении каждого из перекосов.

Каждый опорный момент, входящий в эти уравнения, будет определяться как сумма опорных моментов, полученных при всех уравновешиваниях узлов, включая и то, которое было произведено в предположении отсутствия поступательных перемещений всех узлов.

Число таких уравнений будет соответствовать числу углов перекоса, а следовательно, и числу неопределенных множителей $m_{\text{к}}$.

Решением полученной системы линейных уравнений относительно всех $m_{\text{к}}$ раскрывается неопределенность задачи.

Умножая все составляющие опорных моментов на известные теперь множители $m_{\text{к}}$ и суммируя для каждого из опорных моментов все его составляющие, найдем интересующие нас расчетные значения опорных моментов.

Пример 4. Рассчитать раму, изображенную на рис. 13, предполагая, что она не имеет вертикальных опор в точках *4* и *6*. Нагрузка та же, что в примере 3.

Первая часть решения в данном примере остается той же, что и в примере 3, т. е. результат решения примера 3 можем использовать как первую часть решения данного примера, а именно, мы располагаем результатом уравновешивания узлов рассматриваемой рамы в предположении неподвижности всех ее узлов. Поэтому следует перейти к уравновешиванию рамы в отношении углов перекоса.

В силу того, что у рассматриваемой рамы стержни *1—3*, *3—5*, *2—4* и *4—6* параллельны друг другу, так же как и стержни *3—4* и *5—6*, а, кроме того, узлы *1* и *2* неподвижны, имеем

$$\varphi_{1-2} = \varphi_{3-4} = \varphi_{5-6} = 0; \quad \varphi_{1-3} = \varphi_{2-4} = \varphi_1; \quad \varphi_{3-5} = \varphi_{4-6} = \varphi_2.$$

Таким образом, у рассматриваемой рамы могут иметь место только два угла перекоса φ_1 и φ_2, показанные на рис. 14 и 15.

Перекосу рамы на угол φ_1 препятствуют стержни *1—3* и *2—4*. Коэффициенты распределения неуравновешенного момента перекоса будут:

$$\overline{\lambda}_{3-1} = \overline{\lambda}_{1-3} = \frac{k_{1-3}}{2(k_{1-3} + k_{2-4})} = \frac{2}{2(2+1)} = 0{,}333;$$

$$\overline{\lambda}_{2-4} = \overline{\lambda}_{4-2} = \frac{k_{2-4}}{2(k_{1-3} + k_{2-4})} = \frac{1}{2(2+1)} = 0{,}167.$$

Перекосу рамы на угол φ_2 препятствуют стержни *3—5* и *4—6*. Коэффициенты распределения неуравновешенного момента, соответствующего этому перекосу,

$$\overline{\lambda}_{3-5} = \overline{\lambda}_{5-3} = \frac{k_{3-5}}{2(k_{3-5} + k_{4-6})} = \frac{2}{2(2+1)} = 0{,}333; \quad \overline{\lambda}_{4-6} = \lambda_{6-4} = 0{,}167.$$

Уравновешивание узлов рамы в отношении перекосов φ_1 и φ_2 выполнено в табл. 12.

При перекосе рамы на угол φ_1 неуравновешенные моменты появляются в опорных сечениях стержней *1—3* и *2—4*. При этом коэффициенты неуравновешенных

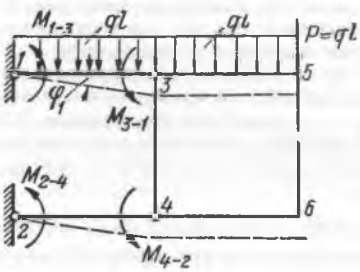


Рис. 14.

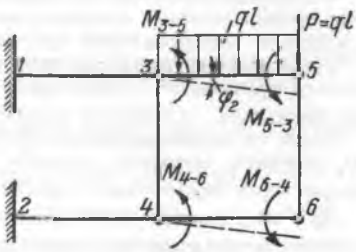


Рис. 15.

моментов для этих стержней принимаются численно равными коэффициентам распределения неуравновешенного момента перекоса. Величины этих коэффициентов записаны в 4-й строке табл. 12. Далее в обычном порядке, как и для рамы с неподвижными узлами, производится уравновешивание узлов рамы.

При перекосе рамы на угол φ_2 неуравновешенные моменты появляются в опорных сечениях стержней *3—5* и *4—6*, что и записано в 11-й строке табл. 12.

Для составления уравнений общей уравновешенности рамы в отношении углов перекоса вводим, как и в примере 5, шарниры по концам стержней рамы и, сообщая стержням рамы бесконечно малое перемещение, соответствующее данному углу перекоса, приравниваем нулю работу всех внешних сил и опорных моментов, произведенную ими при данном перемещении.

Как видно из рис. 14, приращение работы всех внешних сил на перемещении $\delta\varphi_1$ будет

$$\delta U = \delta\varphi_1(-M_{1-3} - M_{3-1} - M_{2-4} - M_{4-2}) + Pl\delta\varphi_1 + \\ + ql \cdot l\delta\varphi_1 + ql \cdot \frac{l}{2}\delta\varphi_1 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $P = ql$, получим уравнение общей уравновешенности рамы в отношении угла перекоса φ_1

$$M_{1-3} + M_{3-1} + M_{2-4} + M_{4-2} = 2{,}5ql^2. \qquad (14)$$

Уравнение общей уравновешенности рамы в отношении угла перекоса φ получим аналогично при помощи рис. 15, на котором изображены только силы, производящие работу на данном перемещении,

$$M_{3-5} + M_{5-3} + M_{4-6} + M_{6-4} = 1{,}5ql^2. \qquad (15)$$

Таблица 12

№ строки		№ узла	1	2	3			4			5		6	
1		Обозначения стержней	*1—3*	*2—4*	*3—1*	*3—4*	*3—5*	*4—2*	*4—3*	*4—6*	*5—3*	*5—6*	*6—4*	*6—5*
2		Коэффициенты распределения λ_{ij}	1	1	0,4	0,2	0,4	0,333	0,333	0,333	0,67	0,33	0,5	0,5
3		Результат уравновешивания узлов рамы при неподвижных ее узлах $\frac{(M_{i-j})_0}{ql^2}$	0,076	0,002	—0,096	—0,005	0,101	0,003	—0,001	—0,002	—0,027	0,027	—0,007	0,007
4	Уравновешивание узлов рамы в отношении угла перекоса φ_1	Неуравновешенный момент перекоса φ_1 $\frac{M_{i-j}}{m_1 ql^2} = \lambda_{i-j}$	0,333	0,167	0,333			0,167						
5		Моменты уравновешивания узлов и вторичные моменты при уравновешивании — узла *3*	**—0,067**		*—0,133*	*—0,067*	*—0,133*		**—0,034**		**—0,067**			
6		узлов *4* и *5*		**—0,022**		**—0,022**	**0,023**	*—0,044*	*—0,044*	*—0,045*	*0,045*	*0,022*	**—0,023**	**0,011**
7		узла *6*								**0,003**		**0,003**	*0,006*	*0,006*
8		узлов *4* и *5*					**—0,001**	*—0,001*	*—0,001*	*—0,001*	*—0,002*	*—0,001*		
9		Сумма сверху $\Sigma_1 = \frac{(M_{i-j})_1}{m_1 ql^2}$	0,263	0,145	0,200	—0,089	—0,111	0,122	—0,079	—0,043	—0,024	0,024	—0,017	0,017
10		Коэффициенты опорных моментов $m_1\Sigma_1 = \frac{(M_{ij}^{\cdot\cdot})_1}{ql^2}$	1,280	0,698	0,963	—0,428	—0,535	0,587	—0,380	—0,207	—0,115	0,115	—0,082	0,082

Продолжение

№ строки		№ узла	1	2	3			4			5		6	
11	Уравновешивание узлов рамы в отношении угла перекоса φ_2	Неуравновешенный момент перекоса φ_2 $\frac{M_{ij}}{m_2 ql^2} = \lambda_{i-j}$					0,333			0,167	0,333		0,167	
12		Моменты уравновешивания узлов и вторичные моменты при уравновешивании: узлов *3* и *6*	−0,066		*−0,133*	*−0,067*	*−0,133*		−0,033	−0,042	−0,087	−0,042	*−0,083*	*−0,084*
13		узлов *4* и *5*		−0,016		−0,015	−0,074	*−0,031*	*−0,030*	*−0,031*	*−0,149*	*−0,075*	−0,016	−0,037
14		узлов *3* и *6*	0,018		*0,036*	*−0,017*	*0,036*		0,009	0,013	0,018	0,014	*0,026*	*0,027*
15		узлов *4* и *5*		−0,004		−0,004	−0,011	*−0,007*	*−0,008*	*−0,007*	*−0,021*	*−0,011*	−0,004	−0,006
16		узлов *3* и *6*	0,003		*0,005*	*0,003*	*0,006*		0,001	0,003	0,003	0,002	*0,005*	*0,005*
17				−0,001				*−0,002*	*−0,001*	*−0,001*	*−0,003*	*−0,002*		
18		Сумма сверху $\Sigma_2 = \frac{(M_{i-j})_2}{m_2 ql^2}$	−0,045	−0,021	−0,091	−0,066	0,157	−0,040	−0,062	0,102	0,114	−0,114	0,095	−0,095
19		Коэффициенты опорных моментов $m_2 \cdot \Sigma_2 = \frac{(M_{ij})_2}{ql^2}$	−0,230	−0,107	−0,465	−0,335	0,800	−0,204	−0,316	0,520	0,581	−0,581	+0,485	−0,485
20		Расчетные значения коэффициентов опорных моментов $\frac{M_{ij}}{ql^2} = \frac{1}{ql^2}[(M_{ij})_0 + (M_{i-j})_1 + (M_{i-j})_2]$	1,126	0,593	0,402	−0,768	0,366	0,386	−0,697	0,311	0,439	−0,439	0,396	−0,396

На основании полученных уравнений и при помощи таблицы уравновешивания узлов составим систему линейных уравнений для определения неизвестных множителей m_1 и m_2, раскрывающих статическую неопределимость задачи.

При развертывании уравнений (14) и (15) необходимо учесть, что каждый из входящих в эти уравнения опорных моментов стержней состоит из его составляющих, полученных при трех последовательно выполненных уравновешиваниях узлов. Сокращая все члены уравнений на ql^2 и группируя члены, содержащие множители m_1 и m_2, получим

$$(0{,}266 + 0{,}200 + 0{,}145 + 0{,}122)\, m_1 + (-0{,}045 - 0{,}091 - 0{,}021 - 0{,}040)\, m_2 + \\ + 0{,}076 - 0{,}096 + 0{,}002 + 0{,}003 = 2{,}5;$$

$$(-0{,}111 - 0{,}024 - 0{,}043 - 0{,}017)\, m_1 + (0{,}157 + 0{,}114 + 0{,}102 + 0{,}095)\, m_2 + \\ + 0{,}101 - 0{,}027 - 0{,}002 - 0{,}007 = 1{,}5.$$

Суммируя коэффициенты при неизвестных и свободные члены, будем иметь

$$0{,}733 m_1 - 0{,}197 m_2 = 2{,}515;$$
$$-0{,}195 m_1 + 0{,}468 m_2 = 1{,}435.$$

Примечание. Полученная система уравнений должна быть симметричной относительно главной диагонали. Имеющее место неравенство симметричных коэффициентов в рассматриваемом примере (0,197 и 0,195), полученное в результате приближенного вычисления коэффициентов опорных моментов в таблице уравновешивания узлов, вполне допустимо.

Решением полученной системы уравнений относительно m_1 и m_2 найдем $m_1 = 4{,}81$; $m_2 = 5{,}10$.

Вычислим теперь истинные значения коэффициентов опорных моментов, соответствующих углам перекоса φ_1 и φ_2; для этого все числа строки 9 табл. 12 умножим на m_1, а все числа строки 18 табл. 12 умножим на m_2. Произведения запишем в 10 и в 19 строки таблицы. Расчетные значения коэффициентов опорных моментов получим суммированием по столбцам чисел, записанных в строках 3, 10 и 19.

В рассмотренном примере опорные моменты стержней, полученные умножением вычисленных указанным выше образом коэффициентов на ql^2, равны:

$$M_{1-3} = 1{,}126ql^2;\quad M_{2-4} = 0{,}593ql^2;\quad M_{3-1} = 0{,}402ql^2;\quad M_{3-4} = -0{,}768ql^2;$$
$$M_{4-1} = 0{,}366ql^2;\quad M_{4-2} = 0{,}386ql^2;\quad M_{4-3} = -0{,}697ql^2;\quad M_{4-6} = 0{,}311ql^2;$$
$$M_{5-3} = 0{,}439ql^2;\quad M_{5-6} = -0{,}439ql^2;\quad M_{6-4} = 0{,}396ql^2;\quad M_{6-5} = -0{,}396ql^2.$$

ГЛАВА 2

РАСЧЕТ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РАМ

Рамы с криволинейными стержнями, встречающиеся в судовых конструкциях, обладают в большинстве случаев такими соотношениями размеров, которые позволяют при расчете рам исходить из следующих предположений:

1) отношение высоты сечения профиля стержня рамы к радиусу кривизны этого стержня настолько невелико, что может быть использована зависимость между изменением кривизны и изгибающим моментом, имеющая место для прямых стержней;

2) жесткость стержня рамы настолько большая, что при вычислении изгибающего момента, перерезывающей силы и осевой силы в любом сечении стержня можно исходить из первоначальной формы стержня, пренебрегая, в частности, изменением плеч при вычислении изгибающего момента.

Кроме того, при расчете криволинейных рам предполагается, что если стержни непризматичны, размеры их поперечного сечения меняются по их длине незначительно и настолько непрерывно, что в каждом сечении распределение напряжений подчиняется закону плоских сечений, т. е. определяется равенством

$$\sigma = \frac{Mz}{J}.$$

Определение деформаций статически определимых криволинейных стержней, а также раскрытие статической неопределимости криволинейных рам наиболее целесообразно осуществлять при помощи энергетических теорем. Для этого необходимо располагать полным выражением потенциальной энергии для рассматриваемой конструкции.

Полное выражение потенциальной энергии стержня в соответствии с вышеуказанными допущениями может быть определено формулой

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{M^2(s)}{EJ(s)} + \frac{N^2(s)}{G\omega(s)} + \frac{T^2(s)}{EF(s)} \right] ds. \tag{16}$$

где l — полная длина стержня;
s — ордината, отсчитываемая вдоль криволинейной оси;
ds — элемент длины;
$M(s)$, $N(s)$, $T(s)$ — изгибающий момент, перерезывающая сила и осевая сила, определяемые ординатой s;
$J(s)$ и $\omega(s)$ — момент инерции площади поперечного сечения $F(s)$ и приведенная площадь стенки этого сечения, определяемые ординатой s.

В большинстве случаев при расчете криволинейных стержней и рам потенциальная энергия сдвига и растяжения — сжатия, определяемые вторым и третьим членами в выражении (16), оказываются малыми по сравнению с потенциальной энергией изгиба, и потенциальную энергию вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(s)}{EJ(s)} ds. \tag{17}$$

§ 3. Расчет круговых дуг

Для расчета рам, имеющих в своем составе круговые стержни постоянного сечения, большую пользу могут принести приводимые ниже расчетные формулы и вспомогательные таблицы для определения угловых и линейных перемещений свободного конца круговых дуг с заделанным другим концом.

Величина этих перемещений определяется на основании теоремы Кастильяно

$$q_i = \frac{\partial V}{\partial Q_i},$$

где Q_i — обобщенное усилие;
q_i — перемещение в направлении действия усилия Q_i.

Случай 1 (рис. 16).

Обозначения:
M — сосредоточенный момент;
φ — угол поворота свободного конца по направлению момента M;
X — сила, действующая параллельно нормали у заделанного конца;
Y — сила, действующая параллельно касательной у заделанного конца;
x и y — перемещения свободного конца по направлению сил X и Y;
r — радиус кривизны стержня;
α — центральный угол;
l — длина оси стержня.

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{r}{EJ}\theta_1(\alpha) M + \frac{r^2}{EJ}\theta_2(\alpha) Y + \frac{r^2}{EJ}\theta_3(\alpha) X \\ y &= \frac{r^2}{EJ}\theta_2(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ}\theta_4(\alpha) Y + \frac{r^3}{EJ}\theta_5(\alpha) X \\ x &= \frac{r^2}{EJ}\theta_3(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ}\theta_5(\alpha) Y + \frac{r^3}{EJ}\theta_6(\alpha) X \end{aligned}\right| \tag{18}$$

где функции $\theta_i(\alpha)$ вычисляются согласно следующим выражениям:[1]

$$\theta_1(\alpha) = \alpha;$$

$$\theta_2(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha;$$

$$\theta_3(\alpha) = \alpha\sin\alpha - 1 + \cos\alpha,$$

$$\theta_4(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha - \frac{3}{4}\sin 2\alpha;$$

$$\theta_5(\alpha) = \cos\alpha - \frac{3}{4}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\alpha\sin 2\alpha - \frac{1}{4};$$

$$\theta_6(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{4}\sin 2\alpha - 2\sin\alpha.$$

При $\alpha < 1$ вместо функций $\theta_i(\alpha)$ удобнее брать функции $\vartheta(\alpha)$, но при этом в выражениях (18) вместо r следует вводить l.

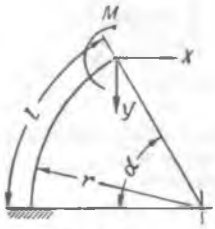


Рис. 16.

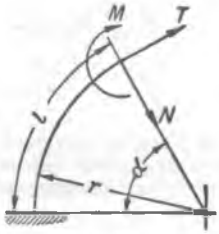


Рис. 17.

Функции $\vartheta_i(\alpha)$ вычисляются по выражениям:

$$\vartheta_1(\alpha) = 1;$$

$$\vartheta_2(\alpha) = \frac{\alpha}{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{10} + \cdots\right);$$

$$\vartheta_3(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{72} - \cdots\right);$$

$$\vartheta_4(\alpha) = \frac{2}{15}\alpha^2\left(1 - \frac{4}{21}\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{63} - \cdots\right);$$

$$\vartheta_5(\alpha) = \frac{5}{24}\alpha\left(1 - \frac{49}{150}\alpha^2 + \frac{107}{2800}\alpha^4 - \cdots\right);$$

$$\vartheta_6(\alpha) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{9}{20}\alpha^2 + \frac{13}{168}\alpha^4 - \cdots\right).$$

Случай 2 (рис. 17).

Обозначения:

M — сосредоточенный момент;

T и N — силы, действующие по направлениям касательной и нормали к оси у свободного конца;

t и n — перемещения по направлениям касательной и нормали;

φ — угол поворота касательной по направлению момента M у свободного конца;

r — радиус кривизны стержня;

α — центральный угол стержня;

l — длина оси стержня.

[1] Численное значение функций $\theta(\alpha)$ см. в табл. 13.

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{r}{EJ} H_1(\alpha) M + \frac{r^2}{EJ} H_2(\alpha) T + \frac{r^2}{EJ} H_3(\alpha) N \\ t &= \frac{r^2}{EJ} H_2(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ} H_4(\alpha) T + \frac{r^3}{EJ} H_5(\alpha) N \\ n &= \frac{r^2}{EJ} H_3(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ} H_5(\alpha) T + \frac{r^3}{EJ} H_6(\alpha) N\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

где функции вычисляются согласно следующим выражениям:[1]

$$H_1(\alpha) = \alpha;$$

$$H_2(\alpha) = \alpha - \sin\alpha;$$

$$H_3(\alpha) = 1 - \cos\alpha;$$

$$H_4(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha;$$

$$H_5(\alpha) = \frac{3}{4} - \cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha;$$

$$H_6(\alpha) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

При $\alpha < 1$ вместо функций $H_i(\alpha)$ удобнее брать функции $\eta_i(\alpha)$, но при этом в выражениях (19) вместо r следует вводить l.

Функции $\eta_i(\alpha)$ вычисляются по выражениям:

$$\eta_1(\alpha) = 1;$$

$$\eta_2(\alpha) = \frac{\alpha}{6}\left(1 - \frac{\alpha^2}{20} + \cdots\right);$$

$$\eta_3(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{12} + \cdots\right);$$

$$\eta_4(\alpha) = \frac{\alpha^2}{20}\left(1 - \frac{5}{42}\alpha^2 + \cdots\right);$$

$$\eta_5(\alpha) = \frac{\alpha}{8}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6} + \cdots\right);$$

$$\eta_6(\alpha) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{5} + \cdots\right).$$

Случай 3 (рис. 18).

Обозначения:

M — момент, приложенный к свободному концу;
U и V — силы, действующие по хорде и перпендикулярному к ней направлению;
u и v — перемещения свободного конца по направлениям сил U и V;
φ — угол поворота свободного конца по направлению момента M;
r — радиус кривизны стержня;
α — центральный угол;
l — длина оси стержня.

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{r}{EJ} \Phi_1(\alpha) M + \frac{r^2}{EJ} \Phi_2(\alpha) V + \frac{r^2}{EJ} \Phi_3(\alpha) U \\ v &= \frac{r^2}{EJ} \Phi_2(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ} \Phi_4(\alpha) V + \frac{r^3}{EJ} \Phi_5(\alpha) U \\ u &= \frac{r^2}{EJ} \Phi_3(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ} \Phi_5(\alpha) V + \frac{r^3}{EJ} \Phi_6(\alpha) U\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

[1] Численное значение функций $H_i(\alpha)$ см. в табл. 13.

где функции $\Phi_i(\alpha)$ вычисляются согласно следующим выражениям:

$$\Phi_1(\alpha) = \alpha;$$

$$\Phi_2(\alpha) = 2\sin\frac{\alpha}{2} - \alpha\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\Phi_3(\alpha) = \alpha\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\Phi_4(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha}{2}\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin\alpha;$$

$$\Phi_5(\alpha) = 1 - \cos\alpha - \frac{\alpha}{2}\sin\alpha;$$

$$\Phi_6(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

При $\alpha < 1$ вместо функции $\Phi_i(\alpha)$ удобнее брать функции $\varphi_i(\alpha)$, но при этом в выражениях (20) вместо r следует вводить l.

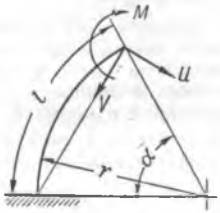


Рис. 18.

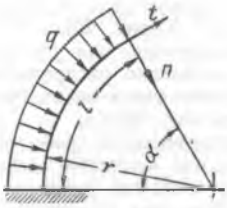


Рис. 19.

Функции $\varphi_i(\alpha)$ вычисляются по выражениям:

$$\varphi_1(\alpha) = 1;$$

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{\alpha}{12}\left(1 - \frac{\alpha^2}{40} + \cdots\right);$$

$$\varphi_3(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{24} + \cdots\right);$$

$$\varphi_4(\alpha) = \frac{\alpha^3}{120}\left(1 - \frac{\alpha^2}{21} + \cdots\right);$$

$$\varphi_5(\alpha) = \frac{\alpha}{24}\left(1 - \frac{\alpha^2}{15} + \cdots\right);$$

$$\varphi_6(\alpha) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{40}\alpha^2 + \cdots\right).$$

Случай 4 (рис. 19).

Обозначения:

q — равномерно распределенное нормальное давление;

t и n — перемещения по направлениям касательной и нормали у свободного конца;

φ — угол поворота свободного конца;

r — радиус кривизны стержня;

α — центральный угол;

l — длина оси стержня.

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{r^3}{EJ}\Psi_1(\alpha)\,q \\ t &= \frac{r^4}{EJ}\Psi_2(\alpha)\,q \\ n &= \frac{r^4}{EJ}\Psi_3(\alpha)\,q \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где функции $\Psi_i(\alpha)$ вычисляются согласно следующим выражениям:

$$\Psi_1(\alpha) = \alpha - \sin\alpha = H_2(\alpha);$$

$$\Psi_2(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha = H_4(\alpha);$$

$$\Psi_3(\alpha) = \frac{3}{4} - \cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha = H_5(\alpha).$$

При $\alpha < 1$ вместо функций $\Psi_i(\alpha)$ удобнее брать функции $\psi_i(\alpha)$, но при этом в выражениях (21) вместо r следует вводить l.

Функции $\psi_i(\alpha)$ вычисляются по выражениям:

$$\psi_1(\alpha) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\alpha^2}{20} + \cdots\right) = \frac{1}{\alpha}\eta_2(\alpha);$$

$$\psi_2(\alpha) = \frac{\alpha}{20}\left(1 - \frac{5}{42}\alpha^2 + \cdots\right) = \frac{1}{\alpha}\eta_4(\alpha);$$

$$\psi_3(\alpha) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{\alpha}\eta_5(\alpha).$$

Случай 5 (рис. 20).

Обозначения:

q — равномерно распределенное нормальное давление;

x и y — перемещения по направлениям касательной и нормали к оси у заделанного конца;

φ — угол поворота свободного конца;

r — радиус кривизны стержня;

α — центральный угол;

l — длина оси стержня

Расчетные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{r^3}{EJ}\Omega_1(\alpha)\,q \\ y &= \frac{r^4}{EJ}\Omega_2(\alpha)\,q \\ x &= \frac{r^4}{EJ}\Omega_3(\alpha)\,q \end{aligned}\right| \qquad (22)$$

где функции $\Omega_i(\alpha)$ вычисляются согласно следующим выражениям:

$$\Omega_1(\alpha) = \alpha - \sin\alpha = H_2(\alpha);$$

$$\Omega_2(\alpha) = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{3}{2}\alpha\cos\alpha;$$

$$\Omega_3(\alpha) = \cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{2}\alpha\sin\alpha - \frac{3}{2}.$$

При $\alpha < 1$ вместо функций $\Omega_i(\alpha)$ удобнее брать функции $\omega_i(\alpha)$, но при этом в выражениях (22) вместо r следует вводить l.

Функции $\omega_i(\alpha)$ вычисляются по выражениям:

$$\omega_1(\alpha) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\alpha^2}{20} + \cdots\right);$$

$$\omega_2(\alpha) = \frac{3}{40}\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{7} + \cdots\right);$$

$$\omega_3(\alpha) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{4}{15}\alpha^2 + \cdots\right).$$

Случай 6 (рис. 21).

Обозначения:

q — равномерно распределенное нормальное давление;

qr — сосредоточенная сила;

r — радиус кривизны;

α — центральный угол

Дуга OO' для нагрузки, изображенной на рисунке, вне зависимости от величины угла α не испытывает изгиба, т. е. равномерное давление, приложенное к дуге круга, эквивалентно действию сосредоточенной силы, приложенной к свободному концу дуги, направленной по касательной и имеющей величину qr.

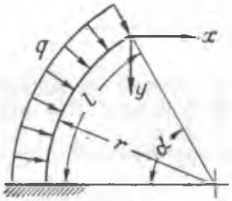


Рис. 20.

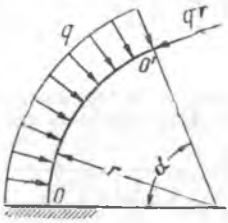


Рис. 21.

Следствие 1. Перемещение свободного конца и углы поворота касательной на свободном конце равны нулю.

Следствие 2. Арка, изображенная на рис. 22, вне зависимости от величин угла α не испытывает изгиба.

Пример 1. Раскрыть статическую неопределимость арки ABC (рис. 23, *а*).

Разделим арку в точке приложения силы на две. Ввиду симметрии неизвестными силами взаимодействия будут только распор T и изгибающий момент M

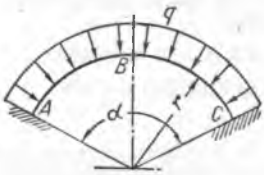


Рис. 22.

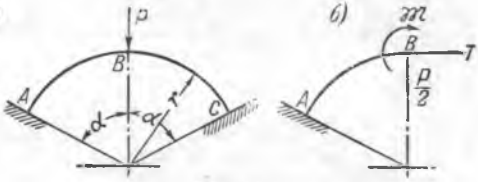


Рис. 23.

К образовавшимся двум консольным аркам AB (рис. 23, *б*) и BC применим формулы (19) случая 2 и найдем неизвестные M и T, исходя из условий, что в точке B угол поворота касательной и горизонтальные смещения должны быть равны нулю.

На основании первого и второго выражения (19) получаем:

$$\frac{r}{EJ} H_1(\alpha) M + \frac{r^2}{EJ} H_2(\alpha) T + \frac{r^2}{EJ} H_3(\alpha) \frac{P}{2} = 0;$$

$$\frac{r^2}{EJ} H_2(\alpha) M + \frac{r^3}{EJ} H_4(\alpha) T + \frac{r^3}{EJ} H_5(\alpha) \frac{P}{2} = 0.$$

Подставляя значение $H_i(\alpha)$ согласно приведенным в случае 2 выражения можно получить:

$$\alpha \frac{M}{r} + (\alpha - \sin\alpha) T = -\frac{P}{2}(1 - \cos\alpha);$$

$$(\alpha - \sin\alpha) \frac{M}{r} + \left(\frac{3}{2}\alpha - \sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) T =$$

$$= -\frac{P}{2}\left(\frac{3}{4} - \cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha\right).$$

Решение этих уравнений относительно $\frac{M}{r}$ и T дает:

$$M = -\frac{Pr}{2}\,\frac{3\alpha + 3\sin 2\alpha - \alpha\cos 2\alpha - 2\alpha\cos\alpha - 6\sin\alpha}{2\alpha^2 + \alpha\sin 2\alpha - 4\sin^2\alpha};$$

$$T = -\frac{P}{2}\,\frac{\alpha\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha + 4\sin\alpha - \alpha}{2\alpha^2 + \alpha\sin 2\alpha - 4\sin^2\alpha}.$$

Прогиб арки в ее середине, зная M и T, можно вычислить по третьему из выражений (17); применяя его для консольной арки AB, имеем

$$n = \frac{r^3}{EJ} H_3(\alpha)\, M + \frac{r^3}{EJ} H_5(\alpha)\, T + \frac{r^3}{EJ} H_6(\alpha)\, \frac{P}{2}.$$

Входящие сюда функции $H_i(\alpha$ вычисляются согласно выражениям, приведенным в случае 2, а величины M, T и P известны.

Пример к пользованию табл. 13.

Дано (рис. 16): $\alpha = 30°$.

Имеем: α в радианах

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\cdot 30° = 0{,}524.$$

По табл. 13 после интерполирования находим:

$$\theta_2(30°) = \theta_2(0{,}524) = 0{,}0469;$$

$$\theta_3(30°) = \theta_3(0{,}524) = 0{,}128$$

и т. д.

Пример 2. Раскрыть статическую неопределимость овального кольца, составленного из круговых стержней постоянной жесткости и нагруженного равномерным давлением q (рис. 24, *а*).

Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся принципом наложения и выделим из рассматриваемого кольца круговые стержни постоянной кривизны, нагруженные равномерным давлением и осевыми сосредоточенными силами, приложенными по концам (см рис. 24, *б*).

Согласно случаю 6, рассмотренному выше, указанные круговые стержни будут, очевидно, уравновешены и не будут испытывать изгиба.

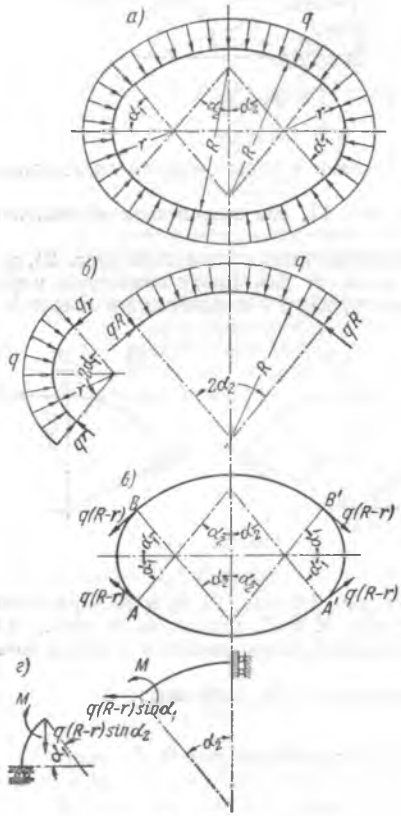


Рис. 24.

Оставшаяся нагрузка кольца состоит из сосредоточенных касательных усилий, приложенных в местах сопряжения круговых стержней различной кривизны (см. рис. 24, *в*) и равных $q(R - r)$.

Для раскрытия статической неопределимости кольца с его оставшейся нагрузкой разрежем его в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, причем, очевидно, равнодействующая усилий, приложенных к обоим стержням в месте разреза, будет равна сосредоточенной силе $q(R - r)$. Поскольку в силу симметрии нагрузки перерезывающие силы в сечениях стержней по осям симметрии кольца равны нулю, стержень BB' не будет воспринимать вертикальных усилий, а стержень AB — горизонтальных. Следовательно, горизонтальная составляющая

Таблица 13

α	$\theta_2(\alpha)$	$\theta_3(\alpha)$	$\theta_4(\alpha)$	$\theta_5(\alpha)$	$\theta_6(\alpha)$	$H_2(\alpha)$	$H_3(\alpha)$	$H_4(\alpha)$	$H_5(\alpha)$	$H_6(\alpha)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	$0{,}333\cdot10^{-3}$	0,0050	$0{,}133\cdot10^{-5}$	$2{,}08\cdot10^{-4}$	$3{,}32\cdot10^{-4}$	$1{,}67\cdot10^{-4}$	0,0050	$0{,}05\cdot10^{-5}$	$1{,}25\cdot10^{-5}$	$0{,}333\cdot10^{-3}$
0,2	$2{,}66\cdot10^{-3}$	0,0198	$0{,}47\cdot10^{-4}$	$2{,}88\cdot10^{-4}$	$2{,}62\cdot10^{-3}$	0,0013	0,0199	$0{,}16\cdot10^{-4}$	$1{,}99\cdot10^{-4}$	$2{,}65\cdot10^{-3}$
0,3	$8{,}92\cdot10^{-3}$	0,0440	$3{,}18\cdot10^{-4}$	$1{,}64\cdot10^{-3}$	$8{,}64\cdot10^{-3}$	0,0045	0,0447	$0{,}12\cdot10^{-3}$	$9{,}98\cdot10^{-4}$	$8{,}55\cdot10^{-3}$
0,4	0,0210	0,0768	$1{,}32\cdot10^{-3}$	$5{,}06\cdot10^{-3}$	0,0198	0,0106	0,0789	$0{,}55\cdot10^{-3}$	0,0031	0,0206
0,45	0,0298	0,0962	$2{,}37\cdot10^{-3}$	$0{,}80\cdot10^{-2}$	0,0277	0,0150	0,0996	$0{,}83\cdot10^{-3}$	0,0050	0,0292
0,50	0,0406	0,117	$3{,}97\cdot10^{-3}$	0,0120	0,0372	0,0206	0,122	$0{,}16\cdot10^{-2}$	0,0075	0,0396
0,55	0,0538	0,140	$6{,}33\cdot10^{-3}$	0,0172	0,0483	0,0273	0,147	$0{,}24\cdot10^{-2}$	0,0109	0,0522
0,60	0,0694	0,164	$9{,}69\cdot10^{-3}$	0,0240	0,0611	0,0354	0,175	$0{,}38\cdot10^{-2}$	0,0153	0,0670
0,65	0,0877	0,189	$1{,}43\cdot10^{-2}$	0,0322	0,0754	0,0448	0,204	$0{,}55\cdot10^{-2}$	0,0208	0,0841
0,70	0,109	0,216	$2{,}04\cdot10^{-2}$	0,0425	0,0915	0,0558	0,235	$0{,}80\cdot10^{-2}$	0,0277	0,104
0,75	0,133	0,243	$2{,}84\cdot10^{-2}$	0,0542	0,108	0,0684	0,268	0,0112	0,0360	0,126
0,80	0,160	0,271	$3{,}87\cdot10^{-2}$	0,0688	0,127	0,0826	0,303	0,0151	0,0460	0,150
0,85	0,190	0,299	$5{,}15\cdot10^{-2}$	0,0850	0,147	0,0987	0,340	0,0203	0,0578	0,177
0,90	0,224	0,327	$6{,}73\cdot10^{-2}$	0,101	0,167	0,117	0,378	0,0268	0,0716	0,207
0,95	0,261	0,354	$8{,}68\cdot10^{-2}$	0,125	0,187	0,137	0,418	0,0348	0,0875	0,238
1,0	0,301	0,382	0,110	0,148	0,209	0,159	0,460	0,0444	0,106	0,273
1,1	0,392	0,434	0,170	0,202	0,252	0,209	0,546	0,0698	0,150	0,349
1,2	0,498	0,481	0,252	0,264	0,294	0,268	0,635	0,1044	0,203	0,433
$\pi/2$	1	0,57	0,785	0,50	0,355	0,57	1	0,355	0,50	0,785

силы $q(R-r)$ в каждом разрезе будет передаваться на стержни BB' и AA', а вертикальная составляющая — на стержни AB и $A'B'$.

Кроме указанных усилий, на концы стержней будут действовать неизвестные моменты M. Для определения этих моментов рассмотрим две консольные арки, расчетные схемы которых приведены на рис. 24, *г*. Применяя формулы (18), случай 1, найдем моменты M из условия равенства углов поворота концов обеих консольных арок

$$M = \frac{q(R-r)}{r\alpha_1 + R\alpha_2}\left[R^2 \sin\alpha_1 \theta_2(\alpha_2) - r^2 \sin\alpha_2 \theta_2(\alpha_1)\right].$$

Изгибающие моменты в средних сечениях круговых арок будут равны сумме полученного момента и момента, создаваемого силой, приложенной на конце арки.

В круговой арке большого радиуса

$$M_1 = M - qR(R-r)(1-\cos\alpha_2)\sin\alpha_1.$$

В круговой арке малого радиуса

$$M_2 = M + qr(R-r)(1-\cos\alpha_1)\sin\alpha_2.$$

Поскольку выделенные раньше круговые стержни (рис. 24, *б*) не испытывают изгиба, полученные значения моментов M_1 и M_2 являются расчетными для рассматриваемого овального кольца, нагруженного равномерным давлением.

Перерезывающие усилия в различных сечениях рассматриваемого кольца будут определяться проекциями усилий, приложенных по концам консольных арок (рис. 24, *г*) на нормаль к оси стержня в данном его сечении.

Перерезывающие усилия в местах сопряжения круговых стержней различной кривизны равны

$$N = q(R-r)\sin\alpha_1 \sin\alpha_2.$$

Осевые усилия в сечениях кольца равны сумме проекции сосредоточенного усилия, приложенного на конце консольной арки (рис. 24, *г*) на касательную к оси стержня в данном сечении, и осевого усилия, возникающего в круговой арке, нагруженной равномерным давлением и осевыми усилиями по концам.

В круговой арке большого радиуса в вертикальном сечении осевое усилие равно

$$T_1 = -qR + q(R-r)\sin\alpha_1;$$

в круговой арке малого радиуса в горизонтальном сечении —

$$T_2 = -qr - q(R-r)\sin\alpha_2.$$

§ 4. Расчет статически неопределимых криволинейных стержней переменного сечения и произвольной формы

Расчет статически неопределимых криволинейных стержней и рам, составленных из криволинейных стержней, следует производить при помощи начала наименьшей работы и теоремы Кастильяно.

В качестве примера рассмотрим криволинейный стержень переменного сечения, нагруженный распределенной нагрузкой, изменяющейся по высоте по линейному закону, жестко заделанный на одном конце и свободно опертый на другом (рис. 25, *а*).

Справа на рис. 25, *а* показана эпюра давления рассматриваемого стержня.

Расчет выполняется в следующем порядке. Стержень разбивается на участки одинаковой длины (длина участков измеряется по хордам), на протяжении каждого из которых момент инерции поперечного сечения стержня изменяется незначительно. По эпюре давлений определяется интенсивность давления по концам каждого участка и вычисляется нагрузка, приложенная ко всем участкам. Эта нагрузка на протяжении каждого участка принимается равномерной (рис. 25, *б*).

За неизвестные принимаются проекции реакций по концам криволинейного стержня на направление прямой, соединяющей его концы, и на перпендикуляр к нему, обозначаемые соответственно через X_0, X_5, Y_0 и Y_5, а также опорный момент $\mathfrak{M}_0$ в заделке нижнего конца стержня.

Для определения этих неизвестных составляются три уравнения равновесия и два уравнения начала наименьшей работы, соответствующие нулевым перемещениям стержня по концам.

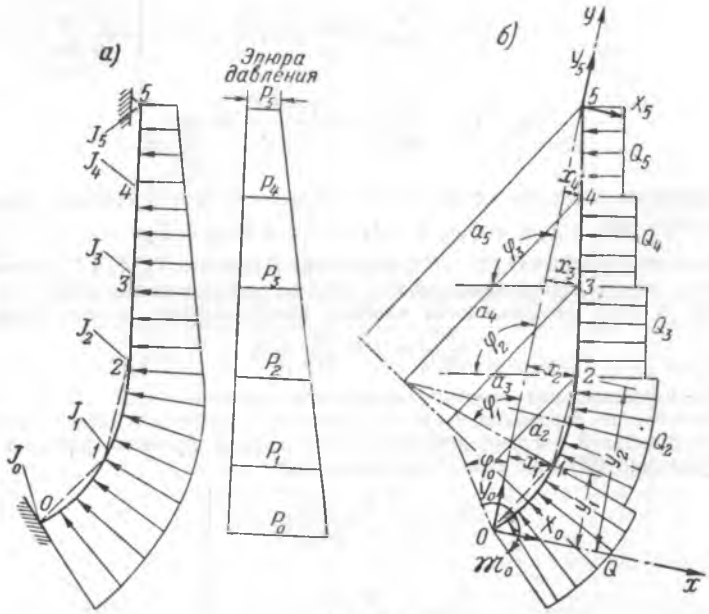


Рис. 25.

Рассматриваемый стержень разделим на пять одинаковых по длине участков. Нагрузки, действующие на отдельные участки стержня (рис. 25, *б*), равны:

$$Q_1 = \frac{p_0 + p_1}{2}\Delta s; \quad Q_4 = \frac{p_3 + p_4}{2}\Delta s;$$

$$Q_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}\Delta s; \quad Q_5 = \frac{p_4 + p_5}{2}\Delta s;$$

$$Q_3 = \frac{p_2 + p_3}{2}\Delta s,$$

где p_i — интенсивность давления в данном i-м) сечении стержня;
Δs — длина участка, измеряемая по хорде.

Примем следующие обозначения:

x_i и y_i — координаты отдельных сечений криволинейного стержня относительно выбранных осей координат;

a_i, b_i, c_i, d_i и e_i — плечи нагрузок Q_i относительно выбранных равноудаленных сечений стержня, равные длинам перпендикуляров, опущенных из центров тяжести этих сечений на перпендикуляры, проведенные из середин хорд рассматриваемых участков;

φ_i — углы между нормалями к криволинейной оси стержня в рассматриваемых его сечениях и осью y;

J_i — моменты инерции поперечных сечений стержня.

Положительными считаются те изгибающие моменты, которые для большей части стержня увеличивают его кривизну.

Положительными направлениями проекций реакций по концам стержня принимаются такие, которые совпадают с направлением осей координат.

Уравнения равновесия рассматриваемого стержня будут:

Уравнения проекций равнодействующей всех сил на оси x и y

$$\left.\begin{aligned} X_0 + X_5 - \sum_{i=1}^{5} Q_i \sin\left(\frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2}\right) = 0 \\ Y_0 + Y_5 - \sum_{i=1}^{5} Q_i \cos\left(\frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Уравнение моментов относительно верхнего опорного сечения стержня

$$\mathfrak{M}_0 - X_0 y_5 + Q_1 a_5 + Q_2 b_5 + Q_3 c_5 + Q_4 d_5 + Q_5 e_5 = 0. \tag{24}$$

Поскольку уравнения (23) и (24) позволяют исключить X_0, X_5 и Y_5, уравнения, даваемые началом наименьшей работы, должны определить два остальных неизвестных. В силу неподвижности нижнего конца стержня должно быть

$$\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{M}_0} = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial Y_0} = 0, \tag{25}$$

где V — потенциальная энергия деформации стержня.

Пренебрегая деформацией сдвига и сжатия стержня, за общее выражение его потенциальной энергии деформации мы должны принять выражение (17).

Уравнения (25) при этом будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{M}_0} = \int_0^s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}_0} ds = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial Y_0} = \int_0^s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Y_0} ds = 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где интегрирование выполняется по всей длине стержня.

Для вычисления интегралов, входящих в уравнения (26), составляются таблицы изгибающих моментов и их производных $\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}_0}$ и $\frac{\partial M}{\partial Y_0}$.

Таблица 14

№ сечения i	Изгибающие моменты M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial \mathfrak{M}_0}$	$\frac{\partial M_i}{\partial Y_0}$
0	$M_0 = \mathfrak{M}_0$	1	0
1	$M_1 = \mathfrak{M}_0 - X_0 y_1 + Y_0 x_1 + Q_1 a_1$	1	x_1
2	$M_2 = \mathfrak{M}_0 - X_0 y_2 + Y_0 x_2 + Q_1 a_2 + Q_2 b_2$	1	x_2
3	$M_3 = \mathfrak{M}_0 - X_0 y_3 + Y_0 x_3 + Q_1 a_3 + Q_2 b_3 + Q_3 c_3$	1	x_3
4	$M_4 = \mathfrak{M}_0 - X_0 y_4 + Y_0 x_4 + Q_1 a_4 + Q_2 b_4 + Q_3 c_4 + Q_4 d_4$	1	x_4
5	$M_5 = \mathfrak{M}_0 - X_0 y_5 + Y_0 x_5 + Q_1 a_5 + Q_2 b_5 + Q_3 c_5 + Q_4 d_5 + Q_5 e_5 = 0$	1	x_5

Для подсчета изгибающих моментов по табл. 14 и развертывания уравнений (26) целесообразно составить таблицу координат отдельных сечений и плеч нагрузок относительно выбранных сечений (табл. 15). Левая часть таблицы заполняется путем измерения по чертежу.

Так как в уравнениях (26) $E = \text{const}$ и $M_5 = 0$, первое из уравнений (26) примет следующий вид:

$$\mathfrak{M}_0\left(\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{J_i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{J_0}\right) - X_0\sum_{i=1}^{4}\frac{y_i}{J_i} + Y_0\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{J_i} + Q_1\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{J_i} +$$

$$+ Q_2\sum_{i=2}^{4}\frac{b_i}{J_i} + Q_3\left(\frac{c_3}{J_3} + \frac{c_4}{J_4}\right) + Q_4\frac{d_4}{J_4} = 0, \qquad (27)$$

Таблица 15

№ сечения	Координаты и плечи, *м*							Произведения координат и плеч						
	x_i	y_i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	x_iy_i	x_i^2	a_ix_i	b_ix_i	c_ix_i	d_ix_i	e_ix_i
0	0	0	—	—	—	—	—	0	0	—	—	—	—	—
1	×	×	×	—	—	—	—	×	×	×	—	—	—	—
2	×	×	×	×	—	—	—	×	×	×	×	—	—	—
3	×	×	×	×	×	—	—	×	×	×	×	×	—	—
4	×	×	×	×	×	×	—	×	×	×	×	×	×	—
5	0	×	×	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 16

№ сечения	Перерезывающая сила N_i
0	$N_0 = Y_0\cos\varphi_0 - X_0\sin\varphi_0$
1	$N_1 = Y_0\cos\varphi_1 - X_0\sin\varphi_1 + Q_1\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$
2	$N_2 = Y_0\cos\varphi_2 - X_0\sin\varphi_2 + Q_1\cos\left(\varphi_2 - \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\right) + Q_2\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$
3	$N_3 = N_2 + Q_3$
4	$N_4 = N_3 + Q_4$
5	$N_5 = N_4 + Q_5$

а второе из уравнений (26) —

$$\mathfrak{M}_0 \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{J_i} - X_0 \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i y_i}{J_i} + Y_0 \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i^2}{J_i} + Q_1 \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i x_i}{J_i} +$$

$$+ Q_2 \sum_{i=2}^{4} \frac{b_i x_i}{J_i} + Q_3 \left(\frac{c_3 x_3}{J_3} + \frac{c_4 x_4}{J_4} \right) + Q_4 \frac{d_4 x_4}{J_4} = 0. \qquad (28)$$

Для подсчета сумм, входящих в уравнения (27) и (28), используется правая часть табл. 15.

Совместным решением уравнений (24), (27) и (28) определяются все неизвестные. После этого при помощи табл. 14 подсчитываются изгибающие моменты во всех сечениях стержня.

Перерезывающие и осевые силы определяются по формулам, приведенным в табл. 16 и 17.

Таблица 17

№ сечения	Осевая сила T_i
0	$T_0 = Y_0 \sin \varphi_0 + X_0 \cos \varphi_0$
1	$T_1 = Y_0 \sin \varphi_1 + X_0 \cos \varphi_1 + Q_1 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$
2	$T_2 = Y_0 \sin \varphi_2 + X_0 \cos \varphi_2 + Q_1 \sin \left(\varphi_2 - \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \right) + Q_2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$
3	$T_3 = T_2$ } так как для рассматриваемого стержня сечения параллельны
4	$T_4 = T_2$
5	$T_5 = T_2$

§ 5. Расчет рам, составленных из криволинейных стержней

Рассмотренная выше схема расчета криволинейного стержня может быть использована для расчета рам, составленных из криволинейных стержней.

Пусть имеется рама, составленная из двух криволинейных стержней и одного прямого (рис. 26).

Нагрузка рамы состоит из сосредоточенных усилий, приложенных в узле C рамы, и равномерно распределенной нагрузки, приложенной к криволинейному стержню CD. Нижние концы криволинейных стержней жестко заделаны.

Разрежем раму в одном из узлов соединения ее стержней, заменив влияние отрезанных стержней на рассматриваемый сосредоточенными усилиями и моментом (рис. 27).

Рассматриваемая рама является трижды статически неопределимой и для определения неизвестных сосредоточенных усилий N_1, T_1 и $\mathfrak{M}_1$ воспользуемся началом наименьшей работы.

Будем иметь три уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial T_1} = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{M}_1} = 0 \qquad (29)$$

Здесь потенциальная энергия изгиба стержней рамы

$$V = \frac{1}{2E}\left\{\int_0^{l_1}\frac{M_1^2}{J_1(s)}\,ds + \int_0^{l_2}\frac{M_2^2}{J_2(s)}\,ds + \int_0^{l_3}\frac{M_3^2}{J_3(s)}\,ds\right\}, \tag{30}$$

где M_1, M_2 и M_3 — изгибающие моменты стержней AB, BC, CD;

l_1, l_2 и l_3 — длины стержней AB, BC, CD;

J_1, J_2 и J_3 — моменты инерции поперечных сечений стержней AB, BC, CD.

В том случае, если стержни AB и CD круговые и постоянного сечения, решение задачи упрощается, так как уравнения (29) могут быть заменены эквивалентными им условиями равенства углов поворота и поступательных перемещений стержней рамы в месте разреза. Для этого могут быть использованы приведенные выше выражения для перемещений свободного конца круговых балок.

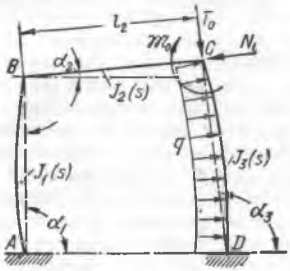


Рис. 26.

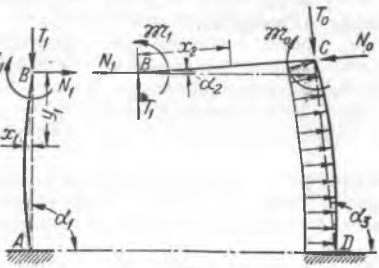


Рис. 27.

В общем случае для развертывания уравнений (29) надлежит воспользоваться указанной выше схемой расчета криволинейного стержня переменного сечения.

Уравнения (29) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{l_1}\frac{M_1}{J(s)}\frac{\partial M_1}{\partial N_1}\,ds + \int_0^{l_2}\frac{M_2}{J_2(s)}\frac{\partial M_2}{\partial N_1}\,ds + \int_0^{l_3}\frac{M_3}{J_3(s)}\frac{\partial M_3}{\partial N_1}\,ds = 0\\
&\int_0^{l_1}\frac{M_1}{J_1(s)}\frac{\partial M_1}{\partial T_1}\,ds + \int_0^{l_2}\frac{M_2}{J_2(s)}\frac{\partial M_2}{\partial T_1}\,ds + \int_0^{l_3}\frac{M_3}{J_3(s)}\frac{\partial M_3}{\partial T_1}\,ds = 0\\
&\int_0^{l_3}\frac{M_1}{J_1(s)}\frac{\partial M_1}{\partial \mathfrak{M}_1}\,ds + \int_0^{l_3}\frac{M_2}{J_2(s)}\frac{\partial M_2}{\partial \mathfrak{M}_1}\,ds + \int_0^{l_3}\frac{M_3}{J_3(s)}\frac{\partial M_3}{\partial \mathfrak{M}_1}\,ds = 0
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

При этом составляются общие выражения для изгибающих моментов в каждом из стержней рассматриваемой рамы или вычисляются изгибающие моменты в равноудаленных друг от друга сечениях. После этого производится приближенное вычисление интегралов, как это было показано на примере криволинейного стержня.

Изгибающие моменты для стержней AB и BC рассматриваемой рамы будут:

для стержня AB

$$M_1 = \mathfrak{M}_1 + T_1x_1 + N_1y_1;$$

для стержня BC

$$M_2 = \mathfrak{M}_1 - T_1x_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) - N_1x_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Для получения выражения изгибающего момента стержня CD необходимо спроектировать усилия T_1 и N_1 на направление хорды CD и перпендикуляр к ней, к величине же сосредоточенного момента $\mathfrak{M}_0$, действующего в точке C стержня, прибавить момент M_2 стержня BC при $x_2 = l_2$.

Сосредоточенный момент в точке C при этом

$$M_{3(x_3=0)} = -\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 - T_1 l_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - N_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Результирующее усилие, действующее в точке C по направлению хорды CD,

$$T_3 = T_0 - T_1 \cos(\alpha_3 - \alpha_2).$$

Результирующее усилие, действующее по направлению перпендикуляра к хорде в точке C,

$$N_3 = N_0 + N_1 \cos(\alpha_3 - \alpha_2).$$

РАЗДЕЛ XI

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ГЛАВА I

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 1. Общие положения

Всякая конструкция, находящаяся под действием внешних сил, претерпевает деформации, во время которых внешние силы совершают работу (работа внешних сил), а в конструкции накапливается потенциальная энергия. Энергетический метод рассмотрения задач строительной механики оказывается чрезвычайно плодотворным, так как он позволяет установить многие общие теоремы, применимые к самым разнообразным конструкциям, а также разработать ряд приближенных методов расчета.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь идеально упругие конструкции (идеально упругие тела), т. е. такие, которые после удаления внешней нагрузки возвращаются в начальное, недеформированное состояние и деформации которых не сопряжены с рассеянием энергии.

Идеально упругая конструкция обладает рядом очень важных свойств:

1) работа внешних сил, действующих на конструкцию, в каждый момент времени равна потенциальной и кинетической энергии деформации (рассеяния энергии не происходит);

2) всякому состоянию деформации конструкции соответствует определенное количество заключенной в ней потенциальной энергии и, следовательно, количество потенциальной энергии может быть выражено, как функция независимых координат, определяющих деформацию;

3) потенциальная энергия может быть выражена также и как функция внешних сил, приводящих конструкцию в состояние статического равновесия, или как функция внутренних напряжений, поскольку каждой деформации конструкции соответствуют вполне определенные величины статических внешних сил и величины внутренних напряжений.

§ 2. Обобщенные координаты и обобщенные силы

Обобщенными координатами называются независимые параметры, полностью определяющие возможные перемещения механической системы (и в частности конструкции).

Обобщенными силами называются коэффициенты, стоящие перед приращениями обобщенных координат в выражении работы внешних сил на возможных перемещениях (деформациях) системы (конструкции).

В некоторых случаях за исходные величины удобнее принимать обобщенные силы и, пользуясь выражением работы, подбирать обобщенные координаты.

Необходимость введения понятий «обобщенная координата» и «обобщенная сила» обусловлена удобством аналитических выкладок во многих вопросах механики и их физическим истолкованием.

Примеры:

1) Растяжение. В качестве обобщенной координаты примем удлинение стержня Δl. Тогда обобщенной силой будет являться растягивающая сила P, так как работа внешних сил

$$U = P \cdot \Delta l. \tag{1}$$

2) Кручение. Приняв крутящий момент $M_{кр}$ за обобщенную силу, необходимо в качестве обобщенной координаты принять угол закручивания стержня $\delta\varphi$, так как работа внешних сил $U = M_{кр} \cdot \delta\varphi$.

3) Изгиб свободно опертой прямоугольной пластины, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1) В первом приближении можно принять, что пластина изогнется по выражению

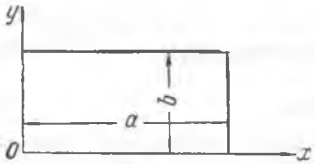


Рис. 1.

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \tag{2}$$

где f — стрелка прогиба посредине пластины.

Таким образом, деформация пластины определяется величиной стрелки прогиба f. Примем f за обобщенную координату.

Работа внешних сил

$$U = \int_0^a \int_0^b p \cdot \delta f \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \, dx \, dy = \frac{4pab}{\pi^2} \delta f \tag{3}$$

Следовательно, за обобщенную силу следует принять величину $\frac{4pab}{\pi^2}$

§ 3. Вычисление потенциальной энергии упругих деформаций

Для конструкций, материал которых деформируется по закону Гука, потенциальная энергия выражается как однородная функция второй степени от обобщенных координат или от обобщенных сил.

В частности, обобщенные координаты могут быть подобраны так, что в выражение для потенциальной энергии будут входить лишь квадраты координат и не будут входить их произведения; такие координаты называются главными, или нормальными, координатами. [1]

В общем случае совместная работа, произведенная несколькими нагрузками, не равна сумме тех работ, которые могут произвести все силы в отдельности. Таким образом, потенциальная энергия деформации конструкции не равна сумме потенциальных энергий от раздельного действия всех внешних сил.

Исключение представляет случай, когда деформация рассматривается в главных координатах. Обобщенная сила, соответствующая какой-либо главной координате, не совершает работу на перемещении, соответствующем изменению другой главной координаты. Поэтому, потенциальная энергия деформации конструкции может вычисляться как сумма потенциальных энергий от действия обобщенных сил, соответствующих главным координатам.

Выражения для потенциальной энергии конструкций могут быть составлены одним из приведенных ниже способов.

а) Исходя из общего выражения потенциальной энергии в функции от внутренних напряжений. Потенциальная энергия элементарного параллелепипеда, выделенного внутри упругого тела, равна

$$dV = \left\{ \frac{1}{2G} \left[\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \right) - 2\mu \left(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2G} \left[\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 \right] \right\} dv \tag{4}$$

В случае «плоской задачи» выражение (4) принимает следующий вид:

$$dV = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{E} - \frac{2\mu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{\tau^2}{G} \right) dv \tag{5}$$

[1] Главные координаты всегда существуют для линейно деформируемых систем

В этих формулах:

σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения на гранях параллелепипеда;

τ_x, τ_y, τ_z — касательные напряжения на гранях параллелепипеда;

E — модуль нормальной упругости;

G — модуль упругости при сдвиге;

μ — коэффициент Пуассона;

dv — объем элементарного параллелепипеда.

Для получения потенциальной энергии всей конструкции следует проинтегрировать выражение (4) или (5) по всему объему.

б) Пользуясь выражением внешних сил в функции от координат. Приращение потенциальной энергии при малом изменении координат равно сумме произведений внешних сил на приращение соответствующих обобщенных координат

$$dV = P_1 d\varphi_1 + P_2 d\varphi_2 + \cdots + P_n d\varphi_n, \tag{6}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — обобщенные силы;

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — соответствующие им обобщенные координаты.

Если известны выражения внешних сил в функции от обобщенных координат, то, подставляя их в выражение для dv, получим полный дифференциал, интегрируя который, найдем выражение для потенциальной энергии.

Пример. Найти выражение для потенциальной энергии балки при ее чистом изгибе. Обобщенная сила — момент изгибающей пары M; обобщенная координата — относительный угол поворота крайних сечений

$$dV = M \cdot d\varphi. \tag{7}$$

Из теории изгиба балок $M = \frac{EJ\varphi}{l}$, где l — длина балки

Следовательно,

$$V = \int_0^{\varphi} \frac{EJ}{l} \varphi d\varphi = \frac{EJ}{2l} \varphi^2 = \frac{M^2 l}{2EJ}. \tag{8}$$

В некоторых случаях целесообразно написать выражение для работы внешних сил и затем подставить в него зависимости этих внешних сил через обобщенные координаты.

Ниже приведены выражения для потенциальной энергии, которыми приходится пользоваться на практике при расчете конструкций.

1. Растяжение или сжатие балки

$$V = \frac{EF}{2l} \Delta l^2 = \frac{Fl}{2E} \sigma^2 = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{EU}{2} \varepsilon^2, \tag{9}$$

где V — потенциальная энергия растянутой или сжатой балки;

P — растягивающая или сжимающая сила;

l — длина балки;

F — площадь поперечного сечения балки;

σ — нормальное напряжение в поперечном сечении балки;

ε — относительное удлинение или относительное сжатие;

Δl — абсолютное удлинение или сжатие;

U — объем балки.

2. Чистый сдвиг прямоугольного параллелепипеда

$$V = \frac{GFl}{2} \gamma^2 = \frac{Q^2 l}{2FG}, \tag{10}$$

где Q — сдвигающая сила, приложенная к грани параллелепипеда;

l — высота параллелепипеда (длина ребра, перпендикулярного к грани);

F — площадь грани;

γ — относительный сдвиг.

3. Кручение призматической балки

а) Круглого сечения

$$V = \frac{M_{\text{кр}}^2 l}{2GJ_p} = \frac{GJ_p}{2l}\varphi^2, \tag{11}$$

где $M_{\text{кр}}$ — крутящий момент;
l — длина балки;
J_p — полярный момент инерции сечения;
φ — относительный угол поворота крайних сечений.

б) Эллиптического сечения

$$V = \frac{M_{\text{кр}}^2 l\,(a^2 + b^2)}{2\pi G a^3 b^3}, \tag{12}$$

где a и b — длины полуосей эллипса.

4. Изгиб призматической балки

$$V = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M(x)^2\,dx = \frac{EJ}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx, \tag{13}$$

где l — длина балки;
$M(x)$ — изгибающий момент;
J — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;
v — прогиб балки.

Потенциальная энергия сдвига

$$V_1 = \frac{k}{2GF}\int_0^l Q^2(x)\,dx, \tag{14}$$

$Q(x)$ — перерезывающая сила;
F — площадь поперечного сечения балки;
k — численный коэффициент, зависящий от формы сечения; для прямоугольника $k = 1{,}2$, для нормальных двутавровых профилей $k = 2 \div 2{,}4$.

В большинстве случаев величина V_1 пренебрежимо мала по сравнению с V.

5. Изгиб кривой балки (обозначения прежние)

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EF\gamma\rho} - \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF\rho} + \frac{kQ^2}{2FG}\right) ds \tag{15}$$

или приближенно

$$V = \frac{1}{2E}\int_0^s \left(\frac{M^2}{J} + \frac{N^2}{F}\right) ds \approx \frac{1}{2E}\int_0^s \frac{M^2}{J}\,ds. \tag{16}$$

6. Изгиб тонкой пластины без учета деформаций срединной поверхности (рис. 1)

$$V = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy, \tag{17}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;
$v = f(x, y)$ — прогиб пластины.

§ 4. Линейно деформируемые системы

Упругая система называется линейно деформируемой, если ее деформации выражаются линейными однородными функциями внешних сил, т. е. если выполняются равенства

$$\delta = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \cdots + P_n\delta_n, \tag{18}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — обобщенные силы, действующие на систему;
δ — суммарное перемещение определенного типа (прогиб, угол поворота и т. п.), вызванное действием обобщенных сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$;
$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — обобщенные перемещения того же типа, вызванные действием единичных обобщенных сил $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, ..., $P_n = 1$.

Если упругая система является линейно деформируемой, то к ней применим принцип наложения, и наоборот.

Для вычисления потенциальной энергии линейно деформируемых систем часто оказывается полезной следующая теорема Клапейрона: потенциальная энергия линейно деформируемой упругой системы равна полусумме произведений всех обобщенных сил на соответствующие им обобщенные координаты.

Иными словами

$$V = \frac{1}{2}(P_1\varphi_1 + P_2\varphi_2 + \cdots + P_n\varphi_n), \tag{19}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — обобщенные силы;
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — соответствующие им обобщенные координаты.

Рассматриваемые в строительной механике упругие системы оказываются обычно линейно деформируемыми, однако встречаются и исключения (совместный изгиб балки или пластины под действием поперечной нагрузки и осевых сил и пр.).

ГЛАВА 2

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

§ 5. Теорема Лагранжа

Частные производные от потенциальной энергии упругой системы по обобщенным координатам равны соответствующим обобщенным силам.

Иными словами, пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — обобщенные координаты системы, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — соответствующие им обобщенные силы.

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = P_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = P_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = P_n. \tag{20}$$

Для использования теоремы Лагранжа потенциальная энергия должна быть представлена как функция от обобщенных координат.

Теорему Лагранжа приходится использовать в тех случаях, когда по известным деформациям необходимо определить вызвавшие их силы. Указанная теорема справедлива как для линейно деформируемых, так и для нелинейно деформируемых систем.

Пример. Определить силу, вызывающую прогиб консольной балки (рис. 2) на величину f_0.

Примем f_0 за обобщенную координату. Тогда искомая сила P будет обобщенной силой.

Прогиб балки v зададим приближенно выражением

$$v = a + bx + cx^2 + dx^3, \tag{21}$$

а постоянные a, b, c, d определим из условий

$$x = 0 : v = 0; \quad v' = 0; \quad x = l : v = f_0, \quad v'' = 0.$$

Отсюда

$$a = b = 0; \quad c = \frac{3f_0}{2l^2}, \quad d = -\frac{f_0}{2l^3}$$

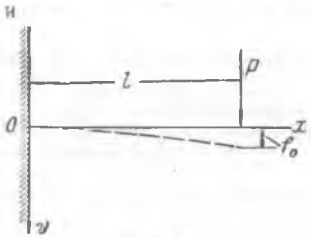


Рис. 2.

$$v = \frac{3f_0}{2l^2}x^2 - \frac{f_0}{2l^3}x^3; \tag{22}$$

$$V = \frac{EJ}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{3EJf_0^2}{2l^3}; \tag{23}$$

$$P = \frac{\partial V}{\partial f_0} = \frac{3EJf_0}{l^3} \tag{24}$$

§ 6. Теорема Кастильяно

Частные производные от потенциальной энергии линейно деформируемой упругой системы, взятые по обобщенным силам, равны соответствующим обобщенным координатам.

Иными словами, пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — обобщенные силы, действующие на систему, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — соответствующие им обобщенные координаты. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial V}{\partial P_2} = \varphi_2, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial P_n} = \varphi_n. \tag{25}$$

Для использования теоремы Кастильяно потенциальная энергия должна быть представлена как функция от обобщенных сил.

Пример. В качестве примера использования теоремы Кастильяно определим прогиб конца консольной балки, загруженной сосредоточенной силой P (рис. 2).

В качестве обобщенной силы примем силу P, соответствующую обобщенной координате f_0.

Изгибающий момент от действия силы P

$$M(x) = P(l - x), \tag{26}$$

отсюда

$$\frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2(x)\,dx = \frac{1}{2EJ}\int P^2(l-x)^2\,dx = \frac{P^2l^3}{6EJ}; \tag{27}$$

$$f_0 = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ}. \tag{28}$$

Характерной особенностью теоремы Кастильяно является то обстоятельство, что она справедлива лишь для линейно деформируемых упругих систем, в то время как родственная ей теорема Лагранжа справедлива для любой упругой системы.

§ 7. Принцип наименьшей работы

Пусть мы имеем линейно деформируемую, статически неопределимую систему, лишние связи которой являются абсолютно жесткими. Принимая реакции лишних связей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за обобщенные силы и используя теорему Кастильяно, можем записать

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = \frac{\partial V}{\partial X_2} = \cdots = \frac{\partial V}{\partial X_n} = 0, \tag{29}$$

т. е. *реакции лишних связей статически неопределимой линейно деформируемой упругой системы принимают также значения, при которых потенциальная энергия всей системы получает наименьшее значение.*

При использовании этой теоремы все неизвестные реакции X_i следует присоединить к числу внешних сил, после чего составить уравнения (29) по числу неизвестных.

Пример. Раскрыть статическую неопределимость балки (рис. 3). За неизвестную примем реакцию правой опоры R, присоединим ее к числу внешних сил и напишем выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{Q}{l}\frac{x^2}{2} - Rx; \quad \frac{\partial M}{\partial R} = -x.$$

Потенциальная энергия изгиба балки

$$V = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2(x)\,dx; \tag{30}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{1}{EJ}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial R}\,dx = 0. \tag{31}$$

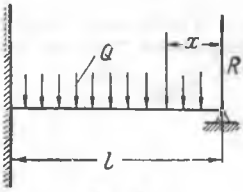


Рис. 3.

Отсюда

$$R = \frac{3}{8}Q. \tag{32}$$

Используя принцип наименьшей работы, можно доказать следующую весьма важную общую теорему.

Наложение новых (податливых или абсолютно жестких) связей на линейно деформируемую упругую систему, загруженную произвольной внешней нагрузкой, уменьшает потенциальную энергию системы.

Указанная теорема имеет принципиальное значение в теории колебаний.

Принцип наименьшей работы легко распространить и на случай упругих лишних связей, включая их в состав рассматриваемой системы, т. е. учитывая потенциальную энергию упругой лишней связи.

§ 8. Принцип взаимности работ (теорема Бетти)

Пусть даны два состояния какой-либо линейно деформируемой системы, отвечающие двум различным нагрузкам.

Обозначим нагрузки, а также внутренние усилия и деформации, соответствующие этим состояниям, номерами 1 и 2

Будем считать, что в обоих случаях система находится в равновесии.

Пусть, далее, нагрузка 1, будучи приложена к недеформируемой системе, совершает работу U_{11}, а нагрузка 2, будучи приложена к недеформируемой системе — работу U_{22}.

Если к системе приложена сначала нагрузка 1, а затем нагрузка 2, то работа внешних сил равна

$$U = U_{11} + U_{22} + U_{12}, \tag{33}$$

где U_{12} — работа нагрузки 1 на перемещениях, вызываемых нагрузкой 2.[1]

Если же, наоборот, к системе сначала приложена нагрузка 2, а затем нагрузка 1, то

$$U = U_{11} + U_{22} + U_{21}, \tag{34}$$

где U_{21} — работа нагрузки 2 на перемещениях, вызываемых нагрузкой 1.

Так как суммарная работа в обоих случаях равна, то $U_{12} = U_{21}$. Иными словами: *в линейно деформируемой системе работа сил 1 на перемещениях состояния 2 равна работе сил 2 на перемещениях состояния 1.*

Пример. Известно, что угол поворота φ на конце свободно опертой балки от силы P, приложенной в середине, есть $\frac{Pl^2}{16EJ}$. Определить прогиб в середине той же балки, нагруженной на конце моментом M.

[1] U_{12} равна нулю лишь в том случае, когда деформации 1 и 2 соответствуют изменению главных координат системы.

Согласно принципу взаимности работ

$$P \cdot f = M\varphi = M\frac{Pl^2}{16EJ}. \tag{35}$$

Отсюда

$$f = \frac{Ml^2}{16EJ} \tag{36}$$

Пусть дано n обобщенных сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$, действующих на линейно деформируемую упругую систему, и n соответствующих им обобщенных координат $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 + \alpha_{1n}P_n \\ \varphi_2 &= \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 + \alpha_{2n}P_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n &= \alpha_{n1}P_1 + \alpha_{n2}P_2 + \alpha_{nn}P_n \end{aligned}\right| \tag{37}$$

где α_{ki} — обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе P_k и вызванное действием обобщенной силы P_i, равной единице.

Если P_k и P_i равны единице, то согласно принципу наименьшей работы

$$P_i \cdot \alpha_{ik} = P_k\alpha_{ki},$$

откуда

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}.$$

Коэффициенты α называют коэффициентами влияния, а теорему о равенстве $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ часто именуют теоремой Максвелла.

Решив уравнение (37) относительно P_i, получим

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots + \beta_{1n}\varphi_n \\ P_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \cdots + \beta_{2n}\varphi_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n &= \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{nn}\varphi_n \end{aligned}\right| \tag{38}$$

где β_{ki} — некоторые постоянные коэффициенты, зависящие от упругих свойств материала и размеров конструкции

Пусть V — потенциальная энергия системы. Тогда по теореме о независимости второй производной от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_k\partial\varphi_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}. \tag{39}$$

Но $\frac{\partial V}{\partial\varphi_k} = P_k$ и $\frac{\partial V}{\partial\varphi_i} = P_i$ (по теореме Лагранжа).

Отсюда $\frac{\partial P_k}{\partial\varphi_i} = \frac{\partial P_i}{\partial\varphi_k}$ или $\beta_{ki} = \beta_{ik}$

Коэффициенты β называют коэффициентами жесткости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

РАЗДЕЛ I

МАТЕМАТИКА

Глава 1. **Математические таблицы** 5

§ 1. Степени, корни, натуральные логарифмы, обратные величины, окружности и площади круга 5
§ 2. Квадраты и кубы четырехзначных чисел от 10,00 до 15,00 30
§ 3. Четырехзначные десятичные логарифмы 33
§ 4. Перевод градусных измерений углов в линейные 36
§ 5. Круговые функции 37
§ 6. Круговые, показательные и гиперболические функции 41
§ 7. Длина дуги, стрелки, хорды и площадь сегмента для радиуса, равного единице 52
§ 8. Экваториальные моменты инерции и моменты сопротивления некоторых сечений 56
§ 9. Экваториальные моменты инерции $J = \frac{\pi d^4}{64}$ и моменты сопротивления $W = \frac{\pi d^3}{32}$ для круглого сечения 58
§ 10. Перевод мер 60
1. Линейные меры 60
2. Квадратные меры 63
3. Кубические меры 64
4. Весовые меры 64
5. Меры давления 66
6. Нагрузка на погонные единицы 67
7. Меры скорости 67
8. Перевод в различные системы единиц изгибающего момента, момента сопротивления, мощности, веса, объема воды и работы 68
§ 11. Численные значения часто встречающихся величин 69

Глава 2. **Приближенные вычисления** 70

§ 12. Общие правила операций над приближенными величинами 70
§ 13. Погрешность результатов простейших действий 71
§ 14. Некоторые приближенные формулы 73

Глава 3. **Алгебра** 73

§ 15. Тождественные преобразования 73
§ 16. Логарифмы 74
§ 17. Теория соединений 75
§ 18. Бином Ньютона 76
§ 19. Прогрессии 76
§ 20. Уравнения 2-й степени и приводящиеся к ним 76

§ 21. Уравнения 3-й степени 78
1. Численное решение 78
2. Формула Кардана 79
3. Номограмма для отыскания вещественных корней уравнений 79

Глава 4. **Тригонометрия** 81

§ 22. Тригонометрические функции 81
1. Измерение углов 81
2. Правило знаков и правило дополнительных углов 81
3. Числовые значения некоторых тригонометрических функций 82
4. Зависимости между тригонометрическими функциями одного угла 82
5. Зависимости между тригонометрическими функциями двух углов 82
6. Тригонометрические функции кратных углов и частей углов 84
7. Обратные круговые функции 84
§ 23. Решение плоских треугольников 85
1. Решение прямоугольных треугольников 85
2. Решение косоугольных треугольников 85

Глава 5. **Высшая алгебра** 87

§ 24. Теория определителей 87
1. Определитель n-го порядка 87
2. Свойства определителей 88
3. Применение определителей к решению систем линейных уравнений 89
§ 25. Комплексные числа 91
1. Комплексные величины как обобщение понятия о величине 91
2. Тригонометрическое представление комплексного числа 91
3. Основные положения 91
4. Действия над комплексными числами 91
§ 26. Гиперболические функции 93

Глава 6. **Дифференциальное исчисление** 94

§ 27. Основные правила дифференцирования 94
§ 28. Производные элементарных функций 97
§ 29. Производные высших порядков от простейших функций 98
§ 30. Неопределенности. Максимум и минимум функций 98
1. Раскрытие неопределенности 98
2. Максимум и минимум 99
3. Относительные максимум и минимум (способ Лагранжа) 101

Глава 7. **Интегральное исчисление** 102

§ 31. Общие правила и основные формулы 102
§ 32. Неопределенные интегралы 103
1. Интегралы от рациональных функций 103
2. Интегралы от иррациональных функций 109
3. Интегралы от тригонометрических функций 118
4. Интегралы от других трансцендентных функций 126
§ 33. Определенные интегралы 131
1. Определения 131
2. Формула дифференцирования определенного интеграла по параметру 132
3. Основные свойства определенных интегралов 132
4. Признаки конечности интегралов и числовые значения некоторых определенных интегралов 132

Глава 8. **Бесконечные степенные ряды** 134

§ 34. Определения 134
§ 35. Признаки сходимости рядов 135

§ 36. Сходимость знакопеременных рядов 136
§ 37. Действия над степенными рядами 136
§ 38. Формулы Тейлора и Маклорена 137
§ 39. Интегрирование и дифференцирование рядов 138
§ 40. Формулы разложения в ряды важнейших функций 138

Глава 9. **Ряды Фурье** 140

§ 41. Условия Дирихле 140
§ 42. Сумма ряда 140
§ 43. Коэффициенты ряда Фурье 140
§ 44. Видоизменение формул для коэффициентов ряда Фурье 142
§ 45. Ряд Фурье в сжатой форме 142
§ 46. Порядок коэффициентов рядов Фурье 144
§ 47. Улучшение сходимости рядов Фурье 146
§ 48. Кратные ряды Фурье 147
§ 49. Некоторые ряды Фурье 147

Глава 10. **Дифференциальные уравнения** 149

§ 50. Дифференциальные уравнения первого порядка 149
1. Уравнения с отделяющимися переменными 149
2. Уравнения, левая часть которых есть полный дифференциал 149
3. Однородные уравнения 150
4. Линейные уравнения 151
5. Уравнение Бернулли 151
6. Уравнение Лагранжа 151
7. Уравнение Клеро 152
8. Уравнения, не содержащие явно x 152
9. Уравнения, не содержащие явно y 152
§ 51. Дифференциальные уравнения высших порядков 153
§ 52. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 156
1. Общий вид линейного уравнения с последним членом 156
2. Линейные уравнения без последнего члена 156
3. Линейные уравнения с последним членом $Q(x)$ 157
§ 53. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами 159
1. Интегрирование с помощью ряда Тейлора 159
2. Интегрирование с помощью степенных рядов 160
3. Уравнение Бесселя 161
4. Линейные уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами 163
§ 54. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 163

РАЗДЕЛ II

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Глава 1. **Общая часть** 167

§ 1. Напряжения 167
§ 2. Связь между напряжениями, объемными и поверхностными силами 170
§ 3. Перемещения, деформации и связь между ними 171
§ 4. Связь между напряжениями и деформациями 174
§ 5. Связь между объемными силами и перемещением точек 174
§ 6. Схемы решения задач теорией упругости 175

Глава 2. **Тела вращения с симметричным относительно оси распределением напряжений и плоская задача** 176
§ 7. Тела с симметричным относительно оси распределением напряжений 176
1. Уравнения равновесия 177
2. Связь между перемещениями и деформациями 177
3. Связь между напряжениями и деформациями 178
4. Условия неразрывности деформаций (зависимости Сен-Венана) 178
5. Сосредоточенная сила, действующая в теле бесконечных размеров 180
6. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело 180
§ 8. Плоская задача 181
1. Теория напряжений 182
2. Теория деформаций 184
3. Связь между напряжениями и деформациями 185
4. Функция напряжения 185
§ 9. Плоская задача в полярных координатах 187
1. Уравнения равновесия 187
2. Условия на поверхности 188
3. Связь между деформациями и перемещениями 188
4. Условие неразрывности деформаций 189
5. Выражения для напряжений через функцию напряжений $F(x, y)$ 189
6. Связь между напряжениями и деформациями 190
7. Сосредоточенная сила, действующая в неограниченной плоскости 190
8. Сосредоточенная сила, действующая на кромку полуплоскости 191
9. Сосредоточенная сила, действующая в полуплоскости, направленная перпендикулярно кромке и приложенная на расстоянии a от последней 192
10. Сосредоточенная сила, действующая в полуплоскости, направленная параллельно кромке и приложенная на расстоянии a от последней. 192

РАЗДЕЛ III

ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ РАСЧЕТОВ ПРОЧНОСТИ

Глава 1. **Общие соображения** 194
Глава 2. **Различные теории прочности** 195
Глава 3. **Общие основания для выбора норм допускаемых напряжений в кораблестроении** 197
§ 1. Общие основания расчетов прочности 197
§ 2. Определение величины и характера расчетных нагрузок 197
§ 3. Определение наибольших усилий и наибольших напряжений в сечениях конструкции 198
§ 4. Назначение норм для опасных напряжений 199
§ 5. Назначение запасов прочности и норм для допускаемых напряжений 200
Глава 4. **Нормы проектирования несущих стальных конструкций зданий и промышленных сооружений** 201
А. Основные положения по расчету строительных конструкций 201
§ 6. Основные расчетные положения 201
§ 7. Нормативные и расчетные нагрузки и их сочетания 202
§ 8. Нормативные и расчетные сопротивления и коэффициенты условий работы 204
§ 9. Сопоставление методик расчета строительных конструкций по предельному состоянию и по допускаемым напряжениям 204

Б. Некоторые основные нормы проектирования несущих стальных конструкций зданий и промышленных сооружений 204

§ 10. Материалы для стальных конструкций 204
§ 11. Нормативные характеристики материалов и соединений 207
§ 12. Расчетные характеристики материалов и соединений 211
§ 13. Основные расчетные положения 216
§ 14. Расчет центрально растянутых и центрально сжатых элементов стальных конструкций 217
§ 15. Расчет изгибаемых элементов стальных конструкций 218
§ 16. Расчет сварных, заклепочных и болтовых соединений стальных конструкций 220

Глава 5. **Механические свойства древесины** 222

Глава 6. **Некоторые основные нормы проектирования несущих деревянных конструкций зданий и промышленных сооружений** 226

§ 17. Нормативные характеристики материалов 226
§ 18. Расчетные характеристики материалов 226
§ 19. Основные расчетные положения 230
§ 20. Расчет центрально растянутых и центрально сжатых элементов деревянных конструкций 231
§ 21. Расчет изгибаемых элементов деревянных конструкций 232

РАЗДЕЛ IV

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Глава 1. **Пластины, ослабленные одним вырезом** 233

§ 1. Бесконечная пластина, ослабленная одним круглым или эллиптическим вырезом 233
1. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной одним круглым вырезом 233
2. Чистый сдвиг пластины, ослабленной круглым вырезом 234
3. Чистый изгиб полосы, ослабленной круглым вырезом, размеры которого малы по сравнению с шириной полосы 235
4. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной эллиптическим вырезом 235
5. Чистый изгиб полосы, ослабленной эллиптическим отверстием, размеры которого малы по сравнению с шириной полосы 236
6. Изгиб полосы, ослабленной малым эллиптическим отверстием постоянной поперечной силой 237
§ 2. Бесконечная пластина, ослабленная прямоугольным вырезом 237
1. Растяжение (сжатие) пластины вдоль длинной стороны прямоугольного выреза 238
2. Растяжение (сжатие) пластины вдоль короткой стороны прямоугольного выреза 238
3. Чистый сдвиг пластины с прямоугольным вырезом 238
§ 3. Растяжение (сжатие) полубесконечной пластины, ослабленной круглым отверстием 243
§ 4. Пластина ограниченной ширины (полоса), ослабленная отверстием, симметрично расположенным относительно середины ширины 243
1. Растяжение (сжатие) полосы, ослабленной круглым отверстием 243
2. Чистый сдвиг полосы, ослабленной круглым вырезом 244
3. Растяжение (сжатие) полосы, ослабленной прямоугольным вырезом, закругленным в вершине 245
4. Чистый изгиб полосы, ослабленной прямоугольным вырезом, закругленным в вершине 245

Глава 2. **Бесконечная пластина, ослабленная круглыми вырезами одинакового радиуса** 246

§ 5. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной двумя круглыми вырезами одинакового радиуса 246
§ 6. Растяжение (сжатие) пластины, ослабленной неограниченным числом круглых отверстий одинакового радиуса, центры которых лежат на одной оси 247

РАЗДЕЛ V

РАСЧЕТ БАЛОК

Глава 1. **Растяжение и сжатие** 248

§ 1. Призматическая балка 248
§ 2. Балка переменного сечения 249
1. Общий случай 249
2. Растяжение или сжатие балки, имеющей форму клина 249
3. Растяжение планки переменной ширины 250
4. Растяжение соединения в форме ласточкина хвоста 250
5. Влияние отверстий в планке: а) Полукруглые вырезы по краям планки; б) Круглое отверстие; в) Эллиптическое отверстие; г) Отверстие, подкрепленное буртиком 250
§ 3. Влияние собственного веса 252
§ 4. Балка равного сопротивления 252
§ 5. Расчет на смятие 252

Глава 2. **Кручение** 252

§ 6. Расчетные формулы на кручение 252
1. Круглый сплошной вал 253
2. Круглый полый вал 253
3. Вал эллиптического сечения 253
4. Вал прямоугольного сечения 253
5. Вал с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника 253
6. Вал с поперечным сечением в форме правильного шестиугольника 254
7. Вал с поперечным сечением в форме правильного восьмиугольника 254
8. Вал с поперечным сечением в форме равнобедренной трапеции 254
9. Тонкостенный замкнутый профиль произвольной формы . . . 254
10. Тонкостенный незамкнутый профиль произвольной формы . . 254
11. Многосвязный профиль 255
12. Напряжения и деформации при свободном кручении прокатных профилей 256
§ 7. Стесненное кручение тонкостенных стержней с открытым профилем 257
1. Деформации при стесненном кручении 257
2. Изгибно-крутильные силовые факторы, связанные с депланацией сечения 258
3. Дифференциальное уравнение равновесия стержня, находящегося в условиях стесненного кручения 259
4. Координаты центра изгиба 259
§ 8. Расчет валов 272
§ 9. Кручение вала переменного сечения 273

Глава 3. **Сдвиг** 273

§ 10. Напряжения при сдвиге 273
§ 11. Расчетные формулы прочности 275

§ 12. Расчет на перерезывание 275
§ 13. Расчет на скалывание 276

Глава 4. **Изгиб** 276

§ 14. Напряжения при изгибе 276
1. Плоскость изгибающих пар и сил совпадает с одной из главных плоскостей балки *xz* 276
2. Плоскость изгибающих сил и пар не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки (косой изгиб). 278
§ 15. Подбор профилей изогнутых балок 279
§ 16. Определение элементов составного профиля 280
§ 17. Влияние присоединения листа и пояска к симметричному профилю 283
§ 18. Выражения для изгибающих моментов и срезывающих сил . . 283
§ 19. Выражения для упругой кривой призматической балки . . . 284
1. Стрелки прогиба от нормальных напряжений 284
2. Стрелки прогиба от сдвигов 284
3. Стрелки прогиба от смещения опор 285
§ 20. Связь между уравнениями изгибающих моментов, срезывающих сил, упругой кривой, углов поворота и распределенной нагрузки 286
§ 21. Опоры и реакции. Определение реакций 288
§ 22. Балка на двух опорах 289
1. Нагрузка одной сосредоточенной силой 289
2. Нагрузка рядом сосредоточенных сил 290
3. Нагрузка парой сил 291
4. Нагрузка распределенными силами 291
§ 23. Балка с одним заделанным концом 292
1. Нагрузка одной сосредоточенной силой 292
2. Нагрузка рядом сосредоточенных грузов 292
3. Нагрузка парой сил 293
4. Нагрузка распределенными силами 293
§ 24. Влияние на изгиб способа распределения нагрузки на отдельных участках балки 293
1. Погрешность в изгибающих моментах 293
2. Погрешность в углах поворота и в стрелках прогиба 293
3. Относительные погрешности в углах поворота и в стрелках прогиба 294

Глава 5. **Таблицы элементов изгиба статически определимых балок** 294

§ 25. Балка, свободно лежащая на двух опорах 295
§ 26. Балка с одним заделанным концом 321
§ 27. Балка на двух опорах с консолями 331

Глава 6. **Статически неопределимые балки** 335

§ 28. Способ наложения 335
§ 29. Теорема трех моментов 338
§ 30. Построение эпюр моментов и перерезывающих сил для балок, рассчитанных при помощи теоремы трех моментов 341
1. Построение эпюры моментов 341
2. Построение эпюры перерезывающих сил 342
§ 31. Определение опорных реакций для многопролетных балок, рассчитанных при помощи теоремы трех моментов 342
§ 32. Применение теоремы трех моментов к расчету стоек переборок 343
1. Уравнение трех моментов для вертикальной стойки переборки 343
2. Уравнение трех моментов в случае заделанных концов стоек 343
3. Уравнение трех моментов для стоек, неполностью нагруженных 343
4. Определение реакций 344
§ 33. Уравнения трех углов поворота 347

§ 34. Метод фокальных отношений 348
1. Внешний момент приложен на крайней опоре балки 348
2. Внешний момент приложен к балке на одной из ее промежуточных опор 350
3. Влияние, оказываемое свободными членами отдельных уравнений трех моментов на величину изгибающих моментов, действующих во всех опорных сечениях балки. 350

Глава 7. **Таблицы элементов изгиба однопролетных статически неопределимых балок** 353

§ 35. Балка, закрепленная обоими концами 354
§ 36. Балка, закрепленная одним концом, а другим концом опертая 371

Глава 8. **Таблицы элементов изгиба неразрезных балок** 388

§ 37. Балка на трех опорах 391
§ 38. Балка на четырех опорах 393
§ 39. Балка на пяти опорах 396
§ 40. Балка на шести опорах 399
§ 41. Неразрезные балки с равными пролетами и треугольной нагрузкой 403

Глава 9. **Расчет балок переменного сечения** 404

§ 42. Случаи, статически определимые 404
§ 43. Деформации балок переменного сечения 405
§ 44. Случаи, статически неопределимые 405
1. Способ наложения 406
2. Уравнение трех моментов 406

РАЗДЕЛ VI

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Глава 1. **Простые случаи сложного сопротивления** 408
§ 1. Косой изгиб 408
§ 2. Внецентренная осевая сила (растяжение или сжатие с изгибом) 409
§ 3. Одновременное действие изгиба и кручения балки 411

Глава 2. **Одновременное действие изгибающих и растягивающих или сжимающих сил (сложный продольный изгиб)** 412

4. Призматическая балка, подверженная изгибу и находящаяся под действием продольного растяжения 413
§ 5. Призматическая балка, подверженная изгибу и находящаяся под действием продольного сжатия 417
§ 6. Статически неопределимые балки под действием произвольной поперечной нагрузки и сжимающих или растягивающих усилий 422
§ 7. Приближенные формулы для стрелок прогиба и изгибающих моментов при одновременном действии на балку поперечных и продольных усилий (изгибающие силы одного направления) 423

РАЗДЕЛ VII

КРИВЫЕ БАЛКИ

Глава 1. **Изгиб кривых балок** 425

§ 1. Вычисление напряжений 425
1. Прямоугольное сечение 426
2. Двутавровое сечение 426
3. Трапецоидальное сечение 427
4. Круглое сечение 427
5. Напряжение в проушине 428

6. Напряжение в звеньях цепи 428
7. Изгиб балки кольцевого сечения 429
8. Изгиб балки квадратного трубчатого сечения 429
§ 2. Упругие перемещения кривых балок 429
§ 3. Статически неопределимые случаи изгиба кривых балок . . . 430
1. Напряжения в ободе махового колеса 430
2. Замкнутое симметричное кольцо постоянного сечения под равномерным внутренним давлением 431
3. Сечение, состоящее из полукругов и двух прямых 432
4. Эллиптическое кольцо 432
5. Двухшарнирная арка на неподвижных опорах, нагруженная вертикальной нагрузкой 433
6. Арка с неподвижно заделанными концами 434
7. Круговая балка с заделанными по диаметру концами, нагруженная двумя симметричными силами, перпендикулярными плоскости балки 434
8. Круговая балка с заделанными по диаметру концами, нагруженная равномерно распределенными силами, перпендикулярными плоскости балки 435
9. Круговая балка с заделанными не по диаметру концами под действием равномерно распределенной нагрузки 435
10. Круговая балка на трех опорах 435
11. Круговая балка на четырех равноотстоящих опорах 436

Глава 2. **Деформация колец** 436

§ 4. Определение усилий и перемещений для кругового кольца . . 437
§ 5. Влияние осевых усилий на изгиб кольца 442
§ 6. Примеры 443
§ 7. Расчет местной прочности тонкостенных труб и барабанов 445
1. Действие сосредоточенной силы 445
2. Нагрузка на кольцо передается через катки или шары 445
§ 8. Изгиб и устойчивость эллиптического кольца 446
1. Усилия в сечениях кольца 447
2. Перемещения сечений кольца 448
3. Устойчивость эллиптического кольца 448
4. Влияние осевых усилий на изгиб кольца 448
5. Влияние местного усиления сечения эллиптического кольца на величину изгибающего момента в месте усиления 449

РАЗДЕЛ VIII

ИЗГИБ БАЛОК НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Глава 1. **Призматические балки на упругом основании постоянной жесткости** 452

§ 1. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенной силой 464
§ 2. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенным моментом 465
§ 3. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенной силой, приложенной на ее конце 465
§ 4. Балка неограниченной длины, изгибаемая сосредоточенным моментом, приложенным на ее конце 465
§ 5. Балка со свободно опертыми концами на упругих опорах под действием равномерной нагрузки 466
§ 6. Балка с жестко заделанными концами на упругих опорах под действием равномерной нагрузки 466

§ 7. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, нагруженная сосредоточенной силой, приложенной в середине ее пролета 469
§ 8. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, загруженная по закону треугольника 469
§ 9. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, загруженная двумя равными силами, приложенными на расстоянии одной трети пролета от концов балки 470
§ 10. Балка со свободно опертыми концами на жестких опорах, нагруженная изгибающими моментами на опорах 470
§ 11. Балка с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженная сосредоточенной силой, приложенной в середине ее пролета 473
§ 12. Балка с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженная по закону треугольника 473
§ 13. Балка с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженная двумя равными силами, приложенными на расстоянии одной трети пролета от концов балки 474
§ 14. Балка с одним жестко заделанным концом и другим свободно опертым, нагруженная по закону треугольника 474
§ 15. Балки с одинаково упруго заделанными концами под действием равномерной нагрузки 475
§ 16. Балка с одинаково упруго заделанными концами, нагруженная сосредоточенной силой в середине пролета 476
§ 17. Общий случай изгиба балки со свободно опертыми концами на жестких опорах, нагруженной сосредоточенной силой в пролете 477
§ 18. Общий случай изгиба балки с жестко заделанными концами на жестких опорах, нагруженной сосредоточенной силой в пролете 488
§ 19. Применение метода начальных параметров к изгибу балок на сплошном упругом основании 499
§ 20. Применение функций Г. В. Клишевича к расчету балок, лежащих на упругом основании 502
§ 21. Применение рядов к исследованию изгиба призматических балок на упругом основании 504
§ 22. Статически неопределимые случаи изгиба балок, лежащих на упругом основании 506

Глава 2. **Изгиб непризматических балок, лежащих на упругом основании** 507

§ 23. Метод последовательных приближений 508
§ 24. Метод потенциальной энергии 509

РАЗДЕЛ IX

ПЛОСКИЕ ПЕРЕКРЫТИЯ

Глава 1. **Общие положения. Расчет простейших перекрытий** . . . 512

§ 1. Распределение внешней нагрузки по перекрестным связям . . 514
§ 2. Статически определимые системы перекрестных связей 517
§ 3. Раскрытие статической неопределимости системы перекрестных связей, число узловых точек которой относительно невелико 520
1. Система из двух пересекающихся балок 520
2. Система из трех пересекающихся балок 521
3. Система из четырех пересекающихся балок 522
4. Перекрытие с тремя одинаковыми балками главного направления и одной перекрестной 523

5. Перекрытие с четырьмя одинаковыми балками главного направления и одной перекрестной 524
4. Раскрытие статической неопределимости системы перекрестных связей, число узловых точек которой велико 525

Глава 2. **Перекрытия, имеющие большое число балок главного направления** 525

§ 5. Расчет перекрытий с большим числом одинаковых балок главного направления и одной перекрестной связью 525
1. Внешняя нагрузка равномерно распределена по перекрытию 526
а) Концы перекрестной балки свободно оперты на упругие опоры, балки главного направления заделаны произвольно 527
б) Концы перекрестной балки жестко заделаны на податливых опорах, балки главного направления заделаны произвольно 528
в) Концы перекрестной балки упруго заделаны на податливых опорах, балки главного направления заделаны произвольно 529
2. Внешняя нагрузка распределена вдоль балок главного направления по закону гидростатического давления 531
3. Внешняя нагрузка распределена вдоль перекрестной балки по закону гидростатического давления 533
а) Концы перекрестной балки свободно оперты на жесткие опоры, балки главного направления заделаны произвольно 533
б) Верхний конец перекрестной балки свободно оперт, нижний — жестко заделан, балки главного направления заделаны произвольно 534
в) Концы перекрестной балки жестко заделаны на жестких опорах, балки главного направления заделаны произвольно 535
г) Балки главного направления свободно оперты на жесткий опорный контур, перекрестная балка заделана полностью 536
4. Внешняя нагрузка в виде сосредоточенной силы P приложена посредине пролета перекрестной балки 537
а) Перекрестная балка по концам свободно оперта на жесткие опоры, балки главного направления закреплены произвольно 537
б) Перекрестная балка по концам жестко заделана на жестких опорах, балки главного направления закреплены произвольно 538
в) Перекрестная балка по концам упруго заделана на жестких опорах, балки главного направления заделаны произвольно 538
5. Внешняя нагрузка в виде двух равных сосредоточенных сил P, приложенных к перекрестной балке на расстоянии одной трети пролета от ее опор 540
а) Перекрестная балка по концам свободно оперта на жесткие опоры, балки главного направления закреплены произвольно 540
б) Перекрестная балка по концам жестко заделана на жестких опорах, балки главного направления закреплены произвольно 541
в) Перекрестная балка по концам упруго заделана на жестких опорах, балки главного направления закреплены произвольно 541
§ 6. Расчет перекрытий с одной перекрестной балкой и большим числом равноотстоящих балок главного направления, средняя из которых имеет усиленную жесткость. Внешняя нагрузка равномерно распределена вдоль перекрестной балки 543
а) Перекрестная балка свободно оперта на жесткие опоры . . . 543
б) Перекрестная балка жестко заделана на жестких опорах . . 544

§ 7. Расчет перекрытий с несколькими перекрестными балками и большим числом одинаковых равноотстоящих балок главного направления 544
§ 8. Расчет перекрытий с двумя перекрестными балками и большим числом балок главного направления, средняя из которых отличается усиленной жесткостью 553
а) Перекрестные балки свободно оперты на жесткие опоры . . 554
б) Перекрестная балка жестко заделана на жестких опорах 554

Глава 3. **Перекрытия, имеющие большое число балок в каждом направлении** 555

9. Расчет перекрытий с большим числом одинаковых перекрестных балок и большим числом одинаковых балок главного направления 555
§ 10. Расчет перекрытий для случая, когда средняя балка главного направления усилена по сравнению с прочими балками этого направления 559
§ 11. Расчет перекрытий для случаев, когда две балки главного направления усилены по сравнению с прочими балками этого направления и делят пролет перекрестных связей на три равные части 560

РАЗДЕЛ X

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Глава 1. **Основные методы расчета прямолинейных рам** 566

§ 1. Расчет простых рам 566
Метод трех моментов 566
а) Расчет простых рам, не имеющих подвижных узлов 566
б) Расчет простой рамки замкнутого типа 567
§ 2. Расчет сложных рам 571
Метод угловых деформаций 571
Порядок выполнения расчета 572
а) Рамы с неподвижными узлами 572
б) Рамы с подвижными узлами 578
Метод последовательного уравновешивания узлов 582
а) Применение метода последовательного уравновешивания узлов для рам с неподвижными узлами 582
б) Применение метода последовательного уравновешивания узлов для рам с подвижными узлами и прямоугольным полем 586

Глава 2. **Расчет криволинейных рам** 591

§ 3. Расчет круговых дуг 592
§ 4. Расчет статически неопределимых криволинейных стержней переменного сечения и произвольной формы 600
§ 5. Расчет рам, составленных из криволинейных стержней 604

РАЗДЕЛ XI

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Глава 1. **Потенциальная энергия деформаций** 607

§ 1. Общие положения 607
§ 2. Обобщенные координаты и обобщенные силы 607

§ 3. Вычисление потенциальной энергии упругих деформаций . . . 608
1. Растяжение или сжатие балки 609
2. Чистый сдвиг прямоугольного параллелепипеда 609
3. Кручение призматической балки 610
4. Изгиб призматической балки 610
5. Изгиб кривой балки 610
6. Изгиб тонкой пластины без учета деформаций срединной поверхности 610
§ 4. Линейно деформируемые системы 611

Глава 2. **Некоторые общие теоремы строительной механики** 611

§ 5. Теорема Лагранжа 611
§ 6. Теорема Кастильяно 612
§ 7. Принцип наименьшей работы 612
§ 8. Принцип взаимности работ (теорема Бетти) 613

СПРАВОЧНИК ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ КОРАБЛЯ, ТОМ I

Отв. редактор *С. Т. Лучининов* Редактор *А. А. Освенская*
Технический редактор *А. И. Конторович* Корректор *В. М. Альфимова*

Сдано в набор 20/I 1958 г. Подписано к печати 9/VI 1958 г.
Формат бумаги 60×92 1/16 Печ. л. 39,25. Уч.-изд. л. 40,3. М-30049
Изд. № 058-56. Тираж 11 500. Цена 21 р. 65 к. Заказ 25
Судпромгиз, Ленинград, ул. Дзержинского, 10

Типография № 6 УПП Ленсовнархоза, Ленинград, ул. Моисеенко, 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
189	3-я снизу	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$	Авт.
195	15-я „	$\varepsilon\varepsilon_{max} \leqslant \sigma_д$	$E\varepsilon_{max} \leqslant \sigma_д$	Корр.
221	17-я сверху	$R_y^{ср}$	$R_y^{св}$	„
225	6-я „	складывании	скалывании	„
305	3-я „	$\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}_1}$	$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}$	Тип.
347	17-я снизу	$\varphi_{i,j} = \frac{f_i - f_j}{l_{i,j}}$	$\varphi_{i,j} = \frac{f_j - f_i}{l_{i,j}}$	„
407	9-я „	$\sqrt{4\tau^2 + \delta^2}$	$\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}$	Авт.
464	14-я сверху	$= \sqrt{2} \cdot aVa_2\,(az)$	$= \sqrt{2} \cdot aV_2\,(az)$	„
484—497	табл. 9 и табл. 15	рис. таблицы 9 относится к таблице 15, и наоборот		„
497	В колонке „0,8“, 4-я снизу	—0,0024	—0.1024	„